



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Física  
Programa de Pós Graduação em Física

**Estudo da métrica de Gödel e soluções  
tipo-Gödel nas gravitações  $f(R)$  e  $f(R, T)$**

---

Celso José Ferst Júnior

Cuiabá - MT

Abril 2015

Celso José Ferst Júnior

**Estudo da métrica de Gödel e soluções tipo-Gödel nas  
gravitações  $f(R)$  e  $f(R, T)$**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Mato Grosso como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos

Cuiabá - MT

Abril 2015

---

Celso José Ferst Júnior

Estudo da métrica de Gödel e soluções tipo-Gödel nas gravitações  $f(R)$  e  $f(R, T)$ / Celso José Ferst Júnior. – Cuiabá - MT, Abril 2015-  
64 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Física, Abril 2015.

1. Métrica de Gödel. 2. Gravitação  $f(R)$ . 3. Gravitação  $f(R, T)$ . I. Orientador: Dr. Alesandro Ferreira dos Santos II. Universidade Federal de Mato Grosso. III. Instituto de Física. IV. Estudo da métrica de Gödel e soluções tipo-Gödel nas gravitações  $f(R)$  e  $f(R, T)$

Celso José Ferst Júnior

## **Estudo da métrica de Gödel e soluções tipo-Gödel nas gravitações $f(R)$ e $f(R, T)$**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Mato Grosso como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Cuiabá - MT, Abril de 2015:

---

**Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos**  
Orientador - UFMT

---

**Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa**  
Examinador Externo - UnB

---

**Prof. Dr. Jeferson de Oliveira**  
Examinador Interno - UFMT

Cuiabá - MT  
Abril 2015

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha família, meus pais Celso e Emery e minha irmã Victória.

Agradeço ao meu avô materno Urumy.

Agradeço à família Lamonaca: Gianni, Ana Martha, Enzzo, D. Santinha e Naná.  
Um agradecimento especial à Taissa.

Agradeço à Patrícia, minha amiga especial.

Agradeço aos meus amigos espalhados pelo Brasil. Pessoas que tanto amo e sinto saudade: Alessandro, Andreia, Rodrigo e Tarsila.

Agradeço aos meus novos amigos que fizeram parte do mestrado, todos da sala 192: Jonhy, José Parreira, William Jesus, João Roberto, Cristiano, Gilmarco e Marcondes.

Agradeço aos meus amigos que fizeram parte da minha vida, meus amigos mais antigos: Roger, João Paulo, Kallil, Wesley, Phelipe e Jeverton.

Agradeço aos professores que me formaram de alguma forma, me ensinando, acreditando em mim, me incentivando: Patrick, meu professor de física básica 3 da graduação, não fosse por sua fé em mim, teria desistido da carreira. Hulk e Alberto, professores com os quais tive prazer de estudar. Maurício Godoy, que me auxiliou em todas as dúvidas burocráticas do mestrado. De todos os professores, o agradecimento mais especial é para Alesandro, o sujeito que mais depositou fé em mim na graduação e mestrado, obrigado por sua paciência e nobre orientação.

Agradeço ao trabalhador brasileiro e pagador de impostos. Que mantém a instituição na qual me formei. Como eu gostaria que o ensino fosse universal.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*“Há uma teoria que indica que se alguém descobrir exatamente para que e porque o universo está aqui, o mesmo desaparecerá e será substituído imediatamente por algo ainda mais bizarro e inexplicável... Há uma outra teoria que indica que isto já aconteceu”.*

Douglas Adams

# Resumo

Neste trabalho estudamos a questão da causalidade nas métricas de Gödel e tipo-Gödel. Em seguida, examinamos o problema da violação da causalidade nas gravitações modificadas  $f(R)$  e  $f(R, T)$ , onde  $R$  é o escalar de curvatura e  $T$  é o traço do tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . O problema da causalidade é investigado em três situações: (i) considerando um fluido perfeito como conteúdo de matéria do universo; (ii) o conteúdo de matéria é o fluido perfeito mais um campo escalar; e (iii) tendo somente o campo escalar como fonte de matéria.

**Palavras-chaves:** Universo tipo-Gödel. Teorias  $f(R)$  de gravitação. Teorias  $f(R, T)$  de gravitação.

# Abstract

In this work we studied the causality issue on the Gödel and type-Gödel metrics. Then, we examined the problem of violation of causality on the modified gravities  $f(R)$  and  $f(R, T)$ , where  $R$  is the curvature scalar and  $T$  is the trace of energy-momentum tensor  $T_{\mu\nu}$ . The problem of causality is investigated in three situations: (i) it is considered a perfect fluid as content of matter of universe; (ii) the content of matter is the perfect fluid plus a scalar field; and (iii) we have only scalar field as source of matter.

**Key-words:** Gödel's type universe.  $f(R)$  theory of gravity.  $f(R, T)$  theory of gravity.

# Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	MÉTRICA DE GÖDEL	13
2.1	Métrica tipo-Gödel	15
3	GRAVITAÇÃO $f(R)$	21
3.1	Solução tipo-Gödel na gravitação $f(R)$	26
4	GRAVITAÇÃO $f(R, T)$	31
4.1	Solução tipo-Gödel na gravitação $f(R, T)$	34
5	CONCLUSÃO	39
	APÊNDICE A – A MÉTRICA DE GÖDEL EM COORDENADAS CILÍNDRICAS	41
	APÊNDICE B – AS EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN	47
B.1	A Constante Cosmológica $\Lambda$	54
	APÊNDICE C – A REPRESENTAÇÃO DAS TETRADAS	56
	Referências	59

# 1 Introdução

A tentativa de tornar as leis da física invariáveis sobre qualquer referencial fez nascer a Teoria da Relatividade, que é dividida em Especial e Geral, e foi Albert Einstein quem formulou dois postulados que são pilares centrais dessas teorias:

1 - *Todas as leis da natureza são as mesmas em todos os sistemas de referência que se movam com velocidade uniforme.*

2 - *A velocidade de propagação da luz no vácuo tem o mesmo valor para todos os observadores, não importando o movimento da fonte ou do observador; a velocidade de propagação da luz é uma constante e é a maior possível.*

O sucesso da Teoria da Relatividade Especial se deu pelo fato de seus resultados terem sido confirmados experimentalmente, como exemplo, temos: a dilatação temporal, que é confirmada quase todos os dias em experimentações da física de partículas; a duração das vidas de partículas radioativas que se movem em grandes velocidades aumenta quando o valor da velocidade ascende, esse acréscimo é previsto pela Teoria da Relatividade [1]. A correção periódica, devido o atraso, de relógios atômicos presentes em satélites em alta velocidade também é outro exemplo [2]. Como resultado dos postulados, Albert Einstein também derivou a equação  $E = mc^2$ , que determina a energia de repouso de qualquer objeto massivo. Isso significa que, a massa e a energia são faces de uma mesma moeda. Ou, em outras palavras, massa pode se transformar em energia e vice-versa. Outro fato que explica o sucesso da Relatividade é o Princípio da Correspondência: os resultados da Teoria devem se resumir à Mecânica Clássica quando o sistema descrever velocidades baixas, se comparadas à velocidade da luz.

Dado o sucesso experimental da Teoria da Relatividade Especial, Albert Einstein partiu para outro desafio. Segundo a sua convicção, as leis da física deveriam ser expressas em sistemas de referência acelerados ou não e esta foi a sua motivação inicial para descrever a Teoria Geral da Relatividade. O Princípio da Equivalência foi o ponto central para a formulação da Teoria Geral, e está dividida em duas partes. Na primeira parte Einstein percebeu que um recinto fechado, acelerado e longe de qualquer campo gravitacional é um sistema equivalente a um recinto fechado em queda livre sobre a superfície de um planeta. A aceleração do primeiro sistema funciona como a gravitação de um planeta. E por isso as leis da física dentro dos dois recintos seriam equivalentes. Nos dois casos, se rolarmos uma bola sobre uma mesa, a bola, ao cair da borda descreverá uma trajetória de parábola. No caso de um feixe de luz emitido dentro de um recinto fechado, acelerado e longe de qualquer campo gravitacional, a trajetória também será deslocada. Se o Princípio

da Equivalência é válido, o mesmo fenômeno deve acontecer num recinto fechado sobre a superfície de um planeta. Como de fato acontece. O feixe de luz está submetido à geometria do espaço-tempo, se a sua trajetória se curva então o espaço-tempo por onde o feixe passou está curvo. A segunda parte do Princípio de Equivalência versa sobre a igualdade das massas inercial e massa gravitacional, que são, a princípio, definidas de formas distintas mas com valores iguais. Essa foi a conclusão de Albert Einstein, a gravitação é o encurvamento do espaço-tempo e quem gera essa curvatura é a matéria. A curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria foi suficiente para explicar o avanço do periélio do planeta Mercúrio. Outra consequência, confirmada experimentalmente, é o atraso do relógio em campos gravitacionais intensos [2], que é uma evidência indireta advinda do fenômeno do desvio para o vermelho da luz emitida por átomos acelerados ou inseridos em campos gravitacionais [3, 4].

Até o momento, citamos os resultados preditos pela Teoria da Relatividade e assim notamos o quão consagrada é. No entanto, a Teoria, em especial a Geral possui alguns desafios, os quais são tratados nesse trabalho. Alguns desses desafios são as soluções exatas das equações de campo da Relatividade Geral (RG) que permitem a violação da causalidade. Uma delas foi proposta por Kurt Gödel em 1949 [5]. O tipo de universo desta solução descreve um fluido perfeito sem pressão em rotação, com simetria cilíndrica, sem expansão, com as linhas universo podendo seguir para o passado num espaço-tempo global. Essa trajetória significa que sucessivos eventos no espaço-tempo podem seguir para o passado, podendo influenciar eventos que já aconteceram no passado. Isto viola a causalidade<sup>1</sup>, onde, de maneira alguma eventos do futuro podem interferir eventos do passado ou do presente. Ora, se a gravitação descrita pela RG é tão consagrada, com fenômenos preditos, então a Teoria prediz fenômenos com a causalidade sendo violada? Se a cronologia for protegida por uma conjectura [6], a sujeição da RG a estes fenômenos deve estar equivocada e a Teoria deve ser modificada. Mas este não é o principal motivo para se modificar a gravitação. Na verdade, dificuldades com a quantização da gravitação de Einstein e de resultados da cosmologia são as principais motivações e mesmo assim a solução de Gödel tem sido obtida até o presente momento em todas as modificações.

Nesta dissertação, iremos estudar a solução de Gödel em gravitações modificadas, mais especificamente nas teorias  $f(R)$  e  $f(R, T)$  de gravitação, nas suas versões métricas. Teorias de gravitação modificada tem motivações em cosmologia e na busca por uma teoria de gravitação quântica. Recentemente, descobriu-se que o universo se expande de maneira acelerada [7, 8], uma provável explicação para esse quadro de evolução é dada pela existência de uma energia, chamada energia escura, intangível, constituindo a maior parte do universo e que acelera a expansão do universo [9, 10, 11, 12]. Alguns modelos foram propostos para explicar a energia escura, tais como: o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM

<sup>1</sup> Na causalidade um evento A que aconteceu no passado pode vir a causar um evento B no futuro (ou presente), mas eventos do futuro ou do presente não podem causar eventos no passado.

( $\Lambda$  Cold Dark Matter) que é uma das frentes de estudo da expansão acelerada do universo. Nele, a constante cosmológica  $\Lambda^2$  é tomada como representação da energia que acelera a expansão do universo, que deve ser associada ao estado de energia mais baixo do vácuo. No entanto, a medição dessa energia pelas observações astrofísicas é enormemente discrepante ao previsto pela teoria quântica de campos [13, 14]. Outros trabalhos tentam dar conta da energia escura, com a descrição de fluidos exóticos, por exemplo: quintessência [15], *phantom* [16], k-essência [17], táquions [18], gás de Chaplygin [19]. Mas há outra frente que tenta explicar a evolução atual do universo, a qual modifica a ação de Hilbert-Einstein, por exemplo, duas delas são as teorias de gravitação  $f(R)$  e  $f(R, T)$  de gravitação.

Nas teorias  $f(R)$  de gravitação o escalar de curvatura  $R$  na ação de Hilbert-Einstein é substituído por uma função  $f(R)$ . Essas funções podem descrever a expansão acelerada do universo e talvez a quantização da gravitação [20, 21]. As teorias  $f(R)$  de gravitação tem sido vastamente investigadas, por exemplo [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

As teorias  $f(R, T)$  de gravitação são uma generalização imediata das teorias  $f(R)$ . Nessas teorias, a lagrangiana Hilbert-Einstein tem o escalar de curvatura  $R$  substituído por uma função  $f(R, T)$ , que é função do escalar de curvatura  $R$  e do traço do tensor energia-momento  $T$ . As motivações para essa modificação são as mesmas da anterior, acrescentando o fato da possibilidade da constante cosmológica  $\Lambda(T)$  ser função do traço do tensor energia-momento  $T$ , que é um modelo de gravitação descrito em [29]. Além disso, o traço  $T$  pode representar também fluidos exóticos e efeitos quânticos [30]. As teorias  $f(R, T)$  de gravitação são mais recentes do que as de  $f(R)$  e tem tomado a atenção da comunidade acadêmica com vários trabalhos divulgados desde 2011, por exemplo [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38].

Esta dissertação está dividida como segue. O Capítulo 2 faz uma descrição sobre as métricas de Gödel e tipo-Gödel, listando alguns detalhes sobre a violação da causalidade em ambos casos, assim como uma solução tipo-Gödel totalmente causal. No Capítulo 3, descrevemos as soluções tipo-Gödel causais e não-causais nas teorias  $f(R)$  de gravitação. Em seguida, no Capítulo 4, o mesmo é feito, mas para a gravitação  $f(R, T)$ . O Capítulo 5 é a Conclusão, onde discutimos os principais resultados deste trabalho acadêmico. Por fim, o Apêndice A, descreve em detalhes a métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas.

---

<sup>2</sup> Inserida por Einstein para que a sua teoria de gravitação descrevesse um universo estático mas que fora descartada como o maior erro da sua vida, segundo ele mesmo.

## 2 Métrica de Gödel

Em 1949, Kurt Gödel propôs uma solução para as equações de Einstein com constante cosmológica não nula. Tal solução é de espaço-tempo homogêneo, gerado por um fluido perfeito, com partículas a velocidade angular  $\omega$  (também chamada de vorticidade) e representa um universo estático com simetria cilíndrica [5]. O elemento de linha desse universo é dado pela seguinte expressão

$$ds^2 = a^2 \left( dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2x}}{2} dy^2 - dz^2 + 2e^x dt dy \right), \quad (2.1)$$

ou, mais compactamente por

$$ds^2 = a^2 \left[ (dt + e^x dy)^2 - dx^2 - \frac{e^{2x}}{2} dy^2 - dz^2 \right], \quad (2.2)$$

onde  $(t, x, y, z)$  são coordenadas retangulares e a constante real  $a$  dá a dimensionalidade  $[L]$  do intervalo. O artigo de K. Gödel (1949) e a referência [41] citam várias características a respeito da métrica (2.1), dentre as quais, as mais importantes são: a homogeneidade do espaço-tempo gerado pela métrica de Gödel e a vorticidade da matéria  $\omega = 2\sqrt{\pi G\rho}$ , onde  $G$  é a constante gravitacional e  $\rho$  é a densidade de matéria. E, além dessas, a propriedade onde Gödel afirma explicitamente que essa geometria permite viagem ao passado; em suas palavras

*“(...) it is theoretically possible (...) to travel into the past, or otherwise influence the past.”*<sup>1</sup>

Ou seja, a *causalidade* é violada. A causalidade é uma propriedade imposta a física clássica, devido a noção de tempo absoluto; significa que eventos do presente/futuro só podem ser causados por eventos do passado. Isto é, efeitos de eventos do presente/futuro não devem influenciar eventos do passado. Na relatividade especial a causalidade também é imposta, mas a imposição é mais restritiva, pois, além do tempo ter de ascender do passado para futuro, as linhas universo devem permanecer no interior do cone de luz. Na relatividade geral a imposição também ocorre, mas apenas localmente. Globalmente a curvatura do espaço-tempo pode inclinar o cone de luz de ponto a ponto e, a princípio, o suficiente para que o observador sobre uma trajetória tipo-tempo possa interceptar novamente um evento do passado. Essa volta é chamada de curva tipo-tempo fechada, ou CTC (*Closed Timelike Curve*) [4].

<sup>1</sup> “(...) é teoricamente possível (...) viajar ao passado, ou de alguma maneira influenciar o passado” em tradução livre.

De fato, a solução (2.1) permite CTCs. Elas ficam mais fáceis de serem verificadas procedendo com uma transformação de coordenadas, das retangulares para cilíndricas. As leis de transformação propostas por Gödel são as seguintes

$$e^x = \cosh(2r) + \cos \phi \sinh(2r), \quad (2.3)$$

$$ye^x = \sqrt{2} \sin \phi \sinh(2r), \quad (2.4)$$

$$\tan \left( \frac{\phi}{2} + \frac{t - 2t'}{2\sqrt{2}} \right) = e^{-2r} \tan \left( \frac{\phi}{2} \right), \quad (2.5)$$

onde,

$$\left| \frac{t - 2t'}{2\sqrt{2}} \right| < \frac{\pi}{2}, \quad (2.6)$$

e,

$$z \rightarrow 2z. \quad (2.7)$$

Assim, somos levados a métrica (2.1) em coordenadas cilíndricas [5][42]<sup>2</sup>

$$ds^2 = 4a^2 \left[ dt^2 - dr^2 - dz^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\phi^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r d\phi dt \right], \quad (2.8)$$

onde as coordenadas  $(t, r, \phi, z)$  são as coordenadas temporal, radial, azimutal e de altura, respectivamente. Com a equação (2.8) podemos estudar a violação da causalidade, para tanto, considere a superfície definida por  $t = r = z = \text{const}$ , restando em (2.8) o seguinte

$$ds^2 = 4a^2 \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) d\phi^2. \quad (2.9)$$

O resultado (2.9) denota uma trajetória circular e fechada, pois depende somente da coordenada azimutal  $\phi$ . No entanto, para termos uma trajetória tipo-tempo o intervalo deve ser positivo,

$$ds^2 > 0, \quad (2.10)$$

resultando em

$$\sinh^2 r > 1. \quad (2.11)$$

Portanto, para regiões além do raio crítico

$$r_c = \sinh^{-1}(1), \quad (2.12)$$

a causalidade é violada, pois além desta distância a geratriz do cone de luz aponta para o passado. Para regiões  $r < r_c = \sinh^{-1}(1)$  o cone de luz aponta sempre para o futuro, mantendo a causalidade, mas na área tipo-espaço, sem interesse físico [43, 44]. Isto será demonstrado na seção seguinte, para uma métrica tipo-Gödel.

<sup>2</sup> A referência [42] demonstra explicitamente como obter (2.8). Nesta dissertação, no apêndice A, faremos uma demonstração parecida, mas para uma outra escolha de parâmetro de geometria.

O universo de Gödel não descreve as características do universo real observável pois, segundo o princípio cosmológico, o universo apresenta em todos os pontos o mesmo aspecto, a menos de irregularidades locais, isto significa que não há direção privilegiada. Enquanto que no universo de Gödel identificamos um eixo onde a matéria rotaciona com intensidade  $\omega$ . No entanto, a geometria em questão soluciona as equações de Einstein, por isso podemos tomá-la como uma propriedade da gravitação de Einstein. O interesse sobre o universo de Gödel, além da violação da causalidade, é de verificar se é solução em teorias de gravitações modificadas. De fato, isso já foi verificado em algumas, como exemplo temos a gravitação  $f(R)$ , como pode ser visto em [39, 45]. Na referência [46] encontra o universo de Gödel como solução da gravitação  $f(R, T)$  para fluido perfeito, deixando a violação da causalidade em aberto. Para a gravitação Horava-Lifshitz, a referência [47] encontra o universo de Gödel como solução, gerando matéria exótica, enquanto na referência [48] somente a solução tipo-Gödel causal é permitida. No contexto da gravitação modificada pelo termo Chern-Simons as referências [49, 50] verificaram a geometria de Gödel também como solução.

## 2.1 Métrica tipo-Gödel

Há uma sutil diferença entre a métrica de Gödel, proposta em 1949, e a métrica tipo-Gödel, citada até o momento e proposta pela referência [51], que é o objeto de estudo desta seção .

A métrica de Gödel foi fruto de estudo nos anos posteriores a 1949. Um dos trabalhos de destaque é o de Raychaudhuri e Thakurta (1980) [52] investigando a homogeneidade de uma classe de espaços-tempo de simetria cilíndrica, da qual a métrica de Gödel faz parte. Outro trabalho importante foi o de Rebouças e Tiomno (1983) [51] verificando as condições de homogeneidade unicamente para a métrica de Gödel. Estuda ainda as condições de homogeneidade de espaço-tempo a referência [52] como suficientes para obter um campo de cinco vetores de Killing linearmente independentes, e a solução das equações diferenciais resultantes desses vetores leva a uma generalização da métrica de Gödel, chamada de métrica tipo-Gödel de espaço-tempo homogêneo. Por fim, dada a generalização da métrica de Gödel, a referência [51] verifica a questão da causalidade, obtendo solução completamente causal, completamente não causal e com regiões causais e não causais, em alternância. Vejamos como estes últimos resultados são obtidos.

De início, em [51], a métrica de Gödel tem uma forma sutilmente distinta<sup>3</sup>. Considere

---

<sup>3</sup> Assim como na referência [41].

as seguintes substituições

$$\begin{cases} t \rightarrow mt, & dt \rightarrow mdt, \\ x \rightarrow mx, & dx \rightarrow m dx, \\ y \rightarrow my, & dy \rightarrow m dy, \\ z \rightarrow mz, & dz \rightarrow m dz, \\ a^2 \rightarrow 1/m^2, \end{cases} \quad (2.13)$$

na métrica (2.1), para resultar

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2mx}}{2} dy^2 - dz^2 + 2e^{mx} dt dy, \quad (2.14)$$

ou, mais resumidamente

$$ds^2 = [dt + H(x)dy]^2 - dx^2 - D(x)^2 dy^2 - dz^2, \quad (2.15)$$

com

$$H(x) = e^{mx} \quad \text{e} \quad D(x) = \frac{e^{mx}}{\sqrt{2}}. \quad (2.16)$$

Observe que, nesta abordagem o parâmetro da geometria tem agora a dimensão  $1/[L]$ , isto é requerido pois as dimensões  $(t, x, y, z)$  nessa abordagem possuem naturalmente dimensão de comprimento, portanto, o parâmetro  $m$  é útil para tornar o expoente das exponenciais  $e^{2mx}$  e  $e^{mx}$  adimensionais. De modo análogo ao procedimento dado pelas equações de transformação (2.3), (2.4), (2.5) e (2.7), a métrica (2.14) pode ser reescrita na coordenadas cilíndricas, onde encontramos

$$ds^2 = [dt + H(r)d\phi]^2 - D(r)^2 d\phi^2 - dr^2 - dz^2, \quad (2.17)$$

com

$$H(r) = \frac{2\sqrt{2}}{m} \sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right), \quad (2.18)$$

e

$$D(r) = \frac{1}{m} \sinh(mr). \quad (2.19)$$

O cálculo para se obter a equação (2.17) pode ser consultado no apêndice A.

O trabalho [51] identifica três classes de soluções tipo-Gödel, devido a generalização da métrica (2.15) e (2.17): (i)  $m^2 > 0$ , (ii)  $m^2 = 0$  e (iii)  $m^2 < 0$ . Estas três possibilidades são relações obtidas da solução de equações diferenciais que surgem do cálculo dos vetores de Killing da métrica (2.14), que resulta numa relação entre os parâmetros da vorticidade  $\omega$  e da geometria  $m$ . Vejamos tais soluções:

(i)  $m^2 > 0$ : Para essa classe, a métrica de Gödel pode ser reescrita com o parâmetro de geometria  $m$  e a vorticidade  $\omega$

$$ds^2 = \left[ dt + \frac{4\omega}{m^2} \sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right) d\phi \right]^2 - dr^2 - \frac{1}{m^2} \sinh^2(mr) d\phi^2 - dz^2. \quad (2.20)$$

Quando  $m = \sqrt{2}\omega$ , a métrica de Gödel (2.17) é recuperada.

(ii)  $m^2 = 0$ : Pode ser demonstrado diretamente de (2.20) quando  $m = 0$ . Assim,

$$ds^2 = (dt + \omega r^2 d\phi)^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad (2.21)$$

pois,

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m} \sinh\left(\frac{mr}{2}\right) = \frac{r}{2},$$

e

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m} \sinh(mr) = r.$$

(iii)  $m^2 \equiv -\mu^2 < 0$ : Para essa possibilidade, podemos estabelecer  $m \rightarrow \pm i\mu$  em (2.17), e obtemos

$$ds^2 = \left[ dt + \frac{4\omega}{\mu^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\mu r}{2}\right) d\phi \right]^2 - dr^2 - \frac{1}{\mu^2} \operatorname{sen}^2(\mu r) d\phi^2 - dz^2. \quad (2.22)$$

Uma vez que,

$$\sinh(\pm ix) = \pm i \operatorname{sen} x.$$

Percebemos então, que a métrica tipo-Gödel de espaço-tempo homogêneo na forma (2.20) é a forma mais geral. Pois desta expressão podemos obter outras classes de métricas tipo-Gödel, apenas ajustando o parâmetro de geometria  $m$ . Na sequência, vamos analisar cada uma das classes acima.

A classe (i) pode gerar ou não violação da causalidade. Como demonstrado em [51], quando a geometria (2.20) resolve as equações de campo de Einstein para uma distribuição de matéria-energia que soma fluido perfeito, campo escalar e campo eletromagnético, o resultado são equações diferenciais que descrevem um universo cilíndrico relacionando a sua vorticidade  $\omega$  e seu parâmetro geométrico  $m$  da seguinte forma

$$4\omega^2 \geq m^2. \quad (2.23)$$

Portanto, tendo condições de explicitar (2.23), a causalidade da métrica (2.20), tomando a superfície  $t = r = z = \text{const}$ , pode ser verificada na seguinte expressão

$$ds^2 = \frac{4}{m^2} \operatorname{senh}^2\left(\frac{mr}{2}\right) \left[ \frac{4\omega^2}{m^2} \operatorname{senh}^2\left(\frac{mr}{2}\right) - \cosh^2\left(\frac{mr}{2}\right) \right] d\phi^2, \quad (2.24)$$

que pode ser reescrita

$$ds^2 = \frac{4}{m^2} \operatorname{senh}^2\left(\frac{mr}{2}\right) \left[ \left( \frac{4\omega^2}{m^2} - 1 \right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{mr}{2}\right) - 1 \right] d\phi^2. \quad (2.25)$$

Para que o intervalo fechado (2.25) seja tipo-tempo, a expressão em colchetes deve ser maior que zero, logo

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{mr}{2}\right) > \left( \frac{4\omega^2}{m^2} - 1 \right)^{-1}. \quad (2.26)$$

Portanto, para valores acima do raio crítico  $r_c$

$$r_c = \frac{2}{m} \sinh^{-1} \left( \frac{4\omega^2}{m^2} - 1 \right)^{-1/2}, \quad (2.27)$$

pode haver violação da causalidade, dependendo da relação entre os parâmetros  $m$  e  $\omega$ . No limite de  $m \rightarrow 2\omega$ , que é o caso (2.23), o raio crítico tende ao infinito,  $r_c \rightarrow \infty$ , então nessa situação a causalidade é assegurada. O trabalho [51] é o primeiro a desenvolver uma solução tipo-Gödel das equações de Einstein descrevendo um universo causal de espaço-tempo homogêneo em rotação. Naturalmente, no limite da métrica de Gödel (2.17),  $m \rightarrow \sqrt{2}\omega$ , o raio crítico é finito, implicando uma região não causal finita, pois

$$r_c = \frac{2}{m} \sinh^{-1}(1). \quad (2.28)$$

Para a classe (ii), (2.21), a violação da causalidade segue na expressão

$$ds^2 = r^2(\omega^2 r^2 - 1)d\phi^2. \quad (2.29)$$

Logo, o raio crítico para violação da causalidade é igual a  $r_c = 1/\omega$ .

A classe (iii), (2.22), possui uma violação da causalidade distinta aos casos (i) e (ii). Procedendo como antes, obtemos

$$ds^2 = \frac{4}{\mu^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\mu r}{2} \right) \left[ \left( \frac{4\omega^2}{\mu^2} + 1 \right) \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\mu r}{2} \right) - 1 \right] d\phi^2. \quad (2.30)$$

Independente do valor em colchetes, o intervalo (2.30) é causal e tipo-luz, pois é nulo, para valores

$$\frac{\mu r}{2} = n\pi, \quad \text{para, } n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.31)$$

Mas, para valores diferentes de (2.31) há violação da causalidade, e o intervalo é tipo-tempo quando

$$\left( \frac{4\omega^2}{\mu^2} + 1 \right) \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\mu r}{2} \right) > 1, \quad (2.32)$$

de fato, o seno quadrático na (2.32) é sempre positivo, por isso a violação da causalidade acontece no intervalo

$$n\pi < \frac{\mu r_c}{2} \leq \frac{2n+1}{2}\pi, \quad \text{para, } n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.33)$$

No caso em que  $\operatorname{sen}^2(\mu r_c/2) = 1$ , os parâmetros se relacionam da seguinte maneira

$$\frac{\omega^2}{\mu^2} > 0, \quad (2.34)$$

que é um resultado redundante, uma vez que  $\mu$  e  $m$  são reais. Então, há alternância de regiões causais e não causais na métrica de classe (iii), obedecendo (2.33).

Uma outra abordagem para estudar a violação da causalidade da métrica de Gödel é verificar como se comporta o cone de luz que desliza sobre a dimensão radial. Para tanto, considere a métrica (2.20), onde o intervalo é tipo-luz e as coordenadas são  $r = z = \text{const}$

$$0 = \left[ dt + \frac{4\omega}{m^2} \sinh^2 \left( \frac{mr}{2} \right) d\phi \right]^2 - \frac{1}{m^2} \sinh^2(mr) d\phi^2, \quad (2.35)$$

daqui podemos escrever,

$$\frac{dt}{d\phi} = -\frac{4\omega}{m^2} \sinh^2 \left( \frac{mr}{2} \right) \pm \frac{1}{m} \sinh(mr), \quad (2.36)$$

ou ainda,

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{2}{m} \sinh \left( \frac{mr}{2} \right) \left[ -\frac{2\omega}{m} \sinh \left( \frac{mr}{2} \right) \pm \cosh \left( \frac{mr}{2} \right) \right]. \quad (2.37)$$

Considerando o diagrama espaço-tempo com três eixos: o temporal, radial e azimutal; vemos que a derivada (2.37) indica a inclinação da trajetória tipo-luz, que é a geratriz do cone de luz, entre os eixos temporal e azimutal. Esta inclinação depende de  $r$ . Então, quando o cone de luz desliza sobre o eixo radial a sua inclinação descende em relação ao eixo azimutal, segundo a derivada (2.37). Veja o que ocorre quando a inclinação se anula

$$\frac{2\omega}{m} \sinh \left( \frac{mr}{2} \right) = \pm \cosh \left( \frac{mr}{2} \right), \quad (2.38)$$

isolando o raio, que só pode ser positivo (eliminando o sinal  $\pm$ )

$$r = \frac{2}{m} \coth^{-1} \left( \frac{2\omega}{m} \right). \quad (2.39)$$

A equação (2.39) fornece a posição no eixo radial  $r$  em que a inclinação (2.37) se anula. Quando  $m \rightarrow \sqrt{2}\omega$ , que é a relação da métrica de Gödel, obtemos

$$r = \frac{2}{m} \coth^{-1} \sqrt{2}, \quad (2.40)$$

mas,  $\coth^{-1} \sqrt{2} = \sinh^{-1}(1)$ , portanto, o raio encontrado é o raio crítico  $r_c$  da equação (2.28). Isto é, a partir do raio crítico  $r_c$  a trajetória tipo-luz aponta para o passado. Isto reforça a violação da causalidade. Veja a figura 2.1<sup>4</sup>. Há ainda o caso em que  $m \rightarrow 2\omega$ . Nesse limite, na equação (2.39), o raio tende ao infinito, tal como acontece na equação (2.27), *i. e.*, a inclinação nunca se anula.

A correlação entre o raio crítico encontrado na abordagem anterior e a de agora também ocorre na classe (ii), usando os mesmos argumentos para se obter a expressão (2.35) e (2.37), obtemos a seguinte derivada

$$\frac{dt}{d\phi} = r(-\omega r \pm 1), \quad (2.41)$$

<sup>4</sup> Imagem obtida da referência [53]

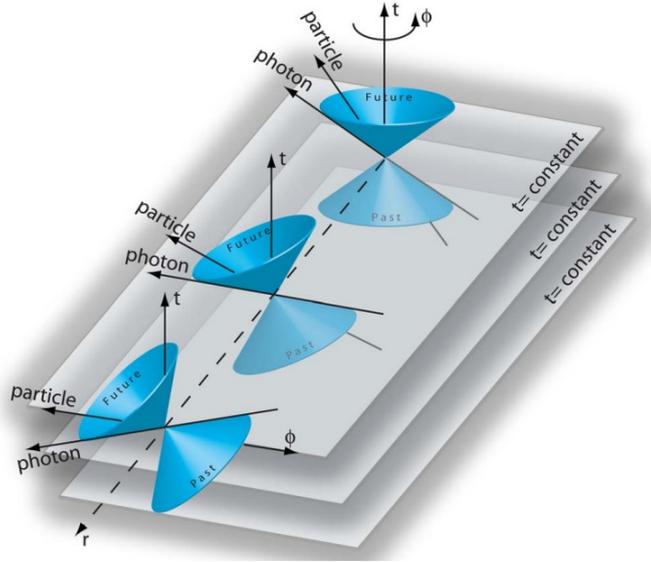


Figura 2.1 – Um esboço de como se comporta o cone de luz no espaço-tempo tipo-Gödel em cada folha  $t = \text{const.}$  O cone de luz se inclina em relação a coordenada azimutal  $\phi$  enquanto desliza sobre a direção radial.

que se anula quando (eliminando novamente o sinal  $\pm$ )

$$r_c = \frac{1}{\omega}. \quad (2.42)$$

Para a classe (iii), utilizando o mesmo procedimento para se obter (2.41) e (2.40), temos o seguinte resultado

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{2}{\mu} \sin^2\left(\frac{\mu r}{2}\right) \left[-\frac{2\omega}{\mu} \pm \cot\left(\frac{\mu r}{2}\right)\right]. \quad (2.43)$$

Veja que a presença de  $\sin^2(\mu r/2)$  garante a ciclicidade da violação da causalidade, variando de 0 a 1. A outra situação em que a derivada se anula é quando

$$r = \frac{2}{\mu} \cot^{-1}\left(\frac{2\omega}{\mu}\right). \quad (2.44)$$

Observe que para grandes valores de  $\mu$  o raio tende a zero, enquanto que para pequenos valores de  $\mu$  o raio se aproxima de 1.

Neste capítulo, abordamos a questão da causalidade da métrica de Gödel e da métrica tipo-Gödel proposta por [51]. Vemos também que, com a generalização da métrica de Gödel podemos obter soluções causais mas que tenham a forma do universo em rotação de Gödel. E, por fim, abordamos a causalidade da métrica tipo-Gödel, com a derivada, indicando a inclinação entre a trajetória da linha universo em relação à  $r$ .

### 3 Gravitação $f(R)$

As teorias modificadas de gravitação tem sido estudadas nos últimos anos devidos às dificuldades surgidas nos contextos da física das altas energias, cosmologia e astrofísica. Uma das teorias modificadas em discussão são as que envolvem expressões de ordem superior do escalar de curvatura  $R$ . A gravitação  $f(R)$ , sendo  $f$  uma função do escalar  $R$ , engloba qualquer alternativa de escalares de curvatura de ordem superior [20, 21]. Na década de 1960, surgiram indicações de que problemas com Relatividade Geral (RG) tinham fundamentos, pois nesse contexto a gravitação não é renormalizável e por isso não pode ser quantizada. Utiyama e DeWitt (1962) [54] verificaram que a renormalização a 1-loop da gravitação demanda termos de curvatura de ordem superior. Mais tarde, Stelle (1977) [55] mostrou que ações com curvaturas de ordem superior são de fato renormalizáveis mas não a unidade, como na teoria quântica usual. Os trabalhos [54, 55] denotam o interesse na quantização da gravitação, de modo a modificar a ação de Hilbert-Einstein com a inclusão de termos de escalar de curvatura  $R$  de ordem superior. Mas a relevância da quantização se restringe às altas energias, *i. e.*, correções na RG são consideradas efetivas na escala de comprimento de Planck, conseqüentemente também no início do universo e regiões próximas da singularidade de buracos negros, regiões de altas energias. Isso se deve ao Princípio da Correspondência, onde a teoria científica nova deve convergir ao âmbito da teoria antiga.

No contexto da cosmologia, os trabalhos de Pelmuter *et al.* (1998) [7] e Riess *et al.* (1998) [8] anunciaram a descoberta da expansão acelerada do universo. Uma possibilidade que pode explicar a expansão acelerada do Universo é dada a um tipo de energia, chamada de escura. A energia escura é tomada como uma das componentes do universo e sua origem é desconhecida, por isso o seu adjetivo escura. Esta componente não se aglutina como matéria ordinária e atua antigravitacionalmente, pois expande aceleradamente a matéria-energia contida no Universo.

À luz dessas fortes evidências, modelos de gravitação tem surgido para explicá-las. Um dos mais estudados é o modelo  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$  - Cold Dark Matter) onde a constante cosmológica  $\Lambda$  representa a energia escura. O termo CDM representa a distribuição da matéria escura. Os trabalhos de Zwicky (1933) [56] e Rubin e Ford (1970) [57] dissertam sobre a medição da velocidade de rotação de galáxias e aglomerados. As medições resultaram em valores maiores do que o esperado. Para dar conta dessa discrepância foi proposto a matéria escura, um tipo de matéria que não absorve/emite luz, fracamente detectável e com propriedades gravitacionais; as pesquisas sobre a matéria escura estão na linha de frente da física de partículas. Já a energia escura é interpretada como a energia de vácuo, mas com sérias contradições com a teoria quântica campos. Observações astrofísicas estimam

um valor imensamente menor se comparado ao resultado obtido pela teoria quântica de campos. A esta discrepância foi dada o nome de *problema da constante cosmológica* [13, 14]. Além desse problema, o modelo  $\Lambda$ CDM atua somente como um ajuste às observações, não explicando a origem ou descrevendo em detalhes a energia escura e a matéria escura. Mesmo com o pesar dos desafios das componentes escuras do universo, elas são extremamente influentes no atual quadro de formação do Universo, segundo pesquisas de observações astrofísicas e cosmológicas, da sonda Planck por exemplo, o Universo é constituído de 4,9% de matéria ordinária, 26,8% de matéria escura e 68,3% de energia escura [58].

Por isso, devido às motivações da teoria quântica de campos e à cosmologia observacional, a gravitação deve ser modificada. A força que modela as grandes distâncias é a gravidade. Tomando a possibilidade da gravitação einsteniana não estar correta a grandes distâncias podemos então considerar generalizar o escalar de curvatura na ação de Hilbert-Einstein por uma função sua, de modo que

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m \quad \longrightarrow \quad S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m. \quad (3.1)$$

Esta generalização lida com a tentativa de explicar fenômenos cosmológicos e a quantização da gravitação sem lançar mão de fluidos exóticos. Pode ser que haja um modelo de gravitação  $f(R)$  que dê explicações sobre a massa faltante e da expansão acelerada do universo e seja renormalizável. Além disso, as teorias  $f(R)$  podem funcionar como uma teoria de tentativa <sup>1</sup> de um modo a obter alguma compreensão sobre a gravitação.

Na literatura existem duas maneiras de lidar com a ação de Hilbert-Einstein: a variação em relação à métrica, a mais usual, e a variação com relação à métrica e à conexão, tomando-as independentes uma da outra, mas tendo a ação da matéria dependente somente da métrica. Esta última é a abordagem de Palatini, também alvo de pesquisa, por exemplo [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66]. Há ainda a abordagem considerando, adicionalmente às duas citadas, a variação da ação de matéria em relação a métrica e a conexão também. Esta é a abordagem métrica-afim, com os trabalhos listados na referência [67, 68, 69, 70]. Na RG, as abordagens da métrica e Palatini resultam nas mesmas equações de campo, mas os resultados se diferem no âmbito da gravitação  $f(R)$  [20].

Após um panorama da gravitação  $f(R)$  vejamos a seguir a demonstração das equações de campo. Usando o princípio de mínima ação

$$\delta S = 0, \quad (3.2)$$

onde a variação é realizada em relação a métrica iremos ter que

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} f(R) + 2\kappa^2 S_m \right], \quad (3.3)$$

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[ \sqrt{-g} \delta f + \delta(\sqrt{-g}) f + 2\kappa^2 \delta S_m \right], \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> *Toy theory.*

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[ \sqrt{-g} \frac{\delta f}{\delta g^{\alpha\beta}} + \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\alpha\beta}} f + 2\kappa^2 \frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}} \right] \delta g^{\alpha\beta}. \quad (3.5)$$

Neste passo, trabalharemos com a primeira variação no integrando da expressão (3.5)

$$\delta f = \frac{df}{dR} \delta R = \frac{df}{dR} \delta(R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}), \quad (3.6)$$

$$\delta f = \frac{df}{dR} (\delta R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}), \quad (3.7)$$

$$\delta f = \frac{df}{dR} \left( \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right). \quad (3.8)$$

A equação (3.8) pode ser reescrita de modo adequado

$$\frac{\delta f}{\delta g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} = \frac{df}{dR} \left( R_{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\alpha\beta}} \right) \delta g^{\alpha\beta}. \quad (3.9)$$

Inserindo o resultado (3.9) em (3.5)

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[ \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\alpha\beta}} f + \sqrt{-g} f_R \left( R_{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\alpha\beta}} \right) + 2\kappa^2 \frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}} \right] \delta g^{\alpha\beta}, \quad (3.10)$$

com  $f_R = df(R)/dR$ . Para avançar mais, basta usarmos as relações seguintes [4, 71]

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (3.11)$$

e

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}. \quad (3.12)$$

Para uma relação de  $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  basta usarmos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\eta} \Gamma_{\mu\nu\eta}, \quad (3.13)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu\eta}$  são os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu\eta} = \frac{1}{2} (\partial_{\nu} g_{\mu\eta} + \partial_{\mu} g_{\nu\eta} - \partial_{\eta} g_{\mu\nu}). \quad (3.14)$$

Variando  $\Gamma$  em relação a métrica

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \delta(g^{\lambda\eta} \Gamma_{\mu\nu\eta}) = \delta g^{\lambda\eta} \Gamma_{\mu\nu\eta} + g^{\lambda\eta} \delta \Gamma_{\mu\nu\eta}. \quad (3.15)$$

Usando  $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\rho}$  podemos escrever [71]

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -g^{\lambda\rho} g^{\eta\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu\eta} + \frac{1}{2} g^{\lambda\eta} (\partial_{\nu} \delta g_{\mu\eta} + \partial_{\mu} \delta g_{\nu\eta} - \partial_{\eta} \delta g_{\mu\nu}). \quad (3.16)$$

Nesse passo trocamos  $\eta \rightarrow \rho$ , fatoramos  $g^{\lambda\rho}/2$  e subimos o índice de  $\Gamma_{\mu\nu\eta}$  para obter

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (-2\delta g_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \partial_{\nu} \delta g_{\mu\rho} + \partial_{\mu} \delta g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \delta g_{\mu\nu}). \quad (3.17)$$

Com algumas manipulações teremos

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} & \left[ \left( \partial_{\nu}\delta g_{\mu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\delta g_{\rho\alpha} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\delta g_{\alpha\mu} \right) \right. \\ & + \left( \partial_{\mu}\delta g_{\nu\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}\delta g_{\alpha\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}\delta g_{\alpha\nu} \right) \\ & \left. - \left( \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\delta g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\delta g_{\alpha\mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cada expressão em parenteses de (3.18) corresponde a uma derivada covariante, então

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho} + \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu}). \quad (3.19)$$

Contraindo em (3.12) os índices  $\rho$  e  $\lambda$  obtemos que

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \nabla_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}. \quad (3.20)$$

Com (3.11), (3.19) e (3.20) em (3.10) podemos prosseguir com os seguintes passos

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x & \left[ -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\alpha\beta}f + \sqrt{-g}f_R \left( R_{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} \frac{\nabla_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}}{\delta g^{\alpha\beta}} \right) \right. \\ & \left. + 2\kappa^2 \frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}} \right] \delta g^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ \left( R_{\alpha\beta}f_R - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}f \right) \delta g^{\alpha\beta} + f_R \nabla_{\rho} \left( g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}}\delta S_m \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

O integrando do meio da integral (3.22) pode ser integrado por partes

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ \left( f_R R_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha\beta}}{2}f \right) \delta g^{\alpha\beta} - \left( g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu} \right) \nabla_{\rho}f_R \right. \\ & \left. + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}}\delta S_m \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Vamos trabalhar com o segundo integrando de (3.23)

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu} & = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}(\nabla_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\alpha\mu} - \nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}) \\ & - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}(\nabla_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\alpha\mu} - \nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu} & = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} + g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\nabla_{\nu}\delta g_{\alpha\mu} - g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu} \\ & - g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} - g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\nabla_{\nu}\delta g_{\alpha\mu} + g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usando  $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}\delta g_{\alpha\beta}$ , obtemos que

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu} & = \frac{1}{2}(-\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} - \nabla_{\nu}\delta g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu}\nabla^{\rho}\delta g_{\mu\nu} \\ & - g^{\nu\alpha}\nabla^{\rho}\delta g_{\alpha\nu} + \nabla_{\nu}\delta g^{\rho\nu} - \nabla_{\alpha}\delta g^{\rho\alpha}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu} = -\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}. \quad (3.27)$$

Neste passo usamos  $g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\rho} = -\delta g^{\mu\nu}g_{\nu\rho}$  [71] para reescrever (3.27)

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu} = -\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} + g^{\rho\alpha}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu}^{\mu}. \quad (3.28)$$

Retornando à integral ficamos com

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \left( f_R R_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} f \right) \delta g^{\alpha\beta} + \left( \nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} - g^{\rho\alpha}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu}^{\mu} \right) \nabla_{\rho} f_R + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \delta S_m \right]. \quad (3.29)$$

Prosseguindo com uma nova integração por partes no segundo integrando, mas antes, a expressão é readequada para

$$\int d^4x (\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} - g^{\alpha\rho}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu}^{\mu}) \nabla_{\rho} f_R = \int d^4x \nabla_{\mu} (\delta g^{\mu\rho} - g^{\mu\rho}\delta g_{\lambda}^{\lambda}) \nabla_{\rho} f_R. \quad (3.30)$$

Após a integração por partes, obtemos

$$\int d^4x (\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} - g^{\alpha\rho}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu}^{\mu}) \nabla_{\rho} f_R = - \int d^4x (\delta g^{\mu\rho} - g^{\mu\rho}\delta g_{\lambda}^{\lambda}) \nabla_{\mu} \nabla_{\rho} f_R. \quad (3.31)$$

Aqui, fatoraremos  $\delta g^{\alpha\beta}$

$$\int d^4x (\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} - g^{\alpha\rho}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu}^{\mu}) \nabla_{\rho} f_R = - \int d^4x (\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} f_R - g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f_R) \delta g^{\alpha\beta}. \quad (3.32)$$

Com isso, podemos fatorar  $\delta g^{\alpha\beta}$  na integral (3.29)

$$0 = \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f_R R_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} f - (\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} - g_{\alpha\beta}\square) f_R + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}} \right] \delta g^{\alpha\beta}. \quad (3.33)$$

A variação da métrica é arbitrária, logo, o integrando deve ser nulo [20, 21, 72]

$$f_R R_{\alpha\beta} - \frac{f}{2} g_{\alpha\beta} - (\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} - g_{\alpha\beta}\square) f_R = \kappa^2 T_{\alpha\beta}, \quad (3.34)$$

onde  $T_{\alpha\beta}$  é o tensor energia-momento, definido como

$$T_{\alpha\beta} \equiv - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}}. \quad (3.35)$$

A expressão (3.34) representa as equações de campo das teorias  $f(R)$  na formulação da métrica. A forma contraída das equações de campo (3.34) é

$$f_R R - 2f + 3\square f_R = \kappa^2 T. \quad (3.36)$$

### 3.1 Solução tipo-Gödel na gravitação $f(R)$

A seguir prosseguiremos com os cálculos para obter equações de movimento que descrevam um universo tipo-Gödel na gravitação  $f(R)$ . Nesse contexto, a métrica tipo-Gödel (2.20) é reescrita, para deixar os cálculos mais simples, usamos a base tetrada<sup>2</sup>

$$ds^2 = \eta_{AB}\theta^A\theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2, \quad (3.37)$$

onde  $\eta_{AB} = (1, -1, -1, -1)$  e

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt + H(r)d\phi, & \theta^1 &= dr, \\ \theta^2 &= D(r)d\phi, & \theta^3 &= dz. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para a geometria tipo-Gödel o escalar de curvatura toma um valor constante  $R = 2(m^2 - \omega^2)$ , assim, qualquer derivada da expressão  $f_R$  se anula. As equações de campo e a sua forma contraída se resumem, respectivamente, às

$$f_R R_{AB} - \frac{f}{2}\eta_{AB} = \kappa^2 T_{AB}, \quad (3.39)$$

$$f_R R - 2f = \kappa^2 T. \quad (3.40)$$

As equações (3.39) e (3.40) podem ser combinadas para resultar em

$$f_R G_{AB} = \kappa^2 T_{AB} - \frac{1}{2}(f + \kappa^2 T)\eta_{AB}. \quad (3.41)$$

Enquanto que as componentes não nulas dos tensor de Einstein se resumem às [39, 51]

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3\omega^2 - m^2, & G_{11} &= G_{22} = \omega^2, \\ G_{33} &= m^2 - \omega^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para uma solução tipo-Gödel não-causal a fonte de energia-matéria é o fluido perfeito, cujo tensor energia momento é dado por

$$T_{AB}^{(M)} = (\rho + p)u_A u_B - p\eta_{AB}, \quad (3.43)$$

para um 4-vetor comóvel  $u_A = (1, 0, 0, 0)$ . Para essa escolha de 4-vetor, o traço do tensor energia-momento vale

$$T^{(M)} = \rho - 3p. \quad (3.44)$$

Portanto, as equações de campo (3.41) se resumem às

$$f_R G_{AB} = \kappa^2 T_{AB} - \frac{1}{2}[f + (\rho + 3p)]. \quad (3.45)$$

<sup>2</sup> Que pode ser vista com algum detalhe no Apêndice C

Inserindo os coeficientes do tensor de Einstein (3.42) e o conteúdo de matéria-energia (3.43) nas equações de campo (3.45) obtemos as seguintes equações de campos

$$2(3\omega^2 - m^2)f_R + f = \kappa^2(\rho + 3p), \quad (3.46)$$

$$2\omega^2 f_R - f = \kappa^2(\rho - p), \quad (3.47)$$

$$2(m^2 - \omega^2)f_R - f = \kappa^2(\rho - p). \quad (3.48)$$

As equações (3.46), (3.47) e (3.48) formam um sistema. Subtraindo as duas últimas expressões encontramos

$$(2\omega^2 - m^2)f_R = 0. \quad (3.49)$$

A derivada  $f_R$  é arbitrária, por isso, para que (3.49) seja verdadeira, os parâmetros devem se relacionar do seguinte modo

$$2\omega^2 = m^2. \quad (3.50)$$

Mas a relação (3.50) é justamente a de Gödel. Com essa igualdade temos a métrica de Gödel em (2.20). Portanto, as equações de campo obtidas nesse contexto se resumem às

$$m^2 f_R + f = \kappa^2(\rho + 3p), \quad (3.51)$$

$$m^2 f_R - f = \kappa^2(\rho - p). \quad (3.52)$$

Combinando as equações (3.51) e (3.52) obtemos

$$f = 2\kappa^2 p, \quad (3.53)$$

que, quando inserida em (3.51) e (3.52) tem-se

$$\kappa^2 \rho = m^2 f_R - \frac{f}{2}. \quad (3.54)$$

As equações (3.53) e (3.54) descrevem um universo tipo-Gödel não-causal, gerado por um fluido perfeito. Perceba que podemos isolar o parâmetro de geometria  $m$

$$m = \sqrt{\frac{2\kappa^2 \rho + f}{2f_R}}. \quad (3.55)$$

Com o parâmetro explicitado em (3.55) podemos então escrever o raio crítico (2.28) em termos da expressão  $f(R)$

$$r_c = 2 \sinh^{-1}(1) \sqrt{\frac{2f_R}{2\kappa^2 \rho + f}}. \quad (3.56)$$

Vemos então que o raio crítico tem um valor finito e depende das expressões  $f(R)$ , sua derivada  $f_R$  e do conteúdo de matéria  $\rho$ . O resultado (3.56) se estende para qualquer teoria  $f(R)$  de gravitação desde que  $f_R > 0$  [39].

Em particular, para  $f(R) = R = 2(m^2 - \omega^2) = 2\omega^2$ , pois  $2\omega^2 = m^2$ , temos

$$r_c = 2 \sinh^{-1}(1) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2 \rho + \omega^2}}. \quad (3.57)$$

A solução tipo-Gödel gerada por um fluido perfeito na gravitação  $f(R)$  é inevitavelmente não-causal.

Vejamos o resultado para o caso em que a fonte de matéria-energia é a soma de uma distribuição de fluido perfeito com campo escalar, ou seja,

$$T_{AB} = T_{AB}^{(M)} + T_{AB}^{(S)}, \quad (3.58)$$

onde  $T_{AB}^{(M)}$  é o fluido perfeito descrito em (3.43) e  $T_{AB}^{(S)}$  é o tensor energia-momento de campo escalar dado por

$$T_{AB}^{(S)} = \partial_A \Phi \partial_B \Phi - \frac{1}{2} \eta_{AB} \eta^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi, \quad (3.59)$$

onde as derivadas são em relação a base local  $\theta^A = e_\alpha^{(A)} dx^\alpha$ . Para um caso simples de campo escalar

$$\Phi(z) = ez + \text{const}, \quad (3.60)$$

que satisfaz a equação de Klein-Gordon não massiva, vamos obter de forma explícita as componentes do tensor energia-momento de campo escalar, que pode ser escrito como

$$T_{AB}^{(S)} = (\partial_\alpha \Phi) e_{(A)}^\alpha (\partial_\beta \Phi) e_{(B)}^\beta - \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi) e_{(M)}^\mu (\partial_\nu \Phi) e_{(N)}^\nu \eta^{MN} \eta_{AB}. \quad (3.61)$$

Para prosseguir, vejamos como obter cada vetor base  $e_\alpha^{(A)}$  da base tetrada  $\theta^A = e_\alpha^{(A)} dx^\alpha$ :

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt + H(x)dy, & \theta^1 &= dx, \\ \theta^2 &= D(x)dy, & \theta^3 &= dz. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e_0^{(0)} &= 1, & e_2^{(0)} &= H, \\ e_1^{(1)} &= 1, & e_2^{(2)} &= D, & e_3^{(3)} &= 1. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Com o vetor de base invertido definido por  $e_\alpha^{(A)} e_{(B)}^\alpha = \delta_B^A$ , prosseguimos para

$$\begin{aligned} e_{(0)}^0 &= 1, & e_{(2)}^0 &= -H/D \\ e_{(1)}^1 &= 1, & e_{(2)}^2 &= D^{-1}, & e_{(3)}^3 &= 1. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Assim, vemos que as derivadas do campo escalar podem ser escritas como

$$(\partial_\alpha \Phi) e_{(A)}^\alpha = e \delta_{(A)}^3. \quad (3.65)$$

Logo, os coeficientes não nulos do tensor energia-momento em questão são

$$T_{00}^{(S)} = -T_{11}^{(S)} = -T_{22}^{(S)} = T_{33}^{(S)} = \frac{e^2}{2}. \quad (3.66)$$

E o traço do tensor energia-momento  $T_{AB}$  vale

$$T = T_{AB}^{(M)}\eta^{AB} + T_{AB}^{(S)}\eta^{AB} = \rho - 3p + e^2. \quad (3.67)$$

Agora podemos inserir os coeficientes do tensor de Einstein (3.42) e o conteúdo de matéria-energia (3.59) e (3.67) nas equações de campo (3.41), o que resulta em

$$2(\omega^2 - m^2)f_R + f = \kappa^2(\rho + 3p), \quad (3.68)$$

$$2\omega^2 f_R - f = \kappa^2(\rho - p), \quad (3.69)$$

$$2(m^2 - \omega^2)f_R - f = \kappa^2(\rho - p) + 2\kappa^2 e^2. \quad (3.70)$$

As três equações acima podem ser combinadas de modo a isolar os parâmetros associados a matéria-energia:  $\rho$ ,  $p$  e  $e$

$$(6\omega^2 - m^2)\frac{f_R}{2} - \frac{f}{2} = \kappa^2\rho, \quad (3.71)$$

$$(2\omega^2 - m^2)\frac{f_R}{2} + \frac{f}{2} = \kappa^2 p, \quad (3.72)$$

$$(m^2 - 2\omega^2)f_R = \kappa^2 e^2. \quad (3.73)$$

Perceba que a presença de  $\kappa^2 e^2$  na equação (3.73) não permite que  $m^2 = 2\omega^2$ . Por isso, a violação da causalidade não é permitida. Em particular, para um universo causal  $4\omega^2 = m^2$ , como em (2.23), as equações de campo (3.71), (3.72) e (3.73) se resumem em

$$m^2 = 4\omega^2, \quad (3.74)$$

$$f_R = \frac{\kappa^2 e^2}{2\omega^2}, \quad (3.75)$$

$$\kappa^2 p = -\kappa^2 \rho = -\omega^2 f_R + f/2. \quad (3.76)$$

As equações de campo (3.74), (3.75) e (3.76) descrevem um universo tipo-Gödel causal, com pressão negativa, nas teorias de gravitação  $f(R)$  [39].

Para o caso do tensor energia-momento ser somente o campo escalar (3.59), (3.60) e com  $T = e^2$ , as equações de campo se resumem em

$$(3\omega^2 - m^2)f_R + \frac{f}{2} = 0, \quad (3.77)$$

$$\omega^2 f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (3.78)$$

$$(m^2 - \omega^2)f_R - \frac{f}{2} = \kappa^2 e^2. \quad (3.79)$$

Combinando (3.78) e (3.79)

$$(m^2 - 2\omega^2)f_R = \kappa^2 e^2. \quad (3.80)$$

De outra maneira, combinando (3.77) com (3.78) temos  $4\omega^2 = m^2$ , que é justamente a relação que torna a métrica tipo-Gödel completamente causal. Agora, a causalidade é

espontânea

$$m^2 = 4\omega^2, \quad (3.81)$$

$$f_R = \frac{\kappa^2 e^2}{2\omega^2}, \quad (3.82)$$

$$f = \kappa^2 e^2. \quad (3.83)$$

As equações (3.81), (3.82) e (3.83) descrevem um universo tipo-Gödel causal, gerado por campo escalar, com ausência de fluido perfeito [39].

## 4 Gravitação $f(R, T)$

A própria gravitação  $f(R)$  possui estudos no sentido de generalizá-la. Uma generalização da gravitação  $f(R)$  foi proposta em [73] com a inclusão de um acoplamento de uma função arbitrária do escalar de Ricci com a lagrangiana de matéria. Como resultado desse acoplamento, o movimento de uma partícula massiva não segue naturalmente uma geodésica, sendo necessária uma força extra ortogonal à sua 4-velocidade. O trabalho [29] descreve uma gravitação de Einstein com a constante cosmológica dependente do traço do tensor energia-momento:  $\Lambda = \Lambda(T)$ , conhecida como gravitação  $\Lambda(T)$ . Este modelo de gravitação possui os mesmos resultados das teorias de gravitação  $f(R)$  na formulação Palatini para a dinâmica do universo observável. No entanto, a gravitação  $\Lambda(T)$  tem mais condições de produzir modelos cosmológicos que incluam efeitos observados na astrofísica, por isso ela é tomada como uma teoria de gravitação mais geral do que a  $f(R)$  na abordagem Palatini. Além disso, dados cosmológicos recentes indicam que a constante cosmológica possa ser variável, o que endossa a gravitação  $\Lambda(T)$ , uma vez que o tensor energia-momento pode vir a representar diferentes distribuições de energia-matéria para diferentes eras cosmológicas. Nesse sentido, podemos então reunir as gravitações  $\Lambda(T)$  e  $f(R)$  para  $f(R, T)$ . A presença de  $T$  pode representar fluidos exóticos imperfeitos e efeitos quânticos. É preciso ressaltar que no estudo da gravitação a letra  $T$  também é usada para representar o escalar de torção. Portanto, é preciso cuidado e separar o que se entende por gravitação  $f(T)$  [74], representando torsão, e gravitação  $f(R, T)$ , tendo o traço do tensor energia-momento representado por  $T$ .

Nesse sentido, o trabalho [30] propõem a gravitação  $f(R, T)$ . Para obtermos as equações de campos procedemos com a generalização  $R \rightarrow f(R, T)$  na lagrangiana de Hilbert-Einstein e assim obtemos

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[ \sqrt{-g}f(R, T) + 2\kappa^2\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right]. \quad (4.1)$$

As equações de campos são obtidas variando a ação acima em relação a métrica. Neste caso, teremos também a variação do traço do tensor energia-momento em relação a métrica

$$0 = \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[ \delta\sqrt{-g}f + \sqrt{-g}\frac{df}{dR}\delta R + \sqrt{-g}\frac{df}{dT}\delta T + 2\kappa^2\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) \right], \quad (4.2)$$

renomeando as derivadas  $f_T = df/dT$  e  $f_R = df/dR$ , ficamos com

$$0 = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[ \delta\sqrt{-g}f + \sqrt{-g}f_R\delta R + \sqrt{-g}f_T\delta T + 2\kappa^2\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) \right]. \quad (4.3)$$

Veja que os dois primeiros integrandos já foram calculados entre os passos (3.6), (3.20) e (3.33), por isso

$$0 = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f_R R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} f - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R + f_T \frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

A integral (4.4) só é nula se o integrando for nulo, pois a variação da métrica é arbitrária

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} f - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R = \kappa^2 \left[ \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] - f_T \frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.5)$$

onde

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.6)$$

Resta então, determinar uma expressão para  $\delta T / \delta g^{\mu\nu}$ .

$$\frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta(g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} T_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

com

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.9)$$

Para prosseguir, vejamos que o tensor energia-momento, dado em (4.6), pode ser reescrito

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \right]. \quad (4.10)$$

Com (3.11) avançamos para

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (4.11)$$

Com isso, podemos prosseguir com (4.9)

$$\Theta_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left( g_{\alpha\beta} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\alpha\beta}} \right), \quad (4.12)$$

$$\Theta_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \left( \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m + g_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \right) - 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}. \quad (4.13)$$

Neste passo substituímos (4.11) na equação acima

$$\Theta_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m + 2g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2T_{\mu\nu} - 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}. \quad (4.14)$$

O primeiro termo da equação (4.14) pode ser reescrito como usando  $g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$ , para, em seguida, obtermos

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}. \quad (4.15)$$

Caso o tensor energia-momento represente um fluido perfeito, a lagrangiana de matéria deve assumir  $\mathcal{L}_m^{(M)} = -p$ , resultando em

$$\Theta_{\mu\nu}^{(M)} = -2T_{\mu\nu}^{(M)} - pg_{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Perceba que, devido a variação do traço do tensor energia-momento em relação à métrica, as equações de campos das teorias  $f(R, T)$  de gravitação dependem da fonte de matéria dada pela lagrangiana de matéria  $\mathcal{L}_m$ . No caso de uma fonte de campo escalar, dada pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_m^{(S)} = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi, \quad (4.17)$$

o tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  assume a forma [30]

$$\Theta_{\mu\nu}^{(S)} = -T^{(S)}_{\mu\nu} + \frac{T^{(S)}}{2}g_{\mu\nu}. \quad (4.18)$$

Quando a fonte de matéria é a soma de fluido perfeito com campo escalar devemos proceder com a seguinte soma

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m^{(M)} + \mathcal{L}_m^{(S)} = -p + g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi, \quad (4.19)$$

que deve ser inserida na expressão (4.11)

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m^{(M)} - 2\frac{\partial\mathcal{L}_m^{(M)}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m^{(S)} - 2\frac{\partial\mathcal{L}_m^{(S)}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (4.20)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} + T_{\mu\nu}^{(S)}. \quad (4.21)$$

Agora podemos prosseguir com a substituição das lagrangianas (4.19) na expressão (4.15)

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu}^{(M)} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m^{(M)} - 2g^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathcal{L}_m^{(M)}}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}} - 2T_{\mu\nu}^{(S)} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m^{(S)} - 2g^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathcal{L}_m^{(S)}}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}, \quad (4.22)$$

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^{(M)} + \Theta_{\mu\nu}^{(S)} = -2T_{\mu\nu}^{(M)} - pg_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{(S)} + \frac{T^{(S)}}{2}g_{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Assim, temos a forma do tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  para uma fonte de fluido perfeito mais campo escalar, que será útil nas próximas seções. E estamos aptos para escrever as equações de campo da gravitação  $f(R, T)$ , a equação (4.5) se torna em

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}f(R, T) - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)f_R = \kappa^2 T_{\mu\nu} - f_T(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}), \quad (4.24)$$

enquanto que a sua forma contraída é representado por

$$f_R R + 3\Box f_R - 2f(R, T) = \kappa^2 T - f_T(T + \Theta), \quad (4.25)$$

onde as derivadas  $f_R$  e  $f_T$  são, a princípio funções de  $R$  e  $T$ , respectivamente.

Na literatura, há vários trabalhos que estudam a divergência do tensor energia-momento na gravitação  $f(R, T)$ , por exemplo, a referência [30] além de divulgar a função  $f(R, T)$ , também divulga a seguinte divergência

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{f_T}{\kappa^2 - f_T} [(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu \ln f_T + \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}]. \quad (4.26)$$

Percebe-se que o tensor energia-momento não se conserva. Isso tem efeito na geodésica de partículas teste, sendo necessária a presença de uma força extra e ortogonal à sua 4-velocidade. No entanto, o trabalho de Barrientos e Rubilar (2014) [75] demonstram que o artigo [30] divulga uma expressão errada para a conservação, sendo a correta a seguinte

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{f_T}{\kappa^2 - f_T} \left[ (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu \ln f_T + \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \nabla^\mu T \right], \quad (4.27)$$

influenciando na expressão da geodésica de partículas teste. Sendo ainda necessária uma força extra. De qualquer maneira, percebe-se que o tensor energia-momento não se conserva no caso em que  $f_T \neq 0$ , mas a trajetória geodésica só é obtida quando a pressão também é nula. O artigo [76], de Alvarenga *et al.* (2013) também obtém o mesmo resultado (4.27). Neste trabalho o problema da conservação do tensor energia-momento é superado ao demonstrar que funções  $f(R, T)$  podem ser construídas para tanto. Assumindo que  $f(R, T) = g(R) + h(T)$ , sendo a função  $h(T)$  o alvo a ser reconstruído de modo a evitar o problema da conservação, no contexto de fluido perfeito e da geometria Friedmann-Robertson-Walker (FRW). O artigo [77] também estuda uma forma de construir uma teoria  $f(R, T)$  de gravitação à luz de um universo FRW de geometria plana gerado por um fluido perfeito. A construção da função  $h(T)$  se dá para dois casos de expansão do universo a de de Sitter e a de baixa potência. A teoria em questão descreve adequadamente a evolução do universo em seu início e em seu recente quadro de formação. Os trabalhos [78, 79] também seguem o mesmo caminho com resultados parecidos. Enquanto que os trabalhos [80, 81] tratam sobre questões termodinâmicas de um universo FRW gerado por fluido perfeito no contexto da gravitação  $f(R, T)$ . Verificando que a termodinâmica desses casos não é de equilíbrio devido a presença de um termo adicional de entropia.

## 4.1 Solução tipo-Gödel na gravitação $f(R, T)$

Como na seção 3.1 iremos prosseguir os cálculos com a base tetrada (3.37) e (3.38). Com isso, tomamos a equação (4.24) na base em questão

$$f_R R_{AB} - \frac{f}{2} \eta_{AB} = \kappa^2 T_{AB} - f_T (T_{AB} + \Theta_{AB}). \quad (4.28)$$

Na geometria tipo-Gödel o escalar de curvatura assume o valor  $R = 2(m^2 - \omega^2)$ , por isso a derivada de  $f_R$  na equação (4.28) desaparece e a forma contraída de (4.25) se resume a

$$f = f_R R + f_T (T + \Theta) - \kappa^2 T - f. \quad (4.29)$$

Agora, substituindo (4.29) em (4.25) temos

$$f_R G_{AB} = \kappa^2 T_{AB} - f_T (T_{AB} + \Theta_{AB}) - \frac{1}{2} [f + \kappa^2 T - f_T (T + \Theta)] \eta_{AB}. \quad (4.30)$$

Ressaltando que se  $f(R, T) \rightarrow f(R)$  temos a equação (3.45).

A solução não-causal nesse contexto é o primeiro resultado do artigo [40]. A fonte de matéria que se relaciona com a geometria tipo-Gödel e gera solução não-causal é a de um fluido perfeito, dada pelo tensor energia-momento (3.43), com densidade de energia  $\rho$  e pressão  $p$ . Na base tetrada, o tensor  $\Theta$  assume a forma

$$\Theta_{AB}^{(M)} = -2T_{AB}^{(M)} - p\eta_{AB}, \quad (4.31)$$

onde a sua forma contraída é dada por

$$\Theta^{(M)} = \Theta_{AB}^{(M)} \eta^{AB} = 2(p - \rho). \quad (4.32)$$

Substituindo (3.43), (4.31), (3.44) e (4.32) em (4.30) obtemos que

$$f_R G_{AB} = \kappa^2 [(\rho + p)u_A u_B - p\eta_{AB}] + f_T (\rho + p)u_A u_B - \frac{1}{2} [f + \kappa^2(\rho - 3p) + f_T(\rho + p)] \eta_{AB}. \quad (4.33)$$

As equações de campo são calculadas usando os coeficientes do tensor de Einstein (3.42), a 4-velocidade comóvel  $u_A = (1, 0, 0, 0)$  e o tensor métrico de Minkowski  $\eta_{AB} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . As componentes não nulas da equação (4.33) são

$$2f_R(3\omega^2 - m^2) + f = \kappa^2(\rho + 3p) + f_T(\rho + p), \quad (4.34)$$

$$2f_R\omega^2 - f = \kappa^2(\rho - p) + f_T(\rho + p), \quad (4.35)$$

$$2f_R(m^2 - \omega^2) - f = \kappa^2(\rho - p) + f_T(\rho + p). \quad (4.36)$$

Da equação (4.35) subtraímos (4.36) para obter

$$(2\omega^2 - m^2)f_R = 0. \quad (4.37)$$

Que é o resultado similar ao obtido no trabalho [39]. A derivada da função  $f$  em relação ao escalar de curvatura  $R$  deve  $f_R > 0$  de modo que massas tipo-ghost sejam evitadas, como discutidos em [39]. Por isso devemos assumir que

$$2\omega^2 = m^2. \quad (4.38)$$

Como na seção 3.1, a igualdade (4.38) nos leva diretamente para geometria de Gödel (2.1) ao considerarmos o fluido perfeito como fonte de matéria. Por isso, ao assumir (4.38) podemos reescrever as equações de campo (4.34), (4.35) e (4.36) e obtermos

$$m^2 f_R + f = \kappa^2(\rho + 3p) + f_T(\rho + p), \quad (4.39)$$

$$m^2 f_R - f = \kappa^2(\rho - p) + f_T(\rho + p), \quad (4.40)$$

que ao serem subtraídas obtemos

$$f = 2\kappa^2 p. \quad (4.41)$$

A substituição de (4.41) em (4.39) e/ou (4.40) resulta em

$$m = \sqrt{\frac{2\kappa^2 \rho + f + 2f_T(\rho + p)}{2f_R}}. \quad (4.42)$$

Novamente, se  $f(R, T) \rightarrow f(R)$  retornamos ao resultado (3.55). Com (4.42) podemos explicitar a relação do raio crítico para violação da causalidade (2.28)

$$r_c = 2 \sinh^{-1}(1) \sqrt{\frac{2f_R}{2\kappa^2 \rho + f + 2f_T(\rho + p)}}. \quad (4.43)$$

A causalidade também é violada na gravitação  $f(R, T)$  no universo de Gödel gerado por um fluido perfeito e o raio crítico depende explicitamente da expressão  $f(R, T)$ , de suas derivadas e do conteúdo de matéria.

A solução causal é gerada por uma soma de fluido perfeito mais campo escalar, nesse caso

$$T_{AB} = T_{AB}^{(M)} + T_{AB}^{(S)} = (\rho + p)u_A u_B - p\eta_{AB} + T_{AB}^{(S)}, \quad (4.44)$$

onde os coeficientes do tensor de campo escalar são dados por (3.66). O traço do tensor (4.44) dado por

$$T = \rho - 3p + e^2, \quad (4.45)$$

sendo que

$$T^{(S)} = e^2. \quad (4.46)$$

Neste passo tomamos o tensor  $\Theta_{\mu\nu}$ , dado em (4.22), na base tetrada como

$$\Theta_{AB} = \Theta_{AB}^{(M)} + \Theta_{AB}^{(S)} = -2T_{AB}^{(M)} - p\eta_{AB} - T_{AB}^{(S)} + \frac{T^{(S)}}{2}\eta_{AB}. \quad (4.47)$$

A soma do tensor energia-momento com (4.47) resulta em

$$\Theta_{AB} + T_{AB} = -(\rho + p)u_A u_B + \frac{e^2}{2}\eta_{AB}, \quad (4.48)$$

com o seguinte traço

$$\Theta + T = -(\rho + p - 2e^2). \quad (4.49)$$

Agora, usando as expressões (4.44), (4.45), (4.48) e (4.49), podemos reescrever a equação de campo (4.30)

$$\begin{aligned} f_R G_{AB} = & \kappa^2 \left[ (\rho + p) u_A u_B - p \eta_{AB} + T_{AB}^{(S)} \right] \\ & + f_T \left[ (\rho + p) u_A u_B - \frac{e^2}{2} \eta_{AB} \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[ f + \kappa^2 (\rho - 3p + e^2) + f_T (\rho + p - 2e^2) \right] \eta_{AB}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

As equações de campo (4.50) resultam em

$$2f_R(3\omega^2 - m^2) + f = \kappa^2(\rho + 3p) + f_T(\rho + p + e^2), \quad (4.51)$$

$$2f_R\omega^2 - f = \kappa^2(\rho - p) + f_T(\rho + p - e^2), \quad (4.52)$$

$$2f_R(m^2 - \omega^2) - f = \kappa^2(\rho - p) + 2\kappa^2 e^2 + f_T(\rho + p - e^2). \quad (4.53)$$

As equações (4.51), (4.52) e (4.53) podem ser reordenadas de modo a separar termos de matéria e de geometria

$$\kappa^2 e^2 = f_R(m^2 - 2\omega^2), \quad (4.54)$$

$$\kappa^2 p + \frac{1}{2} f_T e^2 = \frac{1}{2} f_R(2\omega^2 - m^2) + \frac{f}{2}, \quad (4.55)$$

$$\kappa^2 \rho + f_T(\rho + p - \frac{e^2}{2}) = \frac{1}{2} f_R(6\omega^2 - m^2) - \frac{f}{2}. \quad (4.56)$$

Com a equação (4.54) temos liberdade para escolher a relação entre os parâmetros de geometria. Em particular, lembre da relação causal  $m^2 \geq 4\omega^2$ . Assim, resultam as seguintes equações de campo

$$m^2 = 4\omega^2, \quad (4.57)$$

$$f_R = \frac{\kappa^2 e^2}{2\omega^2}, \quad (4.58)$$

$$\kappa^2 p + \frac{1}{2} f_T e^2 = - \left[ \kappa^2 \rho + f_T(\rho + p - \frac{1}{2} f_T e^2) \right] = -\omega^2 f_R + \frac{f}{2}. \quad (4.59)$$

As equações (4.57), (4.58) e (4.59) descrevem um universo tipo-Gödel causal na gravitação  $f(R, T)$  para um fluido perfeito mais campo escalar.

Podemos ainda resolver a equação de campo (4.30) para um fonte exclusiva de campo escalar

$$\Theta_{AB}^{(S)} = -T_{AB}^{(S)} + \frac{T^{(S)}}{2} \eta_{AB}, \quad (4.60)$$

$$\Theta_{AB}^{(S)} + T_{AB}^{(S)} = \frac{T^{(S)}}{2} \eta_{AB} = \frac{e^2}{2} \eta_{AB}, \quad (4.61)$$

e

$$\Theta^{(S)} + T^{(S)} = 2T^{(S)} = 2e^2. \quad (4.62)$$

Com as equações (4.60), (4.61), (4.62) podemos tomar a seguinte equação de campo

$$f_R G_{AB} = \kappa^2 T_{AB}^{(S)} - \frac{e^2}{2} f_T \eta_{AB} - \frac{1}{2} (f + \kappa^2 e^2 - 2f_T e^2) \eta_{AB}. \quad (4.63)$$

As componentes não nulas resultam em

$$f_R (3\omega^2 - m^2) + \frac{f}{2} = \frac{1}{2} f_T e^2, \quad (4.64)$$

$$f_R \omega^2 - \frac{f}{2} = -\frac{1}{2} f_T e^2, \quad (4.65)$$

$$f_R (m^2 - \omega^2) - \frac{f}{2} = \kappa^2 e^2 - \frac{1}{2} f_T e^2. \quad (4.66)$$

As expressões (4.64), (4.65) e (4.66) podem ser resolvidas para resultarem em

$$m^2 = 4\omega^2, \quad (4.67)$$

$$f_R = \frac{\kappa^2 e^2}{2\omega^2}, \quad (4.68)$$

$$f = \kappa^2 e^2 + f_T e^2. \quad (4.69)$$

Percebendo então, que ao suprimir os termos de fluido perfeito nas equações de campo (4.59) obtemos diretamente as equações acima, que descrevem um universo tipo-Gödel gerado por campo escalar na gravitação  $f(R, T)$ .

## 5 Conclusão

As métricas de Gödel e tipo-Gödel são objetos de muito estudo no contexto da gravitação, devido a sua característica exótica de violação da causalidade. Numa dessas investigações [51], uma métrica tipo-Gödel causal, não-causal e com regiões causais e não-causais intercalando-se é obtida. A dissertação se limita em estudar esses casos. Este trabalho acadêmico estuda a questão da causalidade das métricas de Gödel e tipo-Gödel de duas maneiras. A primeira se limita em identificar trajetórias tipo-tempo circulares para então isolar o raio crítico para a violação da causalidade. Na segunda, isolamos a derivada que indica a inclinação do cone de luz em relação a coordenada azimutal, para em seguida determinar o raio crítico para o qual a inclinação se anula, isto é, o ponto para o qual a geratriz do cone de luz aponta para o passado, denotando a violação da causalidade. Nas duas abordagens os valores dos raios críticos convergem.

Soluções de Gödel e tipo-Gödel tem sido obtidas em várias abordagens da gravitação modificada e aqui citamos dois casos em detalhes. O primeiro é o da gravitação  $f(R)$ , na versão métrica. Neste modelo, temos dois casos de universos tipo-Gödel, um com região não-causal, que se inicia a partir do raio crítico  $r_c$ , e outro com uma região não-causal que se estende ao infinito, pois  $r_c \rightarrow \infty$ , por isso, essa versão é denominada completamente causal. A primeira versão de solução de Gödel foi obtida para o caso de fluido perfeito, tal como feito na Seção 3.1. Percebemos então que se mantivermos a solução para um fonte de fluido perfeito, o resultado de um universo tipo-Gödel não-causal se estende a gravitação  $f(R)$ . Dada a equação (3.56), vemos que para um universo muito denso, o raio crítico tende a diminuir. De outra maneira, se a função  $f$  representar um polinômio do escalar de curvatura com ordens altas o raio crítico também tende a diminuir, já que numerador dentro da raiz é sempre de menor grau do denominador. No caso particular (3.57), o raio crítico diminui com a densidade e com o aumento da intensidade da rotação da matéria.

Quando as equações de campo  $f(R)$  são resolvidas para geometria tipo-Gödel com fonte de fluido perfeito mais campo escalar obtemos uma solução descrevendo um universo onde a violação da causalidade não é espontânea. Por isso podemos escolher a relação causal entre os parâmetros de geometria e de rotação,  $4\omega^2 = m^2$ . Gerando expressões que descrevem um universo tipo-Gödel causal gerado por fluido perfeito mais campo escalar. Podemos ainda obter um outro tipo de universo tipo-Gödel causal. Para tanto basta considerar como fonte um campo escalar simples. Os resultados são (3.81), (3.82) e (3.83). Percebemos que nessa situação a causalidade é espontânea. Não há liberdade de escolher qualquer outra relação entre os parâmetros além de  $4\omega^2 = m^2$ .

Os cálculos das equações de campos das teorias  $f(R, T)$  para um universo tipo-

Gödel demonstraram uma generalização imediata. Por exemplo, em (4.30), se fizermos  $f(R, T) \rightarrow f(R)$  a expressão se resume à equação (3.45). Ao escolhermos uma fonte de fluido perfeito gerando um universo tipo-Gödel temos novamente um raio crítico finito (4.43), que é novamente uma generalização imediata de (3.56). Para ver isso basta fazer novamente  $f(R, T) \rightarrow f(R)$ . Nesse contexto, a presença do traço do tensor energia-momento  $T$  faz o raio crítico diminuir, desde que, ao menos,  $f_T > 0$ . Aliás, para que o raio crítico seja real, a razão dentro da raiz deve ser maior que zero e por isso,  $2\kappa^2 + f + f_T(\rho + p) > 0$ , uma vez que  $f_R > 0$ .

Com fonte de fluido perfeito mais campo escalar as equações (4.50) são novamente uma extensão imediata do caso  $f(R)$ . O resultado qualitativo também é o mesmo, as equações de campo (4.57), (4.58) e (4.59) descrevem um universo tipo-Gödel causal. Onde a relação (4.57) é novamente escolhida de forma apropriada, já que a violação da causalidade não é mais espontânea. Eliminando a derivada  $f_T$  voltamos ao caso  $f(R)$ . E, quando escolhermos o campo escalar como única fonte, a relação causal é espontânea novamente, mas nesse caso a função  $f$  é acrescida pela derivada  $f_T$ . Há, no entanto, uma informação nova, para o caso de campo escalar, as equações de campo (4.64), (4.65) e (4.66) estão acopladas pela derivada  $f_T$ . O tipo de informação que não se obteria ao suprimir os termos de fluido perfeito em (4.57), (4.58) e (4.59). Vemos, portanto, que a derivada  $f_T$  desempenha um papel de destaque na gravitação  $f(R, T)$  no contexto do universo tipo-Gödel.

Como conclusão final, vemos que a solução de Gödel persiste em vários tipos de gravitação modificada, o que não foi diferente nas gravitações  $f(R)$  e  $f(R, T)$ . No entanto, graças a presença de um campo escalar simples, o universo de Gödel obtido pode ser causal. Um resultado que protege a cronologia, ao menos no contexto das gravitações  $f(R)$  e  $f(R, T)$ .

Como perspectiva para futuras pesquisas vemos que a gravitação  $f(R, T)$  não possui versão Palatini. Além disso, algumas propriedades estão em aberto também, como por exemplo a questão da conservação do tensor energia-momento e características anti-gravitacionais.

# APÊNDICE A – A métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas

O cálculo da métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas segue o mesmo caminho da referência [42].

A métrica de Gödel em coordenadas retangulares é dada por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2mx}}{2} dy^2 - dz^2 + 2e^{mx} dt dy, \quad (\text{A.1})$$

ou, ainda,

$$ds^2 = [dt + e^{mx} dy]^2 - dx^2 - \frac{e^{2mx}}{2} dy^2 - dz^2, \quad (\text{A.2})$$

a qual pode ser convertida em coordenadas cilíndricas para

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 + \frac{4}{m^2} \left[ \sinh^4 \left( \frac{mr}{2} \right) - \sinh^2 \left( \frac{mr}{2} \right) \right] d\phi^2 - dz^2 + \frac{4\sqrt{2}}{m} \sinh^2 \left( \frac{mr}{2} \right) dt d\phi. \quad (\text{A.3})$$

Observe que efetuando o quadrado da equação (2.17) tem-se como resultado a equação (A.3). Para tanto, usamos as seguintes transformações

$$e^{mx} = \cosh(2mr) + \cos \phi \sinh(2mr), \quad (\text{A.4})$$

$$mye^{mx} = \sqrt{2} \sin \phi \sinh(2mr), \quad (\text{A.5})$$

$$\tan \left( \frac{\phi}{2} + \frac{t - 2t'}{2\sqrt{2}} m \right) = e^{-2mr} \tan \left( \frac{\phi}{2} \right), \quad (\text{A.6})$$

e

$$z = 2z'. \quad (\text{A.7})$$

Diferenciando (A.4), (A.5), (A.6) e (A.7), temos

$$me^{mx} dx = 2m \sinh(2mr) dr - \sin \phi \sinh(2mr) d\phi + 2m \cos \phi \cosh(2mr) dr, \quad (\text{A.8})$$

$$me^{mx} dy + m^2 ye^{mx} dx = \sqrt{2} \cos \phi \sinh(2mr) d\phi + 2\sqrt{2} m \sin \phi \cosh(2mr) dr, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\phi}{2} + \frac{t - 2t'}{2\sqrt{2}} m \right) \right] \left( \frac{d\phi}{2} + \frac{dt - 2dt'}{2\sqrt{2}} m \right) = \\ - 2me^{-2mr} \tan \left( \frac{\phi}{2} \right) dr + \frac{e^{-2mr}}{2} \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) \right] d\phi, \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

e

$$dz = 2dz'. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo  $my$  de (A.5) em (A.9), obtemos

$$me^{mx} dy + \sqrt{2}me^{-mx} \sen \phi \sinh(2mr)e^{mx} dx = \sqrt{2} \cos \phi \sinh(2mr)d\phi + 2\sqrt{2}m \sen \phi \cosh(2mr)dr. \quad (\text{A.12})$$

Agora substituindo (A.8) em (A.12)

$$me^{mx} dy = \sqrt{2} \cos \phi \sinh(2mr)d\phi + 2\sqrt{2}m \sen \phi \cosh(2mr)dr - \sqrt{2} \sen \phi \sinh(2mr)e^{-mx} [2m \sinh(2mr)dr - \sen \phi \sinh(2mr)d\phi + 2m \cos \phi \cosh(2mr)dr]. \quad (\text{A.13})$$

Usando (A.4), de modo que

$$1 = e^{-mx} [\cosh(2mr) + \cos \phi \sinh(2mr)], \quad (\text{A.14})$$

em (A.13) ficamos com

$$me^{mx} dy = e^{-mx} [\cosh(2mr) + \cos \phi \sinh(2mr)] \sqrt{2} \cos \phi \sinh(2mr)d\phi - e^{-mx} \sqrt{2} \sen \phi \sinh(2mr) [2m \sinh(2mr)dr - \sen \phi \sinh(2mr)dr + 2m \cos \phi \cosh(2mr)dr] + e^{-mx} [\cosh(2mr) + \cos \phi \sinh(2mr)] 2\sqrt{2}m \sen \phi \cosh(2mr)dr. \quad (\text{A.15})$$

Dividindo ambos os lados por  $e^{-mx}$  e efetuando os produtos, encontramos

$$me^{2mx} dy = \sqrt{2} \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr)d\phi + \sqrt{2} \sen^2(2mr)d\phi + 2\sqrt{2}m \sen \phi dr. \quad (\text{A.16})$$

A última expressão é obtida após alguns cancelamentos e simplificando termos ao usarmos as identidades  $\sen^2 \phi + \cos^2 \phi = \cosh^2(2mr) - \sinh^2(2mr) = 1$ . Elevando (A.16) ao quadrado obtemos

$$m^2 e^{4mx} dy^2 = 2 \cos^2 \phi \sinh^2(2mr) \cosh^2(2mr)d\phi^2 + 2 \sinh^4(2mr)d\phi^2 + 8m \sen \phi \sinh^2(2mr)d\phi dr + 4 \cos \phi \sinh^3(2mr) \cosh(2mr)d\phi^2 + 8m^2 \sen^2 \phi dr^2 + 8m \sen \phi \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr)d\phi dr. \quad (\text{A.17})$$

Agora procedendo com o quadrado da equação (A.8)

$$m^2 e^{2mx} dx^2 = 4m^2 \sen^2(2mr)dr^2 + 4m^2 \cos^2 \phi \cosh^2(2mr)dr^2 + \sen^2 \phi \sinh^2(2mr)d\phi^2 - 4m \sen \phi \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr)drd\phi + 8m^2 \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr)dr^2 - 4m \sen \phi \sinh^2(2mr)drd\phi, \quad (\text{A.18})$$

e somando (A.18) com a metade da equação (A.17), encontramos

$$\begin{aligned}
 m^2 e^{2mx} dx^2 + \frac{m^2}{2} e^{4mx} dy^2 &= 4m^2 \sinh^2(2mr) dr^2 + 4m^2 \cos^2 \phi \cosh^2(2mr) dr^2 \\
 &+ \sen^2 \phi \sinh^2(2mr) d\phi^2 + 8m^2 \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr) dr^2 \\
 &+ 4m^2 \sen^2 \phi dr^2 + 2 \cos \phi \sinh^3(2mr) \cosh(2mr) d\phi^2 \\
 &+ \cos^2 \phi \sinh^2(2mr) \cosh^2(2mr) d\phi^2 + \sinh^4(2mr) d\phi^2. \quad (\text{A.19})
 \end{aligned}$$

Elevando (A.4) ao quadrado encontramos

$$\begin{aligned}
 e^{2mx} &= \left[1 + \sinh^2(2mr)\right] + \cos^2 \phi \left[\cosh^2(2mr) - 1\right] \\
 &+ 2 \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr), \quad (\text{A.20})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{2mx} &= \sen^2 \phi + \sinh^2(2mr) + \cos^2 \phi \cosh^2(2mr) \\
 &+ 2 \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr). \quad (\text{A.21})
 \end{aligned}$$

Observe que podemos reescrever (A.19) como

$$\begin{aligned}
 m^2 e^{2mx} dx^2 + \frac{m^2}{2} e^{4mx} dy^2 &= 4m^2 \left[ \sinh^2(2mr) + \cos^2 \phi \cosh^2(2mr) \right. \\
 &+ 2 \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr) + \sen^2 \phi \left. \right] dr^2 + \sinh^2(2mr) \left[ \sen^2 \phi + \cos^2 \phi \cosh^2(2mr) \right. \\
 &\left. + \sinh^2(2mr) + 2 \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr) \right] d\phi^2. \quad (\text{A.22})
 \end{aligned}$$

Usando (A.21) na equação (A.22) obtemos

$$m^2 e^{2mx} dx^2 + \frac{m^2}{2} e^{4mx} dy^2 = 4m^2 e^{2mx} dr^2 + \sinh^2(2mr) e^{2mx} d\phi^2. \quad (\text{A.23})$$

Simplificando, ficamos com

$$dx^2 + \frac{e^{2mx}}{2} dy^2 = 4dr^2 + \frac{1}{m^2} \sinh^2(2mr) d\phi^2. \quad (\text{A.24})$$

Agora substituindo (A.6) em (A.10)

$$\begin{aligned}
 \left[1 + e^{-4mr} \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] \left[\frac{\sqrt{2}m d\phi + m^2 (dt - 2dt')}{2\sqrt{2}m}\right] &= \\
 - 2me^{-2mr} \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) dr + \frac{e^{-2mr}}{2} \left[1 + \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] d\phi, \quad (\text{A.25})
 \end{aligned}$$

e reescrevendo (A.25),

$$\begin{aligned}
 \left[e^{2mr} + e^{-2mr} \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] \left[\sqrt{2}m d\phi + m^2 (dt - 2dt')\right] &= \\
 - 4\sqrt{2}m^2 \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) dr + \sqrt{2}m \left[1 + \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] d\phi, \quad (\text{A.26})
 \end{aligned}$$

isolando  $dt$ , encontramos

$$m^2 dt = \frac{-4\sqrt{2}m^2 \tan(\phi/2)dr + \sqrt{2}m [1 + \tan^2(\phi/2)] d\phi}{e^{2mr} + e^{-2mr} \tan^2(\phi/2)} - \sqrt{2}m d\phi + 2m^2 dt'. \quad (\text{A.27})$$

Usando  $\sinh(2mr) = (e^{2mr} - e^{-2mr})/2$  e  $\cosh(2mr) = (e^{2mr} + e^{-2mr})/2$  podemos reescrever o denominador de (A.27) como

$$e^{2mr} + e^{-2mr} \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sinh(2mr) + \cosh(2mr) + [\cosh(2mr) - \sinh(2mr)] \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos^{-2}\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (\text{A.28})$$

Reorganizando os colchetes,

$$e^{2mr} + e^{-2mr} \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sinh(2mr) - \sinh(2mr) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos^{-2}\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cosh(2mr) \left[1 + \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right], \quad (\text{A.29})$$

evidenciando  $\cos^{-2}(\phi/2)$

$$e^{2mr} + e^{-2mr} \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \cos^{-2}\left(\frac{\phi}{2}\right) \left\{ \cosh(2mr) - \sinh(2mr) \left[ \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \right\}, \quad (\text{A.30})$$

usando  $\cos^2(\phi/2) - \sin^2(\phi/2) = \cos \phi$  em (A.30) encontramos que

$$e^{2mr} + e^{-2mr} \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \cos^{-2}\left(\frac{\phi}{2}\right) [\cosh(2mr) + \cos \phi \sinh(2mr)]. \quad (\text{A.31})$$

Veja que a expressão em colchetes da equação (A.31) é a mesma de (A.4)

$$e^{2mr} + e^{-2mr} \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \cos^{-2}\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{mx}. \quad (\text{A.32})$$

Substituindo (A.32) em (A.27)

$$m^2 dt = \left\{ -4\sqrt{2}m^2 \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) dr + \sqrt{2}m \left[1 + \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] d\phi \right\} \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{-mx} - \sqrt{2}m d\phi + 2m^2 dt', \quad (\text{A.33})$$

multiplicando por  $e^{mx}$ , simplificando o primeiro termo e substituindo (A.4) em (A.33)

$$m^2 e^{mx} dt = -2\sqrt{2}m \sin \phi dr + \sqrt{2}d\phi + [\cosh(2mr) + \cos \phi \sinh(2mr)] (2mdt' - \sqrt{2}d\phi). \quad (\text{A.34})$$

Somando (A.34) com (A.16)

$$me^{mx} dt + me^{2mx} dy = e^{mx}(2mdt' - \sqrt{2}d\phi) + \sqrt{2}d\phi + \sqrt{2} \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr)d\phi + \sqrt{2} [\cosh^2(2mr) - 1]. \quad (\text{A.35})$$

Reescrevendo (A.35) obtemos

$$me^{mx} dt + me^{2mx} dy = e^{mx}(2mdt' - \sqrt{2}d\phi) + \sqrt{2} [\cosh^2(2mr) + \cos \phi \sinh(2mr) \cosh(2mr)] d\phi, \quad (\text{A.36})$$

e, novamente reescrevendo

$$me^{mx} dt + me^{2mx} dy = e^{mx}(2mdt' - \sqrt{2}d\phi) + e^{mx} \sqrt{2} \cosh(2mr) d\phi. \quad (\text{A.37})$$

Eliminando  $e^{mx}$  e  $m$  e usando  $\cosh(2mr) = 1 - 2 \sinh^2(mr)$  ficamos com

$$dt + e^{mx} dy = 2dt' + 2\sqrt{2} \sinh^2(mr) d\phi. \quad (\text{A.38})$$

Elevando (A.38) ao quadrado encontramos

$$(dt + e^{mx} dy)^2 = 4dt'^2 + \frac{8}{m^2} \sinh^4(mr) d\phi^2 + \frac{8\sqrt{2}}{m} \sinh^2(mr) dt' d\phi. \quad (\text{A.39})$$

Substituindo (A.11), (A.24) e (A.39) em (A.2) ficaremos com

$$ds^2 = 4 \left\{ dt'^2 - dr^2 + \left[ \frac{2}{m^2} \sinh^4(mr) - \frac{1}{4m^2} \sinh^2(2mr) \right] d\phi^2 - dz^2 + \frac{2\sqrt{2}}{m} \sinh^2(mr) dt' d\phi \right\}. \quad (\text{A.40})$$

Usando as relações

$$\sinh(2mr) = 2 \sinh(mr) \cosh(mr),$$

e

$$\cosh^2(mr) - \sinh^2(mr) = 1,$$

podemos reescrever (A.40) como

$$ds^2 = 4 \left\{ dt'^2 - dr^2 + \frac{1}{m^2} [\sinh^4(mr) - \sinh^2(mr)] d\phi^2 - dz^2 + \frac{2\sqrt{2}}{m} \sinh^2(mr) dt' d\phi \right\} \quad (\text{A.41})$$

Agora, procedendo com as substituições

$$m \rightarrow m/2, \quad (\text{A.42})$$

$$t' \rightarrow t, \quad (\text{A.43})$$

e

$$(ds/2)^2 \rightarrow ds^2 \tag{A.44}$$

obtemos finalmente a expressão (A.3)

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 + \frac{4}{m^2} \left[ \sinh^4 \left( \frac{mr}{2} \right) - \sinh^2 \left( \frac{mr}{2} \right) \right] d\phi^2 - dz^2 + \frac{4\sqrt{2}}{m} \sinh^2 \left( \frac{mr}{2} \right) dt d\phi, \tag{A.45}$$

que é a métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas.

# APÊNDICE B – As equações de campo de Einstein

As equações de campo de Einstein descrevem como a geometria do universo se relaciona com a energia e momento do universo. O caminho usado para se chegar nelas usa analogias com o mundo clássico e a ação de Hilbert-Einstein [4].

Ao lado esquerdo da equação de Poisson para gravitação

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (\text{B.1})$$

temos um operador diferencial de segunda ordem atuante no potencial gravitacional, e ao lado direito uma medida de massa. Na generalização da Relatividade, devemos ter uma equação tensorial, a densidade de massa é generalizada para um tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Enquanto que o potencial gravitacional é substituído pela a métrica, que descreve a distorção do espaço-tempo. Devemos ter algo do tipo

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.2})$$

O lado esquerdo da Expressão (B.2) somente sugere a forma de um tensor simétrico do tipo (0,2). O tensor de Riemann  $R^\mu_{\nu\lambda\eta}$  é uma quantidade construída sobre derivadas de segunda ordem sobre o tensor métrico, mas não é do tipo procurado, pois tem muitas componentes. O tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  no entanto seria um bom candidato para o nosso caso, pois é somente uma contração de dois índices do tensor de Riemann:  $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ .

Seria tentador determinar

$$R_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.3})$$

De fato, esse caso funciona para casos específicos. Contudo, devido a conservação do tensor energia-momento

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.4})$$

devemos ter

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.5})$$

mas não temos certeza da equação (B.5) pois não há uma identidade que garante esta igualdade.

Mas estamos prontos para conhecer o tensor de Einstein, que é do tipo (0,2) e simétrico. Para determiná-lo usa-se a ação de Hilbert-Einstein

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x, \quad (\text{B.6})$$

onde  $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$  é a lagrangiana de Hilbert-Einstein,  $R$  é o escalar de Ricci dado por  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  e  $d^4x$  é o diferencial de hipervolume. Variando a ação (B.6) em relação a métrica

$$\delta S = \int \left[ \delta \left( \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \right) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] d^4x, \quad (\text{B.7})$$

$$\delta S = \int \left( g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) d^4x. \quad (\text{B.8})$$

A integral (B.8) pode ser separada em três

$$(\delta S)_1 = \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^4x, \quad (\text{B.9})$$

$$(\delta S)_2 = \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (\text{B.10})$$

$$(\delta S)_3 = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x, \quad (\text{B.11})$$

e cada uma será estudada separadamente.

Para calcular a variação  $\delta \sqrt{-g}$  usa-se o estudo da derivada de determinante de matrizes. Considere uma matriz quadrada e simétrica  $A = a_{ij} = a_{ji}$ . Sua inversa  $b^{ij}$  é definida por

$$b^{ij} = \frac{1}{a} A^{ji}, \quad (\text{B.12})$$

onde  $a$  é o determinante de  $A$  e  $A^{ji}$  é a matriz transposta dos cofatores de  $a_{ij}$ . Além disso, o determinante de  $A$  é dada pela soma

$$a = a_{ij} A^{ij} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} = A^{ij}, \quad (\text{B.13})$$

desde que  $a_{ij}$  não ocorra em qualquer cofator  $A^{ij}$ . Agora, suponha que as componentes  $a_{ij}$  sejam todas funções de coordenadas  $x^k$ . Então, o determinante é um funcional de  $a_{ij}$

$$a = a \left[ a_{ij} \left( x^k \right) \right], \quad (\text{B.14})$$

e a derivada de (B.14) nos dá

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = A^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}. \quad (\text{B.15})$$

Substituindo (B.12) em (B.15)

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = a b^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}. \quad (\text{B.16})$$

Fazendo as seguintes substituições de notação

$$a \longrightarrow g, \quad g = \det(g_{\mu\nu}), \quad a_{ij} \longrightarrow g_{\mu\nu}, \quad b^{ij} \longrightarrow g^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} \longrightarrow \partial_\lambda, \quad (\text{B.17})$$

a equação (B.16) se transforma em

$$\partial_\lambda g = g g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.18})$$

ou em notação de variações

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.19})$$

Para o nosso caso,  $\delta\sqrt{-g}$ , usa-se a regra da cadeia e o resultado (B.19) é importado

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta(-g) = \frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.20})$$

Substituindo (B.20) em (B.9), obtemos

$$(\delta I)_1 = \int \frac{1}{2} \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{B.21})$$

Para a equação (B.10) aplica-se o seguinte

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.22})$$

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.23})$$

$$\delta_\nu^\mu = g^{\mu\eta} g_{\eta\nu} = (g^{\mu\eta} + \delta g^{\mu\eta}) (g_{\eta\nu} + \delta g_{\eta\nu}), \quad (\text{B.24})$$

$$\delta_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \delta g^{\mu\eta} g_{\eta\nu} + g^{\mu\eta} \delta g_{\eta\nu} + O(\delta^2), \quad (\text{B.25})$$

onde o produto de duas variações é negligenciado, e a equação (B.25) avança para

$$\delta g^{\mu\eta} g_{\eta\nu} = -g^{\mu\eta} \delta g_{\eta\nu}, \quad (\text{B.26})$$

$$\delta g^{\mu\eta} g_{\eta\nu} g^{\nu\lambda} = -g^{\mu\eta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\eta\nu}, \quad (\text{B.27})$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\eta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\eta\lambda}. \quad (\text{B.28})$$

Usando o resultado (B.28) em (B.10)

$$(\delta S)_2 = - \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\eta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\eta\lambda} d^4x = - \int \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{B.29})$$

Resta trabalhar com a integral (B.11). Nela é preciso verificar a quantidade  $\delta R_{\mu\nu}$ . O tensor de Riemann é dado por

$$R^\mu{}_{\nu\eta\lambda} = \partial_\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\eta} - \partial_\eta \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\gamma{}_{\nu\eta} \Gamma^\mu{}_{\gamma\lambda} - \Gamma^\gamma{}_{\nu\lambda} \Gamma^\mu{}_{\gamma\eta}, \quad (\text{B.30})$$

variando tal quantidade teremos

$$\delta R^\mu{}_{\nu\eta\lambda} = \partial_\lambda \delta \Gamma^\mu{}_{\nu\eta} - \partial_\eta \delta \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + \delta \Gamma^\gamma{}_{\nu\eta} \Gamma^\mu{}_{\gamma\lambda} + \Gamma^\gamma{}_{\nu\eta} \delta \Gamma^\mu{}_{\gamma\lambda} - \delta \Gamma^\gamma{}_{\nu\lambda} \Gamma^\mu{}_{\gamma\eta} - \Gamma^\gamma{}_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\mu{}_{\gamma\eta}, \quad (\text{B.31})$$

acrescentando a diferença  $\Gamma^\gamma{}_{\eta\lambda} \delta \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\eta\lambda} \delta \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu}$

$$\begin{aligned} \delta R^\mu{}_{\nu\eta\lambda} &= \partial_\eta \delta \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\eta} \delta \Gamma^\gamma{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\gamma{}_{\nu\eta} \delta \Gamma^\mu{}_{\gamma\lambda} - \Gamma^\gamma{}_{\eta\lambda} \delta \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu} \\ &\quad - (\partial_\lambda \delta \Gamma^\mu{}_{\nu\eta} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\lambda} \delta \Gamma^\gamma{}_{\nu\eta} - \Gamma^\gamma{}_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\mu{}_{\gamma\eta} - \Gamma^\gamma{}_{\eta\lambda} \delta \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu}), \end{aligned}$$

$$\delta R^\mu{}_{\nu\eta\lambda} = \nabla_\eta (\delta \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}) - \nabla_\lambda (\delta \Gamma^\mu{}_{\nu\eta}), \quad (\text{B.32})$$

pois a derivada covariante é dada por  $\nabla_\mu T^\nu{}_{\eta\dots} = \partial_\mu T^\nu{}_{\eta\dots} + \Gamma^\nu{}_{\gamma\mu} T^\gamma{}_{\eta\dots} + \dots - \Gamma^\gamma{}_{\eta\mu} T^\nu{}_{\gamma\dots} - \dots$ .

Contraindo  $\mu$  com  $\eta$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda}). \quad (\text{B.33})$$

Finalmente, podemos substituir este resultado na integral em estudo

$$(\delta S)_3 = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} [\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda})] d^4x, \quad (\text{B.34})$$

$$(\delta S)_3 = \int \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu{}_{\mu\nu}) d^4x. \quad (\text{B.35})$$

Além disso, o teorema da divergência nos permite avançar

$$\int \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu{}_{\mu\nu}) d^4x = \int \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu{}_{\mu\nu}) d^3x. \quad (\text{B.36})$$

Obtemos ali uma variação de derivadas da métrica que quando consideradas no limite da superfície da variedade devem desaparecer. Portanto, a integral  $(\delta S)_3$  não interfere no cálculo do tensor de Einstein.

Restam somente as integrais  $(\delta S)_1$  e  $(\delta S)_2$  a serem somadas

$$\delta S = \int \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\eta} g^{\nu\lambda} \delta g_{\eta\lambda} \right) d^4x, \quad (\text{B.37})$$

$$\delta S = \int \left( \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} d^4x, \quad (\text{B.38})$$

$$\delta S = - \int \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} d^4x, \quad (\text{B.39})$$

$$\delta S = \int \left( -\sqrt{-g} G^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{B.40})$$

Pelo o Princípio Variacional, esta integral deve ser nula. Fato que só se verifica se

$$-\sqrt{-g} G^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.41})$$

para  $g_{\mu\nu}$  arbitrário, além disso,

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.42})$$

A quantidade  $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - 1/2Rg^{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein. A equação (B.41) é a equação de campo de Einstein para o vácuo. O tensor de Einstein encontrado é escrito em termos do escalar de Ricci, tensor de Ricci e o tensor métrico, e cada um desses tensores são construídos sobre derivadas segundas do tensor métrico, além disso, a derivada covariante do tensor de Einstein se anula. Portanto, o tensor de Einstein é um bom candidato para ser usado ao lado esquerdo da equação (B.2). Não há impedimentos de igualar o tensor de Einstein a um produto de uma constante com o tensor energia momento. Para isso, basta incluir na expressão da ação uma lagrangiana do tipo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{HE} + \kappa\mathcal{L}_M, \quad (\text{B.43})$$

onde  $\mathcal{L}_{HE}$  é a lagrangiana de Hilbert-Einstein e  $\kappa\mathcal{L}_M$  é a lagrangiana de matéria. A constante  $\kappa$  está incluída para que as duas lagrangianas tenham as mesmas unidades. Quando incluídas numa integral de ação, devemos obter

$$-\sqrt{-g}G^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\kappa\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (\text{B.44})$$

Assumindo que a derivada de Euler-Lagrange da lagrangiana de matéria seja o tensor energia momento, obtemos

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (\text{B.45})$$

ou na forma covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.46})$$

As equações (B.45) e (B.46) são as equações de Einstein na forma contravariante e covariante, respectivamente. Para determinar a forma da constante  $\kappa$  o tensor energia-momento que descreve matéria incoerente,  $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$ , pode ser útil. E em seguida reescrever a equação de campo de Einstein de forma equivalente; para isso basta contrair a equação (B.46)

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)g^{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.47})$$

$$R - \frac{1}{2}R\left(g^{00}g_{00} + g^{11}g_{11} + g^{22}g_{22} + g^{33}g_{33}\right) = \kappa T, \quad (\text{B.48})$$

$$R - \frac{4}{2}R = \kappa T, \quad (\text{B.49})$$

$$R = -\kappa T. \quad (\text{B.50})$$

Portanto, tendo a contração (B.50) em mente, podemos reconstruir a equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right). \quad (\text{B.51})$$

Tendo em observância o Princípio da Correspondência, esta equação deve tomar a forma clássica no limite newtoniano. A métrica de pequenas distorções no espaço-tempo e estática (algo próximo a métrica de Minkowski), matéria incoerente e a componente 00 da equação (B.51) são suficientes para obtermos a expressão e a forma da constante desejadas. A componente  $T_{00}$  é obtida da seguinte forma

$$T_{00} = \rho u_0 u_0 = \rho g_{00} u^0 u_0, \quad (\text{B.52})$$

$$T_{00} = \rho. \quad (\text{B.53})$$

Retornando a equação (B.51), com as componentes 00 somente

$$R_{00} = \kappa \left( T_{00} - \frac{1}{2} T_{00} g^{00} g_{00} \right), \quad (\text{B.54})$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \kappa \rho. \quad (\text{B.55})$$

Temos uma expressão que relaciona derivadas de segunda ordem sobre a métrica a uma densidade de energia. Para deixar de modo mais explícito, trabalha-se com as definições do tensor de Ricci

$$R_{00} = R_{0i0}^i = \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{i0}^i + \Gamma_{i\lambda}^i \Gamma_{00}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^i \Gamma_{i0}^\lambda, \quad (\text{B.56})$$

onde a derivada  $\partial_0$  é do tipo temporal sobre um campo estático no tempo, portanto é nula, e os símbolos de Christoffell ao quadrado,  $\Gamma^2$ , são quantidades pequenas pois representam derivadas da geometria de um campo quase plano elevados ao quadrado. Se  $\Gamma$  é uma quantidade pequena,  $\Gamma^2$  pode ser negligenciado sem problemas. Da equação (B.56) resta

$$R_{00} = \partial_i \Gamma_{00}^i, \quad (\text{B.57})$$

aplicando a definição do símbolo de Christoffell

$$R_{00} = \partial_i \left[ \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{0\lambda} + \partial_0 g_{0i} - \partial_\lambda g_{00}) \right], \quad (\text{B.58})$$

resta aqui definir a forma de  $g_{\mu\nu}$ . Já foi dito que o tensor métrico considerado aqui é quase plano, portanto

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{B.59})$$

onde  $h_{\mu\nu}$  é uma pequena perturbação da métrica de Minkowski:  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Com isso a equação (B.58) é modificada para

$$R_{00} = \partial_i \left[ -\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_\lambda \eta_{00} + \partial_\lambda h_{00}) \right], \quad \lambda \longrightarrow \text{índice mudo}, \quad (\text{B.60})$$

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00}, \quad (\text{B.61})$$

pois  $\eta_{00}$  é a componente de uma métrica constante,

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}. \quad (\text{B.62})$$

Substituindo (B.62) em (B.55)

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa\rho. \quad (\text{B.63})$$

Comparando a equação (B.63) com a equação de Poisson (B.1) suspeita-se que a constante  $\kappa$  deve incluir as quantidades  $\pi G$ , restando saber qual o número que as acompanha. Para tanto, investiguemos a forma da perturbação  $h_{00}$ .

Na Relatividade Geral temos a questão:

*Como a curvatura do espaço-tempo atua sobre a matéria para manifestar-se como gravidade?*

Para responder essa questão precisamos obter uma equação que descreva uma geodésica que está submetida a geometria do espaço-tempo. Um partícula livre em um espaço-tempo plano se move em linhas retas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0. \quad (\text{B.64})$$

Para  $x^\mu$  parametrizado por  $\lambda$ . Para a equação (B.64) ser completamente tensorial é preciso generalizá-la para outros tipos de coordenadas curvilíneas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \longrightarrow \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (\text{B.66})$$

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\eta} \frac{dx^\eta}{d\lambda} \right), \quad (\text{B.67})$$

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\eta} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\eta}{d\lambda}, \quad (\text{B.68})$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\eta} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\eta}{d\lambda} = 0. \quad (\text{B.69})$$

A equação (B.69) é a expressão para as geodésicas submetidas a geometria do espaço-tempo. Suposições clássicas sobre o tensor métrico já foram feitas, para simplificar mais o nosso caso, supomos uma partícula livre que se move vagarosamente, o que significa  $dx^i/d\tau \ll dt/d\tau$ , e implica a seguinte equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad \lambda \longrightarrow \tau \quad \text{e} \quad x^0 \longrightarrow t. \quad (\text{B.70})$$

Ao aplicarmos a definição do símbolo de Christoffel, encontramos

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00}. \quad (\text{B.71})$$

Para obter  $g^{\mu\nu}$  basta seguir o que foi feito para se chegar a equação (B.28) ( $h^{\mu\nu} \longleftrightarrow \delta g^{\mu\nu}$ ), assim

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (\text{B.72})$$

Substituindo (B.72) em (B.71)

$$\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\partial_b(\eta_{00} + h_{00}), \quad (\text{B.73})$$

$$\Gamma^a{}_{00} = -\frac{1}{2}\left(\eta^{ab}\partial_b\eta_{00} + \eta^{ab}\partial_b h_{00} - h^{ab}\partial_b\eta_{00} - h^{ab}\partial_b h_{00}\right), \quad (\text{B.74})$$

onde  $\eta_{00}$  é uma componente do tensor métrico plano e  $h^{\mu\nu}$  é um valor muito pequeno em comparação a  $\eta^{\mu\nu}$ , portanto

$$\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}. \quad (\text{B.75})$$

As componentes tipo espaço são  $\mu = i$ , além disso  $\eta^{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ , portanto, substituindo (B.75) em (B.70)

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \partial_i h_{00}, \quad (\text{B.76})$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \quad (\text{B.77})$$

na forma clássica, a equação (B.77) tem a seguinte forma

$$\vec{a} = -\nabla\Phi, \quad (\text{B.78})$$

e então temos ao fim

$$h_{00} = -2\Phi. \quad (\text{B.79})$$

Retornando a equação (B.63)

$$\nabla^2\Phi = \frac{\kappa}{2}\rho, \quad (\text{B.80})$$

para obtermos a relação da equação de Poisson (B.1)

$$\kappa = 8\pi G, \quad (\text{B.81})$$

terminando de determinar boa parte das equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (\text{B.82})$$

## B.1 A Constante Cosmológica $\Lambda$

A constante cosmológica foi originalmente adicionada às equações de Einstein como um fator improvisado. Naquele tempo, Einstein e outros acreditavam em um universo estático. Na verdade, a constante  $\Lambda$  foi imposta para evitar o colapso do universo devido a atração da gravidade. A equação (B.82) obtida por Einstein prevê um universo dinâmico.

Portanto, a equação (B.82) foi ajustada para concordar com as previsões de um universo estático. Contudo, as observações de Hubble provaram que o universo está em expansão, Einstein descartou o seu modelo cosmológico estático e descreveu esse ato como o “maior erro” de sua vida.

Entretanto, recentemente, observações indicam que algum tipo de energia de vácuo atua no universo, fazendo com que ele se expanda aceleradamente. A constante cosmológica volta à cena como uma candidata a explicar essa aceleração. Então, a lagrangiana proposta para o nosso caso tem a forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \kappa \mathcal{L}_M, \quad (\text{B.83})$$

à luz do procedimento usado para obter (B.46), obtemos a equação de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (\text{B.84})$$

e determinamos a forma da densidade de energia do vácuo

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (\text{B.85})$$

# APÊNDICE C – A representação das tetradas

Por vezes é laborioso calcular as componentes do tensor de Ricci, é, portanto, importante considerar outras ferramentas matemáticas para calcular tais componentes mais facilmente. Uma delas é a expressão do tensor curvatura na forma das tetradas [82].

Introduzindo um conjunto de 4-vetores coordenados linearmente independentes  $e^i_{(a)}$  (indexado por  $a$ ) e sujeito a condição

$$e^i_{(a)}e_{(b)i} = \eta_{ab}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\eta_{ab}$  é o tensor métrico de Minkowski:  $\eta_{ab} = (+ - - -)$  com  $\eta_{ab}\eta^{bc} = \delta_a^c$ . Junto às essas condições temos o vetor tetrado recíproco  $e^{(a)i}$ , com as mesmas condições

$$e^{(a)}_i e^i_{(b)} = \delta_b^a, \quad (\text{C.2})$$

*i. e.*,  $e^{(a)}_i$  e  $e^i_{(b)}$  são ortogonais entre si. Multiplicando (C.2) com  $e^k_{(a)}$  obtemos

$$(e^k_{(a)}e^{(a)}_i)e^i_{(b)} = \delta_b^a e^k_{(a)}, \quad (\text{C.3})$$

$$(e^k_{(a)}e^{(a)}_i)e^i_{(b)} = e^k_{(b)}, \quad (\text{C.4})$$

que só pode ser verdadeiro se

$$e^k_{(a)}e^{(a)}_i = \delta_i^k. \quad (\text{C.5})$$

Agora, procedendo com a seguinte multiplicação

$$e^i_{(a)}e_{(c)i}\eta^{bc} = \eta_{ac}\eta^{bc}, \quad (\text{C.6})$$

$$e^i_{(a)}(\eta^{bc}e_{(c)i}) = \delta_a^b. \quad (\text{C.7})$$

Comparando (C.7) com (C.2), encontramos que

$$e^{(b)}_i = \eta^{bc}e_{(c)i}, \quad e_{(b)i} = \eta_{bc}e^{(c)}_i. \quad (\text{C.8})$$

Agora sabemos como elevar e rebaixar índices dos tensores nesse contexto, usando o tensor métrico de Minkowski. A importância das tetradas é justificada porque conseguimos expressar o tensor métrico em termos dele, veja

$$e^{(a)}_i = g_{il}e^{(a)l}. \quad (\text{C.9})$$

Multiplicando a equação acima por  $e_{(a)k}$ , usando (C.5) e (C.8) prosseguimos para

$$e^{(a)}_i e_{(a)k} = g_{il} e^{(a)l} e_{(a)k}, \quad (\text{C.10})$$

$$e^{(a)}_i e^{(b)}_k \eta_{ab} = g_{il} \delta^l_k, \quad (\text{C.11})$$

$$g_{ik} = \eta_{ab} e^{(a)}_i e^{(b)}_k. \quad (\text{C.12})$$

Lembre-se do elemento de linha  $ds$

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (\text{C.13})$$

substituindo o tensor métrico acima por (C.12)

$$ds^2 = \eta_{ab} (e^{(a)}_i dx^i) (e^{(b)}_k dx^k), \quad (\text{C.14})$$

onde  $\theta^a = e^{(a)}_i dx^i$ , por isso

$$ds^2 = \eta^{ab} \theta^a \theta^b. \quad (\text{C.15})$$

As componentes tetradas do 4-vetor  $A^i$  são definidas pelas suas “projeções” sobre os 4-vetores coordenados

$$A_{(a)} = e^i_{(a)} A_i, \quad A^{(a)} = e^{(a)}_i A^i = \eta^{ab} e_{(b)i} A^i = \eta^{ab} A_{(b)}, \quad (\text{C.16})$$

ou, escrevendo os vetores na base tetrada

$$A_i = e^{(a)}_i A_{(a)}, \quad A^i = e^i_{(a)} A^{(a)}. \quad (\text{C.17})$$

No mesmo caminho, definimos a operação da “diferenciação ao longo da direção  $a$ ”

$$\phi_{,(a)} = e^i_{(a)} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (\text{C.18})$$

Agora introduzimos o seguinte

$$\gamma_{abc} = e_{(a)i;k} e^i_{(b)} e^k_{(c)}, \quad (\text{C.19})$$

onde ; representa uma derivada covariante, e suas combinações lineares

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = (e_{(a)i;k} - e_{(a)k;i}) e^i_{(b)} e^k_{(c)}, \quad (\text{C.20})$$

que pode ser simplificado para uma derivada parcial

$$\lambda_{abc} = (e_{(a)i;k} - e_{(a)k;i}) e^i_{(b)} e^k_{(c)}. \quad (\text{C.21})$$

Para construir as componentes tetradas do tensor curvatura procedemos com<sup>1</sup>

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m{}_{ikl}, \quad (\text{C.22})$$

onde  $A_i$  é um vetor que é carregado ao longo de uma trajetória fechada, e  $R^m{}_{ikl}$  é o tensor de Riemann que dá a curvatura da trajetória. Importando, portanto, este resultado para o nosso caso

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = e^m{}_{(a)} R_{mikl}, \quad (\text{C.23})$$

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = R_{(a)ikl}, \quad (\text{C.24})$$

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = (e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k}) e^i{}_{(b)} e^k{}_{(c)} e^l{}_{(d)}. \quad (\text{C.25})$$

Agora reescrevemos (C.19)

$$\gamma_{abc} e^{(b)}{}_l e^{(c)}{}_j = e_{(a)i;k} e^i{}_{(b)} e^k{}_{(c)} e^{(c)}{}_j, \quad (\text{C.26})$$

$$\gamma_{abc} e^{(b)}{}_l e^{(c)}{}_j = e_{(a)i;k} \delta_l^i \delta_j^k, \quad (\text{C.27})$$

$$\gamma_{abc} e^{(b)}{}_i e^{(c)}{}_k = e_{(a)i;k}. \quad (\text{C.28})$$

Com todos esses resultados podemos escrever o tensor de Riemann em termos de  $\gamma_{abc}$

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}(\gamma^f{}_{cd} - \gamma^f{}_{dc}) + \gamma_{afc}\gamma^f{}_{bd} - \gamma_{afd}\gamma^f{}_{bc}, \quad (\text{C.29})$$

onde  $\gamma^a{}_{bc} = \eta^{ad}\gamma_{dbc}$ . O tensor de Ricci é dado, portanto,

$$R_{(a)(b)} = R^{(f)}{}_{(a)(f)(b)} = \eta^{ef} R_{(e)(a)(f)(b)}, \quad (\text{C.30})$$

$$R_{(a)(b)} = -\frac{1}{2}(\lambda_{ab}{}^c{}_{,c} + \lambda_{ba}{}^c{}_{,c} + \lambda^c{}_{ca,b} + \lambda^c{}_{cb,a} + \lambda^{cd}{}_b \lambda_{cda} + \lambda^{cd}{}_b \lambda_{dca} - \frac{1}{2}\lambda_b{}^{cd} \lambda_{acd} + \lambda^c{}_{cd} \lambda_{ab}{}^d + \lambda^c{}_{cd} \lambda_{ba}{}^d). \quad (\text{C.31})$$

<sup>1</sup> Resultado que pode ser consultado no livro Landau & Lifshitz, equação (96.1).

# Referências

- [1] D. H. Frish e J. H. Smith, *Measurement of the relativistic time dilation using  $\mu$ -mesons*, Am. J. Phys. **31**, 342 (1963).
- [2] N. Ashby, *Relativity in the Global Positioning System*, Liv. Rev. Rel. **6**, 1 (2003).
- [3] P. G. Hewitt, *Física Conceitual*. Bookman, 2002.
- [4] S. M. Carroll, *An introduction to general relativity, spacetime and geometry*. Addison Wesley, 2004.
- [5] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. of Mod. Phys. **21**, 447 (1949).
- [6] S. W. Hawking, *Chronology protection conjecture*, Phys. Rev. D **46**, 603 (1991).
- [7] S. Perlmutter, *et. al.*, *Measurements of omega and lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [8] A. G. Riess, *et. al.*, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).
- [9] A. G. Riess, *et al.*, *Type Ia supernova discoveries at  $z > 1$  from the Hubble space telescope: evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*, Astrophys. J. **607**, 665 (2004).
- [10] D. J. Eisenstein, *et al.*, *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies*, Astrophys. J. **633**, 560 (2005).
- [11] P. Astier, *et al.*, *The supernova legacy survey: measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set*, Astr. Astrophys. **447**, 31 (2006).
- [12] D. N. Spergel, *et al.*, *Three-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: implications for cosmology*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **170**, 377 (2007).
- [13] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. of Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [14] S. M. Carroll, *The cosmological constant*, Liv. Rev. Rel. **4**, 1 (2001).
- [15] J. Martin, *Quintessence: a mini review*, Mod. Phys. Lett. A **23**, 17 (2008)
- [16] S. Capozziello, S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Unified phantom cosmology: Inflation, dark energy and dark matter under the same standard*, Phys. Lett. B **632**, 597 (2005).

- 
- [17] T. Chiba, T. Okabe e M. Yamaguchi, *Kinetically driven quintessence*, Phys. Rev. D **62** 023511 (2000).
- [18] T. Padmanabhan e T. R. Choudhury, *Can the clustered dark matter and the smooth dark energy arise from the same scalar field?*, Phys. Rev. D **66**, 081301 (2002).
- [19] M. C. Bento, O. Bertolami e A. S. Sen, *Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification*, Phys. Rev. D **66**, 043507 (2002).
- [20] T. P. Sotiriou e V. Faraoni,  *$f(R)$  theories of gravity*, Rev. of Mod. Phys. **82**, 451 (2010).
- [21] T. P. Sotiriou, *6+1 lessons from  $f(R)$  gravity*, J. Phys.: Conf. Ser. **189**, 012039 (2009).
- [22] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov e A. Troisi, *Cosmological viability of  $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase*, Phys. Lett. B **639**, 135 (2006).
- [23] L. Amendola, D. Polarski e S. Tsujikawa, *Are  $f(R)$  dark energy models cosmologically viable?*, Phys. Rev. Lett **98**, 131302 (2007).
- [24] O. Mena, J. Santiago e J. Weller, *Constraining inverse-curvature gravity with supernovae*, Phys. Rev. Lett. **96**, 041103 (2006).
- [25] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, M. S. Turner, *Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?*, Phys. Rev. D **70**, 043528 (2004).
- [26] S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration*, Phys. Rev. D **68**, 123512 (2003).
- [27] T. Chiba,  *$1/R$  gravity and scalar-tensor gravity*, Phys. Lett. B **575** 1 (2003).
- [28] C. G. Böhmmer, L. Hollenstein e F. S. N. Lobo, *Stability of the Einstein static universe in  $f(R)$  gravity*, Phys. Rev. D **76**, 084005 (2007).
- [29] N. J. Poplawski, *A lagrangian description of interacting dark energy*, arXiv:gr-qc/0608031.
- [30] T. Harko, F. S. N. Lobo, S. Nojiri, S. D. Odintsov,  *$f(R, T)$  gravity*, Phys. Rev. D **84**, 024020 (2011).
- [31] S. I. Vacaru, E. V. Veliev e E. Yazici, *A geometric method of constructing exact solutions in modified  $f(R, T)$ -gravity with Yang-Mills and Higgs interactions*, Int. Jour. Geom. Meth. Mod. Phys. **11**, 145008 (2014).

- [32] S. Chakraborty, *An alternative  $f(R, T)$  gravity theory and the dark energy problem*, Gen. Rel. Grav. **45**, 2039 (2013).
- [33] M. Sharif e M. Zubair, *Cosmological reconstruction and stability in  $f(R, T)$  gravity*, Gen. Relativ. Gravit. **46**, 1723 (2014).
- [34] M. F. Shamir e Z. Raza, *Cylindrically symmetric solution  $f(R, T)$  gravity*, Astrophys. Space Sci. **355**, 2192 (2014).
- [35] C. P. Singh e V. Singh, *Friedmann cosmology with particle creation in modified  $f(R, T)$  gravity*, arXiv:1408.0633.
- [36] B. Saha, *Interacting scalar and electromagnetic fields in  $f(R, T)$  theory of gravity*, arXiv:1410.1738.
- [37] P. K. Sahoo, B. Mishra e S. K. Tripathy, *Kaluza-Klein cosmological model in  $f(R, T)$  gravity with  $\Lambda(T)$* , arXiv:1411.4735.
- [38] D. R. K. Reddy, R. L. Naidu, K. D. Naidu e T. R. Prasad, *Kaluza-Klein universe with cosmic strings and bulk viscosity in  $f(R, T)$  gravity*, Astrophys. Space Sci. **346**, 261 (2013).
- [39] M. J. Rebouças e J. Santos, *Gödel-type universes in  $f(R)$  gravity*, Phys. Rev. D **80**, 063009 (2009).
- [40] C. F. Ferst e A. F. Santos, *Gödel-type solution in  $f(R, T)$  modified gravity*, arXiv:1411/1002.
- [41] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill, 1975.
- [42] K. Özgören, *Gödel's metric and its generalization*. Dissertação - Middle East Technical University. Turquia, Setembro 2005.
- [43] S. W. Hawking e G. F. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1994.
- [44] M. Buser, E. Kaja e W. P. Schleich, *Visualization of the Gödel universe*, New Jour. of Phys. **15** 013063 (2013).
- [45] J. Santos, M. J. Rebouças e T. B. R. F. Oliveira, *Gödel-type universes in Palatini  $f(R)$  gravity*, Phys. Rev. D **81**, 123017 (2010).
- [46] A. F. Santos, *Gödel solution in  $f(R, T)$  gravity*, Mod. Phys. Let. A **32**, 1350141 (2013).

- [47] C. Furtado, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov e A. F. Santos, *Horava-Lifshitz gravity and Gödel universe*, Phys. Rev. D **84**, 047702 (2011).
- [48] J. B. Fonseca-Neto, A. Yu. Petrov, M. J. Rebouças, *Gödel-type universes and chronology protection in Horava-Lifshitz gravity*, Phys. Lett. B **725**, 412 (2013).
- [49] C. Furtado, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov e A. F. Santos, *Gödel solution in modified gravity*, Phys. Rev. D **79**, 124039 (2009).
- [50] C. Furtado, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov e A. F. Santos, *The Gödel metric in the Chern-Simons modified gravity*, Int. Jour. Mod. Phys. **18**, 145 (2012).
- [51] M. J. Rebouças e J. Tiomno, *Homogeneity of Riemannian space-times of Gödel type*, Phys. Rev. D **28**, 1251 (1983).
- [52] A. K. Raychaudhuri e S. N. G. Thakurta, *Homogeneous spacetimes of the Gödel type*, Phys. Rev. D **22**, 802 (1980).
- [53] W. Rindler, *Gödel, Einstein, Mach, Gamow and Lanczos: Gödel's remarkable excursion into cosmology*, Am. J. Phys. **77**, 498 (2009).
- [54] R. Utiyama e B. S. DeWitt *Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields*, J. Math. Phys. **8**, 608 (1962).
- [55] K. S. Stelle *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [56] F. Zwicky, *Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln*, Helv. Phys. Acta **6**, 110 (1933).; *Republication of: The redshif of extragalactic nebulae*, Gen. Rel. Gravit. **41**, 207 (2009).
- [57] V. C. Rubin e W. K. Ford Jr., *Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions*, Astrophys. J. **159**, 379 (1970).
- [58] P. A. R. Ade, et al., *Planck 2013. I. Overview of products and scientific results*, Astro. Astrophys. **571**, A1 (2014).
- [59] C. Barragán, G. J. Olmo e H. Sanchis-Alepuz, *Avoiding the Big Bang singularity with Palatini  $f(R)$  theories*, arXiv:1002.3919.
- [60] K. Enqvist e H. J. Nyrhinen, *Binary systems in Palatini  $f(R)$  gravity*, Phys. Rev. D **88**, 104008 (2013).
- [61] N. Pires, J. Santos e J. S. Alcaniz, *Cosmographic constraints on a class of Palatini  $f(R)$  gravity*, Phys. Rev. D **82**, 067302 (2010).

- [62] A. S. Sefiedgar, K. Atazadeh e H. R. Sepangi, *Generalized virial theorem in Palatini  $f(R)$  gravity*, Phys. Rev. D **80**, 064010 (2009).
- [63] G. J. Olmo e H. Sanchis-Alepuz, *Hamiltonian formulation of Palatini  $f(R)$  theories à la Brans-Dicke theory*, Phys. Rev. D **83**, 104036 (2011).
- [64] V. Reijonen, *On white dwarfs and neutrons stars in Palatini  $f(R)$  gravity*, arXiv:0912.0825.
- [65] G. J. Omo e D. Rubiera-Garcia, *Palatini  $f(R)$  black holes in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D **84**, 124059 (2011).
- [66] V. Faraoni, *Palatini  $f(R)$  gravity as a fixed point*, Phys. Lett. B **665**, 135 (2008).;
- [67] S. Capozziello e S. Vignolo, *Metric-affine  $f(R)$ -gravity with torsion: an overview*, Ann. Phys. **19**, 238 (2010).
- [68] S. Capozziello, R. Cianci, M. De Laurentis e S. Vignolo, *Testing metric-affine  $f(R)$ -gravity by relic scalar gravitational waves*, Eur. Phys. Jour. C **70**, 341 (2010).
- [69] S. Capozziello e S. Vignolo, *The Cauchy problem for metric-affine  $f(R)$ -gravity in presence of perfect-fluid matter*, Class. Quantum Grav. **26**, 175013 (2009).
- [70] S. Capozziello e S. Vignolo, *The Cauchy problem for metric-affine  $f(R)$ -gravity in presence of a Klein-Gordon scalar field*, Int. Jour. Geom. Meth. Mod. Phys. **8**, 167 (2011).
- [71] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's relativity*. Oxford University Press Inc., New York 1998.
- [72] V. M. Bragança, *Singularidades em teorias  $f(R)$  da gravitação*. Dissertação - Instituto de Física UFRJ. Rio de Janeiro - Brasil, Janeiro 2010.
- [73] O. Bertolami, C. G. Böhmer, T. Harko, F. S. N. Lobo, *Extra force in  $f(R)$  modified theories of gravity*, Phys. Rev. D **75**, 104016 (2007).
- [74] E. V. Linder, *Einstein's other gravity and acceleration of the universe*, Phys Rev. **81**, 127301 (2010).
- [75] J. Barrientos O. e G. F. Rubilar, *Comment on “ $f(R, T)$  gravity”*, Phys. Rev. D **90** 028501 (2014).
- [76] F. G. Alvarenga, A. de la Cruz-Dombriz, M. J. S. Houndjo, M. E. Rodrigues e D. Sáez-Gómez, *Dynamics of scalar perturbations in  $f(R, T)$  gravity*, Phys. Rev. D **87**, 103526 (2013).

- 
- [77] V. Singh e C. P. Singh, *Modified  $f(R, T)$  gravity theory and scalar field cosmology*, *Astrophys. Space Sci* **355**, 2183 (2014).
- [78] M. J. S. Houndjo, *Reconstruction of  $f(R, T)$  gravity describing matter dominated and accelerated phases*, *Int. J. Mod. Phys. D* **21**, 125003 (2012).
- [79] C. P. Singh e V. Singh, *Reconstruction of modified  $f(R, T)$  gravity with perfect fluid cosmological models*, *Gen. Rel. Grav.* **46**, 1696 (2014).
- [80] M. Jamil, D. Momeni e R. Myrzakulov, *Violation of the first law of thermodynamics in  $f(R, T)$  gravity*, *Chin. Phys. Lett.* **29**, 109801 (2012).
- [81] M. Sharif e M. Zubair, *Thermodynamics in  $f(R, T)$  theory of gravity*, *J. Cosmo. Astrop. Phys.* **03**, 028 (2012).
- [82] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics volume 2: the classical theory of fields*. Butterworth-Heinemann, 1996.