UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

EVILÁSIO JOSÉ DE ARRUDA

A CONCEPÇÃO DE JACOB KLEIN SOBRE A TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA NA ÉPOCA DO RENASCIMENTO E SUAS IMPLICAÇÕES PARA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CUIABÁ-MT

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

EVILÁSIO JOSÉ DE ARRUDA

A CONCEPÇÃO DE JACOB KLEIN SOBRE A TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA NA ÉPOCA DO RENASCIMENTO E SUAS IMPLICAÇÕES PARA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CUIABÁ-MT

2014

EVILÁSIO JOSÉ DE ARRUDA

A CONCEPÇÃO DE JACOB KLEIN SOBRE A TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA NA ÉPOCA DO RENASCIMENTO E SUAS IMPLICAÇÕES PARA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Mato Grosso como requisito para obtenção do título de Doutor em Educação na Área de Concentração: Cultura, Memória e Teorias em Educação, Grupo de Pesquisa em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Michael Friedrich Otte

CUIABÁ-MT

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

A779c Arruda, Evilásio José de.

A concepção de Jacobe Klein sobre a transição da Aritmética na época do Renascimento e suas implicações para Educação Matemática / Evilásio José de Arruda. -- 2014.

381 f. : il. Color. ; 30 cm

Orientador: Michael Friedrich Otte.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Mato Grosso,

Instituto de Educação, programa de Pós-Graduação em Educação, Cuiabá, 2014.

Inclui bibliografia.

1. Aritmética. 2. Álgebra. 3. Educação Matemática. 4. Complementaridade. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo (a) autor (a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
Avenida Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - Cep: 78060900 - CUIABÁ/MT
Tel : 3615-8431/3615-8429 - Email : secppge@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: "A concepção de Jacob Klein sobre a transição da aritmética na época do renascimento e suas implicações para educação matemática"

AUTOR: Doutorando Evilasio Jose de Arruda

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 27 de novembro de 2014.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca / Orientador Doutor Michael Friedrich Otte
Instituição: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinador Interno Doutor Alexandre Silva Abido
Instituição: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinadora Interna Doutora Gladys Denise Wielewski
Instituição: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinador Externo Doutor Marcos Francisco Borges
Instituição: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO

Examinador Externo Doutor Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Instituição: UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO

Examinador Suplente Doutor Sergio Antonio Wielewski
Instituição: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinadora Suplente Doutora Tânia Maria Mendonça Campos
Instituição: UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO

CUIABÁ, 27/11/2014.

DEDICATÓRIA

A minha eterna esposa/namorada DEBORAH que compartilha, me abriga e me acalenta com sua imensa sabedoria ...

Me mostra a beleza do contínuo e do discreto ...

Do finito ao infinito ...

Do particular, do geral e até do universal (o ‘x’) ...

Do objeto e do símbolo, pois suas opiniões ...

São sensatas e belas como o pôr do sol ...

Por seu carinho, boa vontade, paciência, formosura, boniteza e compreensão ...

Pelo seu amor ...

EVILÁSIO

AGRADECIMENTOS

A Deus por estar vivo e ter me oferecido a oportunidade de conhecer **Michael Otte** que é sincero, coerente e sábio, pelo qual sinto apreço e muita amizade, pois teve paciência e disponibilidade para me fazer enxergar não apenas um mundo novo na construção de conceitos da Matemática e da Educação Matemática, mas também valores para a vida. Visto que quando se fala em Matemática tratamos de vida, de um organismo dinâmico em que os seus objetos nos permitem interagir com o mundo possibilitando mudança de olhar sobre si mesmo e sobre as coisas. Na História do desenvolvimento da Matemática tivemos gigantes que a seu modo perceberam com profundidade essa potência, como por exemplo, Platão, Aristóteles, Descartes, Newton, Kant, etc. Contudo, a forma única de interpretar e criar novos conceitos sobre os objetos e objetividade da Matemática do ponto de vista epistemológico e histórico atualmente encontra-se na produção científica do meu eterno orientador **Michael Otte**, pois este a meu ver é um gigante que indica, mostra ou mesmo 'aponta com o dedo', 'o *lócus*' da beleza dos objetos da Matemática. Muito, mais muito obrigado mesmo!

Aos professores Doutores, Alexandre Silva Abido, Gladys Denise Wielewski, Luiz Gonzaga Xavier de Barros, Marcos Francisco Borges, Tânia Maria Mendonça Campos e Sérgio Antônio Wielewski que prontamente se colocaram à disposição neste processo avaliativo de doutoramento e consequentemente de forma muito competente indicaram caminhos bem como compartilharam sua sabedoria no desenvolvimento deste estudo. Muito obrigado!

Ao professor de Filosofia Dr. Burt Crowell Hopkins da Universidade de Seattle que estuda Jacob Klein e a fenomenologia de Husserl, pois gentilmente me enviou textos e referências fundamentais sobre a produção acadêmica de Jacob Klein. Muito obrigado!

A Jacqueline Borges de Paula, minha parceira de estudo que leu sistematicamente bem como contribuiu significativamente tanto do ponto de vista da forma como do conteúdo com esta produção. Muito obrigado!

Aos professores Nicanor Palhares, Kátia Alonso, Michèle Sato e Luiz Passos do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso por compartilharem, por meio de suas ideias, um pouco de sua experiência acadêmica. Muito obrigado!

Aos professores do curso de doutorado do Reamec/UFMT liderado pela professora Marta Maria Pontin Martin Darsie e Gladys Denise Wielewski que em suas disciplinas me ajudou a ‘ampliar’ o entendimento das Ciências como um todo. Muito Obrigado!

A SEDUC/MT e a SME/Cuiabá por ter me oferecido a oportunidade de dedicar exclusivamente ao estudo. Muito obrigado!

A equipe da escola Rodolfo Augusto e Antônia Tita pelo apoio incondicional nesse processo de pesquisa. Muito obrigado!

Ao Nead/UFMT, liderado pela professora Kátia Alonso que durante processos formativos contribuiu no estudo das Ciências que fundamentam a Educação. Muito Obrigado!

A minha saudosa mãe Maria da Guia de Arruda e ao meu pai Manoel Egídio de Arruda, que sempre me incentivaram e não permitiram que eu abandonasse os estudos.

Desejo que Deus continue iluminando a tod@s.

Resumo

A Educação Matemática é a área do conhecimento em que o ser humano estabelece relação com a Matemática escolar. No entanto, a Matemática, com seu aparato formal, parece oposta à Filosofia, pois a Filosofia constrói significados racionais de conceitos e a Matemática lida com extensões de conceitos. Dessa forma, a Educação Matemática deve estar sob orientação filosófica, visto que essa orientação propicia, ao educador, pensar criticamente num currículo que, de fato, possibilita construção de conhecimento. Esta pesquisa teórico-bibliográfica, histórica e epistemológica objetiva identificar, a partir da obra de Jacob Klein, intitulada 'Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra' (O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra), como os conceitos de números presentes na interação entre Aritmética e Álgebra se estabeleceram e progrediram na relação entre objeto e símbolo, bem como compreender o contexto da transformação conceitual na Física Matemática no que se refere às tensões que ocorreram no momento de transição entre a Matemática grega antiga (descritiva) e o simbolismo algébrico moderno (operativo). A partir da compreensão do pensamento de Klein (1992), referente a conceitos matemáticos presentes em Platão, Diophantus, Stevin, Vieta e Descartes e fundamentado no conceito de Complementaridade do pensamento Otteano (1993;2003) e em Kant (1997), podemos entender que, no início do Simbolismo Algébrico Moderno, está presente a transição entre a noção descritiva para noção operativa dos conceitos matemáticos. Isto nos oferece oportunidade para indicar a relevância do conceito de Complementaridade no que diz respeito aos objetos matemáticos, possibilitando a 'ampliação' dos métodos de ensino.

Palavras-Chave: Aritmética, Álgebra, Educação Matemática, Complementaridade.

Abstract

The Mathematical Education is the area of knowledge in which the human beings establish a correlation with the Mathematics learnt at school. However, Mathematics, with all its formal apparatus, seems opposed to Philosophy, since Philosophy deals with rational meanings of various concepts and Mathematics, in its turn, deals with the extensions of concepts. Thus, the Mathematical Education must be under philosophical orientation; seen that this proper orientation allows the educator to think critically in a course that will, factually, grant the construction of knowledge. This theoretical-bibliographical, historical and epistemological research aims to identify, setting out on the work of Jacob Klein, called 'Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra', how the concepts of numbers present in the interaction of Arithmetic and Algebra establish themselves and progress in the relationship between object and symbol, as well as to identify the context of the conceptual transformation in Mathematical Physics in reference to the tensions that occurred in the moment of transition between the ancient Greek mathematics (descriptive) and the modern algebraic symbolism (operative). Starting on the comprehension of Klein's thought (1922), regarding Mathematical concepts present in Plato, Diophantus, Stevin, Vieta and Descartes and grounded on the concept of Complementarity of Otteano's thinking (1993;2003) and Kant's (1997), one can understand that, in the beginning of the Modern Algebraic Symbolism is present the transition between the descriptive and operative notions of mathematical concepts. Thus, it offers one the opportunity of indicating the relevance of the concept of Complementarity according to mathematical objects, enabling one of expanding its teaching methods.

Key-words: Arithmetic, Algebra, Mathematical Education, Complementarity.

Lista de figuras

Figura 01 – Escola de Atenas *39*

Figura 02 – Imagens de instrumentos que indicam o contexto sócio-histórico da transição do contemplativo (objeto voador de Leonardo da Vinci) para o operativo (carruagem a vela de Stevin) *67*

Figura 03 – Representação da circunferência no plano ‘cartesiano’ por meio de uma equação *85*

Figura 04 – Construção da circunferência por meio do compasso *85*

Figura 05 – Quadrados: duplicação de área *114*

Figura 06 – Triângulos semelhantes *192*

Figura 07 – Triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência *193*

Figura 08 – Resolução da equação $x^2 = ax + b^2$ por meio de construção geométrica *194*

Figura 09 – Demonstração do Teorema de Pitágoras *195*

Figura 10 – Diagrama que representa a Matemática como ‘intersecção-elo’ entre dialética e cosmologia em Platão *203*

Figura 11 – Cubo *205*

Figura 12 – Construção do triângulo equilátero *237*

Figura 13 – Compasso proporcional de Descartes *241*

Figura 14 – Esboço das parábolas $y=x^2$ e $y^2=2x$ *243*

Figura 15 – Construção de quadrados para percepção da irracionalidade *252*

Lista de tabelas

Tabela 01 – Correspondência entre o valor do expoente com o símbolo *151*

Tabela 02 – Concepção de número na transição da visão contemplativa para operativa *184*

Tabela 03 – Medidas das relações entre o lado e a diagonal de um quadrado *254*

Tabela 04 – Computação dos primeiros dígitos do número de Euler *260*

Tabela 05 – Comparação de processos calculativos do número de Euler *263*

Sumário

Resumo......7

Abstract.....8

Lista de figuras.....9

Lista de tabelas......9

Índice.....11

Introdução.....14

Capítulo I: Construção teórica da pesquisa: o conceito de Complementaridade.....31

Capítulo II: Argumentos que fundamentam a concepção da origem do simbolismo algébrico moderno na perspectiva de Jacob Klein.....64

Capítulo III: A transformação estrutural ocorrida nos séculos XVI e XVII em relação à forma de abordar os conceitos matemáticos na perspectiva de Jacob Klein.....128

Capítulo IV: A presença de tensões no estabelecimento de conhecimentos matemáticos.....198

Considerações finais.....266

Referências.....281

Obras consultadas 289

Apêndices......291

Índice

Introdução *14*

Capítulo I: Construção teórica da pesquisa: o conceito de Complementaridade *31*

1.1. Aristóteles e Galileu: perspectivas de entendimento do mundo físico *31*

1.2. O inteligível e o sensível na compreensão de objetos da Matemática *35*

1.3. A concepção de Kant em relação aos objetos da Matemática *39*

1.4. O conceito de Complementaridade no estudo da natureza dos objetos matemáticos *45*

1.4.1. A Complementaridade na construção de conceitos matemáticos presentes nos séculos XVI e XVII *56*

Capítulo II: Argumentos que fundamentam a concepção da origem do simbolismo algébrico moderno na perspectiva de Jacob Klein *64*

2.1. O contexto sócio-histórico do início da simbolização algébrica moderna *64*

2.2. A vida e obra de Jacob Klein *70*

2.2.1. O contexto da obra – 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra' *75*

2.2.2. Husserl, Klein e a simbolização algébrica *78*

2.3. Platão e a Matemática na concepção de Jacob Klein *110*

2.3.1. Aritmética e Logística em Platão *112*

Capítulo III: A transformação estrutural ocorrida nos séculos XVI e XVII em relação à forma de abordar os conceitos matemáticos na perspectiva de Jacob Klein *128*

3.1. A diferença entre a conceitualização antiga e moderna *136*

3.2. A concepção de número em Stevin *141*

3.2.1. A Álgebra de Simon Stevin *150*

3.3. A Aritmética de Diophantus como teoria Logística *155*

3.4. O simbolismo algébrico em Vieta na perspectiva de Jacob Klein *159*

3.5. A concepção de número em Descartes *176*

3.5.1. A interação entre Geometria e Álgebra na Geometria de Descartes *185*

Capítulo IV: A presença de tensões no estabelecimento de conhecimentos matemáticos *198*

4.1. Tensões presentes no pensamento matemático grego e na origem da Álgebra na perspectiva de Jacob Klein *201*

4.2. O simbolismo algébrico como aspecto instrumental e conceitual no início da Ciência moderna *206*

4.3. Reflexões sobre o pensamento de Klein referente ao início da simbolização moderna *221*

4.4. Representação e linguagem de conceitos matemáticos no início do simbolismo algébrico moderno *226*

4.5. Pensamento geométrico: a construção do triângulo equilátero *236*

4.6. O pensamento algébrico como pensamento relacional *238*

4.7. O compasso de Descartes *240*

4.8. Situações que evidenciam a transição do descritivo para o operativo *244*

4.8.1. A resolução de equações por meio do método da falsa posição *244*

4.8.2. Resolução de problemas por Diophantus e Vieta *246*

4.9. A relação entre símbolo e objeto na construção do conceito da irracionalidade *250*

4.9.1. O algoritmo de Euclides e a incomensurabilidade da diagonal do quadrado *252*

4.9.2. A construção geométrica do número de Euler *256*

Considerações finais *266*

Referências *281*

Obras consultadas *289*

Apêndices *291*

A. Glossário – notas da tradutora da obra de Jacob Klein do alemão para a língua inglesa por Eva Brann

B. Vocabulário ligado ao conceito de Complementaridade

C. Índice da obra ‘O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra’

D. Tradução da introdução – Propósito e plano de investigação

E. Tradução do capítulo 09 – Sobre a diferença entre a conceitualização antiga e moderna

F. Tradução do Capítulo 11 – O formalismo de Vieta e a transformação do conceito de *arithmos*

G. Tradução do conceito de número em Stevin

H. Tradução do conceito de número em Descartes

Introdução

A transição da Aritmética para a Álgebra pressupõe compreender a mudança que ocorreu na transformação do conceito de número. Nessa ‘passagem’ de uma Matemática de conceitos inteligíveis para uma Matemática formal está presente tanto o contexto escolar como o histórico e epistemológico, contudo, não há vinculação entre esses contextos, pois o ‘salto’ brusco do ponto de vista apenas da Aritmética generalizada não apresenta argumentos satisfatórios que evidenciam a abordagem algébrica simbólica do conhecimento matemático.

No que diz respeito ao contexto escolar, o professor de Matemática na Educação Básica que estuda a relação da Matemática com a Educação, num determinado momento de sua prática, envolve-se em situações nas quais deve tratar de calculações com variáveis e incógnitas. Nesse processo de reflexão sobre como lidar com a relação entre conceitos aritméticos e algébricos, surge uma espécie de ‘tensão’ do ponto de vista prático e semântico. A ‘ampliação’ do entendimento sobre essa ‘tensão’ dá-se por meio do estudo da relação entre Matemática e Filosofia, pois os conceitos envolvidos no vínculo entre Aritmética e Álgebra, via conceito de número, constituem um subconjunto dessa relação.

A Geometria apresenta situações em que a Aritmética não consegue expressar numericamente determinadas grandezas como, por exemplo, a determinação da medida da diagonal de um quadrado em termos de seu lado e o problema da duplicação do volume de um cubo dado. Nesses contextos, o número é tratado como relação entre grandezas e não grandezas em si. Na relação entre Aritmética e Álgebra há conflitos que envolvem objetos, símbolos, conceitos e métodos que operacionalizam conceitos. Comumente, a Álgebra, no Ensino Básico, é tratada como generalização da Aritmética. Será que isso é suficiente para justificar o tratamento algébrico de situações que envolvem conceitos matemáticos?

Lins e Gimenez (1997) tratam das concepções de Educação Algébrica, indicando que há tendências letristas e a abordagem da Álgebra como Aritmética

generalizada. De forma geral, esses autores consideram a atividade algébrica como um processo de produção de significado para a Álgebra e, nesse caso, a Álgebra consiste num conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado a partir de operações aritméticas, possivelmente, envolvendo relações de igualdades e diferenças. Nessas tendências, há falta de significado estrutural, pois o discente terá dificuldades de 'passar' do concreto para o formal. O pensamento algébrico é um processo ativo, simétrico e assimétrico que emprega aspectos operativos e intuitivos no interior de uma atividade.

Podemos dizer que, no Pensamento Algébrico, há duas perspectivas cognitivas: a Aritmética generalizada e a Análise. A Análise é baseada no Pensamento Relacional. Nas concepções que estão sendo desenvolvidas e aplicadas atualmente, há sempre a presença do conceito de significado. O que devemos entender como produções de significados no contexto do Pensamento Algébrico?

A escola básica, geralmente, tende para o tratamento da Álgebra como Aritmética generalizada; isto é, calcula com números e variáveis, não abordando o 'verdadeiro' significado do Pensamento Algébrico, que é a Análise. A Álgebra estuda relações entre as coisas conhecidas e desconhecidas – é exatamente por meio dessas relações que há a produção do significado.

A Álgebra lida com objetos que não conhecemos como se fossem conhecidos a base de relações com outros objetos conhecidos e desconhecidos (Análise) e, nesse processo, percebe-se a importância do Pensamento Relacional. Se eu conheço o objeto, sei quais são suas características principais. Mas, se eu não conheço o objeto, não adianta perguntar suas características. Esse número 'x' é par, é ímpar, é primo? Como saber? O que sabemos são relações entre esse número desconhecido e os outros números conhecidos. Nesse sentido, sempre precisamos do Pensamento Relacional. Esse pensamento surgiu da Álgebra, pois, se queremos calcular um valor desconhecido, necessitamos de relações entre o valor desconhecido com valores conhecidos. Essa perspectiva da Álgebra como Pensamento Relacional praticamente não é explorada na atualidade.

Diante dessa inquietação de educador matemático, procuramos, na História da Matemática, momentos em que o Pensamento Algébrico Moderno surgiu no cenário da Matemática, partindo do princípio de que o estudo teórico, histórico e epistemológico, do ponto de vista do conceito de Complementaridade do pensamento Otteano de períodos históricos, contribui para a tomada de decisões, no sentido de compreender as dificuldades atuais no tratamento do Pensamento Algébrico na Educação Matemática.

Na busca de entendimento de como o pensamento algébrico moderno iniciou no processo de consolidação na Educação Matemática, deparamo-nos, por indicação do professor Michael Otte, com a obra '*Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra'* (O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra), publicada originalmente em alemão[1], por Jacob Klein (1899-1978), traduzida para a Língua Inglesa por Eva Brann, em 1968 e reeditada integralmente em 1992. Essa produção discorre sobre as 'tensões' que ocorreram no momento de transição, nos séculos XVI e XVII, entre a Matemática grega antiga e a origem do simbolismo algébrico moderno. Klein (1992) trata do processo e da forma como a Matemática grega antiga 'anexou' e transformou a compreensão de conceitos matemáticos, tendo como consequência a criação de uma nova linguagem Matemática, considerada como uma mudança de paradigma na interpretação de fenômenos físicos.

Nessa obra, Jacob Klein argumenta que o início do conceito simbólico moderno da Matemática, ou seja, a nova Álgebra está baseada na reinterpretação da ideia de *Arithmo* do grego antigo. Ele fez um estudo histórico da transformação do conceito de número, visando compreender a relação entre Aritmética e Álgebra. Para isso, tratou do conceito de *Arithmo*, da Aritmética e Logística[2] (em Platão e nos neoplatônicos), da Aritmética de Diophantus, do número como espécie, em Vieta e, também, do conceito de número em Stevin, Descartes e Wallis.

---

[1] O título original da obra em alemão é *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra* (A Logística Grega e a Origem da Algebra).

[2] No capítulo 2, item 2.3, apresentamos com mais profundidade o conceito de Logística utilizado nesta tese. Os gregos faziam cálculos e resolviam problemas por meio do que hoje chamamos de Aritmética e eles chamavam de Logística.

Klein (1992) identifica que a criação da linguagem formal da Matemática é idêntica à fundação da Álgebra moderna. Para ele, há uma conexão íntima entre a linguagem Matemática formal e o conteúdo da Física Matemática e essa conexão decorre do tipo especial de conceitualização, que é concomitante com o início da Ciência moderna que, por sua vez, foi fundamental para sua formação. Isso significa que, nos séculos XVI e XVII, os problemas da Mecânica tiveram influências recíprocas no simbolismo algébrico moderno.

O livro de Jacob Klein está dividido em três partes que se complementam no sentido de ajudar a compreender como os conceitos da Logística e Aritmética se relacionaram e, consequentemente, transformaram os objetos da Matemática no decorrer da História da Matemática.

Na primeira parte do livro, são discutidas concepções da Filosofia pitagórica, platônica e aristotélica, referentes às similaridades e diferenças entre Logística (teórica e prática) e Aritmética (teórica e prática). Visto que a teoria do pensamento grego procurava uma espécie de 'reconciliação' entre *episteme* e *tecnhe*; Filosofia e prática, pois era comum na antiguidade a diferenciação entre Aritmética e Logística. Na segunda parte, Klein trata da relação entre a concepção antiga e moderna do conceito de número, reinterpretando o trabalho de Diophantus (século III, d.C.), considerando-o como uma teoria Logística e com dependência do conceito de *Arithmo*; contudo incorpora uma tradição algébrica pré-grega mais geral.

Ainda na segunda parte, Klein apresenta a transformação da técnica de Diophantus feita por Vieta (1540-1603), mostrando que o renascimento[3] e assimilação da Logística grega no século XVI, na perspectiva da 'ampliação' do conceito de número com Stevin (1548-1620), por exemplo, levou ao estabelecimento da estrutura conceitual do simbolismo algébrico moderno que é, segundo Klein, o resultado de uma nova compreensão do conceito de número. Na

[3] É importante registrar que a produção de Descartes já pertence ao início do período Barroco. Isso significa que as transformações efetivas do conceito de número ocorreram no final do Renascimento e no início do Barroco.

terceira parte do livro, há o *apêndix*, que trata da introdução da Arte Analítica por François Vieta.[4]

Começamos esta pesquisa pela segunda parte que trata da diferença entre a terminologia antiga e moderna, pois estamos interessados, essencialmente, nos momentos históricos em que surge o 'contraste', nuanças e mudanças na elaboração e representação das ideias dos conceitos matemáticos antigos e novos, via transformação do conceito de número. Essa diferença foi articulada, principalmente, em termos da distinção entre *episteme* e *techne*, onde de um lado temos a dialética e lógica e de outro lado a técnica, a Mecânica e a Ciência como arte. Quando se trata de atingirmos nossos objetivos imediatos, do ponto de vista pragmático ou prático (*techne*), fica em pauta o instrumentalismo; já a *episteme* se evidencia no sentido de tentar compreender as causas e objetivos da própria Natureza.

Na Matemática grega antiga, a Logística era 'menos importante' que a Aritmética. Entretanto, a Matemática grega reinterpretada nos séculos XVI e XVII por Stevin, Vieta e Descartes, por exemplo, teve uma inversão de polos, ou seja, Logística tratada como Arte era mais importante – a *techne* passou a 'dominar' a *episteme*, diferentemente da época platônica em que a *episteme* 'dominava' a *techne*.

No que diz respeito ao contexto histórico temos uma complementaridade entre aplicação e generalização, pois na Álgebra precisamos dos números negativos, irracionais e imaginários e no Cálculo Diferencial precisamos dos números reais, e, por isso ocorreu a aritmetização do contínuo por meio do avanço e ampliação no conceito de número.

Segundo Klein (1992, p. 3), a criação da linguagem formal teve significado decisivo na constituição da Física Matemática, mas Klein enfatiza que a linguagem formal não é um mero dispositivo ou um instrumento da Física, que deve ser utilizada apenas para apresentar seus resultados de forma mais simples possíveis.

[4] No apêndice 'C' está o índice completo da obra em estudo.

Além do mais, Klein (1985, p. 61) enfatiza que a linguagem da Física Matemática é a Álgebra simbólica, entretanto essa linguagem não é puramente técnica ou instrumental. Klein diz que é um equívoco acreditar que podemos traduzir os fenômenos da Física numa linguagem ordinária, isto é, a Álgebra simbólica operativa pode e deve ser usada para fazer pesquisa e consequentemente na produção de novos conhecimentos. O simbolismo algébrico operativo é essencial nesse processo de passagem da Aritmética para a Álgebra simbólica, pois permite matematizar a Natureza, propiciando previsibilidade dos fenômenos e avanço do ser na humanidade.

A mudança de tratamento na forma e no conteúdo no que diz respeito a interpretações da antiga e nova Ciência está no fato de que a característica da abstração mudou, pois segundo Klein (1992, p. 120), na Ciência grega antiga a formação de conceito depende de experiências pré-científicas 'naturais'[5]. Já a nova Ciência obtém seus conceitos contrariando a Ciência escolástica. Tais conceitos, não tem mais a ambiguidade dos significados causados pelos discursos comuns, onde o verdadeiro sentido se distingue de uma série de significados menos precisos (Klein 1992, p. 121).

Nessa perspectiva, a simbolização algébrica operativa adquire aspectos de conceitos de segunda intenção, isto é, não 'manipula' o objeto em si, mas trabalha com símbolos que representam relações conceituais.

A nova Ciência começa a interpretar os fenômenos do mundo do ponto de vista funcional e operacional, ou seja, preocupa-se com a função que cada conceito estabelece com a Ciência como um todo, isto é, o novo conceito é uma reflexão sobre o contexto do conceito. Isso significa que para Klein (1992, p. 121), todo conceito da nova Ciência pertence a uma nova dimensão conceitual.

Os antigos enfrentaram seus problemas centrados principalmente na essência do modo de ser dos objetos da Matemática. Isso indica que para Klein (1992, p. 122), a Matemática antiga é caracterizada pela *tensão entre método e objeto*. O método antigo, e até mesmo no início da idade moderna, diz respeito a habilidades específicas para resolução de problemas particulares e os objetos

[5] No tópico 3.1 desta tese, abordamos a diferença entre a conceitualização antiga e moderna na perspectiva de Jacob Klein.

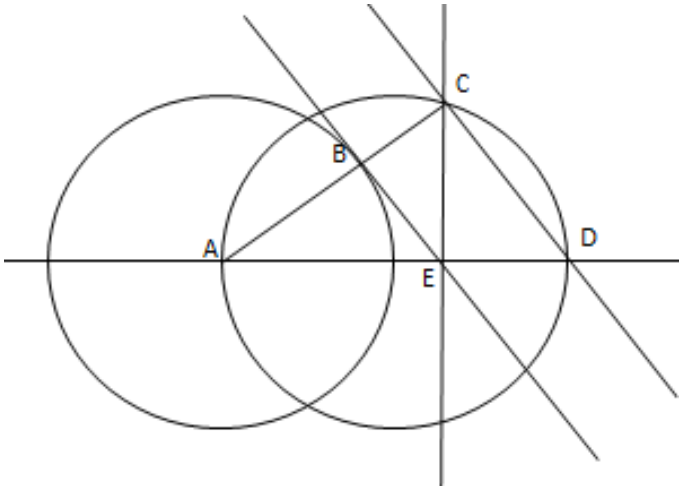
como números, figuras e magnitudes, por exemplo, eram tidos tanto como ponto de partida como de chegada. Isso evidencia que para os Gregos antigos, o método geral trata dos objetos da Matemática em si, isto é, as operações dependem dos objetos.

Na Matemática moderna, segundo Klein (1992, p. 123) toda a interpretação centra-se no método enquanto tal. Ela determina os seus objetos, refletindo sobre o modo como eles se tornam acessíveis através de um método geral, ou seja, começa a manipular conceitos via simbolização algébrica.

Um exemplo da revolução na transição do método centrado no objeto (mundo interpretativo e das semelhanças) para o método geral (mundo representativo e operativo funcional), ou seja, a nova forma de conceitualização e a nova intencionalidade, abordada numa dimensão em que os novos objetos começam a ser as conexões entre os objetos 'mediado' pela simbolização algébrica operativa, pode ser verificada na interpretação antiga (em termos de proporções) e moderna (baseada na Álgebra simbólica) da duplicação do volume de um cubo dado[6].

Na interpretação antiga que perdurou até Galileu, a duplicação do volume de um cubo é feita em termos de segmentos proporcionais. A figura a seguir, segundo Otte (2006, p. 130) ilustra a interpretação apresentada na antiguidade por Hippocrates de Chios. Nessa busca de solução, o problema foi reduzido à construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta AB e AD, onde AD=2AB.

[6] No tópico 4.8.2 desta tese, apresentamos a resolução de um problema no estilo de Diophantus e Vieta. Isso evidencia a mudança na forma de enfrentar os problemas matemáticos via transformação no conceito de número.



O objetivo é determinar as médias proporcionais aos segmentos AB e AD. Sabendo que os triângulos ABE, AEC e ACD são retângulos e como consequência da semelhança de triângulos, temos as seguintes relações: $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AD}$. Sendo AB=1, AE=x, AC=y e AD=2 podemos obter as igualdades[7] $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$. Portanto, a medida da aresta do cubo que terá o dobro do volume de um cubo de aresta 1 unidade, será o valor da incógnita x.

Essa interpretação é dependente do uso da teoria de proporções de Eudoxus (apresentado no livro V de Euclides), evidenciando aspecto da similitude e de métodos singulares, ou seja, manipula-se as figuras, e, a generalização depende do objeto e não do método geral. Além do mais, essa teoria é a língua geométrica tanto dos antigos como dos modernos do início dos séculos XVI e XVII.

Com o advento da Álgebra simbólica operativa moderna, a duplicação do cubo[8] torna-se um problema 'relativamente simples', pois o objetivo passa a ser o de encontrar a aresta de um cubo cujo volume é 2, ou seja, $x.x.x = 2$. O valor de x pode ser 'encontrado' com a aproximação que desejarmos.

[7] É importante ressaltar que aqui há um 'abuso' de linguagem, pois os antigos não trabalhavam com proporcionalidade dessa forma e nem com o sinal de igualdade (=), visto que o mesmo foi sugerido pelo matemático inglês Robert Record no século XVI.
[8] No tópico 4.7 desta tese há explicações sobre a construção da aresta do cubo bem como de potências e raízes de equações em termos de proporções contínuas em Descartes.

A partir dessa igualdade, de forma apenas operativa, sem pensar em essência ou mesmo no modo de ser das coisas podemos obter $x^3 = 2$, que é equivalente a $x^4 = 2x$ que por sua vez pode ser transformada nas parábolas $y = x^2$ e $y^2 = 2x$ por meio de substituições adequadas. Nesse caso, o valor de x, ou seja, a aresta do cubo procurado é obtida através da intersecção dessas duas parábolas no 'plano cartesiano'.

Na interpretação moderna que começou com a simbolização algébrica de Stevin, Vieta e Descartes, por exemplo, houve um 'salto' epistemológico na forma de abordar e representar os problemas matemáticos e consequentemente os fenômenos físicos num curto espaço de tempo, pois, Stevin publicou sua Aritmética em 1585, a Arte Analítica de Vieta em 1591 e a Geometria de Descartes em 1637.

Na duplicação do cubo do ponto de vista antigo e moderno está evidenciada a importância e necessidade do simbolismo algébrico operativo, é nesse sentido que a obra de Klein propicia 'dessedimentar' esse processo histórico e epistemológico do início da transformação do conceito de número.

Portanto, o estudo dessa obra leva-nos aos séculos XVI e XVII, pois, a partir desse período, inicia-se um processo de transição entre a Antiguidade e a Modernidade. Evidentemente que há contribuições dos chineses, indianos e árabes, bem como de autores europeus medievais, porém a Matemática era, essencialmente, dos antigos gregos.

Nessa época, mudanças socioculturais acentuaram-se como, por exemplo, nas cidades ascendentes da Itália, Holanda (após 1581, torna-se um centro de ensino e aprendizagem e foi o primeiro país europeu a ter tolerância religiosa) e Inglaterra, as cooperações de conhecimentos ampliaram entre os novos grupos sociais como dos humanistas e dos acadêmicos das universidades de um lado e dos engenheiros e artesãos, do outro. Nesse novo cenário, a relação entre *episteme* e *techne* também mudou, nascendo o domínio da *techne* sobre *episteme* e esta foi uma das causas da Revolução Científica no século XVII. Já nos anos de 1940, Zilsel (1976) sustenta a tese de que a Ciência moderna surgiu

no século XVI, no momento em que as barreiras sociais entre os três estratos de intelectuais: acadêmicos da universidade, humanistas e artesãos emigraram por causa da ascensão das cidades e do capitalismo de livre comércio. A transformação de suas capacidades intelectuais amalgamou em um empreendimento cultural único chamado de 'Ciência moderna'.

Uma das características dessa revolução foram novas aplicações da Matemática no comércio, na navegação e na construção de navios (Stevin, por exemplo, tratava, dentre outras coisas, de construções de pontes e é considerado o 'inventor' do sistema decimal) e na mineração (produção de 'dinheiro' (prata)). Dessa forma, a ascensão da Mecânica foi considerada A*rte*, ou seja, *techne*, que segundo Aristóteles, é o lugar da Ciência, do ponto de vista das novas aplicações da Matemática. Portanto, foram mudanças técnicas e também sociais que causaram essa transformação no entendimento dos conceitos matemáticos e, por conseguinte, na função do conhecimento com características instrumentais voltadas para aplicações.

O foco principal, nesse período, também era resolver problemas que os gregos antigos não resolveram, ou seja, 'criar' conceitos e métodos novos para interpretar problemas antigos e, ainda, com intento de apresentar soluções gerais para determinado grupo de problemas. Essa transformação de polos nos conceitos da Matemática desencadeou, por um lado, 'avanço*'* no sentido, como a superação da visão contemplativa dos conceitos matemáticos e a percepção da importância das tecnologias (prensa). Mas, por outro lado, resultou num 'retrocesso*'*, no que diz respeito à minimização do Pensamento Relacional. Stevin, por exemplo, priorizou a técnica, no sentido de resolver problemas postos pela sociedade imediata, ou seja, deixou de lado o aspecto contemplativo da semelhança.

Para Klein (1992), o método matemático teve papel decisivo na revolução do início dos séculos XVI e XVII, inserido no contexto da observação e experimentação, pois essa revolução transformou, cientificamente, a visão da Natureza e, nessa nova perspectiva, a Matemática foi fundamental. Como Galileu disse: 'a Natureza está escrita em linguagem da Geometria'. É nesse sentido que Klein (1992) diz haver uma conexão íntima entre o início do simbolismo algébrico

moderno e a Física Matemática, pois essa transformação ocorreu tanto na forma da interpretação da Natureza como dos conceitos matemáticos utilizados nessa mudança.

Nos séculos XVI e XVII, ocorreu o início da 'libertação' do ontologismo por meio da Álgebra Simbólica, ou seja, uma espécie de 'autonomização' em relação a Geometria com a *Mathesis Universalis* (estudo ou disciplina universal) de Vieta e Descartes – da exigência de que cada expressão ou intensão (equação) deveria ter não apenas um sentido, mas também um significado ou extensão, pois a Matemática grega antiga não conseguia se libertar do ontologismo, ou seja, precisava dos objetos matemáticos como números e figuras para realizar as operações, isto é, não estava preparada para aceitar expressão sem significado direto como, por exemplo, x^4.

Portanto, esta pesquisa está inserida no contexto do desenvolvimento da Aritmética na perspectiva do conceito de número na Antiguidade e nos séculos XVI e XVII, do ponto de vista histórico e filosófico, isto é, a transformação conceitual na definição de número no decorrer da História da Matemática, pois, na Aritmética, há transformação de interpretação - do objeto para símbolo - em Stevin, Vieta e Descartes.

Nesse sentido, a diferença entre a Filosofia e Matemática será tratada numa dimensão exemplar do contraste e da Complementaridade que há entre Aritmética e Álgebra. Isso porque, nos séculos XVI e XVII, segundo Klein (1992), a Matemática como técnica, como Logística, ou seja, como Arte de resolver problemas era muito mais importante do que a reflexão Filosófica que procura enxergar, com mais profundidade, as questões das essências dos seres.

Dessa forma, a questão norteadora de pesquisa é: como ocorreu a 'tensão' entre símbolo e objeto na elaboração de conceitos aritméticos, no início do Simbolismo Algébrico Moderno?

Nessa perspectiva, o objeto de pesquisa é a temática referente à transformação dos conceitos Aritméticos na Matemática grega antiga e nos séculos XVI e XVII, presentes na obra *Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra* (O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra) de

Jacob Klein (1992) tendo como objetivo identificar, a partir dessa obra, como os conceitos de números, presentes na interação entre Aritmética e Álgebra, estabeleceram-se e progrediram na relação entre símbolo e objeto, bem como compreender o contexto da transformação conceitual na Física Matemática, no que se refere às 'tensões' que ocorreram no momento de transição entre a Matemática grega antiga (descritiva) e o simbolismo algébrico moderno (operativa).

Mais especificamente, este estudo permite: i) compreender a relação entre símbolo e objeto no início da consolidação da Álgebra moderna e ii) analisar o contexto da transformação conceitual na Física Matemática, da visão contemplativa (vida contemplativa) para a operativa (vida ativa – Ciência ativa).

Isso significa que, por um lado, esta pesquisa trata do valor histórico em que a obra de Klein (1992) é discutida, no sentido de evidenciar a ruptura e a transição desde a Antiguidade até o início da modernidade e, por outro lado, fornecer, a partir desse estudo, uma ideia do que significa explicar o mundo para a Ciência matematizada, ou seja, salvar as aparências (contemplativo) – criar modelos geométricos que expliquem o movimento dos corpos celestes ou mostrar a estrutura (regras e relações de funcionamento) dos fenômenos (representativos e operativos).

A interpretação desses fatos conceituais nos séculos XVI e XVII tem, como aporte teórico, a concepção de Kant (1997) e Otte (1993;2003). Segundo esses filósofos, na Educação Matemática, torna-se necessário tratar a Matemática não apenas como técnica, ou seja, como símbolos algébricos apenas com caráter sintático. Também, precisamos tratar da concepção semântica dos objetos da Matemática. Nesse sentido, é necessário abordar a relação entre Filosofia e Matemática.

Kant (1997, B 741-742) afirma que "o conhecimento filosófico é o conhecimento racional por conceitos e o conhecimento matemático por construção de conceitos. Porém, construir um conceito significa apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde". Ainda em Kant (1997, A 50/B 74), há um trecho que relata o seguinte: "o nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as

representações (sensibilidade) e a segunda é a capacidade de conhecer (entendimento) um objeto mediante estas representações".

Isso significa que a Matemática é definida em termos de seus métodos e não em termos de seus objetos. Com isso queremos dizer que a Matemática sem a Filosofia é apenas engenharia de símbolos. Porém, as concepções de entendimento e representação ajudam na compreensão de que, nos séculos XVI e XVII, o método vale mais em termos de certeza do conhecimento do que da visão do objeto.

A transição do mundo contínuo antigo para o mundo dos números de Descartes, por exemplo, foi chamada por Foucault (1926-1984), em seu livro: 'As Palavras e as Coisas', publicado em 1995, como sendo uma transição do mundo da interpretação para o mundo da representação, em que o primeiro mundo girava em torno da similitude e semelhança. Diz Foucault (1995, p.33): "Até o fim do século XVI, a semelhança desempenhou um papel construtor do saber da cultura ocidental".

Segundo Aristóteles, na Ciência antiga, as coisas particulares existiam somente como partes de uma grande cadeia de seres, ou seja, os objetos particulares que havia eram seres vivos individuais que tinham realidades apenas como elementos de uma espécie ou classe. Após o século XVII, entramos numa época clássica onde tudo se aplica às representações das coisas e não às coisas em si. Nessa transição, novas ideias sobre os objetos matemáticos surgiram, ou seja, os símbolos matemáticos, como os números, passaram a representar relações entre objetos e não objetos. Diante desse contexto, o número, como símbolo geral e não apenas indicando quantidade de coisas determinadas, como na época platônica, começou a ganhar força nas mãos de Vieta em sua Logística Especiosa, por exemplo.

No que diz respeito à relação entre símbolo e objeto na compreensão de conceitos matemáticos, encontramos na noção de Complementaridade Otteano que a atividade é essencial, tanto no entendimento de conceitos como na produção de novos conhecimentos, pois a representação não pode ser reduzida ao objeto representado. Segundo Otte (1993, p. 224), não há dualidade entre método (meios) e objeto, pois nenhum dos dois pode ser determinado sem o

outro, apesar de eles desempenharem, num determinado momento de certo ato epistemológico individual, um papel complementar assimétrico. Ainda conforme Otte (1993), “os métodos do conhecimento são de fato para serem diferenciados dos objetos do conhecimento, mas não para serem definidos sem o seu concurso”. Portanto, as atividades dos matemáticos modernos, tratados nesta pesquisa, como por exemplo, Stevin, Vieta e Descartes, interpretados numa perspectiva de Análise, evidenciam o início da visão do simbolismo algébrico moderno como relações, mesmo o método sendo considerado prioritário.

Esse processo permite reinterpretar a renovação da doutrina numérica grega sob a luz do contexto histórico e epistemológico, no sentido de perceber o movimento de transição entre os aspectos interpretativo e representativo, em relação aos símbolos e objetos. Isso nos faz compreender que, no início do simbolismo algébrico moderno, está presente a transição da noção descritiva para noção operativa dos conceitos matemáticos.

Para apresentar os resultados desta reflexão histórica e epistemológica do início do pensamento algébrico moderno e suas implicações na Educação Matemática, dividimos esta tese em quatro capítulos.

No **primeiro capítulo**, intitulado ‘Construção Teórica da Pesquisa: O Conceito de Complementaridade’, abordamos a base teórica da metodologia de pesquisa que é teórico-bibliográfica, histórica e epistemológica, no sentido de situar, filosófica e historicamente, o objeto de estudo, bem como compreender os fatos importantes desse período os quais estão relacionados com o início do tratamento simbólico do conceito de número conectado com a representação Matemática da Natureza. Utilizamos, nesta pesquisa, o conceito de Complementaridade do pensamento Otteano como fundamento teórico, para compreender os objetos de estudos da Matemática em relação à transformação do conceito de número, pois esses objetos não podem ser acessados por meio dos sentidos e, por isso, introduzimos representações (símbolos) e diagramas a fim de que o objeto matemático se ‘materialize’; mas o conceito matemático não pode ser confundido com as suas representações e nem com os seus diagramas.

Com esse intuito, abordamos o inteligível e o sensível no estudo de objetos matemáticos. Como essa compreensão está contida numa forma de

entendimento do mundo físico, tratamos das concepções de Matemática na Antiguidade segundo a Filosofia de Platão e Aristóteles. Em seguida, os conceitos quantitativos de Galileu, relativos ao início da modernidade, são esboçados. Por conseguinte, discutimos a questão da construção de conceitos em Kant, pois o método das Ciências Físicas mediados reciprocamente pela simbolização algébrica, nos séculos XVI e XVII, era o mais confiável, em termos de certeza do conhecimento. O primeiro capítulo encerra-se com a concepção do conceito de Complementaridade no estudo de objetos matemáticos que, nesta pesquisa, foi utilizada como base teórica para tratar do início da simbolização algébrica moderna e das implicações dessa simbolização na Educação Matemática.

No **segundo capítulo**, intitulado ‘Argumentos que Fundamentam a Concepção da Origem do Simbolismo Algébrico Moderno na Perspectiva de Jacob Klein’, tratamos da vida e obra de Jacob Klein, de sua filiação intelectual, do contexto da publicação da obra ‘O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra’, bem como dos argumentos da parte I dessa obra que considera a Matemática platônica e a neoplatônica como fundamentos para ‘dessedimentar’ a origem do simbolismo algébrico moderno nos séculos XVI e XVII. Jacob Klein foi aluno de Husserl e Heidegger que pertencem à vertente filosófica fenomenológica. Husserl entendia que a Ciência inaugurada por Galileu e Descartes, do ponto de vista da compreensão dos fenômenos físicos por meio da Mecânica, provocou uma crise tanto nas Ciências como na humanidade em geral. A *Mathesis Universalis* de Descartes, na concepção de Husserl, não conseguia resolver problemas existenciais do Ser na virada do século XIX para o XX.

Jacob Klein fez um estudo histórico detalhado como ninguém havia feito, até hoje, desse processo de transição, ou seja, de como a Matemática grega antiga foi reinterpretada pelos modernos nos séculos XVI e XVII, no início da simbolização algébrica moderna. Dessa forma, este capítulo aborda fatos que, na concepção de Klein, corroboraram na introdução de operacionalização de conceitos por meio de números conhecidos e desconhecidos. Klein enfatiza que uma questão fundamental motivadora do surgimento da simbolização nos séculos XVI e XVII é a interpretação da estrutura dos diálogos em Platão, pois os diálogos sempre começam com um ponto em comum ou supondo que algo seja

conhecido. A partir daí, ‘tiram-se’ conclusões verdadeiras ou falsas das afirmações feitas anteriormente. Portanto, o foco do segundo capítulo é exatamente trazer o entendimento de Klein sobre a Matemática da Antiguidade, pois os modernos não criaram do nada (*ex nihilo*), mas apoiaram-se em produções significativas dos pensadores antigos e medievais.

No **terceiro capítulo**, intitulado ‘A Transformação Estrutural Ocorrida nos Séculos XVI e XVII em Relação à Forma de Abordar os Conceitos Matemáticos na Perspectiva de Jacob Klein’, apresentamos fatos da parte II da obra ‘O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra’ de Jacob Klein, no sentido de trazer as principais contribuições históricas, referentes à compreensão de Klein sobre o papel da Aritmética de Diophantus - interpretado como teoria Logística, do conceito de número como espécie em Vieta, da concepção de número em Stevin e Descartes, no sentido de entender a *Mathesis Universalis* de Vieta e Descartes, pois o início do simbolismo algébrico moderno, a partir da transformação do conceito de número nos séculos XVI e XVII, acontece nesse contexto, segundo Klein (1992).

A mudança no conceito de número, em Stevin e Descartes, foi significativa, pois permitiu que o número, antes tratado como quantidades de objetos definidos indicando o objeto de primeiro nível, passasse a designar objetos de segunda intenção por meio do tratamento simbólico geral. Em Descartes, em sua algebrização da Geometria, o número como símbolo geral foi essencial na interação entre Aritmética, Álgebra e Geometria para o estudo de fenômenos físicos por meio do conceito de movimento. Dessa forma, este capítulo traz fatos históricos os quais permitem perceber que a simbolização não é apenas uma engenharia de símbolos sem conteúdo como afirmava Husserl, mas que, por meio de calculações, também há produção de novos conhecimentos.

No **capítulo quatro**, intitulado ‘A Presença de Tensões no Estabelecimento de Conhecimentos Matemáticos’, apresentamos uma espécie de ‘meta-análise’ dos fatos obtidos a partir do pensamento de Klein (1992), em relação a sua obra: ‘O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra’, com intuito de evidenciar a necessidade, utilidade e importância da representação simbólica para ‘acessar’ os objetos de estudo da Matemática. Um objeto sem representação

não tem como ser operacionalizado e, portanto, não faz sentido. Não podemos considerar que há identidade entre o objeto e a sua representação. O objeto da Matemática, de acordo com o pensamento Otteano, faz-se presente nas relações por meio de atividades num determinado contexto. Por isso, a representação é importante, também, para a comunicação.

O foco deste capítulo é 'acessar' os objetos de estudo da Matemática por meio de métodos e simbolização. Tanto na demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer no plano é 180° como na resolução de situações, envolvendo relações entre variáveis conhecidas com variáveis desconhecidas, também no estudo da irracionalidade da raiz quadrada de 2 e do número de Euler, há necessidade da representação e de diagramas que possibilitem o entendimento do conceito. De forma que a simbolização algébrica, tendo no 'x' de Descartes seu representante ilustre, seja o meio essencial para o estudo, tanto de conceitos físicos como de conceitos puramente matemáticos.

No **apêndice,** há traduções de partes da obra de Klein (1992), a saber: *Translator's note* (notas da tradutora) na forma de um glossário, *Contents* (o índice), *Introduction: Purpose and plan of the inquiry* (Introdução: proposta e plano de investigação), o capítulo 09: *On the difference between ancient and modern conceptualization* (Sobre a diferença entre a conceitualização antiga e moderna), o capítulo 11: *The formalism of Vieta and the transformation of the arithmos concept* (O formalismo de Vieta e a transformação do conceito de *arithmos*), o conceito de número em Stevin e o conceito de número em Descartes.

Possuem, também, no apêndice, vocabulários ligados ao conceito de Complementaridade. São textos de extrema importância que ajudam na compreensão dos argumentos que possibilitam fundamentar e perceber o fato de, no início do simbolismo algébrico moderno, estar presente a transição entre a noção contemplativa para noção operativa dos conceitos matemáticos.

Capítulo I

Construção teórica da pesquisa: o conceito de Complementaridade

> O real problema que confronta o ensino de Matemática não é o do rigor, mas o problema do desenvolvimento do significado da existência de objetos matemáticos. René Thom – 1972

1.1. Aristóteles e Galileu: perspectivas de interpretação do mundo

Na Antiguidade, em Platão (428/427-348/347 a.C), a Aritmética tinha maior importância. Já os modernos dos séculos XVI e XVII, de posse do arcabouço do conhecimento antigo, começam a valorizar a Geometria com Galileu e Descartes, por exemplo, no sentido de interpretar fenômenos da Natureza. Nessa perspectiva, Kant prestigia a Geometria (Euclides) como modelo de aplicação da Matemática aos problemas da Física. Entretanto, o mais importante é a ideia da Ciência da Natureza.

Para Aristóteles (384-322 a.C), a ideia de movimento está relacionada com crescimento, mudança, generalização e evolução, ou seja, a mudança de lugar bem como a questão da Mecânica foram conceitos[9] de movimento. Isso é a essência de toda Ciência Natural. Essa ideia aristotélica foi aceita por Galileu, por exemplo. Galileu especializou-se, não tratou da mesma forma o crescimento das plantas e o movimento dos planetas e essa especialização acabou adquirindo

[9]Klein (1985, p. 60) diz que de forma geral existem dois tipos de conceitos: aqueles que se aplicam aos objetos diretamente (primeira intenção – primeiros conceitos) e aqueles que se aplicam a outros conceitos (segunda intenção). Se eu falo isto é um cachorro, a palavra cachorro indica um conceito de um objeto individual. Se disser vermelho é um atributo ou Idealismo é uma teoria, as palavras idealismo e vermelho são conceitos aplicados a outros conceitos e não a objetos individuais.

progresso, no sentido de compreender as particularidades de um fenômeno com resultados mais precisos. Para Aristóteles, a Mecânica foi uma Arte e, para Galileu, Vieta e Descartes, foi uma Ciência.

A diferença que há na Matemática da Antiguidade e na dos séculos XVI e XVII refere-se a um movimento de transformação com caráter duplo. De um lado, com os efeitos da simbolização, da possibilidade de uma nova operatividade, cálculo com novos instrumentos - a facilitação da calculação transforma a Matemática num instrumento mais útil. De outro lado, com Kant, a Geometria torna-se exemplar, pois Kant 'aprendeu' com Descartes indicando que, nesse processo, temos dois movimentos tensionais complementares, a saber: 1) a transformação da Aritmética na Álgebra simbólica operativa e 2) a transformação da Mecânica de Arte para Ciência.

Nesse contexto, a transformação do conceito de número e o novo valor da Geometria seguiram nessa perspectiva. Na Aritmética, há transformação do objeto para símbolo[10] com Stevin, Vieta e Descartes; isto é, de um lado, dominaram os aspectos objetivos e, de outro lado, o aspecto instrumental. Isso é importante, pois ajuda a entender os motivos pelos quais Kant chegou à concepção de Matemática como construção de conceitos.

Os filósofos da Antiguidade assim como os modernos desejavam compreender as causas dos fenômenos naturais. Aristóteles, a partir de conceitos da Biologia, considerava a Ciência antiga como um organismo vivo, fundamentada na reflexão da distinção entre o mundo cósmico e o mundo da experiência humana. Nesse sentido, a *physis* era a preocupação dos primeiros filósofos helênicos. Segundo Gobry (2007, p. 116), Aristóteles entendia a *physis* como tendo os seguintes sentidos: geração (gênesis, nascimento) dos seres dotados de crescimento; causa interna do crescimento, matéria-prima dos seres e a substância dos seres naturais. Para Aristóteles, o movimento de crescimento é a característica principal da Natureza, do ponto de vista da unicidade visto que, para Aristóteles (*Física* III, 200b), a Natureza é um princípio do movimento e da mudança e o seu estudo e explicações versam sobre a própria Natureza e, por

[10] O número como símbolo, a partir dos séculos XVI e XVII, começa a não se referir mais a um objeto específico e sim a um conjunto ou classe de objetos singulares.

isso, não podemos deixar de investigar ‘o que é’ movimento; porque, se ignorássemos ‘o que é’ ele, necessariamente, ignoraríamos ‘o que é’ a Natureza.

Na época pitagórica, segundo Heath (1921, p. 12), as ‘disciplinas’ do conhecimento seguiam a seguinte ordem: “Aritmética, Música, Geometria e Esférica, sendo que a Geometria tratava de magnitudes em repouso e a Esférica lidava com magnitudes em movimento”. Em Platão, a ordem instrutiva era Aritmética[11], Geometria dos sólidos (Esteriometria) e, por último, a Harmonia.

> Aristóteles reconhece como Matemática aplicada: Óptica, a Mecânica, a Astronomia e a Harmonia. Ele chama Óptica, Harmonia e Astronomia, ramos físicos da Matemática e observa que esse tema e a Mecânica dependem de provas de suas proposições sobre os assuntos da Matemática pura: Óptica da Geometria, Mecânica da Geometria ou Esteriometria e a Harmônica da Aritmética; similarmente, ele disse, *Phaenomena - fenômenos* (isto é, astronomia observacional) dependem da Astronomia teórica (HEATH, 1921, p. 17. Tradução nossa).

A Ciência antiga aristotélica trata do geral ou universal na qual o conhecimento são substâncias e, portanto, os aspectos particulares ou individuais são inseguros e contingentes. Para se ver algo, esse algo deve estar sob uma universalidade. Dessa forma, o modelo aristotélico de Ciência é contemplativo e analítico.

Segundo Heath (1921, p. 8), Aristóteles, no início da *Metaphysics,* diz que a Ciência foi precedida pelas Artes. As Artes foram inventadas a partir da experiência e, depois que isso ocorreu, as Ciências foram estabelecidas.

> A Arte como sinônimo de técnica, conjunto de procedimentos visando a certo resultado prático. Nesse sentido, fala-se artesão. Opõe-se à Ciência, conhecimento independente das aplicações práticas e à Natureza concebida como princípio interno: ‘A Natureza é o princípio da coisa mesma; a Arte é princípio em outra coisa’ (JAPIASSÚ & MARCONDES, 1996. p.17).

Na óptica de Aristóteles, a Arte exerce um papel intermediário entre experiência empírica e Ciência. Nos séculos XVI e XVII, com Galileu (1654-1642), por exemplo, surgem novas interpretações segundo Kline (1990, p. 325). Galileu disse: então, podemos dizer que agora a porta está aberta, pois temos um novo método repleto de maravilhosos e numerosos resultados que, no futuro, terão

[11] A Aritmética, segundo Klein (1992), é subdividida em Aritmética prática (Logística – cálculos do cotidiano) e Aritmética teórica (os números em si). Com Klein, podemos entender que essa característica da Logística como calculação foi transformada em Ciência nos séculos XVI e XVII, por meio da mudança no conceito de número.

atenção de outras mentes. O método como ideia de objetivo em si não era considerado pelos gregos antigos. O método na Antiguidade tinha uma especificidade, indicava uma situação individual, isto é, cada problema tinha o seu próprio método de resolução (PIAGET; GARCIA, 2011, p. 289). Isso é verificado na Aritmética de Diophantus.

Isso evidencia o valor que Galileu atribui ao método na atividade científica de pesquisa que tinha e tem, na Matemática, seus aspectos fundacionais. Galileu, assim como outros modernos de sua época, ‘rompeu bruscamente’ com a concepção especulativa e contemplativa antiga em favor de um ponto de vista mecânico e matemático da Natureza.

Para Galileu, a Ciência Natural está ordenada, de acordo com Leis Matemáticas imutáveis, no sentido de que o conhecimento matemático é absolutamente verdadeiro e tão sagrado como qualquer linha da Escritura. Dessa forma, as propriedades dos fenômenos físicos fundamentais como o movimento podem ser descritos matematicamente. Segundo Kline (1990, p. 330), Galileu decidiu que, no estudo dos fenômenos físicos, os princípios básicos devem partir de experimentos e da observação, ao contrário do pensamento matemático da época, que tinha, nos axiomas, verdades absolutas. Diante disso, a Ciência moderna, no sentido de método de investigação, surgiu da ‘crença’ de que a Natureza pode ser matematizada.

Ao contrário de Aristóteles e também da interpretação de cientistas medievais que estavam presos à questão da qualidade e do significado dessa qualidade, Galileu procurou aspectos quantitativos por meio da Matemática. Na concepção qualitativa aristotélica, que evidencia os sentidos, temos, por exemplo, a queda dos corpos: se os corpos terrestres caem em direção a terra, é porque tendem a ocupar o lugar que lhes cabe na estrutura ordenada do universo. Essa é uma característica qualitativa da perspectiva aristotélica. Com Galileu, a interpretação apresenta características quantitativas por meio de fórmulas e de símbolos, pois a velocidade começa a ser medida em metros por segundo, por exemplo.

Com Galileu, as explicações dos fenômenos adquiriram outra perspectiva, ou seja, as fórmulas não explicam as causas, mas descrevem a Natureza. Como

disse Galileu, segundo Kline (1990, p. 333), a causa da aceleração do movimento na queda dos corpos não é parte necessária da investigação. A preocupação é compreender propriedades do movimento, a sua estrutura, sem considerar o que causou, ou seja, o caráter especulativo aristotélico foi abandonado. O aspecto da dedução de leis básicas a partir da experiência é fundamental e isso foi relatado por Newton no prefácio de seu *Principia*, segundo Kline (1990, p. 334. Tradução Nossa).

> Desde que os antigos (como é dito por Pappus) estimaram a Ciência Mecânica como a mais importante na investigação de coisas naturais e os modernos, rejeitando as formas substanciais e qualidades ocultas têm se esforçado para sujeitar os fenômenos naturais às leis Matemáticas, eu tenho neste tratado cultivado a Matemática na medida em que se refere à Filosofia da [Ciência] ... e, portanto, ofereço este trabalho como princípios matemáticos da Filosofia, pois todo o encargo da Filosofia parece consistir nisso – a partir do fenômeno do movimento investigar outras forças da Natureza e, então, a partir dessas forças, demonstrar outros fenômenos.

Para os modernos dos séculos XVI e XVII, como Newton e Galileu, os princípios matemáticos foram quantitativos, pois todas as coisas físicas podem ser ordenadas e medidas por meio de números. Nesse sentido, a Arte aristotélica transforma-se numa Ciência chamada Mecânica. Nessa transformação, o conceito de número começa a adquirir *status* de símbolo geral como instrumento calculativo operativo e, com isso, começa a ocorrer uma mudança no processo de construção de conceitos.

1.2. O inteligível e o sensível na compreensão de objetos da Matemática

O pensamento filosófico na Matemática caracteriza-se por ser crítico e reflexivo, no sentido de pensar sobre conceitos que os objetos dessa Ciência provocam. Dessa forma, compreender a relação entre Filosofia e Matemática torna-se necessário para ‘ampliar’ o entendimento sobre a natureza dos objetos com os quais a Matemática lida. Esse entendimento nos faz analisar o significado dessa Ciência no mundo cotidiano bem como no mundo científico, ou seja, qual é o sentido que a Matemática tem para o homem?

Também, do ponto de vista da Filosofia da Matemática, surgem perguntas como, por exemplo: o que é conhecimento matemático? Essas indagações,

segundo Bicudo e Garnica (2003, p. 29), desdobram-se para saber sobre a realidade dos objetos matemáticos, isto é, como são conhecidos e quais os critérios que sustentam a veracidade das afirmações Matemáticas?

Nessa perspectiva, um triângulo esboçado na lousa ou no caderno de um discente indica o conceito de triângulo geral ou é uma especificidade do conceito? As palavras ‘chair’, ‘stuhl’ e ‘szék’ significam o quê para uma pessoa que não tem noção da Língua Inglesa, Alemã ou Húngara respectivamente? Qual é a relação que essas palavras podem ter com o ‘x’ do pensamento simbólico algébrico moderno? O raciocínio não se efetua sobre as coisas em si, mas por meio de representações (OTTE, 2012, p. 166).

O conceito geral do objeto cadeira não é representado unicamente por meio de palavras. As letras usadas em sua representação, em cada idioma, indicam objetos específicos. Todavia o ‘x’ da Álgebra é mais amplo, pois pode sugerir quantidades de cadeiras, ou seja, um número de objetos definidos; medida de grandezas geométricas como, por exemplo, a medida do lado de um triângulo. Essas duas formas de interpretar o símbolo começaram a ser tratadas por Vieta e Descartes nos séculos XVI e XVII. Contudo a visão de relação entre Aritmética e Geometria desse período, propiciou, de certa forma, o tratamento do ‘x’ da Álgebra como espaço vazio na Álgebra abstrata do século XIX em diante.

Pensar sobre um conceito qualquer da Matemática remete-nos à sua representação bem como ao sentido que essa representação indica. A reprodução não pode ser confundida com o conceito e vice-versa. É nesse sentido que o pensamento filosófico provoca os objetos de estudo da Matemática. Isso, para quem está interessado na Educação Matemática, corrobora no aspecto de refletir sobre a objetividade dos objetos de estudo da Matemática.

Na história filosófica da natureza dos objetos da Matemática, há perspectivas que tratam da relação existente entre mente, objeto e objetividade das ideias que permeiam elementos de estudo da Matemática. Silva (2007), em seu livro Filosofias da Matemática, apresenta reflexões sobre aspectos históricos do intrigante processo de construção do conhecimento matemático. Nesse livro, Silva aborda as primeiras interpretações que, de certa forma, permanecem

presentes nos dias atuais, a saber: as concepções de Matemática em Platão e Aristóteles.

Para Platão, os objetos matemáticos existem independentemente de suas aplicações, mas Aristóteles entende diferente, ou seja, há uma ligação direta entre os objetos matemáticos e suas aplicações. Em Platão, os elementos básicos são as ideias e não os objetos. Átomos são mônadas e mônadas são coisas espirituais, ideais, não concretas, não materiais e não empíricas. A estrutura do mundo é ideal no mundo das ideias e não no mundo dos objetos. A Matemática em Platão é descritiva e contemplativa, representando a aparência do mundo, em termos de ideias perfeitas, isto é, não se presta a fazer previsões por meio de calculações.

Os objetos basilares da Matemática em Platão, como figuras e números, são formas puras que percebemos, exclusivamente, por meio da razão, sem necessidade da utilização dos órgãos sensoriais, indicando um mundo estático, sem movimento. O número 8, por exemplo, tem uma forma ideal pura que é indivisível, ou seja, um ente da razão que existe independentemente do ser. Porém, quando estamos tratando de situações da vida cotidiana, oito bananas ou um triângulo desenhado na lousa são instâncias imperfeitas tanto do ente oito como do triângulo ideal que existe fora da mente humana.

Aristóteles, discípulo de Platão, não concordava plenamente com o seu mestre, pois interpretava formas geométricas e os ‘números’ como parte do mundo cotidiano que relacionamos por abstração através da experiência, além do mais, incluía o movimento. O número 8, por exemplo, representa quantidades de objetos variados, ou seja, o número 8 é um aspecto comum de qualquer quantidade que tenha oito coisas.

> Para Platão, a verdade Matemática independe do sujeito e da atividade Matemática – essa é a tese do realismo epistemológico. Em larga medida isso também vale para Aristóteles; porém, no que diz respeito aos objetos matemáticos meramente possíveis, a verdade Matemática depende *em algum grau* do matemático e de sua atividade: isso caracteriza, a meu ver, uma forma branda de idealismo epistemológico. Segundo Platão, os objetos matemáticos são objetos ideais (não reais e *a fortiori* não concretos) existindo fora do tempo e do espaço, por oposição aos objetos reais (físicos ou mentais), cujo traço distintivo é a temporalidade. Para Aristóteles, os objetos matemáticos são objetos abstratos (objetos ontologicamente dependentes de outros objetos, numa das acepções do termo), também em oposição, nesse

> particular, aos objetos reais, que têm existência independente (os objetos matemáticos simplesmente possíveis são também entidades ideais, porém existem apenas como meras possibilidades) (SILVA, 2007, p. 54).

Diante dessas perspectivas de interpretação da Matemática, herdada da Filosofia grega, surgem questões fundamentais na Filosofia da Matemática que, de acordo com Silva (2007), são as seguintes: i) o que são os objetos matemáticos? Para Platão, os objetos matemáticos são entidades ideais, independentes e, para Aristóteles, os objetos matemáticos são apenas maneiras diferentes de tratar os objetos empíricos; ii) como podemos conhecê-los? Platão nos diz que os conhecemos por meio da razão e Aristóteles por meio da abstração motivada pela experiência; iii) como é possível que a Matemática se encaixe tão bem na resolução de problemas do cotidiano? Platão fala que os fenômenos empíricos são cópias imperfeitas do mundo ideal, pois relembramos as coisas, uma vez que somos parte do cosmo; já para Aristóteles não há problema, pois o mundo empírico já se faz presente no mundo da Matemática.

A concepção platônica da Matemática indica um modelo idealista em relação aos seus objetos de estudo, pois estabelecem distinção entre o mundo dos números e das figuras do mundo cotidiano da contagem e da medição. A perspectiva aristotélica já indica características empiristas da Matemática. É importante ressaltar que o empirismo aristotélico diz respeito a um organismo vivo em que os seus objetos estão inter-relacionados, diferentemente do entendimento do empirismo que surgiu a partir dos séculos XVI e XVII o qual trata os objetos isolados, no sentido de estabelecer leis específicas.

A imagem[12] da figura 01, a seguir, ilustra a relação distinta e complementar entre Platão e Aristóteles (no centro da imagem). Platão aponta para cima, para o mundo inteligível e Aristóteles aponta para baixo, para o mundo sensível. Isso indica também que, para Platão, a Matemática é fundamental e para Aristóteles, não.

[12] Pintura do italiano Renascentista Rafael Sanzio (1483-1520).

Figura 01 – Escola de Atenas

Do ponto de vista da reflexão, as duas concepções possuem pontos críticos, pois, no entendimento platônico, há o problema do acesso, ou seja, como atingir os objetos matemáticos puros sem os órgãos sensoriais? E na interpretação aristotélica, partindo dos objetos empíricos, como tratar da justificação, ou seja, como generalizar a partir dos objetos? Como criar leis gerais de um determinado fenômeno, observando aspectos particulares por meio dos sentidos?

1.3. A concepção de Kant em relação aos objetos da Matemática

A compreensão grega antiga da Matemática e da Filosofia perdurou, de forma contundente, até o começo[13] da Idade moderna. Nesse período, as novas intencionalidades motivadas pelo contexto de comércio, navegação e prensa possibilitaram as reinterpretações da produção Matemática grega antiga e as contribuições de expoentes significativos da Matemática, como Stevin, Galileu, Vieta e Descartes, foram fundamentais nessa renovação. Mesmo a Matemática de Descartes, ou seja, sua Geometria Analítica, como é mencionada atualmente, esteve fundamentada em raízes gregas. Porém, na Idade moderna, surgiram novas formas de tratar conceitos matemáticos por meio de operacionalização

[13] Atualmente a concepção grega antiga da Matemática ainda se faz presente, como é o caso de termos matemáticos que se intitulam Platonistas e também quando se entende que a Matemática se faz necessária na interpretação da Natureza.

simbólica. Em relação à Filosofia da Matemática, segundo Silva (2007), foi apenas com Kant (1724-1804) que os domínios matemáticos realmente ampliaram em relação aos aspectos empírico e ideal de Aristóteles e Platão, respectivamente, ou seja, Kant delegou, ao intelecto humano, papel fundamental na construção de conhecimentos matemáticos. Contudo, a herança deixada por Descartes (1596-1650) e Leibniz (1646-1716), no que diz respeito às verdades Matemáticas, faz-nos refletir sobre a objetividade de conceitos matemáticos.

> Há dois tipos de espírito matemático, o sintético-intuitivo e o lógico-analítico. O primeiro valoriza alguma forma de intuição – Geometria ou qualquer outra -, admite uma 'experiência viva da verdade'; o segundo só se rende à evidência lógica, à luz pura (e de alguma forma ofuscante, pois substitui a 'visão' intuitiva) dos princípios e regras da lógica. A história da Matemática conheceu grandes matemáticos de ambos os tipos. Descartes e Leibniz, por exemplo, são espécimes perfeitos de cada um, respectivamente. Como matemático, Descartes foi fundamentalmente grego; ele privilegiava a Geometria, praticamente ignorava a Aritmética, sentia-se desconfortável com o infinito, acatava a evidência geométrica como fundamento de verdade (comungava com a máxima de Pascal: '*Tout ce qui passe La Géometrie nous passe*'). Já Leibniz foi o arauto de uma nova era, a do rigor lógico, dos métodos infinitários, da probabilidade. Ao contrário de Descartes ele desconfiava da intuição e privilegiava a Aritmética – que quis estender a uma *Mathesis Universalis*, que incluía um *Calculus Ratiocinatur*, isto é, uma Aritmética do pensamento. Essas são ideias extremamente ricas que anunciavam conquistas muito superiores, como a lógica algébrica e a invenção de sistemas lógicos formais. O conflito entre a lógica e a evidência é um tema recorrente da Filosofia e da prática Matemática. Do lado de Descartes, encontramos, por exemplo, Brouwer, Gödel, os analistas franceses, como Borel, Baire e Lebesgue, além de Poincaré, entre tantos outros; do Lado de Leibniz, Weiertrass, Hilbert e o Frege dos fundamentos da Aritmética, para mencionar alguns (SILVA, 2007, p. 91).

Diferentemente de Descartes e Leibniz, o estudo de Kant tratou o conhecimento matemático em termos de verdades analíticas e de verdades sintéticas. Kant concorda com Leibniz quando afirma que as proposições analíticas são aquelas em que a ideia denotada pelo sujeito contém a ideia representada pelo predicado, pois isso coincide com as verdades da razão de Leibniz (SILVA, 2007, p. 93). E as verdades que dependem da experiência, na concepção de Kant, equivalem às verdades de fato, de Leibniz. A grande revolução contributiva de Kant diz respeito à ocorrência de que as proposições sintéticas são divididas em dois tipos: as empíricas (ou sintéticas) e as que não são empíricas ou sintéticas, *a priori*. Para Kant, as proposições sintéticas *a posteriori* dependem da experiência para serem validadas e as proposições

sintéticas *a priori* não dependem dos órgãos sensoriais e também não são analíticas.

A grande transformação epistemológica de Kant é o fato de que ele trata das verdades sintéticas *a priori*, ou seja, um conhecimento que desempenha, na experiência, um fator importante, mas é, ao mesmo tempo, independente dessa experiência.

As proposições Matemáticas para Kant são sintéticas *a priori*, ou seja, a Matemática tratava da Aritmética e da Geometria, sendo que essa Geometria era euclidiana. A Geometria era a Ciência do espaço e da percepção (SILVA, 2007, p. 111), portanto não precisava da experiência para 'provar' seus resultados. Entretanto, esses resultados são extremamente necessários para consolidação de fatos do cotidiano e também de questões teóricas como, por exemplo: a soma dos ângulos internos de um triângulo e a igualdade 4+7=11, que são sintéticas *a priori.* Kant entendia que poderíamos ficar o tempo todo analisando os elementos constitutivos de um triângulo, porém nunca poderíamos concluir que a soma de seus ângulos internos forma 180°, bem como da análise do conceito de 4, de 7 e da adição apenas, não se pode concluir que a sua soma sejam 11; ou seja, as partes envolvidas na proposição não são suficientes para determinar a veracidade da afirmação, precisando sempre de algo mais. A fim de perceber essas relações, segundo Silva (2007, p. 97), Kant usa a verificação. Para isso, no caso de exemplos da Geometria, utilizam-se construções auxiliares e, no caso da Aritmética, a contagem. Mas, o que subjaz nessa verificação? Essa verificação, segundo Kant, passa por uma análise mais atenta e profunda do processo de elaboração do conhecimento.

> Uma análise mais atenta da forma do conhecimento mostra-nos que as formas a priori da sensibilidade – o espaço e o tempo – não são conceitos, mas intuições, isto é, representações singulares, e quando falamos em espaços ou tempos no plural, não queremos significar espaços diferentes, mas partes de um espaço ou de um tempo único. Ambas são intuições necessárias e, por isso, só podemos conhecê-las como as formas originárias da experiência externa e da experiência interna. São formas cognitivas, formas a priori, com as quais se constrói a Geometria (o espaço) e a Aritmética (o tempo). São elas o fundamento dos juízos sintéticos a priori, garantia de universalidade e necessidade destas disciplinas (KANT, 1997, XIII).

Para Kant, as intuições são divididas em intuições sensíveis e intuições puras (KANT, B 6). As intuições sensíveis dizem respeito ao fato de sermos

afetados pelo mundo exterior por meio dos sentidos, ou seja, é por meio de atividades empíricas que sentimos o mundo. Isso são características das proposições sintéticas *a posteriori*. Esse mundo perceptível dá-se no espaço e no tempo, porém não sentimos o espaço e o tempo, mas estes nos fornecem a forma. No jargão *kantiano*, segundo Silva (2007, p. 98), o espaço e o tempo são as formas *a priori* de toda a intuição sensível. O espaço e o tempo são 'moldes', na concepção *kantiana*. Isso acontece entre forma e espaço, pois conseguimos pegar num cubo, mas não conseguimos pegar no espaço. Isso ocorre também com a relação música e tempo, ou seja, ouvimos uma música, mas não tocamos no tempo. Os sentidos sempre nos fornecem algo *no* espaço e *no* tempo, mas nunca o espaço e o tempo (SILVA, 99 p. 99). Nessa perspectiva, o espaço e o tempo são intuições puras, isto é, representações singulares que a mente elabora independentemente dos sentidos. Então, o ser humano, para Kant, tem a capacidade de intuir, captar, sentir o espaço e o tempo os quais independem dos sentidos externos.

Assim, como sentir os objetos matemáticos? Para Kant, esses objetos, que são sintéticos *a priori*, são percebidos por meio de intuições puras num contexto de espaço e tempo. No caso da soma dos ângulos internos de um triângulo que totaliza 180° no plano, segundo Kant, trabalhamos por meio de construções auxiliares imaginativas, ou seja, os conceitos de retas e pontos que sintetizamos para nos ajudar a intuir que a soma é, de fato, 180°, são contingentes. O que desenhamos são exemplos arbitrários do triângulo, mas, na mente humana, está presente o triângulo geral. Já no caso da Aritmética, por exemplo, na soma 4+7=11, o quatro, o sete e o 11 são manipulados na forma de exemplos singulares, por meio de um procedimento imaginativo temporal e espacial intuitivo.

> O conhecimento *filosófico é o conhecimento* racional por *conceitos*, o conhecimento matemático, por construção de conceitos. Porém, *construir* um conceito significa apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde. Para a construção de um conceito exige-se, portanto, uma intuição *não empírica* que, consequentemente, como intuição é um objeto *singular*, mas como construção de um conceito (de uma representação geral), nem por isso deve deixar de exprimir qualquer coisa que valha universalmente na representação, para todas as intuições possíveis que pertencem ao mesmo conceito. Assim, construo um triângulo, apresentando o objeto correspondente a um conceito, seja pela simples imaginação na intuição pura, seja, de acordo com esta,

> sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os casos completamente *a priori*, sem ter pedido o modelo a qualquer experiência. A figura individual desenhada é empírica e, contudo serve para exprimir o conceito, sem prejuízo da generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o acto da construção do conceito, aos quais muitas determinações, como as da grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente diferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo (KANT, 1997, B 742).

A Matemática como construção, segundo Otte (2003), não procede apenas de conceitos, mas considera instâncias de objetos particulares. Isso significa que em Matemática introduzimos nos argumentos, representantes particulares de conceitos gerais no sentido de que o processo de construção exibe possibilidades de conteúdos, e não correspondência conceitual unívoca. A construção é uma atividade e sempre começa de algo particular, equanto a teoria diz respeito aos aspectos gerais. Kant nos chamou atenção desse fato, pois mesmo numa prova dedutiva há aspectos contingentes.

A produção de conhecimentos por um filósofo tem como característica o particular no geral (o conceito surge no final), já o conhecimento matemático considera o geral no particular (o conceito se faz presente desde o início). Isso faz com que o matemático possa construir, intuitivamente, exemplares singulares (*in concreto*, na intuição singular) que possibilitem perceber a universalização de uma proposição sintética *a priori*. Os filósofos, pelo contrário, raciocinam discursivamente, acessando os conceitos universais somente *in abstrato*. Nesse sentido, o filósofo ficaria pensando infinitamente nos elementos constitutivos do triângulo e não conseguiria sintetizar que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é, de forma geral, 180° (KANT, B 744).

O caráter construtivo da Matemática do pensamento *kantiano* depende totalmente das intuições puras, tanto do tempo como do espaço, sendo desnecessários os aspectos sensíveis no sentido de realizar a síntese para estabelecer uma proposição verdadeira, isto é, os enunciados da Geometria dependem das intuições puras como, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo são 180°. Então, segundo Silva (2007, p. 101), as intuições puras do espaço e do tempo e a imaginação pura nos fornecem um substituto dos sentidos e da experiência empírica. Isso significa que os sentidos nos abastecem com o conhecimento das Ciências experimentais, ou seja, sintético *a posteriori* e a intuição pura, o conhecimento sintético *a priori*.

Quanto ao pensamento simbólico algébrico, na época de Kant, o que se apresentava era a Álgebra, do ponto de vista de métodos e técnicas na resolução de equações. Aquela Álgebra abstrata, em que o ‘x’ representa um espaço vazio, não se fazia presente, isto é, nessa época, o ‘x’ representava um número, uma quantidade ou um parâmetro. Nessa ocasião, o tratamento algébrico preocupava-se em encontrar soluções de equações em função de seus coeficientes. Então, como fica a construção de conceitos? Kant nos indica uma possível saída.

> A Matemática, porém, não constrói simplesmente grandezas (*quanta*) como na Geometria. Constrói também a pura grandeza (a quantitas), como acontece na Álgebra, em que faz inteiramente abstracção da natureza do objecto que deve ser pensado segundo tal conceito de grandeza. Escolhe então certa notação de todas as construções de grandezas em geral (números), como as da adição, da subtração, extração de raízes, etc. e, depois de ter indicado o conceito geral das grandezas segundo as suas diferentes relações, representa na intuição, de acordo com certas regras gerais, toda a operação pela qual é engendrada ou modificada a quantidade. Quando uma grandeza deve ser dividida por outra, combina os caracteres de ambas segundo a forma que designa a divisão, etc., e alcança assim, mediante uma construção simbólica, tal como a Geometria por uma construção ostensiva ou geométrica (dos próprios objectos), aquilo que o conhecimento discursivo, mediante simples conceitos, nunca poderia alcançar (KANT, 1997, B 745).

É admissível compreender com Kant que os objetos construídos na Geometria (linhas, triângulos, círculos etc) são exemplos de magnitudes com características qualitativa e quantitativa; isto é, dizem respeito à forma e ao tamanho e os algebristas ‘ignoram’ o aspecto qualitativo, considerando-o somente como conceito puro ou uma categoria de magnitudes. Isso significa que, de acordo com Kant, os algebristas constroem os objetos matemáticos quantitativamente sem considerar a forma ou a figura (SHABEL, 2013, p. 610).

Para Kant, o conhecimento algébrico é simbólico, pois as operacionalizações dos termos desconhecidos são efetuadas como se fossem números construídos na intuição pura. Isso significa que os objetos da Matemática não são acessíveis à intuição, porém são representáveis por símbolos e, portanto, manipulados por meio de regras (SILVA, 2007, p. 105). Kant (1997, B 179 180) trata do conceito de esquema que significa representação de um processo geral na imaginação para fornecer, a um determinado conceito, uma imagem. Dessa forma, o esquema pode ser transformado numa imagem de

segmentos, áreas, volumes e razões entre segmentos, assumindo determinados valores numéricos por meio da utilização de uma simbolização adequada.

1.4. O conceito de Complementaridade no estudo da natureza dos objetos matemáticos[14]

A partir do início da idade moderna, as Ciências, desde Bacon (1561-1626), evidenciaram a separação entre a Mecânica e a Natureza, entre *techne* e *episteme*. Nesse período, inicia-se a experimentação (uma atividade humana prática e objetiva – uma ação ativa e não passiva) como fonte de conhecimento confiável. Segundo Bacon:

> De bom grado classificamos as histórias das Artes como um setor da história natural. De fato, afirmou-se a inveterada opinião de que Arte são coisas diferentes da Natureza e as coisas artificiais diferentes das coisas naturais. Daqui derivou o inconveniente de que muitos escritores de coisas naturais creem ter alcançado seu objetivo compondo uma história dos animais, dos vegetais, dos minerais e omitindo os experimentos das Artes Mecânicas. Mas, um preconceito ainda mais sutil insinuou-se na mente dos homens: a Arte não passa de uma espécie de apêndice da Natureza, que teria apenas a tarefa de completar aquilo que a Natureza somente iniciou, de assisti-la quando ela se deteriora ou de libertá-la quando está impedida, mas nunca a tarefa de resolvê-la profundamente, de transmutá-la, de abalá-la até suas profundezas. Isso provocou um precipitado desespero nas coisas humanas. Pelo contrário, esse outro princípio deveria ter penetrado em profundidade nas mentes: as coisas artificiais não diferem das coisas naturais pela forma ou pela essência, mas apenas pela causa eficiente [...] quando as coisas estão dispostas a obtenção de um determinado efeito, pouco importa que este seja alcançado pelo homem ou sem o homem *(*BACON *apud* OLIVEIRA, 2010, p. 139).

Diante dessa concepção, como fazer experiência em Matemática? A questão que podemos colocar nessa discussão trataria do que se entende por experiência em Matemática tanto nos séculos XVI e XVII como atualmente. Será que é o mesmo conceito de experiência nas Ciências Físicas?

Kant, diferentemente de Bacon, considerava a Geometria euclidiana como sendo experimental no sentido de construção, pois, em toda Geometria

---

[1414] Este tópico foi elaborado a partir de uma série de explicações dadas pessoalmente no grupo de estudos compostos pelos alunos: Evilásio José de Arruda, Jacqueline Borges de Paula, Geslane Figueiredo da Silva Santana e Humberto de Assis Clímaco sobre o conceito de Complementaridade por Michael Otte durante orientações.

euclidiana, os postulados indicam que, se as construções a, b e c são verdadeiras, então as construções d e f também são possíveis. Nas palavras de Kant (1997, BXI-BXII):

> Desde os tempos mais remotos que a história da razão pode alcançar, no admirável povo grego, a Matemática entrou na via segura de uma Ciência. Simplesmente, não se deve pensar que lhe foi tão fácil como a lógica, em que a razão apenas se ocupa de si própria, acertar com essa estrada real, ou melhor, abri-la por seu esforço. Creio antes que por muito tempo (sobretudo entre os egípcios), se manteve tacteante, e essa transformação definitiva foi devida a uma *revolução* operada pela inspiração feliz de um só homem, num ensaio segundo o qual não podia haver engano quanto ao caminho a seguir, abrindo e traçando para sempre e a infinita distância a via segura da Ciência. A história desta revolução do modo de pensar, mais importante do que a descoberta do caminho que dobrou o famoso promontório e a história do homem afortunado que a levou a cabo, não nos foi conservada. Todavia, a tradição que Diógenes Laércio nos transmitiu, nomeando o suposto descobridor dos elementos mais simples das demonstrações geométricas e que, segundo a opinião comum, nem sequer carecem de ser demonstrados, indica que a recordação da mudança operada pelo primeiro passo dado nesse novo caminho deve ter parecido extremamente importante aos matemáticos, tornando-se, por conseguinte, inolvidável. Aquele que primeiro demonstrou o *triângulo isósceles* (fosse ele Tales ou como quer que se chame) teve uma iluminação; descobriu que não tinha que seguir passo a passo o que via na figura, nem o simples conceito que dela possuía, para conhecer, de certa maneira, as suas propriedades; que antes deveria produzi-la, ou construí-la, mediante o que pensava e o que representava *a priori* por conceitos e que para conhecer, com certeza, uma coisa a priori nada devia atribuir-lhe senão o que fosse consequência necessária do que nela tinha posto, de acordo com o conceito.

Kant entendia que o conhecimento matemático está inserido num contexto de intuições puras. Logo, há necessidade de atividades. E é neste aspecto que o conceito de Complementaridade do pensamento Otteano[15] se faz presente, no sentido de interpretar e investigar, epistemologicamente, a natureza dos objetos matemáticos. Visto que para Otte (2014), o conhecimento são processos de adaptações mútuas do sujeito e objeto que mudam as partes envolvidas na relação. Por isso, precisamos de um sistema de atividades e representações, pois conhecer é generalizar.

O conceito de Complementaridade foi introduzido na Física Quântica por Niels Henrik David Bohr (1885-1962). Bohr pretendia mostrar a impossibilidade de qualquer separação nítida entre o comportamento dos objetos atômicos e a

[15] Pensamento Otteano refere-se ao conceito de Complementaridade de Michael Otte, o qual estuda essa temática desde a segunda metade do século XX.

interação com os instrumentos de medida que servem para definir as condições em que os fenômenos aparecem (BOHR, 1995, p. 51).

O que de fato Bohr percebeu é a importância que tem a atividade humana na elaboração do conhecimento, ou seja, é impossível separar o sujeito de seu objeto no sentido de que não encontramos, segundo Otte (2012, p. 85), uma distinção absoluta entre sujeito (e seus instrumentos) e o objeto considerado. De forma que os aspectos entre o sujeito, atividades e o objeto não devem ser tratados separadamente e sim como um todo, prevalecendo o aspecto relacional. De acordo com Otte, essa característica do princípio físico da Complementaridade ocupa um papel central na questão cognitiva e epistemológica do conhecimento humano. Portanto, é inevitável estendê-lo aos fundamentos da Educação Matemática. Foi isso que Otte fez e faz em sua produção acadêmica, isto é, em Kant o aspecto cognitivo em si desempenha um papel central na construção de conhecimento matemático. Otte percebeu que o conceito de Complementaridade, no sentido de que os objetos de estudo da Matemática, do ponto de vista de relações, também desempenham papel ativo na produção de conhecimento Matemático.

Na busca da compreensão das formas em que se processa a elaboração do conhecimento, tornam-se relevantes os objetos e os conceitos desses objetos. Para construção desses conceitos, há necessidade de atividades cognitivas, pois estas são as essências da relação sujeito-objeto. O conceito de Complementaridade fundamenta-se exatamente entre as atividades, os métodos e os objetos do conhecimento e foi inspirado em Kant (1997, B 74-75):

> O nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objecto mediante estas representações (espontaneidade de conceitos); pela primeira, é-nos *dado* um objecto; pela segunda é *pensado* em relação com aquela representação (como simples determinação do espírito). Intuição e conceitos constituem, pois, os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que nem conceitos sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceitos podem dar um conhecimento. Ambos elementos são puros ou empíricos. *Empíricos*, quando a sensação (que pressupõe a presença real do objecto) está neles contida; *puros*, quando nenhuma sensação se mistura à representação. A sensação pode chamar-se matéria do conhecimento sensível. Daí que a intuição pura contenha unicamente a forma sob a qual algo é intuído e o conceito puro somente a forma do pensamento de um objecto em geral. Apenas as

> intuições ou os conceitos puros são possíveis *a priori*, os empíricos só *a posteriori*. Se chamarmos *sensibilidade à receptividade* do nosso espírito em receber representações na medida em que de algum modo é afectado, o *entendimento* é, em contrapartida, a capacidade de produzir representações ou a *espontaneidade* do conhecimento. Pelas condições de nossa natureza, a intuição nunca pode ser senão *sensível*, isto é, contém apenas a maneira pela qual somos afectados pelos objetos, ao passo que o entendimento é a capacidade de *pensar* o objecto da intuição sensível. Nenhuma dessas qualidades tem primazia sobre a outra. Sem a sensibilidade, nenhum objecto nos seria dado; sem o entendimento, nenhum seria pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios; intuições sem conceitos são cegas.

A Matemática, como qualquer outra área do conhecimento, é influenciada pela Complementaridade de reação (receptividade das impressões) e ação (espontaneidade dos conceitos). Há uma tensão dialética[16] complementar entre o processo de construção e o conceito.

Nenhum desses elementos (método, objeto e atividade num contexto) pode ser determinado sem o outro. Mas o conceito não é idêntico à sua definição. O conceito representa uma Complementaridade entre objeto e método, ou entre conhecimento e método (OTTE, 1993, p. 227). Dessa forma, o saber é construído por um processo real e dinâmico[17].

> Quando se deseja progredir da dualidade ou polaridade, como ainda ocorre em Kant, para uma genuína Complementaridade, pela qual cada um dos elementos polares tanto se diferencia do outro como o abrange, então, é preciso colocar a atividade como a essência da relação sujeito-objeto, procurar descrever a dinâmica dessa atividade como entidade independente, que se diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva. Esta dinâmica fundamenta-se exatamente na Complementaridade entre os meios (sistemas de símbolos, por exemplo – grifo nosso) e os objetos do conhecimento (OTTE, 1993, p. 224).

Efetivamente, no pensamento Otteano, a Complementaridade não é uma simples dualidade entre sujeito e objeto, mas é concebida a partir de uma perspectiva genética que se concentra no caráter evolucionário do conhecimento matemático, pois nenhuma das partes constituintes da produção de conhecimento, a saber: a mente, o método e o objeto, é determinada sem a relação de interdependência da estrutura, da linguagem, das representações e do uso (pragmatismo), ou seja, não há polarização em nenhuma dessas partes que compõem a produção do entendimento da natureza dos objetos matemáticos.

[16] A tensão dialética aqui é interpretada como tentativa de entender concepções opostas na perspectiva de Complementaridade, não de oposição.

[17] A Complementaridade é uma interação entre sujeito e objeto. Eu não posso ampliar o entendimento dos objetos matemáticos se não tomar conta do ponto de vista dinâmico.

Contudo, em determinado ato epistemológico, cada um desses elementos desempenha papel assimétrico, isto é, não há obrigatoriedade de polarização e sim de aspectos relacionais.

O foco está na relação entre o sujeito e o objeto matemático e não somente no objeto em si (OTTE, 2003). O objeto[18] da Matemática ou o conteúdo da atividade Matemática, de forma alguma, pode ser definido absoluta e independentemente dos métodos da atividade Matemática (OTTE, 1993, p. 226) e isso evidencia a importância da noção de Complementaridade nos estudos epistemológicos dos objetos da Matemática.

Segundo Otte (1993), é importante ressaltar que a dinâmica da produção do conhecimento matemático do ponto de vista da atividade como 'entidade' independente e dependente ao mesmo tempo, sem oposição no sentido de que o entendimento de novos objetos matemáticos não é simplesmente encontrado em algum lugar, mas elaborado no contexto de uma prática sócio-histórica. Isso nos faz pensar, exatamente, que o início da consolidação da Álgebra simbólica está inserido, também, num contexto social.

No estudo da Matemática, existem profissionais que buscam descobrir 'verdades' referentes a determinado ramo da realidade e são denominados de idealistas, pois entendem que os objetos matemáticos são independentes do sujeito pensante; isto é, esses objetos estão fora, num sentido de que a forma como se relacionam não depende da forma como o ser humano pensa. Se isso procede, ou seja, os objetos matemáticos não estabelecem relação causal com o sujeito. Então, como podemos entendê-los?

Já a concepção nominalista e construtivista da Matemática, compreende que os objetos da Matemática são construções do sujeito ou criações mentais e não conseguem, segundo Otte (2003; 2012), responder à questão da objetividade e fertilidade da Matemática, nem respondem como os matemáticos podem

[18] Nota-se que Otte entende por objeto qualquer problema ou tipo de resistência da realidade contra a atividade do sujeito e por meios (métodos) algo que seja apropriado para alcançar a mediação entre o sujeito e o objeto na cognição. Dessa forma, os objetos matemáticos são as representações e as generalizações obtidas pela abstração reflexiva ou hipostática. Nesse contexto está presente a simbolização algébrica operativa.

descobrir novos conhecimentos e, muito menos, ainda as ideias que guiam essas construções.

Foi buscando encontrar respostas às questões emergentes sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático que, nem idealista, tampouco o nominalista e construtivista, conseguem responder que Michael Otte elaborou o conceito de Complementaridade para investigar questões que dizem respeito à natureza dos objetos matemáticos, ou seja, analisa e explica o desenvolvimento epistemológico e cognitivo de conceitos matemáticos, pois, nem o logicismo, nem o construtivismo e nem o formalismo, sozinhos, dão conta dessa investigação. Diz Otte[19]: de um lado, a aplicabilidade Matemática é universal, então, não pode ter significado específico e, de outro lado, a Matemática não é exatamente um jogo formal com regras determinadas.

Isso significa que a Matemática não tem significados fixos como uma determinada teoria da Botânica, por exemplo. Então, na Matemática, os objetos não são bem determinados e fixos. Nesse sentido, é necessário tratar a Matemática como atividade entre o sujeito e o objeto pensado na mente desse sujeito, tendo múltiplas interferências num determinado contexto prático ou teórico.

Desde a Revolução Científica dos séculos XVII e XVIII, as pessoas tentavam lidar com a separação entre símbolos e objetos, isto é, começaram a perceber que não é possível acessar a realidade como é realmente e, por isso, 'criam-se' representações simbólicas que possibilitam a intermediação entre a realidade e a mente do sujeito. Dessa separação, resultou uma espécie de afastamento entre Arte, Filosofia e Ciência e, com isso, surgiu um dogma da Filosofia Analítica, que diz o seguinte: "há uma desunião fundamental entre as verdades que são *analíticas*, ou seja, baseadas em significados independentes dos fatos, e verdades que são *sintéticas*, ou baseados em fatos" (QUINE, 1963, p. 20. Tradução nossa).

A Filosofia Analítica, de acordo com Otte, destaca-se pelo fato de ter substituído a investigação epistemológica pela concentração na Semiótica e na

[19] Explicação realizada no dia 08/11/2012 numa seção de orientação.

sintaxe das linguagens, ou seja, pela ‘virada linguística’, considerando que, na linguagem, faz-se presente a interação entre sentido e referência, isto é, o quê e o como. Essa perspectiva indica uma reação à concepção de Kant em relação ao conhecimento sintético *a priori* da Matemática. O objetivo é explicar esse conhecimento sem considerar as intuições puras e nem os sentidos, ou seja, apenas por meio da linguagem. Nesse contexto, o grande desafio é distinguir ou separar os dois lados da própria linguagem. Frege (1848-1925), por exemplo, de acordo com Otte, sempre considerou que a linguagem é, de um lado, essencial para a análise do pensamento e, de outro lado, um obstáculo que deveria ser superado para chegar às relações lógicas objetivas.

Mas o desejo exagerado de uma representação lógica objetiva destruiu seu próprio sistema como, por exemplo, o Axioma da Compreensão[20]. O antropólogo Gregory Bateson (1904-1980) expressou aquilo que temos na mente, dizendo que há dois tipos de mundo: um mundo *newtoniano* e um mundo do tipo de George Berkeley (1685-1753). A diferença entre esses dois mundos é a seguinte:

> O mundo newtoniano atribui realidade somente aos objetos, e alcança sua simplicidade pela exclusão de qualquer contexto ou contexto de contexto. De fato, para a exclusão de quaisquer relações meta-perspectivas, em contraste com o mundo newtoniano, o mundo de Berkeley existe na exploração ou pesquisa de meta-relações alcançando a simplicidade pela negação dos objetos (BATESON, 1972, p. 255. Tradução nossa).

A maneira mais sucinta de mostrar essa Complementaridade entre objetos e signos, essencial no pensamento Otteano, no que diz respeito ao entendimento da natureza dos objetos matemáticos, resulta da análise da equação A=B. Num artigo que Frege publicou em 1892 sobre ‘significado e referência’, ele diz:

> A igualdade desafia a reflexão, dando origem a questões que não são fáceis de responder. É ela uma relação? Uma relação entre objetos? Ou entre nomes ou representações de objetos? Em minha *Begriffsschrift* assumi a última alternativa. E as razões que parecem apoiar esta alternativa são as seguintes: *a* =*a* e *a* = *b* são, evidentemente, sentenças de valor cognitivo diferente, pois *a*=*a* sustenta-se *a priori* e, segundo Kant, deve ser denominada de analítica, enquanto que sentenças da forma *a*=*b* contêm, frequentemente, extensões muito valiosas de nosso conhecimento, e nem sempre podem ser estabelecidas a *priori.* A

[20] Axioma da compreensão ou axioma da separação ou axioma da especificação é um dos axiomas do sistema de Zermelo-Frankel que diz o seguinte: se um conjunto *A* existe, e conseguimos descrever (através de uma propriedade) elementos deste conjunto, então existe um conjunto *B*, subconjunto de *A*, que contém estes elementos. Este axioma diz respeito ao fato de nos permitir construir conjuntos a partir de outros.

> descoberta de que o sol nascente não é novo cada manhã, mas é sempre o mesmo, foi uma das descobertas astronômicas mais ricas em consequências. Mesmo atualmente, o reconhecimento de um pequeno planeta ou de um cometa nem sempre é evidente por si. Assim, se quiséssemos considerar a igualdade como uma relação entre os objetos a que os nomes *'a'* e *'b'* se referem, então *a*=*b* não pareceria diferir de *a*=*a,* caso *a*=*b* fosse verdadeira'. Desse modo, expressaríamos a relação de uma coisa consigo mesma, relação que toda coisa tem consigo mesma, mas que nunca se dá entre duas coisas distintas. Mas, por outro lado, parece que pôr *a* = *b* quer-se dizer que os signos ou os nomes *'a'* e *'b'* referem-se à mesma coisa; e neste caso, a discussão versaria sobre esses sinais: uma relação entre eles seria asserida. Mas tal relação entre os nomes ou sinais só se manteria na medida em que eles denominassem ou designassem alguma coisa. A relação surgiria da conexão de cada um dos dois sinais com a mesma coisa designada. Essa conexão, porém, é arbitrária. Ninguém pode ser impedido de empregar qualquer objeto ou evento arbitrariamente produzido como um sinal para qualquer coisa. Com isto, a sentença *a*=*b* não mais se referiria propriamente à coisa, mas apenas à maneira pela qual a designamos: não expressaríamos por seu intermédio, propriamente, nenhum conhecimento (FREGE, 1978, p. 129).

Nessa igualdade A=B (uma relação de referência), em que A e B são duas intensões diferentes da mesma extensão, ou diferentes designações do mesmo objeto. Segundo Otte (2003), tanto A como B tem a mesma referência enquanto o sentido ou o modo de apresentação são diferentes. Frege não ofereceu uma vida independente às intensões ou aos conceitos e ideias, pois considerava apenas como uma maneira de representar as extensões, ou seja, reduziu as funções aos seus objetos. Isso derrubou todo o sistema de Frege no momento em que reduziu o conceito à sua extensão.

Diferentemente de Frege[21], Otte assume uma perspectiva genética, ou seja, entende ser importante tomar conta do fato de que nosso conhecimento nunca está completo e sempre fica em movimento (dinâmico). Enquanto a interpretação de Frege pressupõe o oposto, de dar aos objetos e à lógica dos objetos uma predominância absoluta, reduzindo as intensões[22] ou sentidos dos termos a um papel de dependência. No extremo, de acordo com Otte, isso nos leva a uma teoria descritiva de referência no sentido de uma ficção *leibniziana* de um conceito completo de qualquer substância individual.

---

[21] Explicação dada pessoalmente por Michael Otte no dia 07/11/2012, período matutino, numa seção de tradução e orientação.

[22] Frege utilizou o sentido do signo como intensão [...]. A intensão de um termo é definida por Lewis como 'a conjunção de todos os outros termos, cada um dos quais deve ser aplicável àquilo a que o termo é corretamente aplicável'. Nesse sentido, a intensão (ou conotação) é delimitada por toda definição correta do termo e representa a *intenção* de quem o emprega por isso o significado primeiro de 'significado' [...] Para Quine, a intensão é o significado (ABBAGNANO, 1982, p. 664).

Otte afirma que, ao encontrarmos um objeto desconhecido, toda a simbolização desse objeto é necessariamente arbitrária e, mesmo assim, esperamos que esse encontro deva aumentar nosso conhecimento. Com isso, o símbolo de qualquer coisa transforma um objeto da atividade cognitiva. Para Otte, os gregos chamavam essa atividade de 'Análise' e sabemos que o poder e a força dessa Análise cresceram bastante com a invenção da Álgebra Simbólica operativa nos séculos XVI e XVII.

A Álgebra Simbólica, desde Stevin, Vieta e Descartes, para Otte (2012), aumentou as possibilidades tanto da Análise quanto da Síntese. A nova Ciência se mostra com objetividade na representação do desconhecido pelo símbolo 'x' cujo significado repousa no uso e na atividade (aspecto operativo) e não na referência (aspecto contemplativo). Nesse contexto, a Álgebra evidencia que a maneira de representação e a perspectiva escolhida determinam a probabilidade de resolver um problema ou de construir uma teoria de maneira estrutural. Isso está demonstrado na obra de Klein (1992) sobre a transformação do conceito de número. Frege, ao contrário, considera os objetos e a lógica desses objetos uma dominância absoluta, reduzindo as intensões do símbolo a um papel secundário ou dependente.

A Análise estabelece equações que representam relações entre objetos conhecidos e desconhecidos e a Síntese tenta resolvê-las. Porém, esta última possibilidade de resolver as equações depende muito da perspicácia com a qual as equações foram estabelecidas bem como da maneira como uma coisa foi representada e isso é determinante e tem muito valor; por isso, as intensões são mais importantes do que Frege pensava, isto é, tendo valor e existência independentemente dos objetos e extensões[23].

[23] A extensão ou denotação de um termo, porém, é a classe das coisas *reais* às quais o termo de aplica (LEWIS, *Analysis of Knowledge and Valuation*, 1950, pp. 39-41). Para Quine, a extensão é a classe à qual o termo pode ser atribuído com verdade (*From a Logical Point of View*, II, 1) (ABBAGNANO, 1982, p. 664). No conceito de Complementaridade Otteano (veja apêndice B): ***extensão***: os objetos (caso existam) aos quais um signo se refere, ou seja, as classes das coisas 'reais' às quais o termo se aplica; ***intensão***: o conteúdo ou sentido do signo, as vezes se fala também do significado do signo.

Ao contrário do que Frege entendia, Otte afirma que nem as intensões determinam as extensões dos conceitos teóricos, pois, se fosse diferente, não haveria teorias falsas e tampouco as extensões determinariam as intensões[24].

Na concepção de Otte, o primeiro filósofo analítico que percebeu claramente a base da Análise da distinção *kantiana* entre verdades analíticas e sintéticas e que reconheceu a independência relativa entre as intensões e extensões de conceitos e símbolos foi Bolzano (1781-1848). Para Bolzano, não apenas 'a=a' é analítica, mas 'a=b' também poderá ser analítica. Se isso fosse sempre verdadeiro em todos os contextos, indicaria que Frege vivia num mundo *newtoniano* e Bolzano, num mundo de símbolos como Berkeley.

Michael Otte entende que a teoria descritiva de referência é o maior erro que a Filosofia da Ciência cometeu.

Daí resulta a crença infundada, segundo Otte em suas explicações, de que a Ciência produz verdades absolutas sobre o mundo, que a Ciência não consegue se relacionar com o discurso cultural e nem logra distinguir, claramente, conceitos e objetos. Em suma, Otte entende que a intensão e extensão, ou o sentido e referência, respectivamente, não podem ser conectadas uma a outra tão rigidamente como Frege desejava. Como exemplo, Otte diz que a nossa escolha de como representar as coisas não depende apenas da coisa, mas também de nossos objetivos. O uso do 'x' para variáveis e incógnitas facitita a realização de operações de conceitos, porém não pode ser confundido com o conceito. Por outro lado, a representação não pode ser escolhida arbitrariamente, isto é, o processo é dinâmico e nunca está completo.

Nossa escolha e nossas possibilidades dependem também dos métodos e instrumentos de nossa atividade.

> Vivemos num mundo de signos e possibilidades ao invés de num universo de coisas determinadas. Isso significa que o processo do conhecimento é para ser descrito como um processo semiótico de interpretação e, é, portanto, um tipo de processo interativo entre objetos e ideias (OTTE, 2014, p.3).

[24] Informação dada pessoalmente por Michael Otte no dia 08 e 09 de novembro de 2012 no período matutino, numa seção de tradução e orientação.

Otte entende existir um teorema da incompletude na Semiótica, dizendo que a conexão entre objeto e instrumento, ou seja, entre referência e significado, nunca pode ser resolvido numa maneira definitiva. Para Otte, é isso que ele quer dizer quando trata da Complementaridade, isto é, intensões (o sentido de um conceito reside na maneira de usá-lo) e extensões tornam-se relativamente independentes e conectadas circularmente uma com a outra (OTTE, 2003, p. 205. Tradução nossa); isto é, trata-se de uma interação dinâmica 'helicoidal' e não apenas 'espiral' no processo da atividade cognitiva.

Nessa atividade, está presente a representação, sendo que esta influencia diretamente a expressão dos significados dos conceitos matemáticos, pois a expressão tem uma intenção que pode ou não ser arbitrária.

Não há relação estrita e bem definida entre os dois mundos (conceitos e objetos), isto é, do mundo da expressão da simbolização e o mundo dos objetos e dos fatos. O conceito de Complementaridade na pesquisa em Educação Matemática diz respeito não apenas ao mundo da expressão, pois temos que dar conta também do mundo objetivo. O conceito de Aristóteles combinava muito bem com o mundo de Aristóteles, mas, no mundo de Aristóteles, o saber do cotidiano, a experiência comum e a Ciência não eram divididos tão fortemente como hoje em dia (não havia tanta especialização). Dessa forma, a concepção antiga entrou em conflito com a maneira moderna (começam as fragmentações) de pensar que se baseia num novo entendimento ontológico, ou seja, num novo entendimento (visão) de mundo. É nesse sentido que o número, como símbolo geral, corrobora no discernimento das coisas.

O conceito de Complementaridade do pensamento Otteano apresenta várias relações complementares como, por exemplo: intensão/extensão; contínuo/discreto, conotativo/denotativo, conceito/objeto e axiomas/aplicações (modelos). Nesta pesquisa, o tratamento será na relação entre intensão/extensão, numa perspectiva de símbolo/objeto no início da simbolização algébrica moderna, nos séculos XVI e XVII.

> O significado do conhecimento matemático é concebido em termos de Complementaridade de intensão e extensão. Isso significa que há dois componentes objetivos: um que diz respeito ao objeto e outro está relacionado a expressão linguística ou representação diagramática que mostra a característica da atividade objetiva (que em geral não é o

> objeto designado), mas expressa como as suas características se juntam. A Complementaridade é estabelecida pelo processo de generalização e verificação (OTTE, 2003, p. 220. Tradução nossa).

Nesse sentido, a simbolização, o ‘x’ cartesiano ou uma equação, por exemplo, expressam conceitos que são operacionalizados do ponto vista instrumental; isto é, há necessidade da Complementaridade entre a estrutura, a linguagem e a representação para compreensão dos conceitos matemáticos, tornando a simbolização imprescindível para construção de conhecimentos matemáticos e ‘ampliação’ do pensamento.

Com a Álgebra, vamos mais longe do que com a Aritmética e a Geometria, tanto na resolução de problemas da Física como de problemas da própria Matemática, pois perdemos o controle quanto ao fato de fornecer significados aos resultados das calculações (Logística simbólica). Esse fato foi percebido pelos modernos dos séculos XVI e XVII e é evidenciado na obra de Klein (1992), na transformação do conceito de número que, por sua vez, foi analisado, nesta pesquisa, na perspectiva do conceito de Complementaridade do pensamento Otteano.

1.4.1. A Complementaridade na construção de conceitos matemáticos presentes nos séculos XVI e XVII

No começo do século XVII, segundo Foucault (1995, p. 66), o pensamento cessa de se mover no elemento da semelhança. Isso provocou uma grande transformação no sentido da representação, indicando que não ficamos mais interpretando a Natureza ou salvando as aparências e, sim, representando em termos simbólicos, ou seja, compreendendo sua estrutura. O ponto essencial dessa transformação é a ‘separação’ dos signos (símbolos algébricos) e das coisas (objetos).

A similitude[25] não é mais a forma de saber, mas, antes, a ocasião do erro ao perigo, ao qual nos expomos quando não examinamos o lugar mal esclarecido das confusões (FOUCAULT, 1995). É nesse sentido que a calculação simbólica algébrica, através de um método, torna mais objetivo o entendimento dos fenômenos, distinguindo as coisas por meio da medida e da ordem (analogia e proporção por meio de signos[26]), da igualdade e da diferença. O foco não está mais no fato de aproximar do 'ser' das coisas e, sim, em discernir a maneira como os fenômenos podem ser entendidos.

A *Mathesis* como Ciência universal nos séculos XVI e XVII, em que o seu método universal é a 'Análise e/ou Álgebra', está contida num contexto em que os seus instrumentos são sistemas de signos, segundo Foucault (1995, p. 72 e 87). Contudo, os fenômenos da Física são interpretados via linguagem formal da Matemática, caracterizando uma conexão íntima, como argumenta Klein (1992).

Foucault (1995, p. 73-74) trata do significado do signo na idade Clássica (final do século XVI até final do século XVIII), dizendo que o signo deixa de ser uma figura do mundo; deixa de estar ligado àquilo que ele marca por liames sólidos, secretos da semelhança ou da afinidade. Em Teeteto (196 E-197 A), há uma pergunta fundamental: 'Teeteto: como discutiremos, Sócrates, se nos abstivermos das palavras, isto é, de palavras que designam coisas procuradas? Sócrates: seria inteiramente impossível'. Em outro diálogo - *Crátilo* trata da 'correção' dos nomes no que diz respeito à relação nome/coisa. A busca do entendimento nesse diálogo é saber se o nome é dado pela *Physis* (Natureza), isto é, brota e cresce por si mesmo, sendo imutável e independente da influência humana ou se o nome é obtido pelo uso, costume, isto é, convencional e constituído pelo homem, isto é, a linguagem é um sistema de signos arbitrários ou as palavras tem uma relação intrínseca com as coisas do mundo. Isso, interpretado nos séculos XVI e XVII, fez com que o signo deixasse de estar associado às coisas, ou seja, o signo começa a ser escolhido 'arbitrariamente'

[25] Semelhança/similitude (do lat. *similis*) – Qualidade de duas ou mais coisas que possuem termos comuns que as aproximam ou identificam, sem, contudo, chegarem a ser iguais (JAPIASSÚ; MARCONDES, 1996, p. 244).

[26] Signo – elemento que indica outro. Nesse sentido o símbolo é um objeto que indica outro objeto. O 'x' é um símbolo que num contexto matemático pode indicar objetos aritméticos, geométricos ou simplesmente um espaço vazio.

para executar uma objetividade, ou seja, é simples e, como diz Foucault (1995, p. 77), aplicável a um número indefinido de situações e, de acordo com Descartes, fácil de operacionalizar e não ‘atrapalha’ o desencadear do raciocínio.

O signo cuja grafia e som emitido (significante) estabelecem relações com o conceito transmitido pelo significante (significado), concretiza-se por meio da representação e a simbolização algébrica em que o símbolo indica outro objeto, numa perspectiva complementar como duas faces de uma mesma moeda, surgiu nos séculos XVI e XVII com Stevin, Vieta e Descartes. Isso significa que o signo tem sentido e referência (intensão e extensão respectivamente). Na concepção Otteana de Complementaridade, o sentido deriva do relacionamento interno que se faz presente no sistema de símbolos. Por exemplo, o sentido de uma identidade algébrica (equação), consiste nas possibilidades de calculações e nas possíveis soluções e a referência diz respeito aos modelos e aplicações a que se destinam de acordo com o contexto.

Essa ‘separação’ significa que antigamente, na época da interpretação, um símbolo ou uma imagem tinha valor quando estava relacionado com o objeto representado, caracterizando uma descrição do ser; por exemplo: se uma planta tem semelhança de forma com algum órgão do corpo humano, então, essa planta poderia ser usada no tratamento de pessoas que têm problemas nesse órgão.

Nos séculos XVI e XVII, os símbolos no sentido operativo começam a ser convencionados. A Álgebra passa a utilizar símbolos artificiais ou voluntários. Há símbolos que não têm a mínima referência com o objeto, por exemplo, os números imaginários. O significado de uma grande quantidade de símbolos reside nas regras do uso e não nas referências ao objeto. Stevin (1548-1620), por exemplo, preocupou-se em empregar a simbolização no uso prático por meio de regras de operações. Vieta (1540-1603), em sua Arte Analítica e Descartes (1596-1650), em sua Geometria Analítica, preocupavam-se com representações e resoluções dos problemas por meio de símbolos gerais, ou seja, ‘criaram’ uma simbologia para ‘atacar’ grupos de problemas.

Nessa nova estrutura de conceitualização[27], ou seja, nova maneira de construção de conceitos, o processo de abstração, fundamentado na semelhança entre as características comuns dos objetos, não consegue capturar a universalidade, a partir do particular.

Cassirer, segundo Oliveira (2013, p. 113), afirma que:

> Por abstração, não é mais entendida uma uniforme e indiferenciada atenção (*attention*) para um dado conteúdo, mas uma inteligente realização dos mais diversificados e mutuamente independentes atos de pensamento; cada um dos quais, envolve uma espécie particular de *significado* do conteúdo, uma direção especial da referência objetiva.

O procedimento aplicado não é mais a semelhança e, sim, por meio de Leis e 'funções' cujas estruturas da interpretação rompem com a ontologia aristotélica que enfatizava a coisa e a substância, passando a explorar a construção de conceitos por meio de relações. A Lei, a fórmula e a 'função' são os universais, ou seja, há complementaridade entre fórmula e relação.

No desenvolvimento histórico, segundo Otte (1993; 2014), o conceito de função tem uma dupla raiz complementar. Primeiro, ele se desenvolve ao lado do conceito de Lei, particularmente junto com o conceito de Lei Natural enfatizando o contínuo, ou seja, o aspecto holístico e dinâmico. Segundo, ele surge, também, do conceito de operação Aritmético-algébrica, do conceito de algoritmo e das concepções gerais de máquinas, isto é, aspectos discretos que permitem calcular valores singulares.

A correspondência entre Lei e fórmula Matemática nos séculos XVI e XVII surgiu num processo de elaboração universal, no sentido de que o empirismo não estava propiciando 'ampliação' do entendimento das relações. Isso significa que, tanto na Matemática como na Física, os objetos e fatos isolados não são o mais relevante, mas importa o que se faz presente numa estrutura de relações.

O processo de abstração na construção de conceitos, a partir dos séculos XVI e XVII, passa por alterações significativas. A abstração tradicional confundia a definição do conteúdo com as partes do conteúdo, ou seja, abstrair significava deixar de fora algumas características em detrimento das características comuns.

[27] Na conceitualização antiga, o formal é inseparável do Ser (Aristotéles) e no início da época moderna começa a ser indepentende (conceito de conceito).

Isso denota que o conceito indica características comuns de uma determinada categoria de objetos.

A ‘nova abstração’ enfatiza a relação entre os elementos e não os elementos em si. A mudança começou a considerar aspectos universais em que o particular pertence a uma estrutura, que é evidenciada na Álgebra de Stevin e na *Mathesis Universalis*, de Vieta e Descartes. Os que são ‘descartados’ na abstração tradicional são incorporados à Lei, por meio de fórmula. Uma coisa é pensar no número 4, numa situação específica, outra coisa é pensar o número 4 como elemento de sequência numérica (estrutura). Nesse sentido, os números não são objetos e nem nomes de objetos, mas relações dentro de uma série; isto é, o que importa não são os números e, sim, o conjunto ou a série de números. É nessa estrutura que a simbolização algébrica começa a ter *status* de excelência.

A conjuntura dos séculos XVI e XVII, do ponto de vista de novas descobertas, corroborou a construção de novos instrumentos, objetivando ‘enxergar’ além do que os órgãos sensoriais podiam oferecer, ou seja, aumentar a capacidade de percepção e, com isso, o objeto observado torna-se mais claro. Dessa forma, a generalização simbólica algébrica possibilita ‘cobrir’ lacunas da experimentação e observação. Isso coaduna com as duas fontes de conhecimento destacado por Kant, isto é, por meio da sensibilidade o objeto nos é dado e o entendimento nos permite pensar e conhecer por meio de suas representações (simbolização algébrica), ou seja, uma complementaridade entre símbolo e objeto. Se ficarmos contemplando o mercúrio, não vamos obter a medida da temperatura, mas o instrumento construído por meio da relação mercúrio e volume numa escala determinada associa a temperatura com números.

O afastamento das representações dos objetos, destacado por Foucault, pode ser percebido no início da introdução de Klein (1992, p. 3).

> A criação da linguagem Matemática formal teve significado decisivo na constituição da Física Matemática moderna. Se a apresentação Matemática é considerada como um mero dispositivo, preferível somente por que os conteúdos da Ciência natural possam ser expressos por meio de ‘símbolos’ de maneira mais simples e exatas possíveis, então os significados do simbolismo bem como os métodos da Física serão mal entendidos.

Nessa ‘separação’, está presente a Complementaridade entre intensão (símbolo) e extensão (objeto), desenvolvida por Michael Otte.

Observamos em Leibniz que toda sentença verdadeira é Analítica; por exemplo: Sócrates é um homem – no sentido da visão clássica, o predicado destaca algumas características que pertence ao sujeito. O conceito é nada mais do que um conjunto de algumas características do objeto, como disse Leibniz, segundo Marques (2013, p. 74):

> Verdadeira é a afirmação em cujo sujeito o predicado inere, pois em toda proposição verdadeira afirmativa, necessária ou contingente, universal ou singular, a noção do predicado está de algum modo contida na noção do sujeito.

Se isso fosse verdadeiro, inviabilizaria todo o trabalho de Kant, pois, em sua crítica da razão pura, ele destaca o fato de que, nos juízos sintéticos, há situações em que predicado designa uma característica que não se faz presente no conceito do sujeito. O centro da crítica da razão pura trata da distinção entre sintético analítico e sintético *a priori*, ou seja, tenho que adicionar coisas que não estão nos sujeitos. Nesse sentido, o conceito deve ter outras características do que uma abstração, no sentido aristotélico.

Os conceitos são construídos como disse Kant, isto é, a Matemática constrói seus conceitos na intuição e de acordo com Otte (2014), a intuição pode ser compreendida como um instrumento da atividade criativa e consequentemente indispensável no ‘acesso’ representativo do mundo objetivo. Cada imagem designa uma particularidade, mas a regra, de como é construída, é geral (construção do triângulo equilátero e a prova de que a soma dos ângulos internos de um triângulo são 180 graus). O conceito não é mais abstraído e, sim, construído. Klein (1992) trata disso também, isto é, a Álgebra é uma construção simbólica. Nessa conjuntura, está presente a Complementaridade em que o conceito como símbolo é independente e dependente do objeto, possibilitando a existência das proposições sintéticas.

Os conceitos não são mais simples imagens dos objetos adquiridos por meio da abstração. O que significa x? Que tipo de abstração? Não há nenhuma abstração no sentido aristotélico. Não há características dos objetos, não sabemos se o que está sendo representado é par ou ímpar.

O processo de compreensão das transformações conceituais do início da simbolização algébrica moderna, ocorridas nos séculos XVI e XVII, é muito importante para entender o conceito da Complementaridade, pois a forma de construir conceitos mudou e isso surgiu, enfaticamente, na época de Stevin, Vieta e Descartes. O geral na Álgebra são regras de calculações e construções. Qual é o triângulo geral? É uma variável, é um universal. Por meio de regras de construções simbólicas gerais (as regras são gerais, não indicam tamanhos específicos), conseguimos perceber que a soma de seus ângulos são 180 graus, indicando que os conceitos matemáticos fundamentais não são feitos por meio do empirismo. Eu não vejo o número 4 numa cadeira de 4 pernas, por exemplo.

Klein (1992, p. 4) diz que há conexão íntima entre a linguagem Matemática formal com os conteúdos da Física Matemática, derivados da nova forma de construir conceitos. Essa conexão trata de uma relação em que as fórmulas, Leis e funções expressam ‘todas’ as especificidades de um fenômeno num sistema estrutural de relações. Isto é, o entendimento do objeto em si não nos ajuda a construir máquinas, por exemplo. Mas, as relações entre os objetos podem ter sucesso nessa empreitada. Dessa forma, o símbolo passa a ter uma função calculativa ou tecnológica por meio de símbolos algébricos.

No início da simbolização algébrica moderna, o símbolo não estava ligado diretamente a um objeto específico, mas continuava preso a números e grandezas, pois o interesse não permanecia mais pautado nas essências das coisas, porém nas relações entre as coisas. As relações (fórmulas, equações e ‘funções’) podem ser simbolizadas por meio da Álgebra, por exemplo: F=m.a. As Ciências Físicas, nos séculos XVI e XVII, não são mais coletâneas de fenômenos naturais, mas sim fórmulas, equações, diagramas etc., por meio de identidades e diferenças entre quantidades conhecidas e desconhecidas; isto é, o signo começa a ter dois lados, a referência ao objeto (objeto de primeira intenção) e um sentido (um conceito de conceito, objeto de segunda intenção - o símbolo geral); assim, o conceito de conceito não é mais uma imagem ou uma representação de um objeto indicando suas características, todavia é uma relação, é uma função que tem fins, ou seja, é um instrumento por um lado e uma lei por outro lado. Essa perspectiva é chamada, no conceito de Complementaridade do pensamento

Otteano, de extensão e intensão respectivamente que, por sua vez, são dependentes e independentes; simétricos e assimétricos, numa circularidade dinâmica, ou seja, numa perspectiva genética ou evolucionária do conhecimento.

Capítulo II

Argumentos que fundamentam a concepção da origem do simbolismo algébrico moderno na perspectiva de Jacob Klein

> Jacob Klein fez uma reinterpretação profunda das obras de Diophantus e Vieta, partindo de uma análise erudita do pensamento grego e do sentido da 'nova Ciência' que se desenvolveu nos séculos XVI e XVII. O seu minucioso estudo nos permite situar as origens da Álgebra simbólica no interior do esquema geral dos mecanismos que encontramos no desenvolvimento de outros ramos da Matemática e da Física, bem como das etapas mais recentes da Álgebra (GARCIA & PIAGET, 2011, p. 201).

2.1. O contexto sócio-histórico do início da simbolização algébrica moderna

O Renascimento foi um período de alto desenvolvimento na história das Artes Visuais, Arquitetura e Literatura. Contudo, na Ciência, foi um período de transição. O estudo e a interpretação dos textos[28] da Antiguidade Clássica, via tradução feita pelos Árabes da produção grega, por exemplo, inspiraram e impulsionaram novos avanços. Esse progresso é resultante, principalmente, da interação entre concepções de *episteme* (conhecimento intelectual) e *techne* (práticos – resoluções de problemas do cotidiano), como da navegação e comércio, por exemplo.

> Na geografia, como noutras matérias, não adianta tentar distinguir o quanto deve ser atribuído ao estudo dos antigos, e à genialidade especial dos italianos. Eles tratavam as coisas deste mundo sob um ponto de vista objetivo, mesmo antes de se familiarizarem com a literatura antiga, em parte por serem eles mesmos um povo com raízes na Antiguidade, em parte porque suas circunstâncias políticas os predispunham a isso; mas não teriam atingido tão rapidamente tal

[28] Textos de Euclides, Arquimedes, Apollonius, Diophantus e Proclus são exemplos de trabalhos cruciais que influenciaram o surgimento da Física moderna, e, simultaneamente, o início da simbolização algébrica moderna.

> perfeição se os antigos geógrafos não lhes houvessem mostrado o caminho (BURCKHARDT, 1991, p. 172).

A transição da Idade Média para o Renascimento foi caracterizada por uma expansão social em grande escala e por uma nova visão de mundo. Motivado pela prensa e viagens, surgiu o desenvolvimento social e, com isso, havia necessidade de novos instrumentos que pudessem ajudar na resolução de problemas práticos imediatos. Nesse contexto, a Arte começa a se transformar numa Ciência e isso aconteceu, concomitantemente, com o desenvolvimento do indivíduo e com a descoberta do mundo, ou seja, o ser humano é capaz por si só de compreender a Natureza.

Nessa perspectiva de o homem elaborar suas interpretações do mundo, surgiram pessoas criativas como Copérnico (1473-1543) e Kepler (1571-1630) na Astronomia, Tartaglia (1500-1557) e Cardano (1501-1576) na Matemática, Leonardo da Vinci (1452-1519) como um polímata[29] italiano, Mercator (1512-1594) na cartografia e Stevin (1548-1620) que se destacou na Mecânica. No final dos séculos XVI e XVII, apareceram pessoas as quais apresentaram estudos seminais que estão presentes no centro da revolução científica, como: Vieta, Descartes, Galileu e Newton. O trabalho *Philosophiae Naturalis Princípia Mathematica* de Newton (1687) e a Geometria Analítica de Descartes são exemplos de textos que mudaram o rumo das Ciências.

Os trabalhos criativos dos modernos dos séculos XVI e XVII e a simbolização algébrica moderna estão no interior de uma mudança de interpretação, ocorrida no relacionamento entre tecnologia, comércio, sociedade e a Ciência. Nesse período, o que se evidencia é o aspecto sintético em que o objetivo é a procura do contato com a objetividade e com os objetos, do ponto de vista instrumental.

A prática dos técnicos ajudou na fertilização das Ciências e vice-versa, mesmo que suas intuições e percepções estivessem, por um lado, fundamentadas nas Ciências da Idade Média. Isso está evidenciado nos trabalhos de artistas, engenheiros (Leonardo da Vinci) e arquitetos que cuidavam tanto da urbanização como da hidrologia. Dessa forma, havia exigências de

[29] Polímata - é uma pessoa que se destaca em múltiplos campos de atividade, incluindo, Ciências e Artes.

instrumentos para construção, navegação, guerras e viagens. Nesse sentido, as revoluções científicas desse período foram pautadas no conhecimento empírico dos artesões e dos naturalistas[30] de forma nem tanto harmoniosa.

A preocupação com aspectos práticos pode ser observada nos títulos dos trabalhos de Stevin, por exemplo: *The Elements of the Art of Weighing* (Os Elementos da Arte de Pesagem), *The Practice of Weighing* (A Prática de Pesagem), *The Elements of Hydrostatics* (Os Elementos da Hidrostática), *Preamble of the Practice of Hidrostatics* (Introdução à Prática de Hidrostática). São estudos que ajudaram e muito o entendimento da nova visão de mundo, fortalecidos com a invenção da prensa, uniram a Matemática e Física no estudo da Mecânica, na construção civil e nas viagens marítimas. Mostraram, com isso, a importância da combinação da teoria intelectual (*episteme*) e prática (*techne*).

Segundo Berghe & Devreese (2008, p. 285), Newton, numa carta endereçada a Robert Hooke em 1676, escreveu: 'Se vi mais longe, foi porque estava com os pés apoiados em ombros de gigantes'. Simon Stevin foi um desses gigantes.

As produções dos intelectuais e empíricos nos séculos XVI e XVII passaram de mão em mão a uma quantidade cada vez maior de pessoas eruditas e práticas como Vieta e Stevin, respectivamente. Isso fez com que intelectuais desse período 'dominassem' aproximadamente todo o conhecimento da época em diversos níveis, provocando um encanto natural pelo estudo ou investigação da Natureza. Diante disso, novas monarquias, universidades, bem como grandes centros de desenvolvimento comerciais surgiram.

Tratavam de investigações com características de experimentação num sentido de que a ideia era interrogar, metodicamente, a Natureza por meio de uma linguagem. Para Galileu, essa linguagem dizia respeito a curvas, círculos e triângulos. Diferentemente da Física aristotélica que esteve mais próxima da experiência do senso comum. A técnica antiga é bem diferente da que se iniciava nos séculos XVI e XVII, pois a técnica na Física de Aristóteles é pré-científica ou

[30] Segundo Abbagnano (2007, p. 813), naturalismo pode ser entendido também como uma doutrina segundo a qual nada existe fora da Natureza e Deus é apenas o princípio de movimento das coisas naturais. Nesse sentido, que é o mais difundido na terminologia contemporânea, fala-se do 'Naturalismo do renascimento', do 'Naturalismo antigo', do 'Naturalismo materialista' etc.

pré-tecnológica no sentido de método e linguagem e a técnica moderna está relacionada com regras de execução, ou seja, com instrumentos práticos.

A Matemática, para Platão, era uma Ciência por excelência em que os objetos da Geometria se fazem presentes num mundo mais elevado do mundo sensível. Já para Aristóteles, a Matemática é secundária e abstrata. Nesse sentido, há uma distância muito grande entre a realidade Física e a Matemática. Na Natureza, não há círculos e elipses, mas os modernos dos séculos XVI e XVII associaram o mundo físico com a extensão, com segmentos, em Descartes, por exemplo, para compreender e sistematizar o movimento. Essa associação foi fundamental para perceber a necessidade da simbolização algébrica bem como para construção de instrumentos cada vez mais precisos.

O início do simbolismo algébrico moderno está numa perspectiva de transição do contemplativo platônico para o operativo representativo ocorrido nos séculos XVI e XVII. Uma maneira de perceber essa transição é por meio de imagens. Na figura 02, há imagens que ilustram, com propriedade, os aspectos do contexto histórico desse período.

Figura 02: Imagens de instrumentos que indicam o contexto sócio-histórico da transição do contemplativo (objeto voador de Leonardo da Vinci) para o operativo (carruagem à vela de Stevin)

Imagem 01: objeto voador

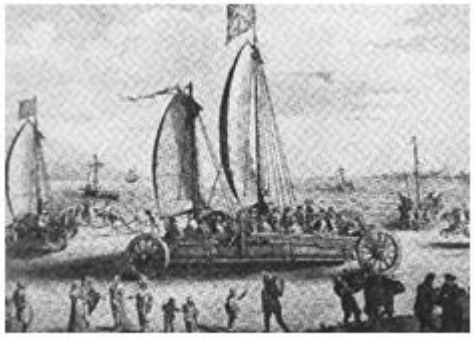


Imagem 02: carruagem a vela

A imagem 01[31] da figura 02 indica a preocupação de pessoas dessa época, como, por exemplo, Leonardo da Vinci (1452-1519) que se interessou, dentre outras coisas, pela elaboração de um instrumento que pudesse voar. Para isso, utilizou, como modelo, asas de um morcego. Alongadamente às estruturas interdigitais do animal, ele construiu o instrumento voador, cujas funções eram a sustentação e o comando. Em muitos de seus inventos, usou as 'asas móveis', que eram movimentadas através de alavancas e manivelas, manipuladas por um operador que ficava sentado e com as pernas abertas.

A imagem 02[32] da figura 02 representa um dos modelos de carruagem à vela, inventada por volta de 1600, por Simon Stevin. Essa carruagem ganhou popularidade, pois, na época, muitas pessoas se reuniam para verificar se esse instrumento conseguia, de fato, vencer uma competição entre a carruagem e um cavalo. Isso evidencia determinada tensão entre os aspectos da Natureza (a força animal) e o método (compreensão do vento aplicado à carruagem à vela). Stevin teve formação em engenharia e seus objetivos estavam na prática, ou seja, resolver questões imediatas, como, por exemplo, a carruagem à vela que propiciava se deslocar de uma 'grande' distância, em menos tempo, com a energia do vento. Stevin não ficou conhecido como inventor da carruagem à vela e, sim, como o 'inventor' do sistema de representação decimal.

Entre a imagem 01 até a imagem 02 passaram-se, praticamente, 100 anos. Há, nesse período, muitas transformações, porém nossa preocupação é perceber que, na primeira imagem, estão presentes aspectos contemplativos, pois o instrumento para voar imita a asa do pássaro, ou seja, há uma dependência do objeto, indicando uma crença de que o signo precisa ter, além do sentido, uma referência, um objeto. Nessa época, o 'x' começava a designar um objeto específico que podia ser número de alguma coisa, como número de gatos, por exemplo, e também comprimentos, áreas ou volumes. Na segunda imagem, a preocupação é com a técnica, no sentido de elaborar instrumentos funcionais. A instrumentalização começa a ganhar força, devido a novos problemas

[31] Fonte: http://vivendoi-aprendendo.blogspot.com.br/2013/07/leonardo-da-vinci.html. Acesso dia 26 de agosto de 2013.
[32] Fonte: (BERGHE & DEVREESE, 2008, p. 45).

enfrentados num contexto histórico diferente da época grega antiga, isto é, o ‘x’ começa a designar um objeto qualquer, sejam grandezas conhecidas ou não.

Nesse contexto de mudanças conceituais, devido às circunstâncias em que, de um lado, até o século XVI, fundamentada na Ciência grega, a *episteme* é considerada como última possibilidade humana, de forma que a atividade principal era a contemplação, prevalecendo o domínio da compreensão do objeto e, por outro lado, a partir do século XVI, a nova Ciência que surge, priorizando o método. O principal interesse dos homens dessa época era por problemas da Mecânica, óptica, navegação, construções de máquinas etc.; contudo, essas preocupações estavam, de certa forma, conectadas aos aspectos da tradição. Essa inquietação de produção funcional propiciou transformação de conceitos até então válidos. Nesse bojo, a intencionalidade do ‘fazer Ciência’ passa por alterações significativas. Podemos dizer até que a intenção da atividade dos cientistas determina o caráter conceitual de seus conceitos.

Nos séculos XVI e XVII, por meio da experimentação e observação, começa-se a tomar consciência do que os dados nos informam. Nesse sentido, a Matemática é instrumental (faz previsões), preocupando-se com a estrutura do mundo, isto é, compreender a estrutura e não saber o que o mundo é, de fato, como Galileu, por exemplo.

A Matemática até o Renascimento foi dominada pelo platonismo, porém, nos séculos XVI e XVII, o platonismo surgiu na forma instrumental no sentido de interpretar fenômenos naturais. Isso está evidenciado em Galileu quando disse que o livro da Natureza está escrito em termos matemáticos (figuras). Koyré (1982, p. 169) afirma que, para os discípulos de Galileu, da mesma forma que para seus contemporâneos e antecessores imediatos, a Matemática significa platonismo. Isso coaduna com o que Otte (2014)[33] entende, pois ele enunciou: quando alguém pensa que a Matemática é relevante para interpretar a Natureza, domina o platonismo e quando entende que não é relevante, isto é, o empirismo e a história da Natureza, domina o aristotelismo.

[33] Explicação dada no dia 03 de abril de 2014.

Com Galileu, a Matemática não é usada apenas para contemplar os fenômenos, mas também para explicar o mundo e resolver problemas. Por isso, Stevin (*De Thiend* - o décimo, em 1585) afirmava que a unidade é um número com características instrumentais do ponto de vista operacional.

A simbolização algébrica moderna que Klein (1992) trata em sua obra surgiu da necessidade social de um povo que buscava novas conquistas intelectuais e práticas. Descartes orgulhava-se do fato de que o seu método podia ser usado para resolver problemas que os antigos não resolveram. O problema de Pappus[34] é um exemplo dessa situação. Contudo, nessa necessidade estão presentes aspectos complementares entre a vida ativa e operativa com a teoria e a vida contemplativa, isto é, o homem moderno procurava dominar a Natureza, compreendendo sua estrutura e o homem medieval ou antigo procurava contemplá-la.

2.2. A Vida e obra de Jacob Klein

Burt Crowell Hopkins, atualmente, é professor de Filosofia na Universidade de Seattle nos Estados Unidos e está envolvido em pesquisas que tratam da Filosofia grega antiga (principalmente, as relacionadas a textos não escritos de Platão), da Filosofia moderna em Martin Heidegger, Edmund Husserl e Jacob Klein. Seu principal interesse diz respeito aos fundamentos e transformações do conhecimento que começaram no século XVI com o advento da Filosofia moderna, criticando, principalmente, aspectos da simbolização algébrica.

Hopkins (2012) publicou um artigo intitulado: ‘As realizações filosóficas de Jacob Klein’ (*The philosophical achievemente of Jacob Klein*[35]), apresentando suas contribuições no estudo de questões relacionadas à formalização da Matemática, bem como fatos de sua vida e obra.

[34] O enunciado e a resolução do problema de Pappus para quatro linhas podem ser encontrados em (MANCOSU, 1966, p. 68).
[35] Esse artigo trata de uma conferência de Hopkins em 2010 na universidade de Seattle.

Nesse artigo, Hopkins diz que Klein (Jasha para os mais próximos) nasceu em 1899, em Libau – conhecida atualmente como Latvia (Letónia ou Letônia – ex-república da União Soviética). Oficialmente, a República da Letônia é uma das três repúblicas bálticas. Limita-se ao norte com a Estónia, a leste com a Rússia, a sudeste com a Bielorrússia, ao sul com a Lituânia e a oeste com o Mar Báltico. Devido ao fato de seus pais terem se divorciado logo após o seu nascimento, Klein viveu com seus avós até 1908, pois, nesse ano, mudou-se com sua mãe para Lipetsk (uma cidade Russa) onde viveu até 1912. Nesse período, sua mãe casou-se novamente e o seu padrasto era muito rigoroso, tendo sido instruído por um rabino do qual gostava muito.

Em 1912, seu pai o levou para viver com ele na cidade de Brussels (Bruxelas – capital da Bélgica) e o colocou numa escola do tipo internato, ficando nessa escola até 1914. Em 1915, Jacob Klein foi impedido de estudar no ginásio alemão, pois era considerado 'estrangeiro nacional'. Diante disso, Klein recebeu ensinamentos de Latim, Francês, Alemão, História e Matemática, por um professor do ginásio, chamado Pahl. Em 1916, Jacob Klein teve permissão para estudar em escolas alemães, entrando na Universidade de Berlim em 1917 onde estudou Matemática e Física por seis semestres.

Em 1919, Jacob Klein visitou Edmund Husserl em Freiburg (cidade alemã) com a intenção de estudar com ele, porém não encontrou hospedagem, pois, nesse período, haviam retornado os veteranos de guerra e os mesmos tinham prioridade. Então, Husserl o enviou a Marburg (cidade universitária alemã) onde recebeu o título de Ph. D em 1922, depois de estudar três semestres com a tese intitulada *The Logical and Historical Element in Hegel's Philosophy,* orientado por Nicolai Hartmann, o qual foi influenciado pela Fenomenologia de Husserl e pela Filosofia de Hegel.

Segundo Hopkins (2012), nesse período de doutoramento, Jacob Klein participou de curso e seminários, conforme listados abaixo:

1) Semestre de verão em 1920: i) Seminário prático sobre o *desejo do poder* em Nietzsche (*Seminar-Practicum on Nietzsche's Will to power*) com o professor Hartmann e Dr. Heimsoeth; ii) A lógica Universal e o Sistema da Filosofia (*Universal Logic and the of Philosophy*) e Seminário Prático sobre Lógica

Universal (*Seminar-Practicum on Universal Logic*) com Paul Natorp; iii) Seminário Prático sobre a História da Filosofia antiga (*Seminar-Practicum on The History of Ancient Philosophy*) com o professor Hartmann e iv) Seminário Prático sobre a Teoria Política no século XIX (*Seminar-Practicum on* 19^{th} *Century Political Theory*) com o professor Wolters.

2) Semestre de Inverno de 1920 e 1921: i) Metafísica como Ciência fundamental (*Methaphysics as Fundamental Science*) e Seminário Prático sobre Metafísica (*Seminar-Practicum on Methaphysics*) com o professor Hartmann; ii) Geometria Analítica Plana e Espacial (*Plane, and Spatial Analytic Geometry*) com o professor Hensel; iii) Tragédia antiga (*Ancient Tragedy*) com o professor Friedländer; iv) Maurice Barrés e o Fundamento Espiritual do Nacionalismo Francês (*Maurice Barrés and the Spiritual Foundation of French Nationalism*) com o professor Curtius; v) Seminário Prático sobre Platão (*Seminar-Practicum on Plato*) com o professor Natorp; vi) Seminário Prático sobre a Teoria da Reforma (*Seminar-Practicum on the Political Theory of the Reformation*) com o professor Wolters e vii) O *Ethos* da Religião Cristã (*The Christian Religious Ethos*) com o professor Otto.

3) Semestre de verão de 1921: i) Ética, Seminário prático sobre Ética, Filosofia Alemã de Kant a Hegel e Seminário Prático da Filosofia Alemã de Kant a Hegel (*Ethics, Seminar-Practicum on Ethics, Germany Phylosophy from Kant to Hegel and Seminar-Practicum Germany Phylosophy from Kant to Hegel*) com o professor Hartmann; ii) A Formação do Mundo por Poetas e Pensadores desde o Humanismo e Seminário Prático sobre a Teoria do Socialismo e Comunismo (*The Formation of the World by Poets and Thinkers since Humanism and Seminar-Practicum on the Theories of Socialism and Communism*) com o professor Wolters; iii) Teoria das Funções (*Theory of Funtions*) com o Dr. Fränkel; iv) Física Experimental (*Experimental Physics*) com o professor Schaefer e v) Seminário de Matemática (*Seminar in Mathematics*) com o professor Hensel.

De 1924 até 1928, Klein dedicou-se ao estudo de Heidegger, apresentando palestras e cursos em Marburg. Segundo Hopkins (2012):

1) No semestre de verão de 1924, ofereceu cursos e palestras sobre *Grundbergriffe der aristotelischen Philosophie* (Conceitos Básicos da Filosofia aristotélica).

2) No semestre de inverno de 1924 e 1925, apresentou conferências sobre: i) Heidegger, Platão (*Kratylus, Philebus*); ii) Heidegger, *Übungen zur Ontologie des Mittelaters* (Ontologia Prática da Idade Média) e Hartmann, *Übungen über Spinoza* (Prática em Spinoza).

De 1928 até 1929, Klein estudou com os professores Max Plank e Erwin Schrödinger no Instituto de Física Teórica em Berlim, sendo que, em 1933, completou sua *Habilitationsschrift* (tese de pós-doutorado exigida para qualificação como professor). Essa tese é formada exatamente pela parte I e II da obra 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra', publicada originalmente em alemão em 1934 (Parte I) e 1936 (parte II) com o título '*Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra'* (A Logística Grega e a Origem da Álgebra). Contudo, Klein foi impedido de trabalhar, pois em 7 de abril de 1933 foi aprovada uma lei que proibia judeus de trabalhar em serviços civis. Tanto a parte I como a parte II do texto *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra* foram publicadas num jornal em que o editor era Otto Neugebauer.

Entre 1932 até 1937, Klein passou por Prague, Berlim e Inglaterra e, em seguida, imigrou para os Estados Unidos. Nesse período, seu sustento era por meio de seminários sobre Platão. Num desses seminários, conheceu uma estudante chamada Ellie Rosenberg, filha de Husserl, que o convidou a visitar o seu irmão Gerhart Husserl; dessa forma, acabou tornando-se amigo da família de Husserl.

A partir de 1937 até a sua morte em 1978, trabalhou em *Annapolis Maryland* nos Estados Unidos no *St. John's College*. Em 1940, após a morte de Husserl em 1938, Klein publicou um ensaio escrito em memória a Husserl, intitulado '*Phenomenology and the History of Science*' onde é citado como 'PHS'.

Leo Strauss (1899-1973) foi um filósofo especialista no estudo da Filosofia política clássica e crítico da Filosofia moderna e, em 1959, disse o seguinte sobre o trabalho de Jacob Klein:

> Muito mais do que um estudo histórico. Porém, mesmo se considerarmos puramente como um trabalho histórico, não existe, em minha opinião, um trabalho contemporâneo na história da Filosofia, da Ciência ou falando de modo geral 'na história das ideias' que tenha valor intrínseco. Um sinal disso é o fato de que menos de meia dúzia de pessoas o tem como referência no sentido de leitura e também no que diz respeito a citações (STRAUSS apud HOPKINS, 2012. Tradução nossa).

O comentário de Strauss torna-o relevante, pois foi publicado pelo menos 9 anos antes de sua publicação em Língua Inglesa, por Eva Brann, em 1968 com o título '*Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*' (ficou conhecido como *Math Book*, pois usou essa expressão em palestras e artigos nas universidades americanas). No momento em que Eva Brann propôs a tradução de sua obra para a Língua Inglesa, Klein não a incentivou, talvez, por ter aversão à publicidade.

St. John's College foi fundado em 1696 e tem, desde a fundação, como componente principal de seu currículo, o estudo de grandes obras de todo o espectro do pensamento ocidental. Foi com esse objetivo que Eva Brann se propôs a traduzir do alemão para a Língua Inglesa a obra de Klein, pois trabalhavam juntos no *St. John's College*. Contudo, quando informou a Klein sobre o interesse de traduzir sua obra, Klein não demonstrou interesse, mas, depois de um ano, quando Brann lhe mostrou a obra traduzida, o próprio Klein conferiu com o texto original e disse: 'está muito bom', segundo Hopkins (2012). Em novembro de 1966 em *Annapolis* no *St. John's College*, Klein comenta a tradução feita por Eva Brann da seguinte forma:

> Este texto foi originalmente escrito e publicado em alemão num período turbulento. Se eu fosse escrever hoje, o vocabulário seria menos 'erudito' ou 'acadêmico' e a mudança do modo antigo para o modo moderno de pensamento seria vista de uma perspectiva mais ampla. Algumas das referências assim como os dados teriam sido feitos de forma mais acessível aos leitores de língua inglesa, mas isso implicaria trabalho proporcional a sua utilidade. Contudo, poucas adições às referências bem como algumas mudanças no texto foram feitas pela tradutora e por mim mesmo (KLEIN, 1992, p. vi. Tradução nossa).

Em 1965, Klein publicou '*A Commentary on Plato's Meno*' em que apresenta comentários na forma de argumentos, linha por linha, sobre esse

diálogo. A última publicação de Jacob Klein em vida foi *Plato's Trilogy: Theatetus, Sophist, and Statesman* em 1977 na qual Klein aborda o fato de que a conversação na *trilogy* ocorre em dois e não em três dias e porque os Sofistas, o Statesman e o filósofo são tratados em dois e não em três diálogos.

O conteúdo analisado nessa obra por Klein se referia à: mudança, ser e repouso que é o tema principal em Galileu e Newton. Isso evidenciava a preocupação de Klein (1992) em compreender historicamente a 'origem' da simbolização algébrica moderna. Postumamente, foi publicada a obra *Lectures and Essays,* editada por Robert Williamson e Elliott Zuckerman, *St. John's College Press* em 1985 – na qual apresenta uma série de artigos e palestras onde Klein aprofunda seu pensamento sobre o processo de simbolização algébrica.

Este estudo e pesquisa investigativa da obra de Jacob Klein podem ser reconhecidos pela relevância da apresentação, à comunidade acadêmica brasileira, de um pensamento e Filosofia tão poucos acessados. Mas, para além do caráter inédito de um trabalho nesta direção, é, sem dúvida, relevante o potencial reflexivo e crítico do pensamento de Jacob Klein sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático, especificamente, o desenvolvimento do pensamento algébrico moderno, pois este evidencia a transição do contemplativo para o operativo, por meio da transformação do conceito de número e isso caracteriza a relação simétrica e assimétrica entre símbolo e objeto que, por sua vez, pode ser compreendida através do conceito de intensão e extensão presente no pensamento Otteano.

2.2.1. O contexto da obra 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra'

No pensamento filosófico do fim do século XIX e início do século XX, surgiram tendências diferentes em relação à interpretação da relação homem/conhecimento. Nessa época, mesmo com o progresso da Ciência, do ponto de vista de aspectos utilitários, na concepção de Husserl (2012), a razão começa a entrar em crise, ou seja, começam a despontar Filosofias que criticam o

pensamento ocidental. Há, nesse período, críticas à metafísica, às verdades e às essências, isto é, a razão não consegue dar conta dos problemas que emergem dessa conjuntura.

Nessa ocasião, ficam latentes perspectivas do pensamento do ponto de vista filosófico, no que diz respeito à interpretação do papel do homem no mundo, como, por exemplo, a vertente de Karl Marx que culmina com a escola de Frankfurt enfatizando que a questão fundamental para o saber e para o homem é o problema social, luta de classes, capital etc., a vertente cientificista, ou seja, o positivismo – em que a Ciência é um instrumento legitimador e essencial para homem, ou seja, determina o mundo por meio da Ciência e a vertente fenomenológica que tem em Husserl (1859-1938) e depois em Heidegger (1889-1976) representantes importantes, pois foram filósofos que se preocupavam com o ser humano (essência), por isso, criticavam as Ciências que tratavam de fatos.

Jacob Klein ‘nasceu’ intelectualmente do lado de Husserl e Heidegger, ou seja, da crítica do positivismo e da tecnocracia. A formação intelectual de Jacob Klein está inserida no contexto da fenomenologia do início do século XX visto que tanto Husserl como Heidegger foram seus professores. Klein foi considerado um dos grandes intérpretes de Platão e aluno estrela de Heidegger, estudou a transformação das Ciências ocorrida nos séculos XVI e XVII que Husserl classificou quase como um tipo de crise, uma destruição da Ciência verdadeira, transformando em meros jogos de símbolos matemáticos.

Husserl (2012) reclama do lado operativo e instrumental da Ciência e quer de volta o lado eidético contemplativo. Entender o que Husserl criticou é importante para entender a relevância da obra de Klein. Skemp (1987) diz que temos, na Educação Matemática, o lado instrumental e relacional ou, de acordo com Husserl, instrumental e eidético. A visão eidética é a ‘pegada’ da essência das coisas, não apenas dos fatos. Cada fato tem que ter uma essência senão não é um fato e, sim, contingente e, por isso, nunca pode ser atingido. Husserl alega que a Ciência, em particular a Matemática, que é a língua das Ciências exatas, produz conhecimento tão abstrato que o sujeito humano comum não consegue mais acessar, não tendo possibilidade de entender em termos de sua visão cotidiana (o mundo circundante).

O desenvolvimento da Matemática como expresso no simbolismo algébrico destrói a unidade da Filosofia e da Ciência, isto é, como se diz antigamente: a relação entre *episteme* e *techne*. Jacob Klein foi aluno de Husserl e Heidegger, então, ele resolveu verificar, baseado num estudo histórico detalhado e minucioso que impacto realmente tinha a simbolização algébrica nas Ciências. Klein concorda com Husserl e Heidegger sobre a importância de uma nova 'vestimenta' para o conhecimento. Para Klein, o simbolismo algébrico é essencial para a Ciência moderna em geral, em comparação com Aritmética dos gregos antigos, mas Klein tratou apenas da Aritmética.

O estudo da obra de Klein suscita interpretar que a transformação do conceito de número está no centro de todo o pensamento da Matemática tanto da escola como da Filosofia, pois essas mudanças, no decorrer da História, foram estudadas cuidadosamente por muita gente, principalmente, na época de Klein como, por exemplo, Husserl e Heidegger.

Para os gregos antigos, tudo está relacionado com números e os problemas da Geometria 'forçam' a ampliação do conceito de número. Por isso, essa visão de mundo entra em dificuldades, ou seja, surge uma tensão entre símbolo e objeto, devido à incomensurabilidade como a diagonal do quadrado na Antiguidade e o número de Euler (1707-1783) nos séculos XVI e XVII; isto é, a Geometria propicia possibilidades de criar novos números. O comentário de Proclus (412-485) mostra que encontramos, na Geometria, a mesma dicotomia epistemológica na Aritmética e Logística (OTTE, 2003). Isto é, os práticos dizem que Euclides apresentou um livro de receitas orientado na resolução de problemas, mas os filósofos dizem que são teorias sobre mundos de formas geométricas.

De forma que a obra: 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra' foi pensada nesse contexto de conhecimento. Por isso, torna-se necessário tratar, mesmo que superficialmente, de conceitos do pensamento husserliano visto que Klein está, de certa forma, filiado a essa linha filosófica do início do século XX.

2.2.2. Husserl, Klein e a simbolização algébrica

A ampliação extrema da Aritmética algébrica tem o efeito de que o pensamento se transforma numa Arte ou numa técnica, ganhando resultados que não têm mais evidências imediatas, as pessoas operam com letras e com signos abstratos (+, -, x, =, etc.), de acordo com regras que, em sua ordem, são bem análogas às regras de um jogo de xadrez ou baralho.

As avaliações históricas que Husserl constatou sumariamente em sua palestra, em 1935, dizem que as consequências da simbolização algébrica esvaziaram a Ciência e a Matemática, em particular, de todo sentido filosófico, enquanto Klein (1992) estudou, detalhadamente, por meio da História da Matemática. Isto é, Klein tratou, em termos históricos, o impacto da simbolização. No que diz respeito ao efeito do positivismo aos sujeitos humanos, Husserl concluiu: “meras Ciências de fatos fazem meros homens de fatos” (KRISIS, p. 4), isto é, sujeitos humanos pragmáticos. O pensamento originário que dá sentido a esse procedimento técnico e às verdades, resultados produzidos nesses processos técnicos, é excluído (KRISIS, p. 49).

> Galileu, para Husserl, é o iniciador daquela crise que leva à dissolução da Filosofia, à separação da Ciência de seus fundamentos filosóficos, à recusa de todo problema acerca do sentido da existência humana. Galileu é o primeiro responsável por aquela ‘ingenuidade’ filosófica para o qual a Ciência julga que o ‘mundo objetivo’ coincide com o universo de tudo aquilo que é. Através da matematização e da quantificação da Natureza, a Ciência galileana substituiu a *Lebenswelt (mundo da vida)* cotidiana pelo universo científico, cindiu a razão da *humanitas* racional, deu lugar a um tipo de saber que é ‘insciente de sua própria fundação’. O processo de matematização coincide com um ‘esvaziamento de sentido’ da realidade, é algo que se sobrepõe ao único mundo real que é ‘o mundo-circunstante-da-vida’; a ‘Natureza idealizada’ é desse modo identificada com ‘a Natureza intuitiva pré-científica’. O verdadeiro ser é substituído por um método que permanece ‘incompreensível e jamais compreendido’ na sua natureza profunda. Para além das ‘distorcidas interpretações’ fornecidas pelos cientistas, o sentido ‘originário e autêntico’ das teorias físicas permanece desse modo oculto (ROSSI, 1992, p. 16).

Husserl está preocupado com a idealização e com o sentido que as ideias dão ao ser humano ou ao espírito humano, enquanto Heidegger crítica a abstração da Ciência e da Matemática, tratando do existencialismo. Na sua conferência de 1933, sobre a ‘Questão da técnica’, Heidegger chegou a

conclusões claríssimas. A Ciência 'reifica[36] as coisas em objetualidade e falsifica o *Ser*' (ROSSI, 1992, p. 14). Além do mais, a técnica, no mundo antigo, não produz e, sim, revela, dirigindo-se às coisas no sentido da realização de sua inteireza e a técnica, no mundo moderno, apresenta características totalmente opostas, ou seja, é uma espécie de violência exercida sobre o *Ser*.

O *Ser* do qual Husserl trata diz respeito a possibilidades referentes ao sentido do Ser, pois o ser, como vivido, é distinto do ser como coisa (Husserl, 2006, p. 100). Capturar o sentido da coisa por meio de métodos universais acaba polarizando no ente (aquilo que existe real ou potencialmente) ao invés de no *Ser* e isso, para Husserl, era um fator complicador, surgido com Galileu. Jacob Klein compartilhava as ideias filosóficas de Husserl e Heidegger no sentido de que o simbolismo não é apenas uma 'vestimenta' simples, porém afeta a própria essência; contudo, Klein não concordava com o pessimismo de Husserl e Heidegger.

De acordo com Angus (2012), Husserl, antes de analisar a matematização da Natureza em sua *Krisis*, observou que a reformulação da Filosofia, no começo da idade moderna, foi fundamentada na mudança de significado pelo qual a tarefa universal dos modernos, do início dos séculos XVI e XVII, foi estabelecida, principalmente na Matemática, isto é, na Geometria e na teoria abstrata formal de números e magnitudes (HUSSERL, p. 21).

> Nessas condições, não é apenas a interpretação da natureza em termos matemáticos e nem isso combinado com a ontologização em direção a um mundo matemático – que indiscutivelmente já se fazia presente em Platão – mas, que essa combinação baseia-se numa Matemática diferente que não estava disponível aos gregos ou na época medieval (ANGUS, 2012. Tradução nossa).

A definição de técnica como uma Arte de manipulação de sistemas de signos sem considerar o conteúdo corresponde, assim, à crítica, cuja fenomenologia tem o papel de cura como realização da aplicação genuína, por meio da restituição dos sistemas de signos.

---

[36] O 'Ser' em termos existenciais é caracterizado pela consciência e reificar significa 'roubar' a consciência. As Ciências positivas são pensamentos instrumentais sem consciência. A Ciência se transforma numa técnica sem reflexão. Atualmente se fala numa Educação Matemática apenas com aspectos instrumentais em que o concreto é o ponto principal e esta perspectiva polarizada produz equívocos na formação Matemática do ser humano.

> A noção viva de fenomenologia é anunciada por Husserl em *investigações lógicas* (1900-1901, II, PP. 3 ss.), correlativa ao 3º significado de fenômeno (começou a indicar não só o que aparece ou se manifesta em si mesmo, como é em si, na sua essência [...] revelação do objeto em si) e depois desenvolvida por ele mesmo nas obras seguintes. O próprio Husserl preocupou-se em eliminar a confusão entre psicologia e fenomenologia. Esclareceu que Psicologia é a Ciência dos dados de fato; os fenômenos que ela considera são acontecimentos reais que, juntamente com os sujeitos a que pertencem, inserem-se no mundo espacio-temporal. A fenomenologia que ele chama de 'pura' ou 'transcendental' é uma Ciência de essências (portanto 'eidética'), e não de dados de fato, possibilitada apenas pela *redução eidética*, cuja tarefa é expurgar os fenômenos psicológicos de suas características reais ou empíricas e levá-los para o plano da generalidade essencial (ABBAGNANO, 2007, p. 511).

Husserl refere-se à superficialização do significado que, inevitavelmente, acompanha o desenvolvimento da técnica e dos métodos práticos, indicando que a crise das Ciências está na forma, especificamente, moderna e universal de conhecimento, tendo, na fenomenologia, a função de cura. Isso, de certa forma, está conectado com os termos algébricos e à maneira de pensar que tem sido usada amplamente no período moderno desde Vieta (HUSSERL, 1970, p. 44). Segundo Angus (2012), isto é a única referência que Husserl fez de Vieta em seu texto *Krisis*. Normalmente, Husserl refere-se a Descartes como fundador da Filosofia moderna e, em uma das principais inovações do texto, alude à matematização da Natureza de Galileu como a origem do conceito moderno de Ciência sobre o qual Descartes construiu (ANGUS, 2012).

Um exemplo dessa abstração e reificação da técnica no sentido de Heidegger mostra-se na transformação das unidades modernas de medição. A avaliação para diferenciar o tamanho das coisas tem, como ponto de partida, a comparação intuitiva com o tamanho de partes do nosso corpo, ou seja, temos uma unidade de medida que nasce com o Ser que é o tamanho dessa parte do corpo; não são unidades abstratas como o metro.

As unidades abstratas surgiram com a Revolução Francesa numa tentativa de padronizar e tornar homogêneas as formas de efetuar medição, porém há uma espécie de 'resistência' na utilização de unidades abstratas; veja o caso da Inglaterra, por exemplo, que até hoje ainda utiliza pés (*foot*) e jarda (*yard*) etc. Se você é um Ser sem corpo, a realização de medição fica prejudicada, pois a mente 'perde' a unidade de comparação. O corpo ou partes do corpo tornam-se

naturalmente uma unidade de comparação, pois medir é comparar e o objeto inerente ao ser humano é o corpo.

Isso pode ser verificado na seguinte situação em que o corpo humano é, do ponto de vista da intuição, a medida de todas as coisas (Protágoras): Uma pessoa nasceu e viveu numa comunidade até aproximadamente 8 anos de idade. Depois, essa pessoa fica por um período de 30 anos sem nenhum contato com sua comunidade. Se essa pessoa voltar a esse lugar, poderá perceber que os objetos de sua visão ‘parecem’ ter ficado pequenos, pois, quando ele tinha 8 anos, o seu tamanho, ou seja, a sua unidade de comparação era menor. Após os 30 anos, o seu tamanho aumentou e, portanto, os objetos ‘diminuíram’ de tamanho.

Nossa avaliação para diferenciar o tamanho das coisas tem, como ponto de partida, a comparação intuitiva com o tamanho de partes do nosso corpo, ou seja, a unidade de medida que nasce com o Ser é do tamanho dessa parte do corpo, mas não são unidades abstratas como o metro. Esse fato está evidenciado nas formas de medir dos Estados Unidos, Inglaterra e, até mesmo, de uma determinada comunidade em Nossa Senhora do Livramento em Mato Grosso, onde utilizam jardas, pés e braças, respectivamente.

Isso evidencia como a problemática da medição e da associação com o número simbólico é absolutamente fundamental para toda a nossa existência, desde o início dos tempos. Para os pitagóricos, o número natural era a medida de todas as coisas, mas a descoberta dos incomensuráveis abalou essa interpretação. Nos séculos XVI e XVII, o instrumento surge para avaliar, comparar, ou seja, estabelecer relações, no sentido de ‘deixar’ de lado o mundo objetivo platônico (Aritmética era uma cosmologia da unidade, da ordem e do visível) para começar a tratar da subjetividade de forma operativa. Como disse Dedekind (1963), “criamos os números naturais para melhor distinguir as coisas deste mundo”. Isso foi uma das características principais do instrumentalismo da Ciência moderna bem como da Filosofia da Matemática, desde a época de Stevin até Kant, isto é, a ideia foi de melhor distinguir as coisas, de substituir o mundo contínuo pelo mundo discreto (OTTE, 2012, 128).

Esse instrumentalismo pode ser compreendido melhor na obra ‘Estruturas das Revoluções Científicas’ de Thomas Khun, publicada em 2006, na qual

podemos verificar que a Ciência não se aproxima do mundo objetivo, mas, sim, de acordo com as nossas necessidades funcionais do ponto de vista social, tecnológico, econômico e também de aspectos da estrutura interna da Matemática. Nesse sentido, a Matemática não é mais a ordem ou o reflexo do cosmo e, sim, um sistema de organizar o nosso mundo e, por conseguinte, poder capturar aspectos essenciais para a vida.

O período de Stevin até Kant foi de amadurecimento da visão instrumentalista da Ciência. Nessa estrutura até o século XIX, a Álgebra, desde Vieta e Descartes, foi um instrumento ou mesmo uma linguagem de calculação, cuja utilidade se mostra no uso, isto é, no aspecto pragmático, permitindo analisar e distinguir as coisas deste mundo.

Segundo Palaro (2006), desde os séculos XVII e XVIII, a Álgebra e a Análise Algébrica caracterizam os ramos mais importantes da Matemática, pois se mostraram úteis na resolução de grande variedade de problemas. Porém, Cauchy (1789-1857) disse não querer mais a generalidade da Álgebra e, sim, o rigor da Geometria.

> Quanto aos métodos, eu procurei lhes dar todo o rigor que se exige a Geometria, de maneira a jamais recorrer a argumentos deduzidos da generalidade da Álgebra. Argumentos desta espécie, apesar de muito comumente admitidos, sobretudo na passagem das séries convergentes às séries divergentes, e das quantidades reais às expressões imaginárias podem ser considerados, me parece, somente, como induções apropriadas para fazer pressentir algumas vezes a verdade, mas que se harmonizam pouco com a exatidão tão ostentada das Ciências Matemáticas (CAUCHY, 1821, p. ij-iij apud PALARO, 2006, p. 119).

Num certo sentido, os gregos antigos, como Euclides, estiveram preocupados demais com a seguridade e fundamentos das construções do conhecimento matemático. Já os modernos, estavam absorvidos em produzir novos conhecimentos, não apenas explicar conhecimentos já adquiridos. O primeiro é chamado contexto da justificação, da fundamentação e o segundo é o contexto da descoberta. Isso é importante porque tem a ver com a ‘troca’ da Geometria pela Álgebra, pois a Álgebra é uma ‘máquina’ de produzir conhecimentos no sentido de que o cálculo produz novos resultados. Contudo, há complementaridade Otteano nos contextos, pois a justificação é tão importante quanto a descoberta.

Cardano, Bombeli (1526-1572) e Euler não se preocuparam com fundamentos. Havia calculações com séries sem a preocupação com a convergência, por exemplo. Por isso, no século XIX, foi uma nova época de rigor e dos fundamentos. Então, para os modernos, de Galileu até o início do século XIX, a motivação era o progresso e não a fundamentação filosófica do conhecimento. Esse foi um fator de interesse que favoreceu a Álgebra ao invés da Geometria. No período de transição (revolução e/ou evolução), há a preocupação em elaborar novos conhecimentos e, nessa busca, surgem contradições. Essas contradições forçam a busca da fundamentação.

> A transição das operações concretas para as operações hipotéticas dedutivas é um excelente exemplo de abstração reflexiva, pois mostra como, a partir de operações de baixa complexidade presentes no conteúdo real, construímos novas realidades ou operações baseadas nesses procedimentos. Isso surge do simples fato de que a abstração começa com ações ou operações que não consistem simplesmente em isolar ou separar os elementos, mas requer necessariamente uma construção por meio de elementos projetados ou 'refletidos' a partir de operações de baixa complexidade (BETH & PIAGET, 1996, p. 241. Tradução nossa).

Os gregos antigos nunca chegaram ao ponto de uma abstração reflexiva de Piaget (1896-1980) como, por exemplo, as derivadas sucessivas são funções de funções. Isso é uma característica dos modernos que começa com a simbolização algébrica, com as calculações. A simbolização por meio da algebrização pode ter desvantagens sobre as quais Husserl trata, ao afirmar que os números não são mais facilmente compreendidos por meio da percepção e intuição. Mas tem vantagens na produção de novos conhecimentos. Husserl não atentou que a Ciência tem a tarefa de desenvolver o Ser humano bem como sua intuição, pois as intuições são diferentes, dependendo do contexto de cada época. A Ciência por meio da pesquisa não apenas produz novos conhecimentos, mas transforma o próprio homem, ou seja, determina novos homens. Husserl aponta apenas aspectos negativos da simbolização algébrica. De um lado, ele está correto quando diz que, desde a época de Galileu até o século XIX, a preocupação era produzir novos conhecimentos, deixando de lado a justificação. Por outro lado, essa produção transforma o conhecimento e o próprio Ser. Isto é, a algebrização transforma não só a Ciência como também o ser produtor dessa Ciência.

> Klein (1992) trata da interpretação de figuras geométricas de Descartes. A Geometria Analítica define 'espaço simbólico' completamente diferente do espaço real da Geometria tradicional euclidiana. As figuras de Descartes, principalmente os segmentos e também as figuras geométricas, no sentido mais usual, não são figuras no espaço (este espaço é a extensão real de um corpo considerado em abstração sobre ele mesmo) por si só, mas também são representações simbólicas de grandezas em geral (COSGROVE, 2008. Tradução nossa).

O início da Geometria de Descartes descreve que qualquer problema de Geometria pode ser reduzido a segmentos construtivos como, por exemplo, a multiplicação de segmentos por meio de proporção que fornece outro segmento.

Descartes representa comprimentos por letras, designando, por exemplo, a^2 por 'a' multiplicado por ele mesmo, ou seja, um quadrado e, assim por diante, por meio de proporção obtém outras situações como a do cubo etc. Quando Descartes multiplica dois segmentos para produzir segmentos, podemos dizer que Descartes está multiplicando número simbólico visto que o resultado obtido, no caso a linha, é representada por letras. Então, essa multiplicação é uma operação simbólica, envolvendo conceito de número em geral.

As figuras da Geometria Analítica de Descartes[37] são representações gerais simbólicas perspicazes que indicam relações entre magnitudes. Essas relações são economicamente representadas por equações. Por exemplo: $x^2+y^2=r^2$ é uma representação simbólica indireta (os símbolos indicam objetos de segunda intenção) da circunferência no espaço bidimensional, não representa uma determinada circunferência (Figura 03).

Na Geometria Euclidiana, a circunferência desenhada com o compasso é uma representação direta dessa circunferência (Figura 04), indicando um objeto específico, ou seja, uma imagem.

[37] É importante registrar que Descartes não tratou de números negativos e nem com sistema de coordenadas ortogonais em sua Geometria Analítica.

Figura 03: Representação da circunferência no plano ‘cartesiano’ por meio de uma equação.

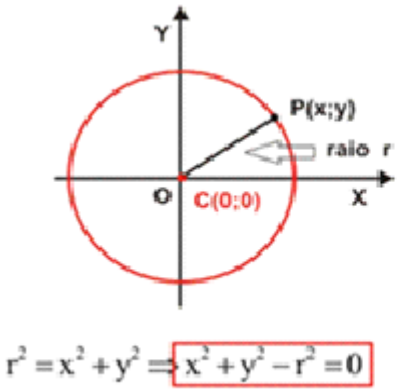


Figura 04: Construção da circunferência por meio do compasso.

Nessa transição das duas representações, está presente a transformação conceitual do número do objeto autêntico para um objeto simbólico geral. A origem da pesquisa de Klein (1992) está exatamente no pensamento de Husserl sobre número, ou seja, na distinção entre número simbólico e número autêntico[38] (número como ideia). Para Husserl, a distinção entre Matemática simbólica e Matemática autêntica, em termos de ideias, foi essencial. Podemos dizer que Klein teve como hipótese de que realmente essa distinção marca uma distinção de época histórica, ou seja, os gregos conhecem os números como ideias (números autênticos) e os modernos (Stevin, Vieta e Descartes) conhecem números como símbolos em geral.

> Tentemos entender um objeto novo e ainda desconhecido. A nossa primeira iniciativa é deixar o objeto atuar por si só (passividade e espontaneidade do pensamento). Por outro lado, vamos relacionar cada nova informação, cada novo objeto e cada nova concepção com os próprios conhecimentos que já dispomos em nosso espírito. Trata-se assim de integrar cada fato novo no próprio sistema de conhecimento a experiências (atividades e operatividade do pensamento) (OTTE, 1993, p. 220).

Portanto, temos dois lados do processo de aprendizagem: atividade e operatividade do pensamento que têm como pressupostos a receptividade das impressões e espontaneidade dos conceitos da concepção kantiana. São dois lados do conceito de número no sentido de Husserl (receptividade – números

[38] Números autênticos para Husserl são os que existem nas realizações sensoriais, ou seja, quantidades de qualquer coisa que represento na intuição.

autênticos e espontaneidade de conceitos – número simbólico). Para Klein, a receptividade caracteriza os números antigos gregos e a operatividade caracteriza os números de Stevin, Vieta e Descartes. O número imaginário é apenas um símbolo, os números negativos, para Descartes, são fictícios. A intuição é o lugar onde se encontram os números como ideias e, no conceito, nas definições, encontra-se o número como símbolo de operações para calcular.

Do ponto de vista da operatividade, da instrumentalização, Husserl pode ter dito que Klein mostrou que perdemos, na revolução científica dos séculos XVI e XVII, o aspecto do número como ideia, ficando com o número apenas como aspecto operativo e, por isso, Husserl discute a crise, pois o homem se transforma numa máquina de calcular no estudo de Aritmética e da Álgebra.

O simbolismo algébrico é uma 'máquina' de produzir conhecimento, ou seja, se você entende que o conhecimento está incompleto, que sempre está em progresso, isso indica que as maneiras com que represento os fatos do conhecimento têm importância fundamental. Se todos os conhecimentos matemáticos fossem escritos em alemão, ficaria complicado. Mas, de outro lado, não podemos confundir a 'vestimenta' com o conteúdo.

Temos que olhar o conhecimento na forma de progresso em movimento, ou seja, de um ponto de vista genético[39], evolucionário. Se eu sigo essa trajetória, todos os contrastes que surgem entre o pensamento algébrico e geométrico se resolvem, pois percebemos que, no desenvolvimento da Matemática, sempre há interação entre essas perspectivas. Em alguns momentos, privilegia a Geometria e, em outro momento, a Álgebra, mas a interação está no interior dessa transformação. Nesse sentido, o conceito de Complementaridade é importante, pois não é um pensamento que coloca um contra o outro e, sim, captura, de ambas, suas especificidades que contribuem para o crescimento intelectual e resolução de problemas tanto da própria Matemática como do mundo cotidiano, pois esses mundos se transformam numa relação simétrica e assimétrica.

[39] Uma perspectiva genética e evolucionária considera o desenvolvimento dos mecanismos e processos mediante os quais se passa dos estados de 'menor complexidade' para 'maior complexidade' num contexto sócio-histórico evolutivo da coisa à qual a teoria se refere. A abstração simbólica no início da simbolização algébrica moderna tem características dessa perspectiva.

> Quando Descartes descobriu a Geometria Analítica, ele introduziu novas relações entre Geometria e Álgebra e, sem saber, inaugurou uma série ininterrupta de assimilações recíprocas da Matemática até então heterogêneas, assimilações recíprocas que: parecem ser a principal razão do porquê a Matemática pura tornou-se consciente de si mesma (BETH & PIAGET, 1996, p. 228. Tradução nossa).

É nesse sentido que a genialidade de Descartes se sobressai, pois sua Geometria Analítica tratou da relação entre a linguagem algébrica com as formas geométricas no século XVII. Se Descartes tivesse polarizado apenas na linguagem algébrica ou geométrica, não teria, talvez, capturado a interação analógica complementar de sua *Mathesis Universalis*. Segundo Beth & Piaget (1996, p. 229), há duas características principais da Matemática: i) sua independência dos objetos empíricos e das intuições em níveis elementares, ou seja, de sistemas operacionais concretos ou imaginários e ii) o aumento da homogeneidade que a Matemática pura introduz ou reconhece entre diferentes ramos da Matemática. Nós ganhamos intuições e evidências quando aprendemos a andar e como os pássaros aprendem a voar. Falamos que o progresso transforma o sujeito, mas não podemos ficar numa concepção reducionista que foca nos problemas do dia a dia, pois isso não nos modifica. Nessa perspectiva, a calculação simbólica contribui para essa transformação.

Num certo sentido, do mesmo jeito quando falamos de Complementaridade, Piaget (1996) disse que, na Matemática, sempre temos uma oposição[40] entre o ponto de vista platônico e os construtivistas. Segundo Otte (2013), “Piaget ‘concorda’ com Platão quando ele diz que os objetos matemáticos são pré-formados”. Contudo, para aprender Matemática, o aprendiz tem que atualizar essas formas, em termos de suas próprias atividades. Não podemos simplesmente contemplar e, sim, realizar construtivamente. ‘Mais ou menos’ a diferença entre Kant e Platão, pois Kant sempre fala que, para entender a generalidade do triângulo, temos que construir os conceitos na intuição.

Em cada passo, temos dimensão e reciprocidade, percebemos alguma coisa, tiramos alguma conclusão e depois testamos as conclusões num círculo

[40] Entendo que essa oposição é complementar assimétrica ou simétrica. A tensão nessa oposição produz novos conhecimentos. Encontrar a verdade absoluta do ponto de vista da essência não é o foco principal, mas a objetividade, a funcionalidade e justificação numa estrutura formal ou não bem fundamentada são fatores importantes.

hermenêutico. Isso significa que a Complementaridade permite esse dinamismo genético e não um ponto de vista lógico que procura fundamentos absolutos da Matemática. Nesse sentido, essa discussão da simbolização do pensamento algébrico e geométrico torna-se dinâmica.

O valor da obra de Klein é que ela mostra, ao longo da História, que a transformação e o desenvolvimento do conceito de número deram-se nessa interação entre números autênticos e números simbólicos, a partir de Husserl. É óbvio que, com a Álgebra dos séculos XVI e XVII, surgem muito mais números do que na época grega antiga.

Os diálogos platônicos são analíticos no sentido de apenas detalhar o que já existe, mas não produzem novos conhecimentos, pois, em Mênon, por exemplo, o escravo apenas rememorou o que já existia e ele não lembrava. Essa é a questão, pois o Platonismo foge do problema, negando a individualidade, porque todos nós já temos conhecimentos e Sócrates tem a função de 'parteira', isto é, faz nascer, despertar o que já existe. Sócrates não ensinou, apenas ajudou o aprendiz a se lembrar do que já está em sua mente, porquanto somos parte do cosmo e tudo já existe de alguma forma. Entretanto, isso não é compatível com o individualismo moderno, pois temos mentes diferentes, isto é, o individualismo impede essa interpretação.

Os gregos antigos ficaram admirados com a eternidade dos teoremas da Geometria, pois toda vez que repete a construção por meio de passos surge uma figura[41]. Os gregos ficaram concentrados nos efeitos, nos produtos das operações, das construções; eles não foram conscientes das próprias operações, enquanto os modernos ficaram limitados nas operações e não nos efeitos. Os antigos foram conscientes, primeiramente, nos efeitos antes de perceber as próprias operações. Antes de voltar para estruturas internas das operações, o caráter contemplativo dos gregos antigos são apenas expressões da essência inicial da consciência das operações. Os pitagóricos colocaram os números entre as coisas, da mesma maneira como as sociedades primitivas puseram nomes nos

[41] A construção de um triângulo retângulo, por exemplo, ilustra essa situação, pois as regras de construções explicam essa eternidade.

objetos ou como Euclides não percebeu o movimento como uma operação geométrica.

O que é um vetor? Uma flecha? O vetor no sentido de operações são movimentos ou translações. Na Geometria Euclidiana, o foco estava nos efeitos e os modernos olharam as operações, ou seja, tratamos do resultado ou na maneira de produzir os resultados; no conteúdo dos números (números autênticos) ou como calcular com os números (número simbólico). Os gregos focaram nos resultados, por isso é sintético. Isso significa que até na Geometria temos a Complementaridade entre processos e os efeitos, contudo os efeitos são mais evidentes, porém, na Álgebra, as operações tornam-se mais conscientes. Nesse sentido, o fator importante dessa transformação foi a 'dominância' do lado operativo que, de certa forma, independe da simbolização.

A generalidade, por um lado, surge do sistema de regras da construção e não do resultado dessa construção ou das figuras específicas, mas, por outro lado, ficamos olhando uma figura. Toda figura pode fornecer apenas uma sugestão, nunca pode ser uma prova geral; por exemplo, se tenho dois triângulos: para saber se são congruentes, temos que provar. Precisamos de ambos – eu provo uma coisa numa figura individual, mas a prova vale para todas as figuras e não apenas para a figura que estou analisando. A generalidade das provas geométricas surge do lado operativo e não do lado contemplativo.

Essa ruptura, essa transformação da Matemática no caso da Aritmética que Klein (1992) trata não se aplica ao simbolismo algébrico somente, também se atribui a uma atitude diferente dos modernos para os quais o conhecimento matemático é uma atividade, são regras dessa atividade por meio da abstração reflexiva. Temos que esquecer a ideia da essência dos objetos matemáticos e pensar em operações e nas estruturas dessas operações. Esse foi o grande avanço dos matemáticos modernos, em comparação aos matemáticos gregos antigos.

A obra de Jacob Klein (1992) trata da transformação do conceito de número como conteúdo motivador do início do simbolismo algébrico moderno. Do ponto de vista histórico, a Aritmética exerceu papel fundamental nos séculos XVI e XVII, pois, nesse período, antes da Geometria Analítica de Descartes (1596-

1650), teve expoentes que, de fato, trataram da Aritmética, como: Petrus Ramus (1515-1572), Vieta (1540-1603), Stevin (1548-1620), Bacon (1561-1626) e Galileu (1564-1642). Portanto, se olharmos a data de nascimento dessas pessoas, observamos que, do ponto de vista histórico, Klein tem razão, isto é, a mudança do conceito de *arithmo* para o conceito de número como símbolo em geral foi, de verdade, essencial no entendimento da essência da revolução dos séculos XVI e XVII, porque essa essência se refere ao fato de que, de repente, a Mecânica se transforma numa Ciência diferentemente da concepção aristotélica tida como uma arte, ou seja, ao invés de só olhar para os fatos ou resolver problemas, o homem começa a se preocupar em criar teorias e procurar as leis que 'governam' determinados fenômenos do mundo (compreender a estrutura). Por outro lado, no interior dessa transformação, está o aspecto da operatividade, ou seja, começa a perceber a importância do procedimento e não apenas o efeito final.

A Álgebra tem duas perspectivas: uma representativa (representa as Leis da Natureza e as Leis em geral) e outra instrumentalista. Toda fórmula tem esses dois aspectos: uma fórmula é um diagrama, um ícone[42], por exemplo, F=MA, não é só uma coisa para calcular, ou seja, é instrumental (efetua cálculos, aspecto discreto) e representa relações (uma ideia geral, aspecto contínuo), pois indica relações entre três grandezas. Isso coaduna com o conceito de Complementaridade de função do pensamento Otteano.

Essa é a diferença entre relação e função. A função é instrumental e operativa que efetua transformações. Mas uma relação, como uma equação, não é instrumental e, sim, sempre simétrica. São dois conceitos: equação e função que determinam a Matemática moderna desde Vieta e Descartes. O grande desafio foi relacionar esses dois conceitos. Apenas no século XIX, ficou mais clara a importância da Complementaridade.

De forma geral, em relação à construção de conceitos sobre a ideia de identidade e diferença, podemos dizer que há três períodos: A Antiguidade, o período de Stevin e Vieta e depois outra transição após Kant. A época de Stevin e Vieta é dicotômica, isto é, tem dois lados em que os matemáticos nunca sabem o

[42] Segundo Otte (2001), o ícone não representa inequivocamente esta ou aquela coisa, seu objeto pode ser pura ficção, assim como sua existência (*isto é, evoca uma ideia* - grifo meu).

que relacionar nas funções, pois pode ser uma curva, uma fórmula ou um diagrama.

A teoria das funções é tratada à base das séries (Taylor) ou à base das representações geométricas (curvas). No cálculo, há estudos de funções no sentido de continuidade, se é integrável, ou seja, é um conceito abstrato, enquanto na Álgebra é concreta, pois usa fórmulas. Nesse sentido, Husserl e Heidegger não estão totalmente certos, pois só viram o lado instrumental e não enxergaram o lado representativo do ponto de vista relacional.

Para Euler, Lagrange, Descartes e Leibniz, a função é uma representação simbólica que podemos analisar (se é do segundo grau, terceiro grau etc.), pois precisamos olhar a representação para derivar as características da função por meio de tabelas, fórmulas etc. O problema começa no momento em que queremos coordenar as relações e diferenças; por exemplo, numa função do segundo grau, temos duas representações: uma fórmula e uma curva (parábola). Como saber se a parábola e a fórmula representam o mesmo objeto? Como coordenar essas duas representações? Qual é o objeto? Há duas representações do mesmo objeto, mas que coisa é essa? Esse entendimento é necessário e importante para saber se a função é contínua.

> Em sua *Introduction in analysin infinitorum* (introdução à análise do infinito) de 1748, Euler definiu função contínua de uma quantidade variável como uma expressão analítica composta, de qualquer maneira, de variáveis e constantes (EULER, 1748, I, p. 4) de forma que uma simples mudança na notação seria suficiente para transformar uma função contínua numa função descontínua e vice-versa, como Cauchy (1889, Oeuvres, series, 1, 8, p. 145 observou (OTTE, 2012, p. 136).

Euler disse que todas as funções representadas por uma fórmula são contínuas. Cauchy criticou esse entendimento de Euler, dizendo que podemos mudar a representação e transformar uma função de contínua para descontínua, ou seja, a continuidade é característica da função e não da representação da função, mas o que realmente é uma função, além de sua representação, que seja geométrica, algébrica ou mesmo um diagrama?

Na teoria dos conjuntos, a Matemática não precisa responder à questão do que é, por exemplo, o que é número? O que é função? O que é um conjunto? Para o matemático, é suficiente saber se duas representações são iguais ou diferentes. Tenho dois conjuntos F e G, como saber se têm os mesmos

elementos? Por meio do axioma da extensionalidad: dois conjuntos são iguais se, e somente se, seus elementos são os mesmos.

Em Otte (1993, p. 228), há um exemplo que ilustra essa situação: se f(x)= x+5 e g(x)=(x+12)-7, indicam representações diferentes do mesmo objeto. Há sempre dificuldades, pois temos acessos às coisas deste mundo por meio de símbolos da representação, mas não podemos confundir a representação com o objeto. Não podemos confundir a foto com o sujeito representado; então, o conceito representa uma Complementaridade que depende da representação e do método, porém a simbolização não indica o conceito.

Não se pode misturar a representação com a função, da mesma forma que não se pode trocar o símbolo 2 com o número 2. Todavia, o número 2 pode ser acessado por meio do símbolo 2 e, por isso, há Complementaridade entre símbolo e objeto. Esse é o segredo da simbolização. A simbolização não mostra a essência das coisas, não mostra a coisa; é, por um lado, ‘apenas’ um dispositivo e, por outro lado, sem esse dispositivo, a Matemática não avança; então, a simbolização algébrica não ‘é só’ um dispositivo; é, na verdade, essencial para a transformação do sujeito e do objeto por meio da interação.

A Matemática destaca o simbolismo que, por sua vez, é fundamental para o pensamento. Os problemas da Matemática são do simbolismo algébrico o qual aborda qualquer questão da realidade. Esse foi o equívoco de Husserl e Heidegger, pois, sem a representação, não há como acessar as coisas.

Até Galileu, a Natureza era um livro escrito em formas geométricas, ou seja, para ele, a Matemática era a Geometria. Para Descartes e Newton, as leis do movimento são representações em forma algébricas. Essa transformação é abordada por Klein (1992) a partir da mudança do conceito de número.

Podemos interpretar essa perspectiva como instrumentalista, ou seja, como uma revolução não apenas na Matemática, mas também como revolução Filosófica importante, pois conseguimos dizer que o instrumentalismo (fazer previsões por meio de Leis e fórmulas) trouxe progresso, ao especificarmos e, com isso, entendermos mais o objeto.

> A linguagem simbólica da Álgebra, isto é, a própria linguagem da Física Matemática não é uma questão puramente técnica ou

> instrumental. É um equívoco acreditar que podemos traduzir os teoremas da Física Matemática numa linguagem ordinária, como se o dispositivo matemático usado pelos físicos fosse somente uma ferramenta para expressar seus teoremas mais facilmente (KLEIN, 1985, p. 61. Tradução nossa).

Pode-se dizer, também, que essa especificação abandonou a compreensão do Ser, ou seja, a sua reflexão filosófica. É exatamente o aspecto da fragmentação unilateral que Husserl, no início do século XX, critica no instrumentalismo, pois se preocupa com fatos e não com o Ser. É nesse contexto que Klein (1992) publica a parte I e parte II de sua obra. Nesse período, surge na concepção de Husserl, a crise no relacionamento entre a Ciência e as coisas do cotidiano.

A Filosofia começa seus estudos procurando a construção racional de conceitos a partir de problemas de fato e depois vai abstraindo até chegar ao ponto mais alto de entendimento; já a Matemática começa com objetos totalmente abstratos. Então, há realmente uma tensão entre a Filosofia e a Matemática. Nessa tensão, o aspecto didático ajuda no ‘crescimento ou progresso’ tanto da Filosofia como da Matemática, pois as une.

Em Vieta (número como espécie), Stevin (representação decimal) e até mesmo na estrutura dos diálogos platônicos (interrogatório do escravo – Mênon), a didática começa a se tornar importante a fim de fazer com que a Filosofia seja necessária para compreender conceitos, ou seja, a preocupação de como instigar e escrever determinado assunto para apresentar a uma quantidade maior de pessoas, de forma mais clara possível, ‘força’ a criação de novos conceitos e de novas linguagens, transformando o objeto, o método, o conhecimento e o ser humano.

O pensamento precisa de algo para ser pensado. A mente contém em si um objeto em que nossos pensamentos são concentrados, ou seja, nossos pensamentos têm conteúdo. Não existem pensamentos vazios. Isso se chama intencionalidade na tradição filosófica, inaugurada na modernidade, pelo filósofo alemão Franz Brentano (1838-1917).

No pensamento de Husserl, há elementos que nos chamam atenção no que diz respeito à compreensão de conceitos como, por exemplo, a questão da

intencionalidade. A intencionalidade[43] para Husserl não é simplesmente o fato de que, para ter consciência, precisamos de objetos, ou seja, consciência de algo acentuando a relação entre consciência e objetos. Esse entendimento de intencionalidade, relacionada diretamente com a presença de objetos, é perfeitamente compatível com o pensamento grego antigo. Em Husserl, a intencionalidade não repousa em nenhuma relação empírica fática, não depende de experiência *a posteriori* para alcançar uma relação específica com os seus campos de objetos (CASANOVA, 2012, p. 41).

Na quinta investigação lógica de Husserl, verificamos o fato de que:

> A ligação intencional, compreendida de maneira puramente descritiva como particularidade interna de certas vivências, é concebida por nós como determinação essencial dos 'fenômenos psíquicos' ou como 'atos', de que vemos na definição de Brentano de que os fenômenos psíquicos seriam 'fenômenos tais que contém em si intencionalmente um objeto' uma definição essencial, cuja 'realidade' (em sentido antigo) é naturalmente assegurada por exemplos. Em outras palavras e concebido ao mesmo tempo de maneira *puramente* fenomenológica: a ligação realizada de tal modo que toda apreensão empírico-psicológica e todo posicionamento existencial permanecem sem ser iniciados e de tal modo que não se considera senão o conteúdo realmente fenomenológico dessas vivências – nos fornecem a ideia de gênero puramente fenomenológica vivencial intencional ou ato, assim como, então, as suas facetas puras. O fato de nem todas as vivências serem intencionais é mostrado pelas sensações e pelos complexos de sensações (HUSSERL apud CASANOVA, 2012, p. 42).

Podemos dizer que a intencionalidade, para Husserl, está na mente do sujeito por meio de relações puras e transcendentais com o mundo dos objetos. Segundo Casanova (2012, p. 44), cada ato de consciência traz consigo, necessariamente, o seu objeto correlato. Isso indica, por exemplo, que na representação há uma intenção objetual, mesmo que o objeto representado não seja totalmente determinado a princípio, como no caso de uma equação ou proporção.

Nos séculos XVI e XVII, surge outra intencionalidade no que diz respeito à interpretação dos números e figuras, emergindo a *Mathesis Universalis* de Vieta e Descartes, 'rompendo' com o aspecto sensível de interpretação, preocupando-se com o método, tendo regras e procedimentos próprios. O objetivo é a Matematização da Natureza, expressando-a por meio de Leis gerais, aparecendo,

[43] Segundo Hopkins (2012), a intencionalidade é a chave da fenomenologia de Husserl. Refere a uma correlação *a priori* entre a consciência e o objeto para o qual a consciência diz respeito.

então, a ‘Física Matemática’, isto é, a *physis* aristotélica recebe o nome de Física, ou seja, a Logística antiga se transforma na Mecânica. É nesse sentido, segundo Husserl, que o sujeito cognoscente é deixado de lado em relação à preocupação com o objeto.

O objetivismo nas Ciências nasce com Galileu com a matematização da Natureza, de acordo com Husserl. Na Matemática antiga, há uma forte relação com o mundo sensível, seja do ponto de vista das figuras ou dos números.

A Filosofia da Ciência de Husserl parte da ideia de que, nos séculos XVI e XVII, a geometrização da Natureza com Galileu e, em seguida, a simbolização via formalizações algébricas com Vieta[44] e Descartes indicam a idealização Matemática do ponto de vista da *Mathesis Universalis,* na interpretação dos fenômenos físicos do mundo. Para Husserl, essa idealização é um tipo de ‘reificação do método’.

> A roupagem de ideias da ‘Matemática e Ciência Matemática da Natureza’, ou a *roupagem dos símbolos*, das teorias simbólico-Matemáticas, abrange tudo aquilo que, para os cientistas, assim como os homens instruídos, substitui o mundo da vida e o mascara, como a Natureza ‘objetivamente efetiva e verdadeira’. A roupagem das ideias faz com que tomemos pelo verdadeiro ser aquilo que é um método – com o fito de, num *progressus in infinitum*, melhorar, por *previsões ‘científicas’*, as rudes *previsões* que, originariamente, são as únicas possíveis dentro daquilo que é efetivamente experienciado e experienciável no mundo da vida: a roupagem das ideias faz com que *o sentido próprio do método*, *das fórmulas*, *das teorias* permaneçam *incompreendido*, e que, no surgimento ingênuo do método, não seja *jamais* compreendido (HUSSERL, 2012, p. 41).

Hopkins (2012) aponta que Klein (1992) realizou uma pesquisa histórica que Husserl mostra em sua *Krisis*, porém Husserl não aprofundou nessa pesquisa histórica, mas Klein teve essa tarefa como um de seus objetivos.

Essa pesquisa histórica realizada por Klein (1992) revela uma transformação na inteligibilidade humana, na forma de interpretação a partir da concepção grega antiga que era governada por uma inteligibilidade natural, descritiva ou contemplativa para uma concepção moderna, guiada por uma inteligibilidade simbólica operativa.

---

[44] Isso embora Husserl não trate de Vieta, pois sempre fala de Galileu e de Descartes. Nesse sentido, o trabalho de Klein (1992) torna-se uma parte histórica importante do elo que há entre o mundo Antigo e Moderno do ponto de vista da transformação no conceito de número.

De acordo com Klein (1992), o ponto de partida da ‘física algébrica – simbolização dos fenômenos físicos’ - fundamentalmente essencial para todas as Ciências subsequentes, trata do conceito de número como espécie (Vieta) e do ‘espaço-simbólico’ na Geometria analítica de Descartes, que é a representação simbólica de coisas irreais da civilização moderna. Nesse sentido, a Geometria Analítica de Descartes é a interação da Geometria com a Álgebra do ponto de vista simbólico, indicando objetos gerais de segunda intenção.

A noção de número simbólico é o foco do ponto de vista histórico no trabalho de Klein (1992) no sentido de que, para os matemáticos gregos antigos, um número é sempre uma coleção definida de unidades contáveis de um tipo específico. Já na Matemática moderna, desde Vieta, pelo contrário, um número é, essencialmente, uma entidade simbólica definida por meio de suas relações com outros números num cálculo simbólico (Logística). Para os matemáticos modernos, o número é um valor possível para uma variável algébrica. Na reinterpretação da Aritmética de Diophantus por Vieta, Klein demonstra que o símbolo algébrico se submete a uma mudança teleológica[45]. Isso significa que, a partir da interpretação de Stevin, Vieta e Descartes, o conceito de número se transforma em aspectos operativos de funcionalidade. E a calculação algébrica ajuda a propiciar esse movimento de transição.

Enquanto o símbolo algébrico Diophantino representa quantidades desconhecidas de unidades contáveis, o símbolo, em Vieta, concebe um conceito geral de um número. Isso é válido tanto para variáveis gerais da Álgebra como também para situações menos gerais que indicam entidades simbólicas; por exemplo, o ‘2’ que significa dois objetos, duas unidades contáveis ou uma duplicidade em geral.

Se entendermos o conceito de abstrato como uma Ciência que ‘separa’ o conceito geral de número do conceito de tipos particulares de unidades contáveis, então, a Aritmética grega é uma Ciência abstrata. Por conseguinte, a Aritmética grega não trata de conceitos gerais como sendo números.

---

[45] Teleologia – concepção segundo a qual certos fenômenos ou certos tipos de comportamento não podem ser entendidos por apelo simplesmente as causas anteriores, mas são determinados pelos fins ou propósitos a que se destinam (JAPIASSÚ & MARCONDES, 1996, p. 258).

Na terminologia escolástica empregada por Klein, Vieta considera ‘uma segunda intenção: conceito que se refere a outro objeto’. E interpreta como primeira intenção: conceito que se aplica diretamente a objetos individuais. Embora isso não implique instituir a reificação moderna simbólica do número por si só, mantém o conceito original de número distinto do aspecto simbólico nos resultados da inovação de Vieta, Stevin e Descartes. Nessa perspectiva, a partir de Vieta, a concepção tradicional grega de número foi substituída pelo aspecto simbólico.

A concepção moderna de número torna possível, ‘números’ impossíveis na Matemática grega, tais como, números fracionários, números negativos, números irracionais e números imaginários. Na Física Matemática do século XVI e XVII, ou seja, na Mecânica, os números fracionários tiveram importância fundamental, visto que, na Álgebra e nos problemas interpretados algebricamente, a razão foi reinterpretada como frações e as proporções como igualdade de números fracionários. Além disso, a concepção moderna de número torna viáveis determinadas operações que, na Matemática grega antiga, eram incoerentes, como, por exemplo, a multiplicação de um número por outro, exceto no caso em que a multiplicação é interpretada como tendo um determinado número de unidades de comprimento por outro número com unidades de comprimento para produzir uma área (2 metros vezes 3 metros é igual 6 metros quadrados) ou 2mx2mx2m equivale a 8 metros cúbicos.

Situações da forma: (3^2+4^3) não eram calculadas na Matemática grega antiga, devido ao fato de não fazer sentido somar área com volume. Até em Vieta, essa homogeneidade ainda era mantida. O produto na Aritmética só foi possível por meio de simbolismo algébrico, pois esse simbolismo ‘descarta’ a intuição. Os gregos antigos interpretavam os produtos em termos de grandezas de até três dimensões, pois o espaço tem só três dimensões. Com a simbolização moderna de Stevin e Descartes, a homogeneidade torna-se irrelevante.

A concepção simbólica de número, a partir do ponto de vista fenomenológico, suscita realizações intuitivas. O número simbólico, para Husserl, é um objeto ideal que, como tal, deve encontrar suas realizações na ‘intuição eidética’.

> Eidética – que concerne ao conhecimento. Termo de utilização recente, notadamente na Fenomenologia de Husserl, para caracterizar aquilo que se refere às essências, por oposição ao suporte fatual que depende de outras Ciências [...] Assim por oposição às coisas mesmas, a eidética é a 'Ciência' das formas das coisas no espírito. *Ciências eidéticas* são as que tomam por objeto as relações entre as essências ideais (lógica e Geometria); é a *intuição eidética* que nos permite apreender as essências; *redução eidética* consiste em se passar do fenômeno empírico ou existencial à sua essência (JAPIASSÚ & MARCONDES, 1996, p. 79).

O número simbólico é incompleto, pois tem que procurar suas realizações na intuição eidética, ou seja, apreender o abstrato no concreto, capturando o fenômeno por meio de um 'golpe de olhar' da intuição ou numa espécie de 'golpe da intuição' de maneira não formal. A intuição eidética ou intuição da essência – a essência - é um objeto de nova espécie, assim como o dado da intuição individual empírica é um objeto individual, também o dado da intuição eidética é uma essência pura (ABBAGNANO, 2007, p. 671). A essência (*eidos*[46]) é uma nova espécie de objeto.

> A generalização dos conceitos correlativos e independentes, 'intuição' e 'objeto' não é um achado arbitrário, mas forçosamente exigida pela natureza das coisas. Intuição empírica, e, em especial, experiência, é consciência de um objeto individual e, como consciência intuitiva, 'é ela que traz o objeto à doação': como percepção, ela traz à doação originária, à consciência que apreende 'originariamente' o objeto em sua ipseidade[47] '*de carne e osso'*. Exatamente da mesma maneira, a intuição de essência é consciência de algo, de um 'objeto', de um algo para o qual o olhar se dirige, e que nela é 'dado' como sendo 'ele mesmo'; mas também é consciência daquilo que então pode ser 'representado' em outros atos, pode ser pensada de maneira vaga ou distinta, pode tornar-se sujeito de predicações verdadeiras ou falsas – justamente como todo e qualquer '*objeto*' *no sentido necessariamente amplo da lógica formal*. Todo objeto possível ou para falar como a lógica, '*todo sujeito de predicações verdadeiras possíveis*' tem precisamente *suas* maneiras de entrar no campo de um olhar representativo, intuitivo, que eventualmente o encontre em sua '*ipseidade de carne e osso'*, que o apreenda (HUSSERL, 2006, p. 37).

A intuição ligada diretamente a fatos do cotidiano é uma exigência muito grande que Husserl fez, pois os números negativos já exigem uma interpretação relacional mais ampla. Como explicar o resultado de $x^2=-1$? Ou mesmo de $x+8=4$? A Matemática não pode ficar 'presa' ao empirismo, deve estar arrolada com atividades num contexto relacional. É nesse sentido que a abstração reflexiva de Piaget - a conexão entre intuição e pensamento (simbólico), ocorre, isto é, apenas

[46] Eidos – é um dos termos com que Platão indicava as ideias e Aristóteles a forma, é usado na Filosofia contemporânea especialmente por Husserl para indicar a essência que se torna evidente mediante a redução fenomenológica (ABBAGNANO, 2007, p. 360).
[47] Ipseidade – indica a singularidade da coisa individual.

quando entendemos o pensamento como atividade e não como percepção simples. Então, os números negativos, por exemplo, não podem estar relacionados diretamente com a vida cotidiana; é nesse sentido que a abstração reflexiva nos ajuda a entender a importância das propriedades estruturais da calculação algébrica, pois a Matemática simbólica sempre nos oferece algo a mais do que a intuição baseada nos objetos do mundo. Isso significa que a simbolização é importante, também, para compreender melhor a questão da intuição eidética de Husserl na perspectiva de Jacob Klein.

Na análise de Klein, referente ao fato de que os modernos como Vieta e Descartes, por exemplo, operacionalizaram objetos desconhecidos por meio da simbolização não diminui o possível acesso à essência do objeto – voltar às 'coisas mesmas' de Husserl, pois a calculação final propicia ampliação do entendimento do objeto, até então, desconhecido.

> O método simbólico de representação das verdades vem a ser identificado com a própria Ciência e a representação simbólica dos objetos (os significados das formações simbólicas em si) identifica com o objeto da Ciência. Dessa forma, o estudo de Klein sobre a simbolização algébrica, de certa forma, 'reifica o método' repreendido por Husserl em sua *Krisis* (COSGROVE, 2008. Tradução nossa).

A Matemática moderna fornece estímulo decisivo para reificação do método geral, no entanto a própria reificação do método torna possível a emergência da Matemática simbólica e, por isso, são complementares. A arquitetura da Física Matemática, do século XVI até século XVIII, era totalmente minuciosa, no sentido de manutenção da distinção entre a quantidade simbólica da Álgebra e a quantidade física da Ciência Natural.

Para Husserl, a Ciência moderna é caracterizada pela idealização Matemática da Natureza que a substitui, como está intuída no pensamento, por uma visão pré-científica no sentido de expressar essa Natureza matematicamente. Isso é exatamente o cerne da idealização Matemática em termos simbólicos no sentido da Álgebra, ou seja, a matematização dessa idealização por meio da Álgebra. A crítica de Husserl não é contra Galileu e Descartes, mas sim com a forma da *Mathesis Universalis*[48], ou seja, uma forma de um sistema coerente e fechado, baseado em axiomas e proposições que

[48] Segundo Otte, referente à orientação no dia 06/11/2012.

representam uma tentativa de construir uma Ciência de tudo, ou seja, nossa relação com o mundo é canalizada por essa matematização. Klein (1992) elaborou uma maneira significativa na forma de pesquisa histórica que tem como base a Filosofia de Husserl e Heidegger, mas que não foi feita pelo próprio Husserl e nem por Heidegger, pois Klein abordou a transformação do conceito de número de uma interpretação natural para uma interpretação simbólica. O pensamento simbólico resolve problemas, mas não oferece explicações intuitivas dos fenômenos.

A transformação da Álgebra, feita por Vieta, descrita e analisada por Klein (1992), é muito mais rica em detalhes históricos do que a 'feita' por Husserl. Klein argumenta que foi o sistema numérico arábico que levou a uma compreensão indireta e, fundamentalmente, à substituição de 'entidades' numéricas ideais, como pretendia toda a Aritmética grega antiga, por expressão simbólica (KLEIN,1992, p. 4 e 227). Portanto, a técnica de operar com símbolos 'substitui' a Ciência dos números.

Nas palavras de Husserl, essa abstração distingue a Álgebra moderna de todas as Matemáticas anteriores e explica sua referência puramente formal para 'coisas vazias e indeterminadas' (ANGUS, 2012). É por meio dessa universalidade formal não precedente que a generalização, abstração e simbolização se mantêm num lugar central na nova Ciência e, portanto, no conhecimento moderno como tal (ANGUS, 2012).

Enquanto a *eido* de uma 'cadeira', por exemplo, é preenchido intuitivamente com evidência adequada em qualquer instância da cadeira, o 'x' da abstração simbólica e formal não pode ser intuitivamente preenchido com uma intuição correspondente (ANGUS, 2012). Isso demonstra que o 'x' ou os signos usados nos séculos XVI e XVII tinha características diferentes tanto da Matemática antiga como da Matemática do século XIX, contudo é um elo importante da Álgebra abstrata.

Nenhum objeto concreto preenche intuitivamente uma determinada abstração, pois a abstração, essencialmente, refere-se apenas à possibilidade de determinação e não de sua efetivação em um dado exemplo particular. Portanto, nas palavras de Klein (1992, p. 185), "as coisas do mundo não são mais

compreendidas como seres contáveis, agora a estrutura do mundo é compreendida como percurso ‘legitimamente’ ordenado de eventos”.

A caracterização do conhecimento moderno como uma técnica originária da generalização, abstração e simbolização desautoriza a restituição da imediata intuição do edifício científico. Então, a consequência não é ‘a não inteligibilidade por si do significado formal intencionado na fórmula, mas sim sua ‘não inteligibilidade’ relativa aos fundadores da categoria tradicional de significado (*eidos*) nas intuições individuais no mundo vivido’ (ANGUS, 2012).

A relação individual envolve a intenção da lógica formal no sentido de trazer aspectos individuais para determinação do conhecimento. Se essa relação teleológica não é uma relação intuitiva, desempenhada por indivíduos como Husserl pensa, então, a aplicabilidade do juízo de sistemas formais, supostamente individual, deve ser entendida como um tipo específico, ou seja, uma maneira própria de perceber o objeto sempre a partir de uma perspectiva.

A forma específica da evidência que falta ao desempenho intuitivo pode ser designada como ‘técnica’ ou ‘evidência técnica’. Trata-se de uma perspectiva de individualidades concretas encontradas na vida real que produz tais individualidades apenas na medida em que sejam exemplares constituídos de sistemas-signos formais em questão. A esse respeito, o conhecimento antigo e Moderno procedem de formas diferentes. Ao passo que o conhecimento antigo pode traçar o conceito de volta às instâncias individuais a partir do qual ele foi abstraído, ou seja, do *eido* para casos concretos e isso a abstração formal moderna não pode realizar (ANGUS, 2012). Contudo, na concepção de Complementaridade do pensamento Otteano, há uma relação de dependência e interdependência por meio das representações na compreensão dos objetos matemáticos, pois as representações contribuem na ‘materialização’ dos conceitos.

> A aplicabilidade da multiplicidade é para todas as áreas do conhecimento como tal, não para seus conteúdos considerados separadamente. Portanto, tais domínios de aplicações não são compostos de individualidades, mas de conteúdos sistematicamente relacionados e produzidos. Então, concluo que evidências técnicas pertencem a conteúdos intuitivos da vida real utilizadas como recursos por meio de perspectivas, produzindo momentos significativos de abstração, ou seja, pontos nodais numa estrutura sistemática. Qualquer

> que seja tal individualidade pode estar fora de tal processamento e, então, é deixada inteiramente fora da possibilidade da formalização do conhecimento moderno. Isto é, o fenômeno que fundamenta a experiência do 'abrigo do ser' na modernidade pede empreendimento da vocação de cura por meio da fenomenologia (ANGUS, 2012. Tradução nossa).

Segundo Angus (2012), o resultado da revisão de Klein sobre a crise de Husserl a respeito das Ciências Europeias é como segue: Husserl contrastou as situações verdadeiras e práticas do cotidiano relativas a projetos práticos que caracterizam o conhecimento na vida real com verdades científicas. Além disso, Husserl (1970, p. 132) afirmava que, no pensamento Moderno, há determinado tipo de relacionamento que fundamenta as verdades científicas 'reconduzindo' precisamente as verdades situacionais, mas, de uma maneira tal, que o método científico não sofre em relação ao seu próprio significado. Isso porque procura o uso e esse uso deve ser, exatamente, essas verdades. Segundo Angus (2012), é esta recondução das verdades científicas à vida real que constitui a intenção de cura da fenomenologia de Husserl que não pode mais ser aceita após a clarificação de Klein (1992) em relação à generalização, abstração e simbolização, descoberta a partir de Vieta. Na vida real, reside uma distância considerável entre evidência técnica e intuições individuais devido à centralidade da generalização, abstração e simbolização do conhecimento moderno.

> Segundo Angus (2012. Tradução nossa), Klein observa que no século XVII teve um 'salto', 'talvez pela liberdade ou pela escravidão', invocando novamente debates sociológicos clássicos relacionando aos assuntos abordados no texto *Crisis* de Husserl, e no seu próprio trabalho sobre a origem e natureza do racionalismo científico considerando que qualquer que seja a explanação que você pode fornecer ao desenvolvimento do mundo, desde 1600, não pode negar que este desenvolvimento é principalmente dependente de uma determinada estrutura da mente sobre certa maneira do pensamento.

Klein (1992) apresenta os pontos principais de suas investigações históricas, evidenciando trabalhos de Diophantus, Vieta, Stevin e Descartes, procurando compreender a *Mathesis Universalis* moderna, por meio de sua característica principal que é ser um método de encontrar verdades possíveis ou até um procedimento metodológico, de acordo com certas regras, tais que a antiga fronteira entre a Ciência pura e aplicada seja superada para produzir uma Ciência orientada pelo domínio da Natureza.

A organização do conhecimento por meio da racionalização do método é, portanto, atribuída a uma Ciência que não é apenas aplicada a determinados procedimentos, mas indica não uma técnica específica como no método Diophantino, mas uma técnica em si. Contudo, as abstrações formais não englobam as abstrações concretas com as quais a *práxis (atividade)* cotidiana lida diretamente, mas, no início da modernidade, há uma tensão contínua e necessária entre a dependência da racionalização da universalidade formal e do material dessa universalização que é emergente, a partir tanto de problemas práticos cotidianos como de situações teóricas, trazidas pela Matemática grega antiga.

Heidegger, conhecido como filósofo da existência, procurou pensar o homem não como ser social e nem como homem da Ciência, mas o homem como entregue a si mesmo, à sua individualidade, aos seus conflitos existenciais, ou seja, investigou a existência interior pessoal, projetando-se no mundo filosófico com sua obra, em 1927, intitulada ‘Ser e Tempo’, pensando, basicamente, a crise da razão ocidental. Assim, Heidegger considerava que, até o século XIX, havia uma espécie de esquecimento do Ser, ou seja, a Ciência moderna esqueceu totalmente do Ser, entendendo que, investigando o ente, entenderia o Ser. Isso é um equívoco para Heidegger, pois o problema do Ser não é o da essência e sim o da existência, isto é, não é como Descartes imaginava que penso, logo existo e sim existo, logo penso. Isso implica que Heidegger entende o homem não como sujeito, nem como objeto e, sim, como relações entre Ser e ente, isto é, um ser-aí (*dasein*).

Heidegger não contesta a noção de intencionalidade, nem nega a essa noção um papel de centralidade compatível com a que ela possui no projeto fenomenológico husserliano, segundo Casanova (2012, p. 45):

> A postura fenomenológica fundamental, na medida em que a compreendemos no sentido mais amplo possível como análise descritiva dos fenômenos de consciência não psicologicamente percebidos (dito em termos husserlianos, como psicologia das vivências puras; *Marcas do caminho*), não é suficiente enquanto ela mesma não for explicitada originariamente de maneira genuinamente filosófica, com vistas a uma problemática filosófica principal [...] Fenomenologia não é mais, portanto, como em Husserl, psicologia descritiva das relações imanentes da consciência pura como os seus campos de objetos, mas se enraíza desde o princípio em uma hermenêutica da vida fática.

Isso indica que a intencionalidade está articulada no interior do mundo circundante que é semântico, histórico e dependente dos fatos vividos. Um aspecto que Heidegger considera equívoco na fenomenologia de Husserl diz respeito ao fato de que Husserl continua trabalhando com a pressuposição de que a dicotomia sujeito-objeto seria um esquema fundamental de estruturação da totalidade (CASANOVA, 2012, p. 48). Nesse contexto, Heidegger introduz a ideia de *Destruktion* que não designa dizimação da Filosofia tradicional e muito menos a nega e, sim, procura explorar os seus limites, no sentido de temporalidade do fenômeno, isto é, a historicidade do ser-aí.

Para Heidegger, segundo Veiga (2011), o movimento de transição que sai do interpretativo histórico-contemplativo do Ser para verdades dos entes tem, no seu desenvolvimento, o aspecto matemático como um dos fatores principais. Há, nas Ciências positivas, a procura pela verdade do ente, porém essa verdade é temporal, denotando determinado sentido.

Dessa forma, a partir dos séculos XVI e XVII, o aspecto simbólico do pensamento algébrico está relacionado com a representação de fenômenos, ou seja, de Leis naturais por meio de fórmulas, funções, pois, nesse período, a Matemática torna-se fio condutor no estudo de Filosofias, como Descartes, por exemplo. Segundo Veiga (2011), Heidegger trabalha a ideia da Matemática, tendo, como ponto de partida, a origem grega numa abordagem etimológica[49]. Contudo Heidegger estabelece diálogo com Galileu para tratar da modificação ou da transição do mundo antigo para o mundo Moderno. Essa transformação considerou o Ser como ‘Natureza’ e o ente como corpos físicos.

A interpretação de Galileu alterou a forma de compreender o mundo bem como dos instrumentos utilizados nesse entendimento, implicando mudanças nas relações do ente com o ser. Para Heidegger, Galileu foi decisivo na compreensão da ‘nova’ Ciência, pois:

> A intelecção epocal de Galileu foi reconhecer que, caso eu queira, por meio de experimento, interrogar a Natureza quanto ao que ela é e como ela é, já é preciso ter antes de tudo, um conceito do que compreendo por ‘Natureza’: que uma delimitação do que é

[49] O termo Matemática (μαθηματικη), segundo (MACHADO, 1989, p. 7) tem origem grega e significa o que se pode aprender (*mathema* – μαθηα - aquilo que é aprendido). É nesse sentido que Heidegger trata o conceito de Matemática.

> compreendido por Natureza precisa anteceder a toda investigação dos fatos, todo experimento. No entanto, Galileu não formulou essa pergunta de maneira puramente platônica. Ao contrário, ele fixou um conceito de Natureza segundo o qual a Natureza é tomada como uma conexão de corpos móveis, de entes cujo caráter fundamental reside na extensão espacial e temporal, sendo que o movimento não é outra coisa senão alteração de lugar no tempo. Por meio dessa determinação fundamental da Natureza, a multiplicidade do ente é imediatamente homogeneizada, isto é, ela assume um mesmo modo de ser no sentido de que a Natureza é determinada de uma maneira uniforme em termos quantitativo-matemáticos tanto em relação ao seu caráter espacial quanto em relação ao seu caráter temporal (HEIDEGGER, 2009, p. 200).

Sobre esse aspecto, Veiga (2011) enfatiza que Galileu foi um protagonista importante para compreender a Física ou a Ciência moderna por meio da visão dos fatos, do experimento e da matematização simbólica. Isso porque a simbologia, do ponto de vista conceitual, criada nessa época, foi decisiva na compreensão da Física Matemática, a qual Klein (1992) tratou significativamente.

Heidegger estudou a matematização no sentido de entender a relação do ente com a totalidade ou universalidade, sendo que essa totalidade são as Leis naturais. Essas Leis naturais, no início da Ciência moderna, foram representadas e depois quantificadas, ou seja, a calculação, a Logística torna-se cada vez mais relevante. A ‘técnica Mecânica’ exige, desde já, a ‘Ciência Matemática da Natureza’ (VEIGA, 2011). A forma moderna de interpretar a Natureza, na época de Galileu, utilizou recursos e instrumentos matemáticos, como disse Galileu:

> A Filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua Matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras, sem eles nós vagamos perdidos dentro de um obscuro labirinto (GALILEU, 1999, p. 46).

Toda espécie de conhecimento de uma forma ou de outra nos coloca diante de situações objetuais reais ou fictícias. Em Heidegger, a região de objetos da Natureza trata de relações entre o Ser e o ente, sendo que Heidegger se preocupa com o Ser. Então, como expressar essas relações? Nesse sentido, Galileu apresenta uma possibilidade por meio da Matemática sendo que, para Heidegger, essa mecanização do ente como prioridade dificulta o entendimento do Ser.

Nesta pesquisa, a pretensão não é apresentar um estudo aprofundado sobre a Filosofia de Husserl e Heidegger, mas apenas apontar aspectos da contemporaneidade da obra desta pesquisa que é 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra' de Jacob Klein, pois, segundo Hopkins (2012), além do estudo histórico dessa produção, Klein preocupou-se também em discutir os mesmos problemas tratados por Husserl e Heidegger: a 'formação/construção de conceitos' na relação do ente com o Ser, na perspectiva da transformação do conceito de número.

Assim, essa questão de formação de conceitos é um problema tanto para Husserl como para Heidegger, no sentido de que, quando certo conceito é formalizado ou registrado, não fica determinado se essa formalização se refere a objetos particulares (o Ser) ou a seu Ser como tal (no sentido de uma estrutura essencial), ou seja, não há uma discussão clara na relação da 'passagem' do particular para o geral, do ponto de vista simbólico.

> No caso de Husserl, seu pensamento (desde o início até o fim) foi direcionado pela convicção de que somente a 'fenomenologia' é capaz de proporcionar fundamento evidente e adequado a *mathesis universalis*, ou seja, a Ciência formalizada do ser que a Matemática e a lógica nos deixaram bem como a lógica formal contemporânea e a Matemática formal equivocadamente (neste ponto de vista) tentou investigar, usando instrumentos puramente mecânicos do cálculo simbólico. Em Heidegger, todo o projeto de obra (*magnum opus*) *Ser e Tempo*, está interessado em um único objetivo: 'deformar' (*Entformalisieren*) o 'conceito formal de fenômeno' e com isso divulgar os verdadeiros fenômenos que porventura permanecerem inutilizados com a formalização dos conceitos (HOPKINS, 2012, p. 6. Tradução nossa).

A obra de Klein investigou a Matemática antiga grega na perspectiva da origem da Álgebra, indo além de um estudo histórico, pois estava interessado em responder questões que, de certa forma, subjazem a resposta dos problemas que cada formalização apresenta na concepção das Filosofias de Husserl e Heidegger. Para Husserl, o problema é como 'restaurar' a integridade do conhecimento que está embebido pela formalização e, para Heidegger, é como despertar novamente a questão do Ser e, por conseguinte, formular e interrogar pela primeira vez o tema da generalização ou da universalização, ou seja, desconstruir a ideia da solução geral ou da *Mathesis Universalis* cartesiana.

Hopkins (2012, p. 7) afirma que a obra de Klein (*Math book)* (1992) fornece uma resposta para esses problemas, quanto à realização da formalização feita

pelos inovadores da Matemática moderna, como Vieta e Descartes, por exemplo, por meio da transformação do conceito de *arithmos* grego para o conceito de número moderno. Diante disso, o ponto de vista de Klein (1992) sugere que uma das características mais notáveis da intencionalidade moderna é a questão da formalização de conceitos que, até então, não eram considerados matemáticos.

No que diz respeito à formalização de conceitos, o estudo de Klein mostra perspectivas de entendimento da formalização tanto do conhecimento grego antigo como do início do conhecimento moderno bem como de sua comparação. Compreende-se a formalização, no sentido de que os conceitos a serem tratados já são conhecidos (Síntese) ou de que o conceito a ser apreendido por meio da formalização não pressupõe que já saibamos de que se trata, ou seja, não sabemos o que estamos calculando, por isso, o 'x' cartesiano torna-se necessário como instrumento conceitual operacional (Análise).

> O pensamento de Husserl pressupõe exatamente isso, entendendo que a unidade característica do conceito geral que compõe o objeto da lógica formal e da Matemática formal, que ele chama de conceito formal vazio de 'algo', tem sua base última na intencionalidade de objetos individuais e na relação intencional que caracteriza a experiência de coisas individuais. A intencionalidade de objetos individuais que, para Husserl, é suposta como sendo um modo de percepção e, portanto, algo que é sempre conhecido – quando adequadamente 'modificado' – para ser capaz de dar conta da unidade da formalidade conceitual que está em questão. Da mesma forma, o pensamento de Heidegger pressupõe a formalização conceitual que é algo que está sempre em questão, isto é, o fato de colocar em discussão a questão básica do ser, ou seja, a questão sobre o significado do ser da entidade em termos do que se refere ao significado do ser geral ou da generalização. Tais questões supõem que já é conhecido de que o ser da entidade que tem um 'significado', isto é, uma estrutura formal de 'inteligibilidade' que é distinto do que referido pela tradição como a 'existência' ou 'coisidade' (*ousia*) da entidade (HOPKINS, 2012, p. 7. Tradução nossa).

A transformação conceitual proposta por Klein (1992) está inserida na relação entre Matemática e Filosofia, no sentido de suas formações básicas pertencentes aos conceitos da Ciência grega antiga e da Ciência Matemática moderna Europeia. Esse estudo histórico não era acessível ao pensamento de Husserl e nem ao de Heidegger (HOPKINS, 2012, p. 8). Nesse sentido, Klein (1992) elegeu, como elemento principal dessa transformação, o conceito de número que tem posição central na teoria do conhecimento tanto na Filosofia da Matemática antiga como na Filosofia da Matemática moderna. Dessa forma, Klein

(1992) tentou responder aos problemas do Ser e do ente numa perspectiva de transformação do conceito de *arithmo* grego antigo para o conceito de número moderno, pois o conceito de número de Platão envolve, de certa forma, o Ser no mundo, numa espécie de estrutura intencional, como, por exemplo, no caso do símbolo ‘4’ – representa quatro entidades, o conceito de quadruplicidade (o Ser - ontologia) e o conceito de quatro objetos quaisquer (o ente - ôntico).

Dependendo de como os filósofos e os sociólogos definem o ser humano, eles indicam o que é, e não é apropriado para o sentido de alienação. Para Husserl, se temos uma Ciência de fatos, o homem é uma máquina de fatos que apenas calcula. Não apenas o Ser humano fica calculando, mas também fica se transformando intelectualmente. O conhecimento transforma a visão da pessoa do mundo e, com isso, transforma a própria pessoa.

> [...] Esse uso do termo (*alienação*) tornou-se corrente na cultura contemporânea, não só na descrição do trabalho operário em certas fases da sociedade capitalista, mas também a propósito da relação entre o homem e as coisas na era tecnológica, pois parece que o predomínio da técnica ‘aliena o homem a si mesmo’ no sentido de que tende a fazer dele a engrenagem de uma máquina [...] (ABBAGNANO, 2007, p. 28).

Alheio a si, é isso que Husserl trata, ou seja, dependendo como você concebe o sujeito humano, a alienação pode significar coisas diferentes. Como na área da educação e da epistemologia, o homem é definido como um Ser pensante, reflexivo e criativo que vive do seu entendimento e de sua compreensão das coisas. Alienação pode significar, por exemplo, se eu transformo o matemático num calculador. Essa é a alegação de Husserl. O simbolismo causa essa alienação. Ao invés de perguntar: o que é número? Como se refere? Onde se encontram? Os alunos aprendem a calcular, aprendem as regras do jogo formal, não se preocupando se fazem sentido. Isso é o que Skemp (1987) chama de pensamento instrumental. O que Husserl e Heidegger alegam é que o simbolismo transforma a Matemática num pensamento instrumental. Klein fez exatamente um estudo sobre os efeitos do simbolismo e o resultado é que, de um lado, é verdade e, de outro lado, não é verdade, pois a intuição também é transformada e o exemplo disso é a Geometria de Descartes e os números imaginários.

A Geometria de Descartes é uma analogia entre duas estruturas: do simbolismo algébrico e dos números e a estrutura do espaço, das grandezas geométricas e suas relações. Os segmentos de retas eram os pressupostos básicos a partir dos quais Descartes pretendia construir toda a sua Geometria e, para realizar isso, começa apresentando a relação entre as operações algébricas com as operações geométricas, pela qual mostra como superar o obstáculo da dimensionalidade, reduzindo todas as grandezas a um segmento de reta.

Klein (1992) concorda com a importância desse processo da simbolização, mas, porém, ele fez um estudo mais aprofundado desse processo por meio da transformação do conceito de *arithmo* da concepção antiga para a moderna, via Aritmética de Diophantus e número como espécie, de Vieta e a Geometria Analítica, de Descartes – a interação entre intuição e sistema operativo dos números e da Álgebra.

A transformação do conceito de *arithmo* do ponto de vista instrumental e operacional de conceitos é um fato mais geral do que a simbolização algébrica. O simbolismo tem papel fundamental, pois é definido em termos de regras. Esse é o motivo de Kant chamar a Matemática de sintético por causa dessa operatividade. Segundo Otte[50] (2013), Kant foi o primeiro a perceber, realmente, o que aconteceu no Renascimento e na época de Descartes, ou seja, Kant viveu quase 200 anos antes de Klein e já indicava o motivo essencial disso. À época de Galileu até Kant, Otte chama de época da racionalidade dicotômica. No século XIX, começa um equilíbrio dos dois lados: receptivo-contemplativo de um lado e operativo-instrumental, do outro. Por isso, Otte nomeia esse período de Complementaridade. A genuína Complementaridade começa no século XIX com Kant. Nesse sentido, podemos dizer que Klein tem razão sobre o papel do simbolismo algébrico, mas o simbolismo é apenas um sintoma de uma transformação de atitude mais profunda na direção do lado operativo dos conceitos aritméticos como, por exemplo, em Stevin e também nos conceitos da Geometria. Porém, este estudo concentra-se no desenvolvimento do conceito de número presente na obra de Klein (1992).

[50] Informação dada pessoalmente no dia 24 de janeiro de 2013.

2.3. Platão e a Matemática na concepção de Jacob Klein

Em Platão, a Matemática aparece de ‘duas maneiras’, isto é, na estrutura dos diálogos e na ontologia do número, porém o foco está na relação entre Aritmética e Logística (calculações) no sentido de compreender os conceitos da Matemática grega antiga, principalmente no que se refere a Platão, presente na parte I da obra de Klein (1992) e nos diálogos platônicos (Mênon, Filebo e Teeteto) para captar quais desses conceitos foram reinterpretados nos séculos XVI e XVII que ajudaram no movimento de transição do interpretativo para representativo, em relação ao Simbolismo Algébrico Moderno.

Os diálogos em Platão caracterizam-se por um método que envolve conversação por meio de afirmações, perguntas, respostas e reflexões que investigam e, com frequência, autoinvestigam. Nessa estrutura de compreensão e ampliação do conhecimento, propõe-se, de início, buscar a ‘verdade’ ou, pelo menos, o consenso. Entretanto essa discussão pode se ‘esgotar’ não alcançando a ‘verdade’ ou o consenso, pois o debate pelo debate é um dos fatores determinantes nos diálogos platônicos.

No decorrer da História, a Matemática despertou e desperta inquietações, no sentido de compreender a dinâmica de seus objetos. Na entrada da Academia de Platão, encontra-se a seguinte frase: ‘não deixem entrar alguém que não tenha conhecimento de Geometria’. Platão desenvolveu uma visão da Matemática em que os objetos, como ‘conjuntos de números’, retas etc., existem e são independentes do sujeito cognoscente. Tais objetos eram descobertos e não construídos ou mesmo inventados pela mente, ou seja, possuem existência fora do espaço e tempo. Nesse caso, para Platão, o estudo da Matemática era perfeito para disciplinar a mente no sentido de buscar verdades eternas. Dessa forma, a experiência trata das coisas como elas aparecem e não como realmente são.

A visão platônica da Matemática pode evidenciar três situações. A primeira é a questão da aplicação: como os objetos abstratos podem se relacionar com os objetos sensíveis? A segunda: o modo como a mente descobre os objetos matemáticos, ou seja, a mente seria formada do mesmo substrato da ‘mente’

universal? A terceira poderia ser ontológica: a necessidade de postular um mundo abstrato. Esse mundo abstrato decorre da necessidade de se estabelecer algo que pudesse ser utilizado como referência fixa às mudanças que as coisas sensíveis sofrem.

Apresenta-se, neste tópico, um estudo dos diálogos platônicos, principalmente em Filebo, Menon e Teeteto, no sentido de capturar a concepção ontológica do número, o conceito de Aritmética e Logística em Platão, bem como a crítica aristotélica sobre a possibilidade da teoria Logística platônica, pois, segundo Klein (1992), são conceitos que estão ligados diretamente à transformação do conceito de número, ocorrida nos séculos XVI e XVII.

Klein (1992), na parte I de sua obra 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra', começa abordando tópicos da literatura Neoplatônica em relação à Aritmética. Entendendo que as concepções Neoplatônicas remetem a Platão, porém não são idênticas com o próprio Platão.

Os resultados da compreensão da Filosofia platônica e Neoplatônica possibilitam entender a Ciência dos números como tendo parte prática e teórica, ou seja, Aritmética teórica e a parte prática, designada pela Logística (Arte de calculação). Isto conduz Klein a perceber que há parte teórica tanto na Aritmética como na Logística. Klein mostra que as disciplinas teóricas (Aritmética *e Logística)* surgem diretamente, por um lado, do ato de contagem e, por outro lado, da calculação. Klein deixa claro, também, que os Neoplatônicos ignoraram o fato de que Platão postulou uma Logística Teórica como análoga à *noética* e, sendo pressuposição para qualquer Arte de calculação, pois essa Logística Teórica é fundamental para toda Aritmética e Logística grega. Portanto, nessa Logística Teórica da Filosofia platônica, Klein fez surgir a interpretação de que o conceito operativo de número está presente na Matemática grega em geral. Esse aspecto operativo (logístico) do número grego transformou, nos séculos XVI e XVII, num conceito simbólico em geral, influenciado reciprocamente pelo avanço da Mecânica como Ciência e não como Arte, no sentido aristotélico.

2.3.1. Aritmética e Logística em Platão

Para tratar da Logística e Aritmética em Platão, começamos discorrendo sobre o significado da disciplina Matemática na época grega antiga. Tendo em mente que Matemática trata daquilo que se pode aprender, apresentamos, na sequência, trechos dos diálogos de Teeteto, Mênon e Filebo, objetivando capturar a estrutura desses diálogos, pois essa estrutura, como método para alcançar a 'verdade', será reinterpretada posteriormente como Análise e, dessa Análise, surge a nova língua, a Álgebra, que é o pensamento relacional. Em Teeteto (146 C ff):

Teeteto: Sou do parecer de que todas as coisas ensinadas por Teodoro são conhecimentos, quais sejam: a Geometria e tudo a que te referiste há pouco, como também a sapataria e as demais Artes do artesão. Isolada ou associativamente, todas essas nada mais são do que conhecimento.

Sócrates: És nobre e generoso, meu amigo, já que, quando te pedem uma coisa, proporcionas muitas, e uma variedade de coisas em lugar de uma simples resposta.

Teeteto: O que queres dizer com isso, Sócrates?

Sócrates: Talvez, nada. Dir-te-ei, porém, o que penso. Quando dizes 'sapataria', tudo a que te referes é a Arte de confeccionar calçados, não é mesmo?

Teeteto: Nada mais do que isso.

Sócrates: E quando dizes 'carpintaria'. Aludes a algo mais do que a Arte de fabricar mobiliário de madeira?

Teeteto: Nada mais do que isso também, nesse caso.

Sócrates: Nos dois casos defines aquilo a que cada forma de conhecimento pertence?

Teeteto: Sim.

Sócrates: Mas não foi isso que te foi perguntado, Teeteto. Não foi solicitado a ti que informaste do que se pode ter conhecimento ou quantos ramos do conhecimento existem, pois não foi nosso intento enumerá-los, mas descobrir o que o próprio conhecimento realmente é.

Teeteto aborda latentemente a teoria do conhecimento a partir de indagações, que são características dos diálogos platônicos. O diálogo sobre o conhecimento inicia-se com Sócrates, abordando o jovem Teeteto com a seguinte pergunta: 'O que é o conhecimento?' A resposta do interlocutor é dada na forma de imagem, ou seja, de instâncias. Teeteto, não explicou a Sócrates o que é o conhecimento, mas apenas forneceu exemplos de conhecimentos, a saber, a Geometria, sapateiro e carpinteiro. Entretanto, o que interessa ao fomentador da discussão é uma resposta que aborde a essência das coisas. Por essência, Sócrates entende 'as coisas em si', isto é, aquilo que define claramente as coisas, de modo a não permitir qualquer dúvida sobre o objeto em estudo. Em tese, podemos afirmar que tal conduta tem raízes na teoria da rememorização.

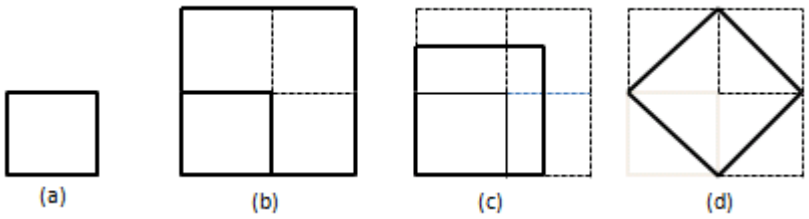
O diálogo de Mênon discute a virtude e determina se é ensinável ou não. Esse diálogo, num determinado momento (80 D-85 B), desemboca na questão da aporia em adquirir conhecimento, pois Sócrates obtém respostas de um jovem escravo de Mênon que nunca tivera estudado Geometria. A ideia, nessa parte do diálogo, é atestar empiricamente que o conhecimento não provém de fonte externa e, sim, de acordo com teoria platônica da reminiscência, por meio do estímulo da memória. Segue um resumo dessa parte do Diálogo.

Men. E de que modo procurarás, Sócrates, aquilo que não sabes absolutamente o que é? Pois, procurarás propondo-te <procurar> que tipo de coisa, entre as coisas que não conheces? Ou, ainda que, no melhor dos casos, a encontres, como saberás que isso <que encontraste> é aquilo que não conhecias?

A resposta é que Sócrates considera aprendizado por meio da rememorização. E, na sequência do diálogo, Sócrates faz uma 'mostração' de sua

tese, denominado interrogatório do escravo. Apresentamos um resumo desse interrogatório. Para isso, observe a figura 05[51]:

Figura 05 - Quadrados: duplicação de área



Sócrates: Reconhece esta figura como sendo a de um quadrado, contendo estas quatro linhas iguais? [figura (a)] Se os lados dessa figura forem 2 pés, então a sua área seria duas vezes dois? E quanto é duas vezes 2 pés? Faz o cálculo e diz.

Escravo: 4, Sócrates.

Sócrates: E não é verdade que pode haver outra figura deste tipo, mas com área duas vezes maior? Qual seria a área desta outra figura, então? Qual seria o lado desta outra figura?

Escravo: Claro que pode haver. A área seria igual a 8 e o lado, evidentemente, seria o dobro do lado desta, isto é, 4 pés.

Neste momento, o escravo comete um ‘erro’ e Sócrates explicita para o leitor que o escravo pensa que sabe a resposta correta. Isso é muito importante no desenvolvimento do diálogo. A seguir, Sócrates comenta também que está apenas fazendo perguntas, ou seja, não está ensinando e sim fazendo o escravo rememorar.

Sócrates: Quer dizer que, para se gerar uma figura de área 8, precisamos dobrar o tamanho do lado, como fazemos nesta nova figura? [figura (b)] Completando o quadrado com o novo lado, não temos um total de quatro quadrados iguais ao anterior? Quer dizer que quatro vezes o quadrado anterior corresponde ao dobro da área?

Escravo: Não, por Zeus!

[51] As figuras dos quadrados foram tiradas da revista do professor de Matemática (RPM) número 77.

Sócrates: Logo, menino, dobrando-se o lado não se duplica, mas, sim, quadruplica a área do quadrado. Então, quatro vezes o novo lado de 4 pés corresponde a uma área de 16. Assim, pergunto novamente: qual será o lado do quadrado de área igual a 8? Sabemos que tal quadrado tem o dobro da área do quadrado original de lado 2 pés e metade da área do novo quadrado de lado 4 pés. Logo, o lado do quadrado de área 8 deve ser maior do que 2 pés e menor do que 4 pés, não é isso? Tenta, pois, me dizer a medida do lado do quadrado de área 8.

Escravo: 3 pés?! (O escravo já não demonstra certeza de sua resposta).

Sócrates: Se for realmente 3 pés, basta acrescentarmos, ao lado inicial de 2 pés, a metade do que havíamos acrescentado antes. Correto? [figura (c)] Quanto é isso? É igual a 8?

Escravo: A área é 9 e não 8. (Neste momento, a aporia se instala e Sócrates considera a aporia essencial para que possa começar a adquirir o conhecimento).

Sócrates: Logo, o quadrado de área 8 também não são 3 pés. Qual é então o lado do quadrado de área 8?

Escravo: Por Zeus, Sócrates, eu não sei!

Podemos perceber que essa dificuldade, impasse ou mesmo uma constatação de que o problema não tem saída, é para Platão muito importante, pois, se bem explorada, pode conduzir à resolução do problema. E isso ocorre no decorrer do diálogo.

Sócrates: Vamos voltar ao quadrado de lado 4 pés que engloba 4 quadrados originais. Se tomarmos uma linha (diagonal) unindo os cantos opostos, não dividimos ao meio a área de cada um dos quadrados de lado iguais a 2 pés? [figura (d)] E estas 4 novas linhas não são iguais e formam um novo quadrado? Qual é então a área desse novo quadrado? Não seria a metade da área total do quadrado de lado 4 pés? Quanto é isso?

Escravo: Sim, as linhas são iguais e a área do quadrado resultante é quatro vezes a metade da área de cada um dos quadrados de lado 2 pés, isto é, quatro vezes a metade de 4, o que é igual a 8.

Sócrates: Assim, descobrimos o lado do quadrado de área 8: é esta diagonal que traçamos em cada quadrado de lado 2 pés.

Escravo: Perfeitamente, Sócrates.

O diálogo mostra que o jovem escravo reencontrou a solução, ou seja, indicou, por meio de desenho, o tamanho do lado desse quadrado. Agora, como fica a representação desse lado? Como operar com essa indicação sem uma representação? Entretanto, esse argumento, nesta pesquisa, objetiva discutir a questão da estrutura do diálogo e a questão dos incomensuráveis no sentido de sua importância física. Há, segundo Klein (1992, p. 122), tensão entre método e objeto na Matemática grega antiga, pois a medida do lado desse quadrado encontrado pelo escravo é incomensurável com a medida do lado, e isso foi um desafio na época de Platão. Como pode existir um número inexprimível? Platão sempre falava que o número é par ou ímpar, mas essa medida do lado do quadrado encontrado pelo escravo, não é par e nem ímpar.

Em Filebo, que trata do prazer e conhecimento, num determinado momento do diálogo (55 C-57 E), após examinar o prazer de forma completa, Sócrates propõe discutir entendimento e conhecimento, dizendo que o conhecimento se divide em duas classes: a das Artes Mecânicas (produtivas) e a que entende com a educação e a cultura (à nutrição), decidindo, para recomeço de conversa que, nas Artes Mecânicas produtivas (Artes manuais), uma parte depende mais do conhecimento e outra parte depende menos, estabelecendo que a primeira seja mais pura que a segunda. Partindo disso, Sócrates afirma que, se de todas as Artes fossem subtraídas a Aritmética, as Ciências de medição e pesagem, tudo o que sobra disso, a bem dizer, não terá nenhum valor (é insignificante).

Diante dessa discussão, Sócrates sugere dividir a Arte em duas classes: a música, que é menos precisa e a arquitetônica (construção), que é mais exata. Dentre essas mais exatas, faz parte a Aritmética. E sobre a Aritmética, Protarco pergunta: há Aritmética popular e outra filosófica? De que modo distingui-la? A diferença não é pequena, diz Sócrates, pois inclue, no mesmo cálculo, unidades numéricas desiguais, como, por exemplo: dois bois, dois exércitos, duas coisas pequeníssimas e duas coisas muito grandes. Dessa forma, surge o questionamento feito por Sócrates – a Arte de calcular e a de medir, de um lado e,

de outro lado, a Geometria e o cálculo para uso dos filósofos são duas ou uma? Sócrates diz que há duas Aritméticas, duas Artes de medir e muitas outras dependentes dessas – todas de dupla beleza. Enfatiza, ainda, que o verdadeiro conhecimento é o que se ocupa com o ser, com a realidade. Acrescenta Sócrates dizendo que nunca procurou saber que Arte ou conhecimento tem primazia sobre o outro, quanto à grandeza, excelência e utilidade e, sim, a suprema verdade por meio da *dialética*.

Tratar da Logística e Aritmética, em Platão, passa pelo entendimento da estrutura dos diálogos, pois será nessa forma de abordar o conhecimento que percebemos os conceitos.

> Vieta disse que há, na Matemática, um procedimento especial para descoberta, 'uma certa maneira de investigar a verdade' (*veritatis inquirendae via quaedam*) que é tão reivindicada, e que foi primeiro descoberto por Platão. A esse modo de procura da verdade Theon de Alexandria (335-405) chamou 'Análise', definindo-a como um processo em que se supõe aceite o que é procurado e, trabalhando através de consequências lógicas dessa suposição, se chega à verdade. Isto é, contrário à 'síntese', em que se supõe o que já é conhecido e, trabalhando através das consequências dessa suposição, se chega ao entendimento do que é procurado (KLEIN, 1992, p. 154 e 155. Tradução nossa).

Portanto, a dialética platônica está diretamente relacionada com a Análise que, por sua vez, propiciou, nas mãos de Vieta e Descartes, intermediada pelo método de Pappus e também, por meio da Aritmética de Diophantus, a criação da *Mathesis Universalis* nos séculos XVI e XVII. É essa estrutura, ou seja, a maneira de procurar a 'verdade' em Platão que nos interessa, pois isso está diretamente associado aos aspectos relacionais do Pensamento Algébrico fundamentado no conceito de Complementaridade entre métodos e objetos do pensamento Otteano.

No livro Histórias das Matemáticas na Antiguidade, de Fernando de Almeida Loureiro e Vasconcelos, há um trecho que diz:

> Em oposição à *Aritmética* que trata teoricamente das propriedades abstracta dos números, *Gémino*[52] chama *logística*, ao ensino que respeita à resolução de problemas sobre números concretos: '*a logística é a teoria que trata das coisas enumeráveis e não dos números'*. Platão

[52] Gémino (século I a.C) – separou a Matemática em duas partes: mental (pura, Aritmética (incluía a teoria dos números)) e Geometria; outra parte, as observáveis (aplicada – Mecânica, Astronomia, Óptica, Geodesia, Harmonia musical e Logística).

> considerava as operações elementares do cálculo para fora do quadro dos cursos de Matemáticas, e recomenda no livro VII das leis, que, a exemplo dos egípcios, se distribuíam às crianças maçãs, grinaldas, garrafinhas e favos de mel, ensinando-as a resolver problemas sobre *números* relativos a estas coisas, exercitando-as assim nas operações elementares de cálculo (VASCONCELOS, 2009, p. 179-180).

E, no livro, 'Uma História da Matemática' de Cajori (2007, p. 88), temos:

> Os matemáticos gregos tinham por hábito fazer distinção entre a Ciência dos números e a Arte do cálculo. A primeira, eles chamavam de Aritmética, e a última de logística. Esta distinção entre as duas eram muito natural e apropriada. A diferença entre elas era tão marcante como entre teoria e prática. Para os sofistas, a Arte de calcular era o estudo preferido. Platão, por outro lado, deu considerável atenção a Aritmética filosófica, mas tinha o cálculo como uma coisa vulgar e infantil.

Essa afirmação de Cajori e de Vasconcelos indica uma espécie de 'separação' entre Aritmética e Logística, porém na interpretação de Klein (1992) há aspectos teóricos na Logística também. Isso evidencia a importância do conceito de complementaridade Otteano no sentido de não polarizar o entendimento nem no sujeito e nem no objeto, e, sim na atividade relacional.

Klein (1992, p. 6 e 7. Tradução nossa) relata:

> Para Platão, a 'Logística teórica' tem relação com a 'Logística prática'. Essa relação é similar ao que a 'Aritmética teórica' tem com a 'Aritmética prática'. A 'Logística e Aritmética teórica' têm como objetos - em contraste com as correspondentes Artes práticas (Aritmética prática e Logística prática) - coisas não experimentadas por meio dos sentidos, mas unidades 'puras' indivisíveis que são completamente uniformes entre si e que podem ser capturadas como tal apenas no pensamento. Ambas as disciplinas teóricas decorrem diretamente, por um lado, da *contagem*, e por outro da *calculação*, ou seja, do ato de relacionar os números uns com os outros, tanto no sentido de contar como de calcular. A tarefa das disciplinas teóricas é reduzir essas atividades 'práticas' para suas pressuposições (premissas) verdadeiras. Os comentários Neoplatônicos sobre as definições platônicas da Aritmética e da Logística em *Charmides e* em *Górgias* mostram que, nessa 'redução', a Aritmética está preocupada com 'tipos' de números, enquanto Logística está preocupada com o seu 'material' (KLEIN, 1992, p. 6 e 7) (Tradução nossa).

As interpretações da Aritmética e Logística em Platão podem sugerir oposição, principalmente, nos Neoplatônicos, como Gémino, mas, há uma espécie de 'ente' organizador que busca a verdade por meio da dialética, pois, na época de Platão, havia uma preocupação no entendimento do Ser, ou seja, da essência dos objetos.

O conceito de número, nessa época, era tratado como sendo um número de coisas definidas de objeto; obviamente que isso tem uma intencionalidade

voltada tanto para aspectos ontológicos por haver uma dependência do objeto, como para um ente puro e universal, ou seja, trata de imagens do mundo. Para Platão, não existe nem ideias e nem conceitos sem objetos. Tanto a Aritmética como a Logística têm os lados objetivo e operacional. Não havia divisão, na época de Platão, entre lado descritivo e operacional. Todos os conceitos para Platão eram formados por meio da abstração, ou seja, há parte teórica tanto na Aritmética como na Logística.

Há intensa distinção entre os aspectos *noético* (objeto do pensamento, aquilo que é pensado) e *aistheta* (objetos do sentido) da Matemática nos Neoplatônicos. Essa distinção aparece de forma evidente no momento em que se discutem as interpretações de Logística e Aritmética. É importante ressaltar que essa concepção 'díspare' entre Logística e Aritmética está, segundo (KLEIN 1992, p. 11), fundamentada em: (1) um comentário de Proclus em Euclides, no qual diz que a habilidade de realizar cálculos está relacionada com os números em si e, por sua vez, estuda-os nos objetos do sentido; (2) num comentário em *Charmides* (165 E), citado por *Geminus (Gémino)*, no qual tratou essa distinção de forma bem específica, dizendo que a Logística se preocupa com contagem de coisas e não com números; (3) nos comentários de Olympiodorus sobre Górgias (450 D e 451 A-C), bem como em comentários dessa mesma passagem, em que o contraste é apresentado na forma; a Aritmética em si se preocupa com os tipos de números e a Logística com o seu material; (IV) nos comentários anônimos dessa mesma passagem de Górgias em que a Logística trabalha com quantidades determinadas, com a multiplicação e divisão, preocupando-se com o seu material, ou seja, realiza operações com sua quantidade e não com seu tipo de número em si.

No aspecto noético da Matemática, há dois ramos: (I) magnitudes contínuas – linhas, áreas e sólidos e (II) os números discretos (um, dois, três, ...), correspondendo à Geometria e Aritmética, respectivamente. Neste aspecto, encontra-se a Astronomia. Em relação ao aspecto *aistheta* - estuda a mensuração (tamanho, contagem), ou seja, medida em geral; aqui entra a *Logística* como Arte de calculação e, mais, a música, óptica e Mecânica. Entretanto, essas distinções têm origem em Platão, contudo são interpretações, pois, mesmo em Platão, essas

diferenciações não são fixas. Esse fato pode ser evidenciado em Filebo (55 C-57 E).

Compreender a relação entre Aritmética e Logística corrobora no entendimento do fato de que os procedimentos de resolução da *Aritmética* de Diophantus são tratados como teoria Logística. Isso é importante, pois essa 'Arte' de calcular está diretamente conjugada com a *Mathesis Universalis* de Vieta no século XVI, ou seja, a Logística como calculação Neoplatônica, no contexto histórico dos séculos XVI e XVII, nas mãos dos modernos dessa época, contribuiu para o início da consolidação do aspecto operativo dos conceitos matemáticos, evidenciando a 'polarização'[53] na técnica do ponto de vista de método em relação à *episteme*.

Em Platão, segundo (KLEIN, 1992, p. 17 ff), a Aritmética ou 'Arte dos números' trata de todos os números possíveis, ou seja, dos números que usamos para contar determinada quantidade. Isso significa que, para contar, precisamos saber a diferença entre dois e três (República VII, 522 C). Contudo, além de contar, temos o hábito de operar (multiplicar, dividir) com essas quantidades e todas essas multiplicidades de operações/relações dizem respeito às 'Artes de calculações', ou seja, à Logística. A Logística não é meramente a Arte de calculação no sentido de 'operações' com números, isto é, uma Arte de ensinar procedimentos para aplicar na multiplicação, divisão, extração de raízes e na solução de problemas verbais (KLEIN, 1992, p. 19. Tradução nossa).

Para Platão, 'contagem' e 'calculação' ocorrem simultaneamente (República VII 522 E, 522 C, 525 A). Quando contamos, calculamos ou realizamos qualquer tipo de operação, na verdade, estamos estabelecendo relações. Nesse sentido, a oposição entre Logística e Aritmética, presente nos Neoplatônicos, não coaduna com conceitos platônicos, embora seja dependente, em relação à Aritmética e Logística.

Esse liame entre Aritmética e Logística pode ser interpretado a partir do conceito de Complementaridade do pensamento Otteano, pois o aspecto conceitual da Aritmética (intensão) e os objetos de calculação (extensão) surgem

[53] Essa polarização na técnica e no método que Husserl criticou e que Klein decidiu estudar com profundidade.

no interior de uma atividade relacional estabelecida entre a mente e os objetos criados na mente do sujeito. Este fato complementar relacional sem ‘oposição’ entre Logística e Aritmética é essencial na compreensão dos objetos de estudo da Matemática que culminaram nos séculos XVI e XVII na instrumentalização, na operacionalização dos conceitos. Nesse sentido, a interpretação feita por Vieta, referente à Aritmética pura (que trata das unidades puras, por exemplo, um, dois, três...), Aritmética prática (que trata das operações com essas unidades, por exemplo 2+3), Logística teórica (que trata das unidades de calculação, por exemplo, 1km, 1 litro) e da Logística prática (que trata da calculação prática em geral) corroborou na criação do conceito de ‘espécie’ de Vieta, que é um elo fundamental na elaboração do ‘x’ de Descartes que, por sua vez, faz parte do processo de consolidação do ‘início’ do simbolismo Algébrico Moderno.

Considera-se que Nicomachus (~100 d.C.), Theon de Smyrna (~130 d.C.) e Domninus são os primeiros Neoplatônicos, pois viveram no início da era Cristã. Segundo Klein (1992, p. 27), Nicomachus, em seu texto sobre introdução à Aritmética, disse: “depois de ter dado tratamento preliminar à quantidade, vamos perseguir suas relações”. Essas relações propostas por Nicomachus são tratadas como razões Aritméticas, indicando igualdades e desigualdades como, por exemplo, quatro por três, sete por três, bem como seus inversos. Theon de Smyrna, segundo Klein (1992, p. 28), procura manter o reino da quantidade separado, isto é, ele não faz menção direta às diferenças entre os números considerados em si mesmos e os que estão em relação ao outro. Em relação a Domninus, contemporâneo de Proclus, enfatiza que são os tipos de números estudados separadamente, primeiro por si só e depois relacionados com o outro (KLEIN, p. 32).

Então, há uma espécie de tensão entre a Aritmética teórica (números tratados por si mesmos) e a Aritmética aplicada (números tratados do ponto de vista de relação com outros números). As aplicações dessas relações encontram-se, de forma mais explícita, na ‘teoria’ de intervalos musicais, visando à harmonia, de modo que as razões estabelecidas podem ser expressas na linguagem algébrica atual da forma de igualdade (x:x), superparticular ((x+1)/x), superpartiente ((x+m)/x), onde m não é fator de x, ou seja, m e x são coprimos

(primos entre si), múltiplo (nx/x), múltiplo superparticular ((nx+1)/x) e múltiplo superpartiente ((nx+m)/x) onde m e n são primos entre si. Nessas relações, há tanto a presença dos números por si mesmos como relacionados com outros.

Essa característica de expressar e capturar a estética dos tons por meio de números tem, obviamente, raízes platônicas, visto que, na sua Logística, está presente o estudo de relações entre números que, neste caso, referem-se a 'calculações' e representações da harmonia musical por meio da Aritmética 'pura'.

Klein (1992, p. 37) apresenta questões, no que diz respeito às relações entre números, no sentido de entender os motivos pelos quais Platão postulou a teoria Logística. Nessa empreitada, caracterizar os meios e as proporções como teoria Logística é o desafio dos intérpretes de Platão. A dificuldade, segundo Klein (1992, p. 39), é a correspondência das unidades, a saber: por um lado, há as unidades 'puras' e, portanto, indivisíveis, imutáveis e, por outro lado, as unidades de 'calculação', ou seja, unidades corpóreas que são divisíveis enquanto objetos do sentido; por exemplo, um centavo de real é uma unidade monetária indivisível, mas o objeto referente a essa unidade é divisível. Essa unidade puramente noética que é capturada pelo pensamento é indivisível.

As frações e, em seguida, as proporções trabalham com relações de unidades particionadas que dizem respeito às unidades corpóreas, contudo estão diretamente conectadas às relações estritamente *noéticas*. Além disso, a descoberta da incomensurabilidade entre razões provocou ampliação do conceito de razão, surgindo a teoria geral das proporções para tratar de segmentos incomensuráveis (Eudoxus[54]) que vão além de coleções e contagens. As razões e proporções possibilitaram comparações entre grandezas (linhas, áreas e volumes) conhecidas ou não. Obviamente que há, nesse período, tensão entre monas[55] e unidades divisíveis.

No mundo antigo, a mente e corpo são inseparáveis e, no início do pensamento moderno, surge a Ciência universal, a *Mathesis Universalis*. Essa

[54] Segundo Ávila (2005, p. 54), a definição de Eudoxus diz: dadas quatro grandezas da mesma espécie, A, B, C e D (segmentos, áreas e volumes), diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números naturais m e n, se tenha $nA>mB \Leftrightarrow nC>mD$; $nA=mB \Leftrightarrow nC=mD$ e $nA<mB \Leftrightarrow nC<mD$ ou de de forma geral $nA>=<mB$, então $nC>=<mD$.

[55] Segundo Leibniz (2009, p.43), monas é uma palavra grega que significa unidade ou aquilo que é único.

ideia já estava presente no comentário que Proclus fez sobre o quinto livro dos *Elementos* de Euclides. Proclus disse que a teoria de proporções de Eudoxus se refere a uma Ciência Matemática ‘geral’ que não se aplica apenas a números e figuras, mas a relações e proporções entre objetos matemáticos ‘gerais’ (KLEIN, 1985, p. 58). Barocius, em 1560, traduziu para o Latim o livro de Proclus e escreveu, sobre essa fala, numa nota de rodapé: ‘divina Ciência’ (KLEIN, 1985. p. 59). Isso evidencia o fato de que a teoria das proporções de Eudoxus foi combinada com a Aritmética de Diophantus a qual continha resoluções de equações do primeiro e segundo graus. De forma que essa teoria torna similar a teoria geral das equações, designada como Ciência universal (*Mathesis Universalis*).

Esse aspecto de calculação por meio de razões e proporções, no contexto de consonância e dissonância de intervalos musicais bem como no contexto de segmentos, áreas e volumes da Matemática grega, de certa forma, é mais um elemento promovedor de estímulo no que diz respeito ao tratamento simbólico de quantidades desconhecidas, surgidas nos séculos XVI e XVII.

A noção do conceito de número geral que está implícita na teoria das proporções tratadas como Logística e nos procedimentos de Diophantus nas mãos dos modernos, como Vieta, por exemplo, ‘ganhou’ característica de ‘espécie’ que culmina com o ‘x’ de Descartes. Nesse contexto, está a mudança conceitual do ‘número’ como *episteme* para ‘número’ como técnica.

Klein (1992, p. 46) expõe que não se pode perder de vista, quando estamos tentando compreender o significado de *arithmos*, o fato de que esse conceito está diretamente ligado à contagem do número de coisas, ou seja, *arithmos* significa um número de objetos definidos. Em Teeteto (198 A-C): Sócrates: e um tal homem poderia proceder, quer contando para si os próprios números, quer contando qualquer objeto externo que possua número? Teeteto: certamente. Então, *arithmos* indica, em cada caso, um número para definir coisas. Como existem infinitas coisas e, portanto, há diferenças de tipos de coisas, por exemplo, 10 cavalos e 10 gatos têm o mesmo *arithmo*, mas o tipo presente na contagem, ou seja, as unidades de contagem têm naturezas diferentes. Esse aspecto também é evidenciado no momento em que Platão trata de números em

República (525 D), afirmando que há corpos visíveis e tangíveis, isto é, o *arithmo* está relacionado a características específicas do Ser.

Entretanto, podemos relacionar o número 'puro' 10 (não especificado) com 10 gatos (que está claramente especificado) e isso pode ser feito de forma infinita, ou seja, há tantos especificados quanto quisermos. Portanto, na concepção platônica, há correspondência sobrejetora complementar entre a Aritmética científica (pura) com o conhecimento prático (Logística) no sentido de que os objetos contados e/ou medidos necessitam de uma espécie de estrutura organizacional na mente do sujeito que lhe permite associá-los aos aspectos *noéticos* dos *arithmos*. Segundo Klein (1992, p. 60. Tradução nossa), há compreensão comum entre a Aritmética e Logística, visto que:

> Aritmética lida com números que apresentam semelhanças com a unidade que está enraizada na unidade de certos *eidos,* contudo este fato, usualmente, permanece oculto para a pessoa que está imersa na atividade prática de contagem. Como disciplina teórica, no mínimo, a Aritmética estuda cada quantidade e cada multiplicidade de mônadas que cai sob um particular *eidos*, somente indiretamente. 'Logística' por outro lado, seja prática ou teórica, objetiva a necessidade – na medida que está preocupada com as relações mútuas dos números – diretamente da 'quantidade', da multiplicidade das coisas que estão em cada caso relacionados ou computados um com outro, isto é, o material que subjaz cada relação ou calculação.

Na definição Platônica de Logística, não está clara a determinação de que o material do *arithmos* pertence ao sensível ou é puramente noético. Isso acaba assegurando a universalização da definição. Podemos dizer que o aspecto teórico da Aritmética se sobrepõe ao aspecto prático, evidenciando a polarização no sujeito; contudo, há necessidade de atividades práticas para desencadear o processo de associação entre a *noética* com a *aistheta*. Nesse aspecto, a noção de Complementaridade torna-se necessária no sentido de ampliar o entendimento da Aritmética e Logística. Essa associação de aspectos *noéticos* e *aistheta* do conceito de *arithmos,* de certa forma, indica o tratamento do conceito de número tendo aspecto genérico, tanto no que diz respeito ao *arithmo* em si como nas multiplicidades de suas especificidades.

Sobre a relação problemática fundamental que há na Matemática grega no que diz respeito à Filosofia pitagórica e platônica, Klein (1992) começa tratando do ponto de vista geral cosmológico matemático pitagórico, evidenciando sua conexão com o conceito de *arithmos* que está vinculado à habilidade de contar e

calcular. Contudo, essa habilidade é a abordagem tanto da Aritmética ‘pura’ como da Logística está sempre condicionada às atividades da percepção. Porém, a tentativa pitagórica de ordenação aritmológica de todos os seres é repetida por Platão em seu reino das ideias em si (KLEIN, p. 8).

Na concepção platônica, segundo Klein (1992, p. vii e viii), os aspectos *noéticos* dizem respeito ao objeto do pensamento – aquilo que é pensado; a *dianóia* trata da faculdade e atividade do pensamento, já a *aistheta* evidencia o objeto do sentido. Além disso, na Matemática grega, o *arithmo* está relacionado a objetos sensíveis, designando aspectos de medida linear, área e volume, bem como comparações por meio de relações desses três elementos presentes na Natureza, como a teoria das proporções de Eudoxus.

> O fato de sermos capazes de contar uma multiplicidade definida de objetos do sentido está fundamentado na existência de mônadas ‘não sensíveis’ que podem ser unidas para formar um número em questão, é o que o nosso pensamento, nossa *dianóia*, *realmente* pretende quando conta ou calcula tais coisas (KLEIN, 1992, p. 71. Tradução nossa).

Os objetos da dianóia, segundo Klein (1992, p. 76), chegam aos sentidos por meio de comparações numa acepção de relacionar o ‘um’ com ‘muitos’ e, portanto, o ‘outro’ com ‘outros’. Há, assim, uma espécie de exame contínuo feito pela mente motivada pela percepção, de forma que o objeto do sentido subjaz ao objeto do pensamento. Nesse sentido, a dianóia não se refere a um Ser como tal, contudo, procura englobar um conjunto de seres, sendo que cada elemento desse conjunto é distinto e, assim, também a imagem dos objetos *dianoéticos*.

> Aristóteles em sua *Methaphysics* (A 6, 987 b 14 ff., e N 3, 1090 b 35 f.) de acordo com Klein (1992, p. 91. Tradução nossa) relata que há três tipos de *arithmos:* (1) os *arithmo*s eidéticos – número como ideia; (2) os *arithmos aisthetos* - números sensíveis e ‘entre’ estes o (3), os arithmos *matematikos* ou *monádikos* – números monádicos ou matemáticos que compartilham com o primeiro a ‘pureza’ e ‘imutabilidade’ e com o segundo sua multiplicidade e reprodutividade.

Portanto, os *arithmos* eidéticos, na concepção platônica, podem tornar possível, em nosso mundo, algo da Natureza, permitindo, por sua vez, a ‘fundamentação’ da calculação e da contagem, pois esse *arithmo* eidético indica várias imagens em contextos diferentes e, também, similares; contudo, isso depende dos objetos sensíveis. Não há unilateralidade excessiva, mas possibilidade de Complementaridade, pois sabemos que a ideia está no sujeito

pensante, que as imagens são cópias imperfeitas das ideias, que os números matemáticos são propedêuticos à dialética.

Temos, portanto, de um lado, a *episteme,* formada pela *dianóia* e pela *noética*, na qual os números 'puros' ou a *eide* bem como suas relações (teoria geral das proporções) se fazem presentes e, por outro lado, a *aistheta* (técnica) que trata das relações (proporções práticas, envolvendo medidas de objetos sensíveis ou mesmo comparações de intervalos musicais em busca da harmonia).

Nos séculos XVI e XVII, o *arithmo* grego antigo começa a ser discutido como instrumento noutra intencionalidade, caracterizando o início do tratamento do número como conceito geral, motivado pela Arte de calculação e pelo desenvolvimento da Mecânica.

A concepção de *arithmos* eidéticos, no sentido de estar separado da percepção, é a base da Matemática em Platão que, por sua vez, é criticado por Aristóteles visto que, segundo Klein (1992, p. 8), Aristóteles mostra que as unidades 'puras' são simplesmente uma 'redução' realizada no pensamento que transforma tudo que é contável em material 'neutro'.

A Matemática para Aristóteles, segundo Klein (1992, p. 104), adquire o seu ser, pela 'abstração', isso significa que o seu modo de ser surge do próprio ser por meio de desconsideração de determinados atributos de um objeto em questão. Nessa desconsideração, os objetos do sentido vão desaparecendo, tornando-se corpos e, se esse processo continuar até que tudo que é sensível seja retirado, fica então apenas o objeto em questão (quantos?). Se essa redução prosseguir ainda mais, chegará a mônadas 'neutras'. É nesse aspecto que os objetos matemáticos dependem da percepção.

Portanto, a concepção ontológica da Matemática de Aristóteles, segundo Klein (1992, p. 110), especialmente a que trata de números 'puros', influenciou o desenvolvimento da Ciência Matemática, pois o conceito de *eidos* já não é compreendido como estruturas que fornecem articulações no reino dos números, mas, a partir de então, é derivado do sentido (*Methapysics* Z 4, 1030 a 18-27), possibilitando entendimento de que as unidades 'puras' fossem utilizadas apenas como 'unidades de medição'. Isso é importante, pois, como medida, são

indivisíveis e, portanto, reduzidas a qualquer contexto. Essa característica de medida das unidades e das monas, no processo de contagem e calculação aristotélica, suscita a teoria e prática Logística.

> *A crítica óbvia de Aristóteles a essa dificuldade*, mostra que a 'indivisibilidade' não decorre das *monas* como *hen* (único) autosubsistente, mas pela virtude do *caráter de medição* de qualquer unidade, seja de natureza *aistheta* ou *noética*. Somente quando a crítica aristotélica começou a produzir efeitos numa série de Ciências 'aplicadas', tal como foi cultivado na escola de Alexandria, pôde ser justificado como *Ciência*s (cf. *Physics* B 2, 194 a 7 ff.). A *Métrica* de Heron da Alexandria, por exemplo, começou a partir da seguinte observação: 'Então, a fim de não ter que nomear o pé, côvados ou partes em cada medição, vamos expor nossos resultados numéricos [reduzido a indiferentes partes] como *mônadas*, pois isso fica aberto para qualquer um substituí-lo por qualquer medida desejada'. (Schöne, *Opera*, III, A *Prooem*. 6, 4 ff.) (KLEIN, 1992, p. 112. Tradução nossa).

A partir da crítica aristotélica, a teoria Logística platônica ganha 'corpo', pois a contagem, a calculação e a teoria das proporções, bem como a geometrização da Matemática grega, estão inseridas totalmente num contexto teórico-logístico e aritmético. Por um lado, para Klein (1992), a Aritmética e Logística estão enraizados na Arte correta de contagens, no sentido de que suas unidades são quantidades definidas de objetos e quantidades em geral e, por outro lado, suas diferenças estão no fato de que a Logística se envolve com operações com quantidades definidas e indefinidas (número como símbolo em geral), isto é, uma Arte de ensinar procedimentos para serem aplicados nas operações bem como na resolução de problemas do cotidiano.

Pode-se afirmar que essa característica de medição presente na *Métrica* de Heron da Alexandria é o elemento que ajudou a compreender a influência da transformação do conceito de número para construção de instrumentos mecânicos nos séculos XVI e XVII, pois surge noutra intencionalidade que é a associação desse conceito com símbolo, do ponto de vista representativo (símbolo geral), isto é, passa a ser utilizada como símbolos de operações – calculações.

Capítulo III

A transformação estrutural ocorrida nos séculos XVI e XVII em relação à forma de abordar os conceitos matemáticos na perspectiva de Jacob Klein

> Na Antiguidade, realmente a letra substitui um número qualquer [...], mas somente onde se supõe colocado; ela não simboliza o valor e não se presta a operações.
>
> Jacob Klein (1992)

Na introdução de sua obra, Klein (1992) afirma que a criação do simbolismo algébrico teve significado decisivo na consolidação da Física Matemática moderna; contudo, houve transformações mútuas, ou seja, a simbolização do ponto de vista operacional teve influência das interpretações dos fenômenos naturais, pois os símbolos, na forma de equações, foram usados para realizar pesquisas, como a resolução de equações e descrição Matemática do movimento. Este capítulo é dedicado ao tratamento de fatos da parte II da obra de Klein (1992), bem como de textos históricos nos quais são suscitados temas que possibilitam perceber a transformação no conceito de número.

O processo de construção de conceitos, no início da simbolização algébrica, tem características peculiares. Atualmente, escrevemos e operacionalizamos, com 'naturalidade', expressões algébricas literais da forma $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *e* $ax^2 + bx + c = 0$, mas houve um esforço considerável para compreender os aspectos dessa linguagem simbólica. O final do século XVII é considerado como o último estágio desse desenvolvimento (KLEIN, 1985). Apesar de os gregos antigos terem alto grau de conhecimento, eles não conseguiram avançar no que diz respeito aos procedimentos do pensamento algébrico simbólico. A notação algébrica num contexto da concepção

da Física Matemática envolve pressuposto totalmente novo de pensamento em relação à manipulação de conceitos.

A linguagem algébrica no contexto da Física Matemática não é apenas instrumental e técnica. É um equívoco acreditar que podemos traduzir os teoremas da Física Matemática na linguagem Matemática usada pelos físicos apenas como instrumentos utilizados para apresentar, mais facilmente, os seus resultados. O método matemático é inseparável da natureza dessa Ciência. Klein (1985, p. 61) aponta três situações para ilustrar a transição no processo de construção de conceitos: i) cinco coelhos e seis coelhos totalizam onze coelhos, ii) cinco quantidades desconhecidas e o número seis totalizam dezesseis e iii) ax+b=c.

A situação ii) é similar às equações encontradas na Aritmética de Diophantus e a situação III) evidencia a equação na *Mathesi Universalis*. A transição de i) para ii) pode ser descrita como transição de números concretos para números abstratos visto que o número seis é abstraído de qualquer grupo de seis objetos (abstração aristotélica).

A Transição do segundo para o terceiro não pode ser descrita simplesmente como uma abstração de grau maior. A passagem do número aritmético ‘5’ para o coeficiente simbólico ‘a’ pode ser compreendida como um tipo particular de abstração com características especiais de generalização. Isso porque os números (uso natural – gregos antigos) significam números inteiros que pertencem à primeira classe de conceitos (conceitos de primeira intenção). Se eu disser que numa sala há 4 cadeiras ou um número determinado de cadeiras, isso significa que primeiro eu indico as cadeiras que estão na sala e depois a quantidade de forma precisa ou não. Isto é, o símbolo estava ‘colado’ ao objeto.

O número seis, para os gregos, antigos significava uma aglomeração definida de unidades neutras chamadas de unidades puras. Qualquer número aritmético é abstraído, a partir da correspondência de uma multiplicidade de coisas concretas. Por isso, os gregos antigos não conceberam um número de coisas indefinidas com o símbolo ‘a’, pois havia uma correspondência definida.

Na expressão $a^2 + 2ab + b^2$, a letra ‘a’ pode assumir qualquer valor, inclusive, os valores do tipo dos gregos antigos: ‘a’ pode ser 4, 100 ou 200, mas não é. Portanto, ‘a’ não indica determinado objeto, ou seja, unidades. Indica um conceito de número como multiplicidade. Por isso, ‘a’ denota conceitos de segunda classe (segunda intenção), isto é, conceitos que são aplicados não a objetos individuais, mas ao conceito em si. Na verdade, calculamos com os números algébricos da mesma forma como calculamos com os números da Aritmética.

No processo de pensamento algébrico, identificamos conceitos de primeira intenção com conceitos de segunda intenção. Por isso, há necessidade do símbolo, pois não operacionalizamos frases. O símbolo num contexto é, simplesmente, um conceito de segunda intenção, interpretado como um conceito de primeira intenção.

A abstração simbólica teve origem no entendimento do desconhecido como concebido ou como dado e, também, na multiplicidade definida de uma quantidade, produzindo a formalização de conceitos dos números em geral e isso não envolve a percepção de objetos individuais do mundo circundante. Então, o tipo peculiar de abstração da Álgebra é a abstração simbólica. Isso é um tipo de generalização que está na ideia da *Mathesis Universalis* e, por conseguinte, faz-se presente na Física Matemática e nas Ciências Naturais.

Os principais aspectos da *Mathesis Universalis* são: o caráter de Arte como método para buscar a verdade e o seu funcionamento por meio da abstração simbólica. Isso significa que há uma Complementaridade entre esses dois aspectos, no sentido da relação símbolo/objeto.

Nós não nos aproximamos do mundo de forma direta, mas por meio dos conceitos que são abstrações das abstrações e que, ao mesmo tempo, interpretamos como sendo um contato direto com o mundo.

Essa transição tem a ver com o que Foucault (1995) disse: começam a ser traçadas novas relações. Os signos escritos não são mais similares aos seres visíveis. A escrita e as coisas não são mais semelhantes. A linguagem rompe o elo com as coisas. Na Álgebra dos séculos XVI e XVII, o desconhecido é tratado

como se fosse conhecido e operacionalizado por meio da simbolização. O aproximar das coisas é substituído pelo discernimento (do interpretativo para o representativo).

Na *Mathesis Universalis* de Vieta e Descartes, o conteúdo da Física Matemática bem como a resolução de problemas do comércio, proposta por Stevin, está intimamente relacionado com a forma, pois esses fatos são representados simbolicamente, porém não é o fato em si, contudo a separação é impossível, ou seja, é como se olhássemos para a representação e 'víssemos' o objeto matemático ou físico em questão. Isso gera insuperáveis dificuldades se polarizarmos na interpretação, isto é, focando, exclusivamente, em um dos polos da relação sujeito-objeto. A íntima conexão da linguagem Matemática formal com o conteúdo da Física Matemática decorre do tipo especial de conceitualização que é concomitante com a Ciência moderna que foi de importância fundamental para sua formação. Sem essa linguagem, a maior parte das analogias íntimas das coisas permaneceria para sempre fora do nosso conhecimento; e teríamos sempre ignorado a harmonia interna do mundo que é a única verdadeira realidade objetiva (POINCARÉ, 1995, p. 8).

> A criação da linguagem formal da Matemática é idêntica à fundação da Álgebra moderna. A partir do século XIII até a metade do século XVI, o Ocidente absorveu a 'Álgebra' (*al-g'abrwa'l-muqabāla*) dos Árabes na forma de teoria das equações, provavelmente derivada da Índia e dos gregos. Nas fontes gregas está presente a influência da Aritmética de Diophantus em relação ao conteúdo, mas a sua forma é inconfundível com a Ciência Arábica – isto se evidencia no próprio *Liber Algorismi* de *Al-Khowarizmi*, a partir do século X. Com a elaboração, particularmente na Itália, da teoria das equações que os Árabes tinham passado para o Ocidente, o texto original de Diophantus, já no século XV, começa a se tornar bem conhecido e influente. No entanto, foi a partir do último quarto de século XVI que Vieta compreendeu, ampliou e modificou a técnica de Diophantus de maneira crucial. Portanto, Vieta torna-se o verdadeiro fundador da Matemática moderna (KLEIN, 1992, p. 4. Tradução nossa).

O tipo especial de conceitualização que surge nos séculos XVI e XVII diz respeito ao fato de que os objetivos do entendimento 'deslocam-se' para os aspectos funcionais, ou seja, não se procura responder ao que é, mas, sim, às características instanciais dos objetos; por exemplo, quando desenhamos um triângulo no quadro ou mesmo quando falamos dois lápis.

> As apresentações convencionais da história deste desenvolvimento, de fato, não conseguem ver a importância do

> renascimento e assimilação da Matemática grega no século XVI. Entretanto, o *fato* da Matemática simbólica é concebido e tratado naturalmente. Os comentadores convencionais não estão suficientemente conscientes do *caráter* da transformação conceitual que ocorreu no decorrer desta assimilação, o que constitui condição indispensável do simbolismo matemático moderno**.** Além disso, a maioria das histórias-padrão tenta compreender a Matemática grega por meio do simbolismo moderno, como se tratasse de uma 'forma' externa que pudesse ser adaptada para qualquer 'conteúdo' desejável. Mesmo no caso de uma intenção genuína de investigação da Ciência grega, verifica-se que a pesquisa começa a partir de um nível conceitual que é desde o início, a respeito de conceitos fundamentais, determinados pelos modos do pensamento moderno. Desacoplar-se desse modo de interpretar a Ciência grega é a primeira preocupação de nossa empreitada (KLEIN, 1992, p. 5. Tradução nossa).

Contudo, o objetivo de Klein (1992) não é avaliar o renascimento da Matemática grega nos séculos XVI e XVII, em termos de seus resultados retrospectivos, mas ensaiar o percurso de sua gênese prospectivamente. Klein (1992, p. 6) considera a assimilação e transformação de Vieta da técnica de Diophantus, como se fosse um 'pedaço' da emenda à qual a 'nova' e a antiga Ciência estão conectadas. Para entender isso, Klein trata a Aritmética de Diophantus como teoria de calculação, estabelecendo conexão com a teoria Logística platônica.

O desenvolvimento dos conceitos matemáticos, nesse período, não está isolado; ao contrário, é no interior dessa transformação da Física que a ideia de generalização por meio de símbolos surge. Segundo Klein (1992, p. 122), a expressão característica da conexão entre a generalização da nova Ciência e o seu caráter como Arte é encontrada no formalismo simbólico e nas técnicas de calculação da Matemática moderna.

Os fatos físicos são expressos por representação Matemática, então, não é possível separar o conteúdo de sua forma e, por isso, há uma conexão íntima. Isso foi percebido nos séculos XVI e XVII. O significado mostra-se dentro de uma atividade, dentro de uma operação, dentro de um processo. Aí está a diferença entre a intencionalidade de conceitualização antiga e moderna, pois a intenção antiga procura imagens, intuições, ou seja, o mesmo significado, com outras palavras. A intencionalidade moderna é algorítmica, ou seja, operações no interior da atividade. Nesse sentido, os conceitos da Física e da Matemática têm, em primeiro lugar, um lado operativo somente e não descritivo, ou seja, não são imagens das coisas, são regras como operações.

A maneira especial de conceitualização, isto é, a ligação entre forma Matemática e o conteúdo da Física, é íntima porque a conceitualização especial é instrumental e pragmática. Números para Platão são imagens do mundo, a intencionalidade (o que eu tenho na cabeça), para os gregos, são os objetos, ou seja, os conceitos são imagens dos objetos, representando características das coisas, enquanto para os modernos, os conceitos são sistemas operativos, apenas tendo uma funcionalidade no interior de um sistema de atividade, como por exemplo, os números servem para fazer cálculos, resolver problemas aritméticos.

A grande mudança é essa, o sujeito está perseguindo sua tarefa e, por isso, ele usa seu conhecimento como instrumento, como qualquer outro, como uma técnica (uma tecnologia), enquanto Platão ficou contemplando o cosmo, o universo. Koyré (1982, p. 155) nos informa que:

> A dissolução do Cosmo significa a destruição de uma ideia, a ideia de um mundo de estrutura finita, hierarquicamente ordenado, de um mundo qualitativamente diferenciado do ponto de vista ontológico. Essa ideia é substituída pela ideia de um Universo aberto, indefinido e até infinito, unificado e governado pelas mesmas leis universais, um universo no qual todas as coisas pertencem ao mesmo nível do Ser, contrariamente à concepção tradicional que distinguia e opunha os dois mundos de Céu e da Terra (KOYRÉ, 1982, p. 155).

O conhecimento é uma representação das coisas em geral, sem fins particulares. Essa é a grande mudança da Filosofia e da epistemologia.

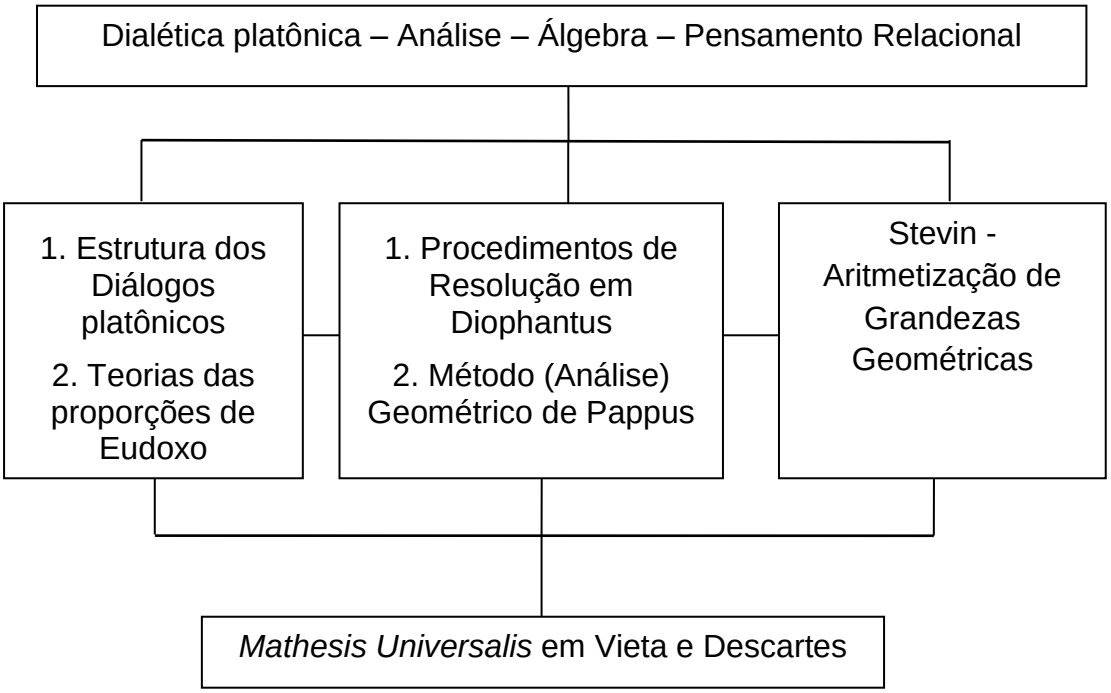
No que diz respeito ao início do Simbolismo Algébrico Moderno que está no interior dessa transformação, voltamos, especialmente, à concepção da *Arte Analítica* de Vieta, publicada em 1591. Vieta considerava a Aritmética de Diophantus e o método de *Pappus* como fundamentais no estabelecimento de sua *Mathesis Universalis*. Ressaltando que esse conceito operativo de número, via Aritmética de Diophantus e o método de Análise de Pappus, nas mãos de Vieta, fez nascer a Logística Especiosa, que é o começo do tratamento representativo de conceitos matemáticos tanto Aritméticos como geométricos. Segundo Klein (1992), nossa habilidade própria de contagem é base fundamental dos problemas da Aritmética teórica e os desdobramentos dessa habilidade fazem surgir a atividade prática. Um número definido de quantidades definidas de objeto torna a contagem e a Logística possíveis.

A Aritmética grega não é uma teoria de números (pois isso começou no século XVI, com Stevin e Vieta, por exemplo, culminando com os axiomas de Peano, Dedekind, no século XIX, etc.), na verdade, é uma teoria de tipos ou espécie de números, visto que estavam preocupadas em definir número sempre como quantidades definidas de objetos. Mesmo na Teoria Logística platônica, havia dependência do 'material', ou seja, dependia do modo de ser da unidade ou monas puras.

A Aritmética de Diophantus é tratada como Teoria Logística por Klein (1992), porém, mesmo tendo uma dependência ontológica, isto é, precisa estar associada ao objeto por um lado, mas também, por outro lado, já atinge características mais gerais em suas quantidades indeterminadas e, mais, em Diophantus, não há preocupação em não dividir a unidade, pois ele opera com a subdivisão da unidade. Esse procedimento de 'Análise', expresso no processo de resolução em Diophantus, foi capturado e reinterpretado por Vieta, possibilitando o início do Simbolismo Algébrico Moderno.

Com a desontologizaçao dos objetos matemáticos, inicia-se a abstração simbólica por meio da linguagem algébrica. Klein, na parte final de sua obra, trata da compreensão do conceito de número em Stevin, Descartes e Wallis, que permite perceber a transformação geral no conceito de número, ou seja, compreendendo-o como símbolo independente do objeto. Esse entendimento, nas mãos de Descartes, suscitou o 'nascimento' de uma linguagem universal para a Ciência, a *Mathesis Universalis,* que tem, como língua, a 'Álgebra'.

De forma geral, a transformação conceitual que caracteriza o surgimento da Álgebra moderna pode ser indicada de acordo com o diagrama:



O que foi reinterpretado nos séculos XVI e XVII, em relação aos diálogos platônicos, é a sua estrutura, pois, nesses diálogos, a conversa parte supondo que algo é verdadeiro ou, pelo menos, considera-o como tal e, em seguida, examina as afirmações. No final, volta-se ao início, no sentido de verificar o que foi determinado – isto é, Análise e Síntese. Isto está presente na resolução de um problema, seja aritmético ou geométrico. A diferença é que, nos diálogos platônicos, não há operacionalização de símbolos. Esse aspecto da operacionalização do símbolo é mérito da época moderna.

Nos séculos XVI e XVII, o conceito de número passou por alterações significativas, pois, até então, havia uma espécie de dicotomia entre quantidades discretas e contínuas (nos *Elementos* de Euclides, por exemplo, ainda não havia associação número - grandezas, onde a Aritmética como números era pouco explorada). No entanto, a partir do século XVII, ocorreu o início da unificação do tratamento das quantidades discretas e contínuas e isso só foi possível por meio de uma profunda transformação dos métodos e dos critérios de validação dos objetos matemáticos.

A questão da importância da simbolização na interação entre a representação e o entendimento dos fatos matemáticos é abordada na perspectiva da computação. Nesse sentido, fazer cálculos de adição, subtração,

multiplicação e divisão com número escrito com os dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (algarismos no sistema decimal) é, de fato, mais rápido e de 'fácil' compreensão. Agora, utilizar os símbolos: I, V, X, L, C, D e M (algarismos no sistema romano), bem como o sistema grego antigo em que 43.678 era escrito como δM, γχοη, pois δ=4, M=10.000, γ=3, χ=600, o=70, e η=8, por exemplo, é mais complicado e de 'difícil' compreensão, pois esses dois últimos sistemas, o Romano e o grego, respectivamente, apresentam pelo menos duas dificuldades: a primeira é o cálculo com esses números que não é simples e a segunda é o fato de ter que adicionar novas letras para números de valores maiores. Isso evidencia a importância da representação e da simbolização de objetos matemáticos, no sentido de desenvolvimento do pensamento bem como na produção de novos conhecimentos.

3.1. A diferença entre a conceitualização antiga e moderna[56]

O estudo da relação entre a Ciência antiga e a moderna é tema de investigações histórias bem como as transformações conceituais que ocorreram na Matemática nesse período, pois o desenvolvimento da Matemática não está isolado da história geral dos modos de compreensão do mundo (KLEIN, 1992, p. 121). No início da Ciência moderna, a Geometria euclidiana era uma espécie de 'modelo' de Ciência, contudo Klein (1992, p. 123. Tradução nossa) enfatiza que:

> A apresentação Euclidiana, sempre tem a intenção de *determinar* o número de unidades de medição, e isto sem *qualquer desvio através de uma 'noção geral' ou um conceito de uma 'magnitude geral'*. Cada número determinado de unidades de medição por medidas de distância *não* faz duas coisas que constitui o coração do procedimento simbólico: *não* identifica o objeto representado com os meios de sua representação e *não* substitui a determinação real de um objeto com a *possibilidade* de torná-lo determinado por um signo que, de fato, indica um determinado objeto e não dá uma ilustração intuitiva dele.

O início do simbolismo algébrico moderno está inserido nesse contexto e, com isso, surgem perspectivas de interpretações. Segundo Unguru (2004, p. 88), há duas perspectivas: por um lado, os historiadores que consideram a História da

[56] Este tópico trata do primeiro capítulo da parte II (capítulo 09) da obra 'O pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra'. No apêndice 'E', encontra-se sua tradução na íntegra.

Ciência como um progresso contínuo linear, seguido em alguns momentos por período de estagnação e, por outro lado, os historiadores que enfatizam serem incomparáveis os diferentes estágios, entendendo que a Matemática grega é totalmente diversa da Matemática moderna.

Na primeira visão, o desenvolvimento segue um caminho ‘lógico’ linear onde todas as irregularidades e ‘acidentes’ praticamente desaparecem, tendo explicações similares às demonstrações de teoremas ou de um fenômeno físico. Na segunda visão, a preocupação é enfatizar as diferenças, ou seja, o que separa a Ciência antiga da Ciência moderna. Nos dois casos, a medida utilizada são instrumentos da Ciência moderna, mesmo porque não há como se libertar desse conhecimento acumulado nos últimos 400 anos, como enfatiza Klein (1992, p. 120. Tradução nossa).

> Na Ciência grega, os conceitos são formados numa dependência contínua da experiência pré-científica ‘natural’, do qual o conceito científico é ‘abstraído’. O significado dessa ‘abstração’, por meio do qual o caráter conceitual de qualquer conceito é determinado é o problema ontológico da antiguidade; torna-se esquematizado nos problemas dos universais medievais da idade média, e, com o tempo desapareceu completamente.

Evidentemente que a Ciência moderna é uma espécie de continuação da Ciência antiga, mas também não podemos negar suas diferenças, do ponto de vista da conceitualização. Não podemos polarizar a interpretação no que diz respeito à Ciência moderna apenas e, sim, exercitar o olhar com a Ciência do seu tempo e procurar capturar suas diferenças e similaridades. Para isso, o conceito de Complementaridade do pensamento Otteano nos ajuda a perceber que o mais importante são, exatamente, as oposições, pois o conceito de número que foi transformado pertence a um movimento vivo também nos dias atuais quando temos como foco o ensino/aprendizagem. Neste sentido, essa perspectiva indica o potencial da teoria em desenvolvimento pelo professor Otte, em sua dimensão de propositura metodológica à investigação científica.

No processo de mudança de conceitualização, os modernos perceberam que o uso das palavras para construção e descoberta de novos conhecimentos são ambíguas e de difícil operacionalização, mas os números como símbolos operativos ou Álgebra simbólica facilita e ajuda nesse processo construtivo.

> A ‘nova’ Ciência, por outro lado, geralmente obtém seus conceitos por meio de um processo polêmico contra os conceitos da Ciência escolástica tradicional. Tais conceitos, não tem mais a ambiguidade dos significados causados pelos discursos comuns, onde o verdadeiro sentido se distingue de uma série de significados menos precisos. Não é mais a coisa pretendida pelo conhecimento do conceito do objeto dado *imediato* (KLEIN, 1992, p. 120 e 121. Tradução nossa).

A Matemática grega, na forma de Aritmética e Logística que foram reinterpretadas nos séculos XVI e XVII pelos modernos Vieta, Stevin e Descartes, está no ‘cerne’ do início da nova concepção do conceito de número. Nessa nova acepção, estão presentes aspectos da intencionalidade e, por intencionalidade, segundo Klein (1992, p. 118), entende-se o modo pelo qual nossos pensamentos e palavras dizem respeito aos objetos que temos em mente, ou seja, os gregos antigos tinham uma e os modernos tiveram outra, contudo ambos estavam fundamentados nos mesmos pontos de partida, que são conceitos da Aritmética, Logística e Geometria. Nesse sentido, as circunstâncias desse tratamento devem ser levadas em conta.

Na ‘Ciência’ grega antiga, a *episteme*, a cognição e o conhecimento são o começo, meio e fim, e o que se pretende é a contemplação por meio de atividades livres, objetivando compreender as coisas como são, em que a dialética é entendida como ‘Ciência’ suprema. Partindo do ponto de vista do que temos hoje, em relação ao que é conhecimento científico, a ‘Ciência’ grega antiga, segundo Klein (1992, p. 119), representa toda uma complexidade de ‘cognições naturais’ que está implícita em atividades pré-científicas que se movimentam no reino da opinião e, por sua vez, está apoiada numa compreensão pré-conceitual do mundo.

A Ciência estabelecida a partir dos séculos XVI e XVII é diferente, devido ao contexto da época, pois os fundamentos naturais foram substituídos por métodos, ou seja, não apenas Deus é o construtor das coisas, mas o homem também se coloca como elemento importante dessa construção uma vez que explicações humanas começam a ‘ganhar’ sustentabilidade. A base dessa nova Ciência, que reivindica validade e reconhecimento, foi construída, por um lado, em oposição aos métodos da ‘Ciência’ antiga, como podemos ver nos trabalhos de Stevin. Por outro lado, os próprios métodos da ‘Ciência’ antiga corroboraram a

edificação dessa nova Ciência. Isso pode ser verificado no trabalho de Vieta que objetivou ampliar os conceitos de números dos antigos.

Os ‘fundadores’ da nova Ciência, como Galileu, Stevin e Descartes, por exemplo, foram motivados por impulso totalmente contrário às orientações escolásticas, visto que os interesses desses modernos eram com a Mecânica prática como óptica, construção de máquinas, arquitetura, ou seja, o foco era descobrir novos instrumentos; no entanto, as estruturas conceituais desses novos assuntos estavam fundamentadas e, portanto, derivadas dos conceitos gregos tradicionais e da Ciência escolástica.

> Embora as fontes e pressuposições da nova Ciência sejam tanto da Ciência grega antiga como da escolástica, sua interpretação é completamente diferente da Ciência antiga. É esta interpretação do corpo da doutrina grega, que trouxe com ela a característica da transformação de todos os conceitos antigos que estão nos fundamentos não apenas de todas as formações de conceitos de nossa Ciência, mas também em nossa intencionalidade comum que é por sua vez derivada da ‘Ciência’ grega antiga (KLEIN, 1992, p. 120. Tradução nossa).

O que carateriza a nova Ciência é a concepção de sua própria atividade, sendo que a atividade presente na ‘Ciência’ grega antiga apontava no sentido da cognição da Lei natural. A nova Ciência começa a compreender a Lei natural mecanicamente, por meio de instrumentos, por meio de representação, ou seja, operacionalizando a estrutura geral e determinando mudanças conceituais de suas definições. Klein (1992, p. 121. Tradução nossa) diz o seguinte:

> Na sua própria evolução de conceitos, no decorrer do ‘combate’ à Ciência escolástica, a nova Ciência cessa a interpretação dos conceitos da *episteme* grega antiga preservada na tradição escolástica a partir do ponto de vista de seus fundamentos ‘naturais’; ao contrário, interpreta-os em referência à função que cada conceito estabelece com a Ciência como um todo. De forma que cada conceito novo obtido é determinado por *reflexão total sobre o contexto desse conceito*. Todo conceito da ‘nova’ Ciência pertence a uma nova dimensão conceitual. A intencionalidade especial de cada um desses tais conceitos não são mais problemas: são indiferentemente o mesmo para todos os conceitos; é um meio além da reflexão, no qual o desenvolvimento do mundo ocorre.

O desenvolvimento da Matemática, nos séculos XVI e XVII, obviamente, não está isolado do contexto histórico revolucionário desse período. Dessa forma, a natureza dessa modificação acaba se tornando modelo para o conhecimento humano, pois o aspecto da generalização conceitual que surge nesse contexto motivado pela transformação, no entendimento da Logística grega antiga, ou seja,

a reinterpretação da Arte de calculação platônica está intimamente relacionada à transformação conceitual do conceito de número, possibilitando o formalismo simbólico e as técnicas de calculação da Matemática moderna. Pois, segundo Klein (1992, p. 122), a íntima relação entre o modo de generalização empregada pela nova Ciência e seu caráter de ‘Arte’ determinou a moderna interpretação da Matemática antiga.

No contexto dessas transformações, estão presentes interesses práticos, isto é, a Matemática começa a ser aplicada na resolução dos mais variados tipos de problemas. A Aritmética e Geometria prática, ou seja, a Logística de medição são compreendidas como Artes e dominar essa Arte é o desafio dos modernos dos séculos XVI e XVII, pois esse controle permite representar, descrever e criar mecanismos de entendimento de fenômenos físicos, do comércio e da navegação, isto é, o objetivo passa a ser: medir, calcular e equacionar, propiciando, à Logística, dignidade teórica, embora, segundo Klein (1992, p. 242), na Idade Média, as ‘Artes liberais’ e, especialmente, Aritmética e Geometria, continuaram sendo consideradas disciplinas ‘teóricas’, porém em oposição às Artes Mecânicas ‘práticas’. O fato é que, mesmo na Aritmética tradicional, há elementos consideráveis iniciais da Logística que, por sua vez, fornecem os fundamentos das calculações práticas. Nesse sentido, Klein (1992, p. 243) diz que é muito difícil estabelecer limítrofe entre Aritmética por um lado e Logística como calculações práticas, por outro lado.

Essa empreitada está pautada na relação de similaridade entre *episteme* e técnica de mudanças conceituais, os objetos com que a Matemática lida são transformados, surgindo novas formas de generalizações denominadas ‘analítica geral’, tratando de generalização simbólica que é a arquitetura da nova Ciência dos séculos XVI e XVII.

3.2. A concepção de número em Stevin[57]

Enquanto Vieta mantém um vínculo com a concepção tradicional, preservando e 'ressuscitando' o mundo antigo, publicando seu trabalho primeiramente em Latim, Stevin publica seus primeiros trabalhos em Fleming (antigo Holandês) e depois em Francês. Segundo Klein (1992, p. 186), Stevin, conscientemente, estabelece uma 'ruptura'[58] com a forma tradicional de Ciência e introduz questões práticas[59] nas reflexões teóricas. Contudo, em sua característica de pensamento, não há separação entre teoria e prática.

Para Stevin, segundo Klein (1992, p. 188), 'épocas de ouro' realmente existiram e são as seguintes: i) os traços de conhecimento da Astronomia em Hipparchus e Ptolomy; ii) a Álgebra dos Árabes e a Aritmética de Diophantus, disse Stevin; 'Diophantus é moderno'; iii) a evidência de origem estrangeira da Geometria grega; iv) as informações sobre as alturas das nuvens e v) a alquimia. Isso evidencia o fato de não apenas Stevin, mas toda a geração dos modernos, ter sido influenciada diretamente por produções antigas e, por estar vivenciando um momento de grandes mudanças no direcionamento do pensamento filosófico-ontológico foi conduzida a uma nova interpretação.

E todas essas informações precisavam de uma espécie de organização no sentido de sistematização e, segundo Klein (1992), o primeiro plano de pesquisa organizado era formado pelas ideias de observação e comunicação por meio de uma linguagem ordenadamente acessível. Para Stevin, essa era a forma como a Ciência devia tomar conta e a linguagem, ordenadamente acessível, era na época a Geometria de Euclides.

---

[57] No apêndice 'G', o texto que trata da concepção de Stevin sobre número em Klein (1992) está traduzido integralmente.

[58] Na obra de Jacob Klein, a palavra ruptura não aparece entre aspas, mas entendo que Stevin tentou essa ruptura, todavia acabou utilizando conceitos antigos em seu trabalho. Por isso, a palavra ruptura neste tópico terá aspas, pois essa ruptura, a meu ver, foi dependente da concepção antiga.

[59] Stevin foi fortemente influenciado pela Álgebra de Bombelli, um *expert* em técnicas Hidráulicas e realizou serviços apropriados a Maurice de Orange. Além disso, foi oficial do exército Holandês e também controlador das finanças (KLEIN, 1992, p. 285). Exército esse que Descartes também serviu.

O texto de Aritmética mais importante de Stevin trata-se de sua *L'Arithmetique* - cujo 'livro' foi publicado em 1585 em Flamengo, língua mãe de Stevin. O fato de Stevin publicar o seu texto em Flamengo indica que os relacionamentos entre signos não são arbitrários, pois são aprendidos lentamente a partir da experiência e do uso.

Dessa forma, se o aprendiz tem contato com o conhecimento na sua língua mãe, isso facilita o entendimento, evidenciando que o aspecto do ensino foi de fato relevante na criação da linguagem algébrica moderna, tanto em Stevin como em Vieta. Contudo, o Flamengo não foi acessível a todos. Klein (1985, p. 37) diz que Stevin entendia, sobretudo, que o aspecto universal da linguagem se fazia presente no simbolismo da Aritmética e da Álgebra.

O livro foi traduzido pelo próprio Stevin para a língua francesa, ganhando popularidade na época. Numa parte desse livro, Stevin trata das frações decimais, porém não foi o inventor e nem mesmo o primeiro a usá-las sistematicamente, pois os décimos já faziam parte de cálculos de outros povos. O mérito de Stevin é o fato de sua preocupação com a representação, com a significação, com a linguagem e, consequentemente, em facilitar processos de calculação (manipulação) a uma quantidade cada vez maior de pessoas. Essas notações, segundo Stevin, fundamentadas em Diophantus, propiciam auxílio ao pensamento, ou seja, Stevin já estava preocupado em criar maneiras e métodos para compreender bem como 'manipular' conceitos, indicando interesse na funcionalidade dos objetos da Matemática. Para Stevin, segundo Naets (2010), o significado de cada coisa é definido por sua função numa estrutura de relações.

Nesse sentido, *De thiende* (O décimo) que é um dos principais trabalhos de Stevin, em sua *L'Arithmetique,* contribuiu de forma substancial para realização dessa transformação, produzindo uma 'ruptura' tanto epistemológica quanto metodológica em relação à concepção de objetos matemáticos da Ciência grega antiga.

A concepção de número de Stevin expressa, em sua obra *L'Arithmétique*, procurava estabelecer, em suas proposições, relações entre grandezas geométricas e objetos numéricos. Até o século XVI, tínhamos uma variedade de

maneiras de realizar cálculos, mas a preocupação em facilitar o uso ainda não aparecia de forma contundente.

Diante dessa situação, Stevin, que foi engenheiro, inventor e chefe de finanças, investiu na criação de maneiras para realizar operações de forma mais fácil possível. Com isso, sua contribuição é a mudança profunda no conceito de número. As frações decimais antes de Stevin foram simplesmente convenções de notações e de abreviações para melhor construir tabelas numéricas. A introdução de uma verdadeira fração decimal cuja notação está baseada claramente sobre caracteres decimais do sistema numérico enriqueceu, sensivelmente, as operações numéricas básicas, isto é, em definitivo, a contribuição fundamental de Stevin.

> Números decimais são tipos de Aritméticas fundamentadas na ideia de progressão por 10, usando os numerais arábicos ordinários, em que qualquer número pode ser, e por meio do qual, todos os cálculos requeridos nos negócios podem ser realizados apenas com inteiros, sem ajuda de frações (BERGHE & DEVREESE, 2008, p. 63. Tradução nossa).

Na ideia de Stevin, o número $8\frac{937}{1000}$ (oito inteiros e 937 milésimos=8,937) era designado por $\overset{0}{8}\,\overset{1}{9}\,\overset{2}{3}\,\overset{3}{7}$, onde $\overset{0}{8}$ equivale a 8 inteiros $(8\left(\frac{1}{10}\right)^{0})$, $(\overset{1}{9} = 9\left(\frac{1}{10}\right)^{1})$, $(\overset{2}{3} = 3\left(\frac{1}{10}\right)^{2})$ e $(\overset{3}{7} = 7\left(\frac{1}{10}\right)^{3})$.

Na adição de 8,937 com 26,307, Stevin usava a seguinte representação. Segundo Klein (1985, p.41):

$$\begin{array}{r} \overset{0\ 1\ 2\ 3}{8\,9\,3\,7} \\ 2\,6\,3\,0\,7 \\ \hline 3\,5\,2\,4\,4 \end{array}$$

Esse método é bastante similar ao procedimento que usamos atualmente na Educação Básica, ou seja, Stevin preocupou-se em representar para depois realizar a operação, evidenciando característica do número como símbolo geral operativo.

Nesse contexto, as operações podem ser realizadas apenas com inteiros e isso facilitou a técnica de cálculo, ou seja, a objetividade dos objetos matemáticos por meio de um método começa a ganhar evidência.

A preocupação operatória de Stevin salienta a importância que ele deu ao papel do número em sua notação decimal, no sentido de fundamentar teoricamente frações decimais. Além disso, Stevin começou o processo de aritmetização de grandezas geométricas, segundo Waldegg (2011) que, posteriormente, culminou com a libertação da homogeneidade grega com Descartes.

Na Antiguidade, a quantidade era definida como aquilo que é dividido por duas ou mais partes. A divisão, nessa perspectiva, é a operação que permite identificar as quantidades, tornando a base de classificação em discreta e contínua. Isto é, para os gregos, os números estão associados à quantidade discreta (Aritmética) e as grandezas a quantidades contínuas (Geometria), indicando que número é uma quantidade que pode apenas ser dividida em quantidade finita de vezes e a unidade é o limite dessa divisão. Enquanto isso, a grandeza já é uma quantidade que pode ser dividida indefinidamente, sem perder sua essência; neste caso, a divisão não é limitada, significando dizer que a unidade natural de medida pode ficar comprometida. Essa interpretação grega antiga indica tensão no que diz respeito ao fato de o número representar quantidades contáveis e grandezas.

Os números e as grandezas constituem classes disjuntas e independentes, e, por consequência, seus respectivos estudos são diferentes e irredutíveis. Estas duas Ciências, no princípio, não têm conexão, exceto as grandezas comensuráveis. Neste caso, é possível utilizar tanto os resultados da Aritmética como os da Geometria, porque ‘as grandezas comensuráveis podem ser concebidas como números’ segundo Aristóteles.

O contexto sociocultural e econômico dos séculos XVI e XVII, aliado a problemas de ordem prática, corroboraram para que Stevin identificasse propriedades comuns entre números e grandezas, possibilitando o início da unificação entre elas. Imbuído de visão pragmática de medida, Stevin ampliou o conceito de número por meio de ‘ruptura’ com a concepção grega antiga, ou seja,

contrariamente ao que encontramos na Matemática grega, em Stevin, o número está associado à quantidade sem oposição entre contínuo e discreto, ou seja, o contínuo e o discreto fazem parte do conceito de número, um sentido de Complementaridade na interpretação de Stevin. Stevin começa seus argumentos com as seguintes definições:

1) A Aritmética é a Ciência dos números.

2) Número é aquilo pelo qual a quantidade de cada coisa é revelada (STEVIN, 1958, p. 495. Tradução nossa).

Stevin não tem mais uma visão da quantidade de unidades que são determinadas em cada caso, mas, sim, possibilidades ilimitadas de combinar códigos em função das regras de operações.

Esta última definição representa um verdadeiro salto conceitual em relação à Matemática grega. Para Aristóteles, o número é uma quantidade (ou uma classe de quantidades), enquanto para Stevin o número é uma maneira de tornar quantidades evidentes (WALDEGG, 2011. Tradução nossa).

Para Stevin, segundo Naets (2010), o objeto de uma definição não são dados objetivos sobre a essência das coisas e, sim, uma espécie de ‘iluminação’ conceitual. Na Antiguidade, o número foi caracterizado como grandeza de primeiro nível, ou seja, designa um objeto. Stevin passa para um segundo nível de representação no qual o número começa a designar ‘coisa’ que pode ser tanto número de algo como de grandezas geométricas. Nessas duas definições, Stevin caminha no sentido de ‘eliminar’ a dicotomia contínuo-discreto como uma propriedade que define a quantidade, pois uma parte de um segmento é um segmento e uma parte de um número é um número.

Isso caracteriza o início do tratamento do conceito de número como símbolo em geral. Por exemplo, se falarmos 3 homens, o 3 é discreto porque homens são quantidades discretas. Se falarmos 3 metros, o 3 é contínuo, pois faz referência a uma distância (um comprimento) contínua. A partir desse período, o contínuo e discreto deixam de ser categorias ontológicas, pois o mesmo objeto matemático designa o discreto e o contínuo, isto é, está presente o conceito de Complementaridade do pensamento Otteano.

O processo de aritmetização de grandezas Geométricas em Stevin começa com uma argumentação totalmente contrária à compreensão grega antiga que é o seguinte: a unidade é um número (STEVIN, 1958, p. 496). Com essa afirmação, Stevin contestou o ponto de vista tradicional segundo o qual a unidade não é número, mas o princípio do número, da mesma forma que o ponto é o princípio do segmento. Na argumentação dessa afirmação, Stevin disse o seguinte:

> A parte é do mesmo material do todo e a unidade é parte da multiplicidade da unidade. Logo, a unidade é do mesmo material da multiplicidade da unidade. Então, o material da multiplicidade da unidade é número. Quem nega esse fato comum, continua Stevin, é como negar que um pedaço de pão é pão (STEVIN, 1958, p. 497. Tradução nossa).

Klein (1992, p.191 e 192. Tradução nossa) declara:

> O que está acontecendo com este silogismo? Como os conceitos devem ser usados e interpretados e de que tipo eles são, se o argumento é coerente? A premissa decisiva é aquela em que o 'material de uma multiplicidade de unidades' é equivalente a um 'número'. Nesse ponto, Stevin simplesmente aceita a definição clássica de *números* como 'uma multiplicidade composta de unidades', mas ele entende sua determinação conceitual em si, como o 'material' da coisa para ser definida, no mesmo sentido quando se fala do material de água ou de pão. [Pois, exatamente como aquilo que é a 'coisa' (material, substância) do pão, é entendida por Stevin como idêntico com 'o que é', ou seja, pão, então o objeto pretendido por um conceito é compreendido por ele como um 'pedaço' do conteúdo conceitual considerado como um 'coisa', um material, que é, por sua vez, idêntico com o conceito em si, ou seja, com 'o que o objeto é']... A pressuposição fundamental que subjaz sua compreensão - embora ele dificilmente reconheça como tal – é precisamente a identificação do modo de ser do *objeto* com o modo de ser do *conceito* relacionado ao objeto. Isso significa que há uma imensa dificuldade com a ontologia antiga, ou seja, determinar a relação entre o 'ser' do objeto em si e o 'ser' do objeto no pensamento, é aqui (e noutros lugares) reconhecido como uma 'questão de percurso', cuja solução pressupõe extensão do significado, são simplesmentes ignorados na discussão. A *consequência* dessa solução é a compreensão *simbólica* do objeto pretendido, ou seja, uma compreensão em sua objetividade real é posta como idêntica com o modo de ser de um 'objeto geral' ou em outras palavras, em que o objeto de '*segunda intenção',* ou seja, o conceito como tal é transformado num objeto de '*primeira intenção'*. Tal compreensão simbólica de *números e quantidades* é precisamente o que é *pressuposto* neste silogismo.

Essa declaração de Stevin indica que o princípio do número está relacionado com outros conceitos como pão, água etc., ou seja, trata do papel da percepção no processo de formação de conceitos. A exclusão da unidade como número na Matemática grega da Antiguidade está relacionada com a ideia de conceitualização, pois os Antigos tinham outras preocupações, indicando que os problemas do cotidiano eram totalmente diferentes dos apresentados nos séculos

XVI e XVII. Os antigos se interessavam em encontrar o ‘princípio ou a causa’ do número. Segundo Klein (1992, p. 192), a exclusão da unidade como número está relacionada à ausência de uma notação simbólica.

Stevin caminhou no sentido de deixar de lado o aspecto contemplativo platônico de essência e tratou de estudar aspectos técnicos, ou seja, que instrumento podemos construir a partir desse conhecimento? Isso evidencia extensão do conceito de grandezas e números no sentido de funcionalidade, de um tipo especial de conceitualização. Números e grandezas, prossegue Stevin, têm muitas coisas em comum que podem parecer quase idênticos; portanto, há algo nos números que deve ser correspondente ao ponto nas grandezas.

A unidade, para Stevin, é divisível, mas o ponto não é. Esse fato, ele afirma, tendo como base o trabalho de Diophantus, pois este não teve nenhuma preocupação em dividir a unidade na resolução de seus problemas, ou seja, Diophantus não estava preocupado com a essência ou origem dos números, simplesmente, desenvolveu mecanismos de encontrar solução de problemas numéricos.

Quando Stevin afirma que a unidade é número, ele está transferindo o papel da origem do número Antigo para o zero. O zero é o verdadeiro começo (KLEIN, 1992, p. 193). Stevin, pergunta, segundo Naets (2010), o que é comum entre a unidade e o ponto? Certamente, nada, pois duas unidades resultam em um número e dois pontos ou uma centena de pontos não resultam numa linha. Dessa forma, para Stevin, o signo do nada (zero) é idêntico ao ponto ‘ **.** ‘ da Geometria cujo significado depende de um sistema de simbolização.

Nessa interpretação, surge a analogia entre ponto geométrico e ponto numérico (Complementaridade Otteana entre intensão e extensão ou entre discreto e contínuo), no sentido de o zero caracterizar o início do número e o ponto, o início da reta, foi decisivo na aritmetização de grandezas, corroborando também a designação do número como símbolo geral, ou seja, mudança de conceitualização. Essa correspondência pode ser observada no argumento:

> 1) Ponto e zero não são nem segmento nem número (respectivamente), mas eles estão ligados. 2) Nem ponto nem o zero podem ser divididos em partes. 3) Uma infinidade de pontos não faz segmento, bem como acrescentando infinitamente zeros não faz nenhum

> número. 4) Adicionar um ponto ou um zero num segmento ou o número (respectivamente) não aumenta a quantidade (STEVIN, 1958, p. 498. Tradução nossa).

A associação número/grandeza para Stevin propicia realização de operações (criam-se representações que propiciam calculações com mais facilidade); dessa forma, o conceito de número depende do que podemos fazer com eles e, neste caso, as operações são como quantidades discretas ou contínuas. De certa forma, validamos o objeto de estudo da Matemática que, com Stevin, desloca para as operações. Enquanto que os gregos antigos procuravam a essência dos números ou os efeitos, para Stevin, a essência está nas operações, ou seja, na sua operatividade e funcionalidade.

A ampliação do conceito de número de Stevin por meio das propriedades dos objetos numéricos e geométricos deixa de lado o aspecto de mônadas e da metafísica, no qual o ser humano não é inerte (vida passiva) e sim ativo e prático, pois produz sua interpretação a partir de sua experiência, onde o número é uma relação 'extraída' da prática não uma abstração *eidédita* extramental platônica, ou seja, não são imitações ou imagens, mas exercem uma funcionalidade operativa. Entretanto, o aspecto relacional operacional a partir da prática tem, ainda, em Stevin, resquícios da Antiguidade, pois as relações são dependentes do objeto que, de certa forma, tem a ver com o pensamento Aristotélico.

Nessa perspectiva, a equação, segundo Naets (2010), não foram apenas instrumentos para nomear e expressar relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas, mas foi, claramente, um 'ventre' para novas entidades numéricas. Por exemplo, as identidades $y+6=2$ e $x^2+2=1$. Que tipo de números representam o 'y' e 'x' nessas igualdades? Certamente, precisamos ampliar o conceito de números para compreendê-los. Isso significa que as calculações simbólicas ajudam a criar novas estruturas e, com isso, surge a busca por novos siginificados. Esse fato transforma o Ser e o ente, ou seja, não esvazia a Ciência como afirmava Husserl, evidenciando a importância da dessedimentação histórica feita por Klein.

A priorização, em Stevin, das operações possibilita ampliações do conceito de número no sentido do conceito de homogeneidade, pois os gregos não operavam com grandezas de naturezas diferentes, ou seja, adição de áreas com

volumes (2^2+2^3), por exemplo, bem como potências de expoente 4, ou mais, não faziam sentido. Com essa nova concepção, Stevin não via dificuldades em operar com grandezas diferentes, pois o número 8, por exemplo, poderia ser tanto área como volume, isto é, Stevin elimina o problema da homogeneidade. Veja um resumo do raciocínio de Stevin (1958, p. 511) sobre a homogeneidade: suponha que temos um segmento de comprimento 2. Se desenharmos um quadrado, tendo esse segmento como medida de seu lado, a área será de $2^2=4$ unidades de área. Se construirmos um cubo sobre o quadrado de área 4, o seu volume será $2^3=8$ unidades de volume. Até o momento, o raciocínio coincide com o pensamento grego antigo, isto é, o primeiro é linear, o segundo é área e o terceiro, cúbico. Se empilharmos dois destes cubos, o volume do prisma será $2^4=16$ unidades de volume, de modo que deu um sentido geométrico à quarta potência, assim como as potências seguintes. Do mesmo modo, Stevin descreve as quantidades geométricas associadas às potências de números fracionários. Por exemplo, considere um segmento de comprimento $\frac{1}{2}$. Construímos um quadrado que terá área $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ unidade de área e um cubo que terá volume $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. Dividindo o cubo ao meio, teremos um prisma com um volume $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$, bem como para todas as potências na forma de fração.

Com este método, Stevin discutiu possibilidades de produzir quantidades que representam determinado número, da mesma maneira que é sempre possível exibir um número associado a uma grandeza dada. Dessa forma, torna possível a identificação fracionária. Stevin pretendia fundamentar a homogeneidade do campo numérico e a natureza de seu ‘número aritmético’. Com isso, o número passa a representar grandezas discretas ou contínuas. Isso é importante, pois os valores que representam grandezas incomensuráveis são números, porque a medida da aresta de um cubo de volume 8 é do mesmo material do cubo; então, a aresta é um número.

Stevin consegue consolidar e fundamentar o conceito teórico de número. Um conceito de número que, paradoxalmente, não precisa mais da necessidade de grandezas para ser explicado. Este conceito também vai desencadear o processo contínuo de identificação – 'ruptura' entre quantidades contínuas e discretas, que culmina, no final do século XIX, com a construção de número real por Dedekind.

As abordagens teóricas de Vieta e Descartes trouxeram, à Matemática da época moderna, características analíticas que são herdeiras do conceito de número de Stevin. Segundo Klein (1985, p. 40), para Stevin, não existe somente uma analogia entre o ZERO e o PONTO ou entre número e magnitude, mas uma correspondência perfeita. Neste contexto, a Aritmética de Stevin influenciou na descoberta da Geometria Analítica de Descartes.

O pensamento numérico passou por uma mudança conceitual drasticamente com a contribuição de Stevin, pois a sua concepção de número é mais geral do que a de Descartes, segundo Klein (1992, p. 197). Stevin era um aritmético, um logístico ou calculista e, por isso, não lidava com números de unidades que são determinados em cada caso, mas com possibilidades ilimitadas de combinações como nas frações decimais. A Aritmética de Stevin não tinha preocupações ontológicas ou fundacionais, mas diz respeito a toda uma forma de praticar calculação que, por um lado, 'parou' a concepção antiga contemplativa e, por outro lado, ampliou possibilidades de interpretação da objetividade dos objetos matemáticos.

3.2.1. A Álgebra de Simon Stevin

O texto deste tópico é uma resenha do capítulo VII do livro *Magic is no Magic: The Wonderful World of Simon Stevin,* publicado em 2008 pelos autores Jozef T. Devreese (*University of Antwerp* – Bélgica) e Vander Bergue (*Ghent University* – Bélgica). Eles são estudiosos profundos dos trabalhos de Stevin bem como do seu impacto nas Ciências como um todo, porém o objetivo é apresentar,

especificamente, características do início da simbolização algébrica do ponto de vista de sua importância, na elaboração e comunicação do conhecimento.

A Álgebra de Stevin diz respeito ao fato de que sua produção é um elo entre os algebristas italianos, como Cardano (1501-1576) e Tartaglia (1499-1557), por exemplo, do início do século XVI, com os algebristas franceses do final do século XVI, como Vieta (1540-1603).

Na Aritmética de Stevin, publicada em 1585, há um 'capítulo' que trata das operações que introduzem uma espécie de 'teoria de números algébricos' no qual ele define um polinômio como uma quantidade indefinida. Stevin estabelece uma relação entre a sua representação decimal com a Álgebra. Dessa forma, o símbolo para Stevin tinha significados diferentes em função do contexto. Por exemplo, o símbolo ① na Aritmética significava um décimo e na Álgebra indicava 'x', isto é, quantidade indefinida (primeira quantidade, atualmente incógnita 'x' ou valor desconhecido). Os expoentes acima de 'um' ele chamava de segunda quantidade e terceira quantidade, representando-as por ② e ③, respectivamente.

Stevin tinha uma maneira particular de operar com os números e símbolos desconhecidos. O polinômio $2x^4+5x^3+7x^2+4x+10$ na notação de Stevin era representado por:

2④+5③+7②+4①+10

Nos séculos XVI e XVII, a simbolização de Stevin trouxe melhora substancial na manipulação simbólica, pois havia inúmeras maneiras de operacionalizar com símbolos. Os algebristas eram chamados de *cossists* e a Álgebra era a Arte do *cossic* (palavra que designava o desconhecido, o 'x' ou a primeira quantidade de Stevin).

Em 1565, Valentin Mennher elaborou a tabela 01 para mostrar a correspondência entre o valor do expoente 'x' com o símbolo desconhecido.

Tabela 01 – Correspondência entre o valor de expoente com o símbolo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	*φ*	*ξ*	*τ*	*ξ ξ*	*в*	*ξ τ*	*bв*	*ξ ξ ξ*	*τ τ*

Dessa forma, o produto de dois polinômios da forma:

$$(4x-2)(2x+3)=8x^2+8x-6$$

Na notação *cossic* será representado por:

(4φ-2N)(2φ+2N)=8ξ+8φ-6N

E na notação de Stevin:

(4①-2)(2①+3)=8②+8①-6

Na notação *cossic* de Mennher, não fica clara a conexão entre *φφ* e *ξ*, pois *φ* equivale ao nosso x e *ξ* a x^2. Essa complicação e o fato de sempre ter necessidade de criar novos símbolos dificultavam a própria simbolização bem como as operações. Esse fato foi melhorado com Stevin, pois: ①①=② ou $x.x=x^2$, garantiu relação com a propriedade do produto de potências de mesma base.

Para completar o sistema notacional de sua Álgebra, Stevin introduziu o símbolo ⓪ para designar a quantidade inicial, ou seja, o número 1 (atualmente, podemos chamar de constante ou um parâmetro). Porém Stevin não usou esse símbolo na representação de um polinômio específico, mas foi usado para representar polinômios gerais. Em Stevin, o polinômio $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ era representado por ④ ③ ② ① ⓪ em que os 'a_s' são coeficientes indefinidos. É nesse aspecto que evidencia uma relação entre a sua simbologia Aritmética com a algébrica em Stevin, caracterizando uma possibilidade de interpretar o início da simbolização algébrica.

Entretanto, a notação de Stevin também produz complicações quando temos duas ou mais quantidades indefinidas (variáveis x e, y, por exemplo). Neste caso, a saída proposta por Stevin foi acrescentar novas palavras para indicar outras variáveis como *sec* (segundo), *ter* (terceiro) etc. O polinômio $4x^2+5x+2$ seria representado por 4②+5①+2 e o polinômio $8y^2+3y+5$ por 8*sec*②+3*sec*①+5.

No que diz respeito a equações[60], Stevin tratou de forma similar a um procedimento chamado regra de três (encontrar a quarta proporcional - regra de ouro), pois este era e é muito usado na resolução de problemas do cotidiano e da Matemática em geral. Nas equações, Stevin abordava da forma: se ②=2①+3 $(x^2 = 2x + 3)$, então quanto são 3①+5 $(3x + 5)$? Stevin não desenvolveu métodos gerais para buscar suas raízes, visto que os coeficientes para Stevin e seus predecessores ainda eram considerados números conhecidos. No entanto elaborou quatro passos que seguia para resolver uma equação específica:

i) construção – realização de várias operações de calculações da raiz;

ii) demonstração Aritmética – verificação da raiz do problema;

iii) demonstração geométrica – prova geométrica de que a raiz, considerada como segmento de linha, satisfaz a equação;

iv) origem da construção – obtenção de um método de calculação a partir do passo i).

O símbolo ① (‘x’), em Stevin, designava segmento indicando dependência da Geometria euclidiana, isto é, as respostas eram aceitas depois da elaboração de uma construção geométrica. Isso nos faz pensar que Stevin não trabalhava com raízes negativas. Com Vieta, inspirado no trabalho de Diophantus, essa dependência começou a ser desconectada. Nessa estrutura de resolução de Stevin, está presente o aspecto Sintético (passos i, ii, e iii) e características da Análise (passo iv).

No processo Sintético de Stevin em que, de forma engenhosa, buscava a resolução de equações, ele acabou criando um algoritmo que determinava uma de suas soluções. Contudo não era um algoritmo algébrico, mas acrescentou novas ideias no entendimento de resolução de equações. Uma dessas ideias é um método numérico que determina, por aproximação ou, dependendo do caso, a raiz exata de uma equação de qualquer grau. Na terminologia moderna, esse método poderia ser chamado de método da bissecção: se os números f(a) e f(b)

[60] Essa atitude de Stevin de tratar equações como problemas de proporcionalidade tem origem na teoria de proporções de Eudoxus.

têm sinais diferentes, então a equação f(x)=0 tem, no mínimo, uma raiz entre a e b. Stevin não trabalhou com f(x)=0 e, sim, considerava o primeiro membro como o expoente de maior grau. A seguir, um exemplo do procedimento de Stevin.

Considere a equação ③=300①+33.915.024 ($x^3 = 300x + 33.915.024$). Stevin, por meio de calculação, substituía o 'x' (①) por sucessivos expoentes de 10 até encontrar a seguinte situação: o valor do primeiro membro é menor do que o valor do segundo membro para duas potências de 10. Neste caso, para x=100, o valor do primeiro membro é 1.000.000 e para x=1.000, o valor do segundo membro é 33.945.024. Isso significa que, entre 100 e 1.000, há uma raiz da equação. Neste caso, uma solução desta equação é 324. Se a solução não fosse inteira, Stevin usava os décimos até encontrar um valor tão próximo quanto se queria, indicando, indiretamente, a ideia de limite.

Nesse processo de resolução de Stevin, está implícito o conceito de função, mas a palavra função não fazia parte do vocabulário de Stevin. Contudo os membros da equação em Stevin não eram concebidos como constantes desconhecidos, mas como 'funções' de uma variável. Isso significa que o objetivo é responder à seguinte questão: para qual valor, a variável das duas 'funções' (primeiro e segundo membro da equação) assume o mesmo valor?

No método de Stevin de resolução de equações, está evidenciado o conceito de Complementaridade do pensamento Otteano no que diz respeito ao conceito de função de dupla raiz, ou seja, por um lado, há a computação e, por outro lado, características iniciais de Leis e fórmulas bem como a questão da dinamicidade que altera, de acordo com a aplicação e do contexto.

Stevin contribuiu significativamente para o início da simbolização algébrica moderna, pois suas representações decimais foram aplicadas do ponto de vista operacional em vários contextos diferentes, seja econômico ou astronômico. Além do mais, indicou o conceito de limite no método numérico para encontrar a solução de uma 'função', porém sua Álgebra tinha características de regras de calculações metódicas. Isso significa que Stevin estudou a Aritmética de Diophantus por meio de uma publicação de 1575. A diferença é que, em Stevin, as operações foram efetuadas por meio de símbolos, dando sinais da

época da representação apontada por Foucault. Atualmente, a Álgebra engloba várias áreas como Análise, Geometria, Teoria de Grupo e Lógica etc.

A notação algébrica de Stevin indica o início de uma homogeneidade no uso operacional de símbolos na resolução de problemas, pois, até então, a diversidade de maneiras e símbolos dificultava a conexão entre o conteúdo da Física e a linguagem formal da Matemática, evidenciada na introdução de Klein (1992); por isso, ele é um precursor da notação francesa de Vieta e Descartes.

3.3. A Aritmética de Diophantus como teoria Logística

O trabalho de Diophantus, intitulado Aritmética, é composto de 13 livros, porém apenas 6, desses 13 livros, chegaram até nós. São textos que mostram procedimentos de resoluções de problemas por meio de computação, conhecida atualmente como equações determinadas e indeterminadas do primeiro e segundo graus. O caráter 'algébrico' (obviamente que não são conceitos algébricos modernos) da Aritmética de Diophantus surge no decorrer da apresentação de suas resoluções, pois utiliza signos e abreviações para designar números desconhecidos. Segundo Klein (1992, p. 127), o desenvolvimento da Aritmética, em Diophantus, já estava presente em Platão (*Laws*, 819, B-C), nos comentários de Charmides, nos epigramas 'aritméticos' da Anthology Plalatine e também na Métrica de Heron da Alexandria. Isso significa que Diophantus acabou relatando seus predecessores, ou seja, um trabalho similar ao que fez Euclides em relação aos *Elementos*.

Klein (1992, p. 128) declara que Diophantus apresentou uma nova concepção do objeto logístico, elevando-o à classe de Ciência real, pois incluiu, no processo de resolução, a demonstração, isto é, a solução real de cada problema. A Logística platônica e mesmo a Neoplatônica, capturada por Diophantus, não tinham características apodíticas no sentido atual, porém o aspecto sintético de comprovar o resultado encontrado já se fazia presente. Nesse sentido, os porismas (proposições auxiliares ou corolário) bem como a testificação (verificação) das soluções encontradas de cada problema, isto é, os

métodos ou caminhos claros em sua forma de abordar problemas aritméticos, são méritos de Diophantus.

Para Klein (1992), na Aritmética de Diophantus, há diferenças entre procedimento e objeto. Os procedimentos (métodos) são aplicados a tipos de 'números' que são independentes dos objetos específicos (multitudes de mônadas) e, com isso, adquirem um sentido mais geral.

Na Aritmética de Diophantus, segundo Klein (1992, p. 130), todos os números são definidos como determinada multiplicidade de mônadas. Essa definição é reminiscente da definição 2[61] do livro VII de Euclides. Isso, até então, está em conformidade com a concepção ontológica de mônadas gregas antigas, platônica e Neoplatônica, porém Diophantus amplia esse conceito, designando números que são pressupostos como conhecidos na calculação pelo signo $(\overset{\circ}{M})$, indicando monas imutáveis bem como o signo 'ς' (ς - sigma é a última letra da palavra *arithmo* em grego - *ἀριθμός*), representando multiplicidade de mônadas puras. Mesmo o número, sendo definido como quantidades de objetos, já surge uma espécie de 'simbolização' da quantificação de grandezas supostamente conhecidas visto que os números, na Aritmética de Diophantus, são marcados por nomes curtos, por exemplo, em Heath (1964, p. 38), as expressões *dynamis, kybos, dynamodynamis, dynamokubos, kybokybos*, isto é, quadrado, cubo, quadrado-vezes-quadrado, quadrado-vezes-cubo e cubos-vezes cubos, ou seja, $\Delta^\gamma, K^\gamma, \Delta^\gamma\Delta, \Delta K^\gamma, K^\gamma K$ fazem-se presentes nas soluções. Essa nomeação indica o tipo de *eide* dos números, pois, em Diophantus, a *eide* não tem mais sentido pitagórico-platônico de essência. Agora, a *eide* do número começa a ter características instrumentais, sendo usada como procedimento de calculação, 'deixando de lado' o aspecto ontológico[62].

Por outro lado, na Aritmética de Diophantus, no que diz respeito às partes fracionárias, há divergências conceituais claras, pois, nos problemas 9, 10, 11 e 12 do livro V, bem como no trigésimo primeiro problema do livro IV, está expressa

[61] Definição II do livro VII de Euclides: Um número é uma multitude composta por unidades.
[62] Esse aspecto é importante, pois evidencia a 'origem' do tratamento instrumental da Ciência que foi criticado por Husserl.

a divisão da unidade. Isso pode ser verificado em Heath (1964), porque esses problemas começam com 'para dividir a unidade em ...'[63].

> Além do mais, essa manipulação de partes fracionárias da unidade claramente não diminui o caráter 'teórico' de todo o trabalho, embora isso deva ser o caso à luz das concepções Neoplatônicas. Este caráter teórico apodítico mostra-se inequivocadamente no fato de que cada problema, com exceção daqueles do livro VI e do trigésimo problema do livro V, são ambos representados e resolvidos em termos de mônadas 'puras'. Ainda no decorrer das soluções, o *apodeixis* é em cada caso estritamente 'metódico', isto é, transferível a outros casos do mesmo tipo, visto que a calculação envolve determinados números, embora não podendo sempre ser efetuado sem dificuldade. Em determinados casos, cada nova solução pode ser encontrada 'infinitas vezes' à base de uma completa *apodeixis* (KLEIN, p. 132. Tradução nossa).

O uso de frações por Diophantus não equivale ao que conhecemos atualmente como números racionais, pois este conceito depende do entendimento moderno do conceito de número. O conceito de *arithmo* para Diophantus nada mais é do que número de coisas, ou seja, número de algo e a fração significa nada mais do que número de partes fracionárias, indicando o 'quantos' – a quantidade da multiplicidade 'sofrida' pela unidade. Por exemplo, Klein (1992, p. 251) diz que a escrita dos próprios signos, por exemplo, $\overset{\circ}{M}\, I'$ ou $\overset{\circ}{M}\, \delta^{\chi}$, isto é, metade ou um quarto de mônadas respectivamente. O signo χ quando acrescentado a um signo, muda o número correspondente anterior recíproco, ou seja, se δ é 4, então δ^{χ} é um quarto.

O procedimento de calculação, usado por Diophantus, como o método da falsa posição, no qual se assume um determinado valor que seja solução do problema e, a partir daí, realiza a computação no sentido de 'testar' esse valor assumido até encontrar o valor que satisfaz completamente a situação, caso o problema tenha solução, é um método 'demonstrativo' que indica aspectos teóricos gerais, pois experimenta e investiga processos, ou seja, preocupa-se com os meios e, por isso, a simbolização no sentido operativo começa a adquirir evidência.

---

[63] O problema 11, por exemplo, diz '*To divide unity into three parts such that, if we add the same number to each of the parts, the results are all squares*' (Para dividir a unidade em três partes tais que, se adicionarmos a mesma quantidade em cada uma das partes, os resultados são todos quadrados (HEATH, 1964, p. 208. Tradução nossa).

Em Healt (1964, p. 67 ff), no momento em que Diophantus trata das regras de resoluções das equações duplas indeterminadas do primeiro e segundo graus, evidencia o fato de caráter geral que, segundo Klein (1992, p. 133), indica características de trabalhos teóricos. Nesselmann (1811-1881) diz, de acordo com Klein (1992, p. 249), que essa caraterística do trabalho de Diophantus não é suficiente para 'provar' o aspecto teórico de sua Aritmética, contudo o entendimento dessas regras como 'Arte de calculação' teve papel importante na transformação do conceito de número nas mãos dos modernos dos séculos XVI e XVII.

Comparando o método de Diophantus com as técnicas modernas, percebemos sua suposta 'fraqueza' no que diz respeito à obtenção de soluções gerais. Diophantus não estava interessado diretamente na determinação de soluções gerais como Vieta, por exemplo.

> Diophantus conhece problemas e soluções de um tipo 'geral' (em seus termos: 'nas [soluções] indeterminadas'), ou seja, aquelas que deixam seus objetos '*indeterminados'*: Buscar [a solução de um problema], até então indeterminado significa que uma expressão hipotética [deve ser construída] de forma que para qualquer que seja o valor desejado para o desconhecido, cria-se uma expressão hipotética preservando as condições do problema. Similarmente: 'O procedimento [de encontrar a resolução] da [solução] indeterminada' seja de tal forma que muitas mônadas que alguém desejar, possam ser colocadas no lugar do desconhecido e, quando definimos [o número indeterminado] na expressão hipotética, o problema é [imediatamente] completado (KLEIN, 1992, p. 134. Tradução nossa).

Diophantus está, por um lado, levando em consideração as pressuposições da doutrina grega, pois procura apenas números completamente estipulados sob determinadas condições, mesmo quando trata da partição da unidade de calculação, indicando o processo de Análise e Síntese. O trabalho de Diophantus indica teoria Logística platônica com um tempero a mais, pois está baseado nas relações entre números quadráticos, cúbicos e suas raízes. Diophantus não estava interessado em resolver tipos de equações do primeiro e segundo graus. Essa é uma determinação atual, desde Fermat, por exemplo.

No sentido de tratar os números como relações, a Aritmética de Diophantus, segundo Klein (1992, p. 135), está próxima dos livros (VII, VIII, IX) de Aritmética de Euclides, pois, em Euclides, as mônadas aparecem como unidades de calculação abstraídas do processo de medição. Em Diophantus, as mônadas

surgem apenas como trabalho ‘puramente’ aritmético, exceto o texto de Diophantus que trata de números poligonais. Isso pode evidenciar que Diophantus teve, como base, o trabalho de Euclides sobre Aritmética.

Contudo, segundo Klein (1992, p. 136), Diophantus se liberou extensivamente do modo de apresentação geométrica. Isso significa que Diophantus compreendeu, aritmeticamente, os conceitos geométricos, pois, em seu trabalho, há operacionalização de adição e subtração de planos e comprimentos sem se preocupar com aspectos da essência do ser ou da homogeneidade.

A assimilação da Logística Diophantina, ou seja, o procedimento de resolução e calculação utilizado para encontrar soluções de problemas aritméticos está diretamente na origem da linguagem formal moderna (KLEIN, 1992, p. 147), visto que Vieta, no século XVI, estabeleceu e ampliou o conceito da *eide* de um número originado em Platão e, passando por Diophantus, culminando com a Logística Especiosa que trata o número como espécie de calculação, propiciando o elo entre quantidades determinadas/indeterminadas para expressão numérica geral, indicando o número como valor simbólico; entretanto, o símbolo numérico no século XVI estava ‘preso’ a segmentos, áreas e volumes, isto é, não trata, ainda, da Álgebra abstrata.

Diante da estrutura do procedimento de resolução de Diophantus em que o número já indicava não apenas o número de determinado objeto, mas o número de mônadas puras (números desconhecidos de mônadas) e não fornecia meramente regras de soluções de problemas, mas demonstrações de suas respostas, podemos afirmar que a sua Aritmética numerosa apresenta características básicas, científicas ou teóricas.

3.4. O simbolismo algébrico moderno em Vieta na perspectiva de Jacob Klein[64]

O entendimento do tratamento geral do sistema de Ciência antiga é caracterizado, segundo Klein (1992, p. 179), como disciplina suprema, ou seja, para os Antigos, essa disciplina é platonicamente designada como dialética ou, em termos aristotélicos, a primeira Filosofia. No início da modernidade, essa estrutura dialética, como método, é compreendida como *Mathesis Universalis* no sentido de Vieta e Descartes. Esse sentido completamente novo de intencionalidade é consequência do caráter simbólico do conceito de número discutido por Vieta, a partir da interpretação do trabalho de Diophantus e da compreensão do método geométrico de Pappus.

A produção Matemática de Vieta (1540-1603) está inserida num contexto de surgimento de uma 'nova' Ciência, ocorrida na virada do século XVII. Vieta nasceu num ambiente católico, contudo era desprovido das questões de fé e, como jurista, acabou tornando-se conselheiro e, com isso, realiza trabalho de consultoria a Huguenot Antoinette d'Aubeterre, envolvendo-se na disputa entre Catolicismo e Calvinisno que balançaram os fundamentos da França no século XVI.

Paralelamente ao trabalho de advogado, supervisionou a educação de Catherine de Parthenay - única herdeira da poderosa família de Huguenotes (calvinista) e filha de João V de Parthenay. O fato de Vieta ser o tutor de Catherine de Parthenay (1554-1631) é decisivo, no sentido de que Catherine se tratava de uma mulher humanista[65] que dominava vários idiomas, entre eles, o Latim. Segundo Vieta, ela possuía habilidades surpreendentes na compreensão de conceitos matemáticos e isso, certamente, motivou-o a procurar textos antigos para discutir com sua pupila. Esse fato pode ser verificado em Klein (1992, p. 253. Tradução nossa):

---

[64] Este tópico refere-se ao capítulo 11 da obra 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra'. No apêndice 'F', o capítulo está traduzido integralmente.

[65] Humanismo é um dos principais valores do Renascimento, pode-se até considerá-lo um método que procura fazer uso da razão individual e da evidência empírica para atingir suas verdades.

> Divina *Melusine* (Catherine de Parthenay), devo especialmente a você todo o estudo de Matemática pelo qual me apaixonei estimulado por você, pois possui habilidade nessa Arte, e melhor, compreende o conhecimento de todas as Ciências [enciclopédicas] que nunca pôde ser suficientemente admirado por uma pessoa de seu sexo e raça. O fato referido é velado pela ornamentação barroca que é o estilo de instrução de Vieta a Catherine, pelo qual ele tirou inspiração extensiva, e com isso realizou seu próprio estudo. O quanto ele sentia em débito à Catherine de Parthenay por todo seu trabalho matemático, é mostrado pelas observações lúdicas que ele apresenta na parte inicial do terceiro problema do capítulo 9 de seu trabalho *Ad problema, quod ... proposuit Adr. Romanus, Responsum*, contendo a resposta do problema proposto por Adrianus Romanus: movido pela alegria dessa descoberta, divina Melusine, eu sacrifiquei por você cem ovelhas ao invés de um Pitágoras.

O interesse de Vieta, assim como de outros modernos, como Newton e Galileu, era por questões cosmológicas e astronômicas, destacando o fato de que a Matemática moderna também foi guiada por essa temática, ou seja, temática similar ao da 'Ciência' antiga. Isso pode ser verificado, pois, segundo Klein (1992, p. 150), os textos principais de Vieta do início de seu trabalho são: i) *Principles de cosmografia* – apareceu pela primeira vez em 1637 numa tradução francesa; ii) *Harmonicum coeleste* (Harmonia celestial); iii) *The Canon mathematics – sobre triângulos*, ou seja, são trabalhos que preparam a introdução à trigonometria esférica, isto é, ao estudo das geodésias.

O texto sobre triângulos (*Canon*) de Vieta está relacionado diretamente aos problemas de formulação de equações que são similares aos trabalhos 'algébricos' contemporâneos de Cardano, Tartaglia e Bombeli. Segundo Klein (1992, p. 151), Vieta conhecia tanto o trabalho original de Diophantus como a tradução feita por Xylander (1532-1576) desde 1579. Nessa perspectiva, podemos dizer que o estudo do trabalho de Diophantus por Vieta corroborou a introdução do tratamento algébrico moderno, ou seja, as características simbólicas fundamentais de seu trabalho *In artem analyticen Isagoge* (Introdução a Arte Analítica) que apareceu em 1591[66], têm como base, também, a Aritmética Diophantina.

> A maneira pela qual os fundadores da Ciência moderna começaram a atingir uma compreensão Matemática da estrutura do mundo revela, desde o início, uma concepção diferente do mundo, uma compreensão diferente do Ser no mundo em relação aos antigos. Eles

[66] A introdução à Arte Analítica de Vieta pode ser encontrada no apêndice da obra 'O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra de Klein (1992). Em português, pode ser encontrada na dissertação de mestrado de Bruna Moustapha Corrêa, intitulada 'A introdução à Arte Analítica de François Viète: comentários e tradução. UFRJ, 2009.

> não estão, em sua maior parte, conscientes de suas próprias pressuposições; daí surge a tensão com a Ciência que eles fundaram. Eventualmente, o legado antigo entrou em conflito com o modo de cognição moderno que recai sobre uma nova compreensão ontológica. No século XIX, esse conflito levou a uma nova 'formalização' dos fundamentos da análise infinitesimal e hoje seus efeitos sãos vistos na luta para fixar os princípios da Física Matemática. A origem disso já se apresenta em Vieta (KLEIN, 1992, p. 152. Tradução nossa).

Vieta, mesmo com formação humanística, ao contrário de seus contemporâneos, Petrus Ramus (1515-1572) e Stevin que desencadearam oposição explícita à 'Ciência' tradicional, preferiu uma atitude de preservador, redescobrindo e ampliando o ensino dos antigos. Em seus escritos matemáticos, ele está preocupado não somente com a terminologia antiga, mas procura inovar no sentido de renovação das concepções tradicionais.

Vieta, segundo Klein (1992, p. 153), afirma que ideias novas, no início, costumam ter acabamento superficial, mas o polimento das ideias deverá ser feito nos trabalhos posteriores. Nesse sentido, a 'Arte' que ele apresentou é nova, mas, é tão antiga e, por isso, introduziu vocabulários inteiramente novos, objetivando tecnicidade no tratamento da Ciência Natural no século XVI, evitando, com isso, tratar os novos desafios pautados numa linguagem que não dá conta de expressar e explicar os sentidos dos fenômenos.

Segundo Klein (1992, p. 154), a característica intencional de Vieta, na interpretação de conceitos matemáticos, está diretamente conectada com aspectos tradicionais, pois Vieta afirma ser o descobridor do 'ouro genuíno anteriormente enterrado' (*aurum fossile et probum*) pelos matemáticos antigos. Esse ouro genuíno (interpretado como *Arte Analítica*) possibilita resolver não somente problemas específicos e individuais, mas tratar de situações gerais por qualquer quantidade. Vieta tinha consciência da importância de sua *Arte Analítica*, pois disse, no final do *Isagoge*: 'Não há nenhum problema que não possa ser resolvido' (*Nullum non problema solvere*). Podemos dizer que esse trabalho de transformação conceitual na concepção de número abriu portas para compreensão sistematizada das Ciências Naturais nos séculos XVI e XVII.

A relação de Vieta com os antigos, uma relação típica dos estudiosos do século XVI, faz-se presente, pois, na apresentação do *Isagoge*, Vieta claramente

diz que dois textos antigos foram fundamentais e tiveram influência direta em sua obra, a saber: o livro VII de Pappus (290-350) e a Aritmética de Diophantus.

O ‘ouro genuíno’ que Vieta confessa ter descoberto tem origem em Platão, pois é uma maneira de investigar a verdade que Theon da Alexandria chamou de ‘Análise’, definindo-a, segundo Klein (1992, p. 155), como o processo em que se supõe aceite o que é procurado e, trabalhando através de consequências lógicas dessa suposição, chega-se à verdade. Isto é contrário à ‘Síntese’, em que se supõe o que já é conhecido e, aplicando através das consequências dessa suposição, atinge-se o entendimento do que é procurado. Klein argumenta que essa definição também ocorre em Pappus (*Treasury of Analysis*) da forma:

> A Análise é o *caminho* do que se está procurando, como se estivesse conhecido e através de suas consequências em direção a algo que é estabelecido previamente pela Síntese ... mas, na Síntese, *ao contrário*, assumimos o que foi obtido por último na Análise como já tendo sido estabelecido e, colocando agora na ordem natural, como precedentes, o que antes seguia da suposição inicial; adequando-os uns aos outros, atingimos uma construção completa do que era procurado. Isto é o que chamamos de Síntese (KLEIN, 1992, p. 260. Tradução nossa).

A respeito do conceito de procurado e admitido, como conhecido para começar um diálogo, já foi empregado num sentido geral e também no contexto de ensino e aprendizagem da Filosofia platônica como, por exemplo, o interrogatório do escravo em Mênon, pois a maneira de buscar a verdade, ou a coisa desconhecida assumida como conhecida, no início do procedimento de resolução de uma situação qualquer, que se queira investigar é a raiz da potência analítica nos diálogos platônicos.

Klein (1992) diz que Pappus distinguiu dois tipos de Análise: i) *teorética* – que procura a verdade, isto é a *zetetic;* ii) *problemática* – que realiza o que deve ser feito, ou seja, a *poristic*. Isso significa que o primeiro passa da Análise à Síntese, representando a *apodeixis* diretamente e a segunda é o contrário, ou seja, da Síntese à Análise, elaborando a construção ou mesmo um *porisma* que é a descoberta de alguma proposição implícita na situação. A Análise é a descoberta de procedimentos, isto é, a maior coisa que a Análise possui é o poder que ela tem de possuir muitas demonstrações sobre particulares (KLEIN, 1992, p. 261). O fato de verificar se o número encontrado satisfaz as condições apresentadas pela situação, ou seja, a *apodeixis*, aliada à compreensão de Vieta

do método de Pappus nas resoluções encontradas na Aritmética de Diophantus, foi crucial para a terminologia em sua Logística Especiosa.

É fato ser característica do procedimento de Diophantus operar com o desconhecido como se fosse algo já dado. Isso significa elaborar ou construir uma igualdade, envolvendo relações de quantidades conhecidas com quantidades desconhecidas. Nesse aspecto, estão presentes aspectos analíticos no método Diophantino, isto é, o desencadear do processo de 'construção' passo a passo até chegar ao valor procurado.

O ponto de partida, de acordo com Klein, da renovação de Vieta é o seguinte: ele reúne fatos apresentados por Pappus referentes aos 'teoremas' geométricos (tais como encontrados em Euclides) e o procedimento presente nos problemas da Aritmética de Diophantus. Na Análise, ou a *Arte Analítica* de Vieta, ele capturou do método de Pappus, mesmo sabendo que Pappus estava preocupado apenas com problemas geométricos. Por isso, a junção com os procedimentos Diophantinos propiciou a ampliação de sua Logística. Mas há situações na Matemática antiga que não podem ser construídas, como por exemplo, a duplicação do cubo. Regiomontanus (1436-1476) diz que, em situações dessa natureza em que não se admite solução geométrica, podemos tentar alcançar a resposta por meio da arte da coisa (*cossic*) segundo Klein (1992, p. 261), pois, nas soluções geométricas, as magnitudes procuradas são objetos – números encontrados por meio de construção.

Então, na Matemática antiga até o início do século XVI, havia insuficiência na resolução de problemas matemáticos, pois tinha dependência do objeto – era necessário ter o objeto para construir a solução. Essa dificuldade é devido ao fato de que não se conhecia o método algébrico genuíno que começou com Vieta.

> Adrianus Romanus (1561-1615) no final de seu trabalho propôs como resposta ao problema de construção a todos os Matemáticos de todo o mundo em 1595 um problema que ele pegou do livro VII de Pappus e resolveu-o sob o nome de 'Apollonius Gallus', acrescentando na conclusão: 'Os problemas que Regiomontanus resolveu algebricamente, ele confessa que alguns não poderiam ser construídos *geometricamente*. Pois, *a Álgebra que estava sendo praticada até aquele momento era impura*? Amigos do conhecimento abrace a *nova Á*lgebra; dê adeus aos métodos antigos e olhe para o lado legítimo e bom da nova Álgebra' (KLEIN, 1992, p. 157. Tradução nossa).

Esta nova e purificada Álgebra denominada *Arte Analítica* é, para Vieta, tanto ‘Geométrica’ como ‘Aritmética’, ou seja, o processo de ‘generalização’ não está confinado, exclusivamente, a números ou figuras, embora Vieta ficasse ainda ‘colado’ em descobrir construções geométricas e numéricas. Entretanto, o número em seu método adquire *status* de espécie, descolando um pouco do número como ideia do Ser como é na Filosofia platônica. O Ser do número, para Vieta, pode ser tanto de quantidades de objetos como mensuração geométrica e, também, como medida de volumes, por exemplo.

Na concepção de Vieta, expresso em sua ‘Álgebra’ ‘geral’, há similaridade com as magnitudes geométricas e numéricas presentes na teoria geral das proporções de Eudoxus, pois o único lugar na Geometria de Euclides que se pensou na semelhança é no livro V sobre proporções, pois, no restante da Geometria Euclidiana, há predominância de figuras distintas e da construção. Entretanto, se os números são concebidos como representantes de relações, isso nos remete à seguinte pergunta: como identificar essas relações? Portanto, na teoria geral das proporções de Eudoxus, o ‘geral’ não significa ‘geral’ do século XVII e muito menos do século XIX, mas indica que os valores trabalhados nas proporções têm características iniciais de ‘universalidade’ (segmentos, áreas ou volumes).

Aristóteles já havia usado a teoria das proporções Eudoxiana, juntamente com as ‘noções comuns’, como exemplo clássico de uma disciplina que tem um ‘objeto geral’, não vinculado a um reino específico de objetos (KLEIN, 1992, p. 158). Diz Aristóteles: ‘Dentre as Ciências Matemáticas (...) Geometria e Astronomia lidam com determinado tipo de natureza, enquanto na Ciência, em geral, é comum tratar de todas as coisas’ (*Methaphysics* E I, 1206 em 25-27). Na *Methaphysics* M 2, 1077, segundo Klein (1992, p. 159), a teoria das proporções de Eudoxus pode ser usada para tratar ‘genericamente’ situações que envolvem números os quais remetem à ideia de comprimentos, áreas e volumes apenas, ou seja, trata-se de um corpo de conhecimento em que o seu ‘teorema’, interpreta Vieta, indica números e magnitudes que não são idênticos nem com a Geometria e nem com a Aritmética. Com isso em mente, Vieta afirma, no final do segundo capítulo de *Isagoge,* que toda ‘equação’ é uma solução de uma ‘proporção’ e,

correspondentemente, toda proporção é a ‘construção de uma equação’ (KLEIN, 1992, p. 324).

Isso significa que Vieta trata equações e proporções juntas, indicando que sua Álgebra figura tanto como teoria geral de proporções como teoria geral de equações. Klein (1992, p. 262) argumenta que a ‘Álgebra’ está no contexto da Matemática - Geometria e Astronomia, Aritmética e Música dos antigos pitagóricos, atribuindo-lhe, juntamente com a ‘música’, o reino das quantidades relacionais: ‘os aritméticos consideram os números *em si mesmos*, os musicistas e os *algebristas* de fato conhecem números, mas em suas relações *com alguma coisa’*. Isto é por assim dizer a primeira introdução ‘oficial’ da Álgebra no sistema da Ciência reconhecida pela academia.

Esse contexto destaca a importância da interpretação da teoria das proporções tanto na compreensão da incomensurabilidade como no tratamento do conceito de número como símbolo geral, ou seja, a *intensão* desse conceito se ‘materializa’ em situações *extensionais* diversas.

> A importância do conceito da teoria das proporções na origem da Ciência moderna não pode ser ignorada. Visto que há em Thomas Bradwardine (primeira metade do século XIV) e Albert de Saxony (segunda metade do século XIV) uma tradição acadêmica fixa relativa a estes assuntos que, através da mediação de intelectuais tão diferentes como Nicolaus de Cusa e Luca Pacioli, exerceram influências cruciais na Ciência dos séculos XVI e XVII. Esta influência teve duas tendências que têm uma origem comum, que se funde novamente; uma dessas tendências lida com o atual estudo e a tentativa de mostrar a importância da Álgebra; a outra lida com os fundamentos da *Física* e *Astronomia* moderna. Galileu, em sua teoria do movimento, bem como Kepler, em suas investigações astronômicas, está – embora, isto seja geralmente negligenciado – em busca de determinadas ‘proporções’. Por um lado, o trabalho de Kepler sob influência da Ciência antiga, especialmente dos platônicos *Timaeus* e de Proclus, enquanto, por outro lado, Galileu é estimulado em seus estudos da Física Matemática por disciplinas práticas de estática, Mecânica, hidráulica, arquitetura militar etc., e por meio do trabalho de Euclides e Arquimedes; ainda ambas as tendências continuam a tradição pitagórica-platônica, embora, em diferentes aspectos e com tendências divergentes. Para eles, como para Descartes, a principal orientação de suas investigações é o significado das palavras *proportio vel ordo* (proporção e ordem), apesar de o significado dessas palavras usadas por eles representarem maior transformação do significado correspondente às palavras *analogia* e *taxis* gregas (KLEIN, 1992, p. 264. Tradução nossa).

Vieta foi um preservador da doutrina tradicional, mas a diferença crucial surge na concepção que Vieta tem de *objeto*, ou seja, a intenção de Vieta está impregnada do contexto do século XVI que é o entendimento matemático da

Physis, enquanto a intenção tradicional está voltada para a composição da substância do Ser. Klein (1992, p. 161) conta que os pilares de Vieta são: i) o entendimento do conceito de 'Análise', relacionado com a Geometria (método de Pappus) por um lado, e pelos procedimentos presentes na Aritmética de Diophantus, por outro lado; ii) o uso do conceito de *eidos* de Diophantus, ampliando a ideia de *eido* platônico e iii) a interpretação da teoria das proporções como teoria das equações. Isso significa que a igualdade, por meio da simbolização, foi usada para generalizar. Perpassa nesses pilares a questão da intencionalidade expressa na transformação do conceito de *arithmos* para o conceito de espécie, evidenciando a Logística Especiosa de Vieta, a partir das ideias da Logística numérica Diophantina.

O objeto da Matemática antiga estava diretamente relacionado a número como ideia e como calculação, às magnitudes (comprimentos, áreas e volumes) e à relação entre eles, desde que fossem do mesmo gênero. Nos séculos XVI e XVII, a espécie de Vieta e o 'x' de Descartes já indicam números como grandezas geométricas e Aritméticas, mas, ainda, não é o 'x' da Álgebra abstrata do século XIX, pois, nesse caso, o 'x' não está representando absolutamente nada, faz parte apenas de um argumento lógico.

Na Aritmética de Diophantus, são admitidos apenas números determinados de mônadas, mesmo quando são subdivididos; então é nesse aspecto que o procedimento de resolução de Diophantus está relacionado com a Análise e Síntese na concepção de Vieta. Nas soluções geométricas, a construção é a primeira parte da Síntese, o *apodeixis* que segue utiliza relações entre grandezas dadas desde o início, juntamente com as que foram acrescentadas para provar que a construção satisfaz as condições da situação.

> Nos problemas Aritméticos de Diophantus, o último passo da Análise, ou seja, a calculação final que produz o número procurado é, ao mesmo tempo, o primeiro passo da Síntese – a computação final realmente corresponde à 'construção geométrica' (KLEIN 1992, p. 162. Tradução nossa).

A arte analítica de Vieta está no limiar entre a 'analítica' de Diophantus e a 'analítica' geométrica, ou seja, está entre a computação dos números e as transformações em equações, significando que o processo de determinação da solução do indeterminado que Diophantus utiliza, torna-se análogo à Análise

geométrica. Entretanto, Diophantus percebe apenas possibilidades limitadas no uso de seu procedimento de números determinados, mas Vieta vai além, pois observa multiplicidades arbitrárias de opções. É nesse aspecto que Vieta amplia o conceito de número Antigo começando a operar com conceitos, com símbolos, ou seja, com intensões por meio de métodos no sentido instrumental funcional.

A Análise está interessada na generalidade do procedimento, enquanto a compreensão Sintética da Matemática grega antiga está preocupada com o que construir com os objetos da Matemática. Os dados que a Análise geométrica utiliza são grandezas dadas com determinadas dimensões. É nesse aspecto que Vieta estabeleceu a 'transferência' da Análise geométrica para Análise Aritmética de Diophantus, ou seja, os números dados (possíveis soluções) de um problema adquirem caráter de um ser indeterminado e não apenas de números determinados. Nesse sentido, o procedimento de solução pode ser 'generalizado', pois, segundo Klein (1992, p. 164), nesse processo de solução há três estágios: i) a construção da equação; ii) a transformação da equação para o qual o problema é submetido até chegar à forma canônica, fornecendo a solução que, a princípio, era 'indeterminada' e iii) a exploração numérica do último valor encontrado, no intuito de determinar se o número achado satisfaz às condições do problema. Os dois primeiros estágios tratam da 'Análise', mas o último já pertence à Síntese, pois é similar à construção geométrica.

O que chamou a atenção de Vieta é como Diophantus trabalhou com os 'dados' (números que, no início, supostamente satisfazem a situação proposta), ou seja, Diophantus representa esses dados pela sua *eide*, isto é, Diophantus, conscientemente ou não, já opera com números como gênero geral.

> Neste ponto, o modelo de Diophantus pode ser direcionado a: representar exatamente o número desconhecido – embora seja em si também determinado – pelo seu *eidos*, sua '*espécie'*, que deixa a questão do 'quantos' provisoriamente indeterminado, portanto *cada número pode ser expresso pela sua 'espécie'.* Então, a *eide* do desconhecido e sua potência aparecem em Diophantus como nova unidade de calculação, enquanto a computação toma lugar em termos de números determinados, a calculação que é realizada exclusivamente com números, 'espécie', deveria ser inteiramente deslocada para o domínio do 'indeterminado'. Este último passo crucial é também considerado por Vieta. Ele toma consciência e confirma uma longa prática usada entre os antigos (encontrada especialmente em Diophantus), embora não suficientemente clarificada por eles. No decorrer do entendimento deste último passo, ele é forçado a

> reinterpretar pontos essenciais da Antiguidade (KLEIN, 1992, p. 165. Tradução nossa).

Essa atitude de Vieta em trabalhar com espécies, trazendo o método da Análise geométrica para ajudá-lo a compreender os procedimentos Diophantinos, faz com que ele efetue calculações em sua *arte analítica,* considerando o *arithmo* grego como espécie. Essa metodologia ele chama de Logística Especiosa, ampliando a Logística Numérica de Diophantus. O termo Logística para Vieta significa arte de calculação, isto é, arte teórica de calculação não se referindo apenas a relações particulares de um número com outro, fato que era comum na interpretação platônica de Logística.

O conceito de *eidos* em Vieta adquire conceito de espécie[67], tendo características universais vinculadas ao conceito de número e esse procedimento 'geral' da espécie representa o aspecto fundamental de sua *arte analítica* geral que foi influenciada pelo conceito de *eidos* de Diophantos. Essa interpretação do conceito de espécie, em Vieta, culmina no terceiro tipo de Análise, a exegética – arte de produzir e exibir. A *arte analítica* de Vieta passa a ser da forma:

> i) uma arte zetética, pela qual se transforma um problema numa equação ou proporção, ligando grandezas desconhecidas com grandezas conhecidas, (ii) uma arte porística que é um processo a partir da equação ou proporção e, consequentemente, o teorema estabelecido é examinado se é verdadeiro ou não, e (iii) uma arte exegética, é um método a partir do qual a grandeza procurada é determinada com base em uma equação ou proporção estabelecida, ou seja, a procura da magnitude que *é em si o ser procurado*. Essas três partes da Arte Analítica têm como função e podem ser definidas como a disciplina que procura a verdade em Matemática (KLEIN, 1992, p. 265. Tradução nossa).

A característica fundamental de Vieta é que ele não está procurando verdade em si, como a Filosofia platônica, mas procedimentos ou métodos matemáticos para descobrir coisas (números que representam grandezas) desconhecidas de forma geral, ou seja, um método aplicável tanto na Aritmética como na Geometria e também na interpretação de fenômenos da Natureza física, chamada Física Matemática. A exegética de Vieta representa o último estágio da resolução de uma equação ou proporção e, por isso, acaba sendo uma parte da Síntese. Visto que, segundo Klein (1992, p. 267), a exegética fica evidente

[67] Segundo Abbagnano (2007, p. 411), o conceito de espécie em Aristóteles diz respeito ao atributo que se aplica essencialmente a uma pluralidade de termos que diferem especificamente entre si. Dessa forma, o número como espécie começa a 'descolar' do objeto, começando com isso o processo de desontologização.

quando a equação procurada tiver sido colocada na forma canônica, pois, nesse momento, a procura pela resposta, sendo números, comprimentos, planos ou volumes, corresponde ao processo de encontrar o desconhecido. Dessa forma, a exegética compreende uma série de 'regras' que possibilita alcançar o valor procurado, não ficando apenas com exemplos ou porismas como no caso da Análise de Pappus. Isso é importante, pois busca explicar como o valor procurado é encontrado. A Analítica de Vieta é uma técnica, ou seja, um instrumento que utiliza meios auxiliares na resolução de problemas numéricos ou geométricos gerais na descoberta Matemática, ou melhor, um '*Organon'* no reino de todo e qualquer que seja o conhecimento possível.

> A batalha entre os proponentes do silogismo Peripatético e a Análise Matemática sobre a primazia de suas respectivas interpretações relativas à estrutura do mundo, que são, portanto, iniciadas no século XVII, ainda está sendo travada atualmente, só que agora sob a forma do conflito entre 'lógica formal' e 'lógica Matemática' ou 'Logística', embora suas pressuposições ontológicas tenham sido completamente obscurecidas (KLEIN, 1992, p. 169. Nossa tradução)

É nesse contexto operacional que a analítica geral, a 'nova Álgebra' ou a Logística Especiosa de Vieta, cumpre duas funções, segundo Klein (1992, p. 169): por um lado, trata de procedimentos gerais da Álgebra 'pura' e, por outro lado, como procedimento análogo à Análise geométrica, relacionada com a Aritmética de Diophantus. Vieta supõe que Diophantus resolveu problemas aritméticos com ajuda da zetética, mas escondeu esse fato, pois, nas palavras de Vieta:

> A Zetética, em Diophantus, foi empregada mais sutilmente em todos aqueles livros que foram escritos sobre o tema da Aritmética. *Mas exibiu-a como se fossem fundados somente em números e não em espécie (embora ele mesmo a usou) de modo que sua sutilidade e habilidade podem ser mais admiradas*, visto que as coisas que aparecem muito sutis e obscuras para uns que calculam com números [isto é, Logística prática numerosa] aparecem muito familiares, imediatamente óbvias, para aqueles que calculam com espécies [isto é, Logística prática Especiosa] ' (KLEIN, 1992, p. 345. Tradução nossa).

A concepção de espécie[68], para Vieta, segundo Klein (1992, p. 171), são signos de estrutura espacial que produzem sentidos perceptíveis, isto é, grandezas, não apenas números, evidenciando o fato de que, nas mãos de Vieta,

[68] O *arithmo* interpretado como espécie em Vieta refere-se a tipos ou classes de números, indicando generalidade, ou seja, um signo que designa uma coisa aplicável à Aritmética e à Geometria e, como consequência, aos problemas da Física Matemática.

o conceito de *eidos* instrumental de Diophantus adquiriu um tipo de generalização em que a espécie se torna objeto operacional numa disciplina Matemática 'geral', não identificado diretamente nem com a Geometria e nem com a Aritmética.

A interpretação de Klein (1992) sobre o conceito de espécie em Vieta coaduna com o entendimento de Otte (2011) sobre signo, pois Otte nos diz que "um signo tem significado, mas não existe como coisa concreta, pois em geral é um tipo e não uma coisa visível ou tangível". Além do mais, Otte (2011) afirma que a "interpretação de um signo consiste na construção de outro signo". Por exemplo, o elo entre '2x' e 'ax' evidencia o sentido do signo '2' e 'a', pois o signo '2' para Diophantus indica um objeto diretamente (duas coisas definidas) e para Vieta tem caráter 'geral' de espécie, indicando conceito de segunda intenção, isto é, dualidade em geral (a operacionalização com essa simbologia caracteriza a abstração simbólica). Nesse sentido, o símbolo 'a' tem característica mais geral do que o signo '2'. Por isso, a Aritmética de Diophantus é chamada de *Logística numerosa* (baseada em números) e a de Vieta de *Logística Especiosa* (baseada em espécies – letras e signos).

Além do mais, o conceito de espécie está diretamente relacionado com a Logística numérica de Diophantus. Entretanto, pressupõe homogeneidade, dependendo, evidentemente, do conceito de *arithmos* com suas respectivas relações. Nesse aspecto, Vieta estabelece regras especiais de calculação com espécies, em que cada espécie é representada por uma letra, como, por exemplo: $\frac{Acubos - B\,sólido\ 3}{C\,em\,E\,quadrado}$, leia: O cubo de A menos 3 vezes sólido B, dividido por C vezes E quadrado. Na notação moderna, fica $\frac{x^3 - 3b}{cy^2}$ (KLEIN, 1992, p. 173).

Segundo Berghe&Devreese (2008, p. 186), o polinômio $5bx^2 - 2cx + x^3 = d$, na notação de Vieta, era representado na forma:

$$B5\ em\ A quadrado\ -\ C\ plano\ 2\ em\ A + A\ cubo\ \ igual\ D\ sólido$$

Observe que, no primeiro termo do polinômio, B é linear e A quadrado formam a dimensão três. No segundo termo, C é linear e A plano formam dimensão três. O terceiro termo está na dimensão três. No segundo membro da

igualdade, D é sólido (dimensão três). Para Vieta, os números e símbolos nas operações deveriam ter a mesma dimensão (homogeneidade), evidenciando a continuidade com a interpretação dos antigos.

Essa abordagem indica ampliação no conceito de número que tem, como ponto de partida, o conceito de *arithmo* antigo a tratar de quantidades determinadas de objetos, para o início do tratamento do conceito de número como símbolo em geral.

Entretanto, nessa forma de operar com espécies, há a lei fundamental da homogeneidade, pois, no início do capítulo III do Isagoge, Vieta diz, segundo Klein (1992, p. 324), que somente grandezas homogêneas podem ser comparadas uma com as outras, indicando forte ligação com a concepção grega antiga. Essa homogeneidade, na terminologia moderna, pode ser interpretada no sentido de que os números de uma equação devem ter a mesma dimensão. Em outro contexto, isso significa que o produto de dois números se refere à área, indicando a estrutura do mundo antigo. Neste ponto, Descartes avança, pois, em sua Álgebra de segmentos, o produto de dois números é um segmento e não apenas área.

> [...] Na Matemática antiga, a Aritmética era uma forma de Geometria métrica. Isso se evidencia na tentativa de Aristóteles fornecer uma base conceitual e Metafísica para a concepção de número que vigorava em sua época. Ele entendia os números como segmento de reta (puramente intelectuais), sujeitos, em sua manipulação, a todas as restrições da manipulação dos segmentos de reta concretos. Aliás, quando Aristóteles e os matemáticos gregos e alexandrinos, de modo geral, falavam de números unidimensionais, de números planos (bidimensionais) e de números sólidos (tridimensionais), era exatamente isso o que pretendiam dizer. A Geometria não fornece apenas uma notação à Aritmética, e nenhum autor grego ou alexandrino jamais falou dos números como sendo apenas geometricamente representados. Esse tipo de interpretação geométrica do número fica claro na prática Matemática grega e Alexandrina. As proposições Aritméticas (vejam-se, por exemplo, os Livros 7 e 9 dos *Elementos* de Euclides) são formuladas em termos de segmentos de retas, não porque seja essa a forma como os números são representados, mas porque é isso que eles são. A prova mais marcante dessa ideia encontra-se na maneira como eram efetuadas as operações Aritméticas. Consideremos, por exemplo, o caso da multiplicação. Nela, multiplicam-se segmentos de retas por segmentos de retas, por exemplo, *axb* será um retângulo com lados de comprimentos *a* e *b*, enquanto *axbxc* será uma figura sólida de lados *a*, *b* e *c*. Embora lidamos com números abstratos, estamos sempre multiplicando números de algo por números de algo e, por conseguinte, há uma mudança dimensional na multiplicação, o que é indicado pelo fato de não podermos multiplicar mais de três números ao mesmo tempo, uma vez que o produto de três números (lineares) é um sólido, o

> que esgota o número de dimensões disponíveis. Por fim, essa concepção extraordinariamente restritiva da Aritmética do número encontrava um paralelo numa concepção igualmente restritiva da Aritmética e da Geometria, segundo a qual a finalidade do exercício era calcular um determinado número ou construir uma determinada figura, respectivamente. Para os matemáticos da Antiguidade, o problema só estava resolvido quando alguém conseguia calcular ou construir esse número ou essa figura determinada. E, no caso da Aritmética, apenas os números naturais eram admissíveis como soluções: os números negativos, em particular, não o eram, sendo vistos como números 'impossíveis' (GRAUKROGER apud VAZ, 2007, p. 145).

A lei de homogeneidade de Vieta estava interessada na calculação que, em última instância, depende da contagem, pois pressupõe unidades de cálculos homogêneos (mônadas). Nesse sentido, a Logística Diophantina se faz presente, porque Diophantus operava com unidades de mônadas sem estar preocupado com a essência. Diante disso, as grandezas conhecidas ou desconhecidas são tratadas como unidades, representando uma determinada quantidade de *arithmos* de mônadas.

> A universalidade do conceito de espécie, para Vieta, parece irrevogavelmente dependente do conceito de '*arithmos'.* Ele *preserva o caráter de* '*arithmos'* como '*número de*...' *transformando-o de maneira peculiar*. Enquanto cada *arithmos* pretende *imediatamente coisas ou unidades em si* cujo número o representa, a sua letra ou signo pretende *diretamente o caráter geral do ser do número* que pertence a cada número possível, ou seja, pretende-se o 'número em geral' imediatamente, porém as coisas ou unidades que estão à mão, têm um número somente indiretamente (KLEIN, 1992, p. 174. Tradução nossa).

Na linguagem escolar, o símbolo 2 que pode ser escrito de maneiras diferentes, por exemplo, pode designar uma quantidade variada de objetos, ou seja, não indica diretamente um objeto. No caso da letra ou signo, já representa, intencionalmente, o objeto de segundo propósito, isto é, conceito que se refere a outro conceito, designando, indiretamente, objetos específicos e não o ser. Esse caráter geral do número, como quantidades de objetos, foi capturado por Vieta, a partir do *eido* Diophantino, como parte de processos de operação, transformando o objeto de calculação em números gerais. A espécie em si torna-se formações simbólicas – a saber: formações cuja objetividade potencial meramente é compreendida como uma objetividade real (KLEIN, 1992, p. 175).

A espécie tratada como 'números algébricos' ou mesmo 'número geral' forma o objeto da Logística Especiosa de Vieta, pois se preocupa com regras e procedimentos na resolução de problemas gerais por meio de equações e proporções. Nesse aspecto, sua *arte analítica* pode ser chamada de *Mathesis*

Universalis, ou seja, a arte prática da descoberta adquire um lugar fundamental no sistema de conhecimento em geral.

> De agora em diante, a *ontologia*, que é fundamental na Ciência dos antigos, é substituída por uma disciplina simbólica cujas pressuposições ontológicas são deixadas sem esclarecimento. Esta Ciência que visa, primeiramente, a compreensão da totalidade do mundo, amplia lentamente seu sistema da Física Matemática. Com esta disciplina, as coisas do mundo não são mais compreendidas como coisas contáveis, nem o mundo em si é compreendido como uma *taxa* determinada pela ordem dos números; mas, a *estrutura* do mundo é capturada por meio de cálculos simbólicos e compreendida num *percurso 'legitimamente' de 'eventos'.* A mesma Natureza do mundo que é compreendida pelo homem é doravante guiada pelo conceito de 'número' simbólico, um conceito que determina a moderna ideia de Ciência em geral (KLEIN, 1992, p. 184. Tradução nossa).

A transformação no conceito de *Arithmos,* desde a concepção na Logística grega antiga até a forma de espécie na analítica geral de Vieta, caracteriza a 'origem' do conceito simbólico de número moderno. Isso porque, nesse contexto, está presente a independência ontológica do conceito de *eidos,* indicando o número como espécie, ou seja, um objeto em si e não o ser em si. Essa forma de abordar a calculação propiciou tratamento dos fenômenos da Natureza em termos de 'fórmulas – operações algorítmicas' Matemáticas - possibilitando generalização e, com isso, a previsão de fatos naturais torna-se possível.

A simbolização proposta por Vieta enfatiza a força do simbolismo algébrico no que diz respeito à interpretação dos objetos matemáticos e à interpretação de fenômenos naturais. O símbolo zero foi uma descoberta importante para a Aritmética e a notação simbólica operacional de Vieta foi excepcional para nova Álgebra, bem como para as Ciências como um todo, pois o 'x' começa a ter 'existência', independente do objeto a ser representado, transcendendo o ente e isso não é apenas um simples formalismo.

> Antes de introduzir a notação literal, era possível falar apenas de expressões individuais; cada expressão tal como $2x+3; 3x-5; x^2+4x+7; 3x^2-4x+5$ tem uma individualidade. Mas, com a notação literal, torna-se possível passar do individual para o coletivo, isto é, do 'alguns' para 'todos'. A forma linear $ax+b$ e a forma quadrática $a\,x^2+bx+c$ são consideradas espécies. E isso faz com que seja possível a teoria de funções, que é a base de toda a Matemática aplicada (DANTZIG, 2007, p. 90. Tradução nossa).

Nessa nova maneira de representar objetos diretamente ou não e por meio de identidades surge a necessidade da ampliação do conceito de número. Em Dantzig (2007, p. 91), há situações que evidenciam essa mudança do ponto de vista do objeto número, por exemplo, as igualdades:

$$A: x+1=4,\ B: y+4=1,\ C: 3a=6,\ D: 3z=11,\ E: m^2=4,\ F: n^2=5\ e\ G: t^2=-1$$

Cada um dos símbolos (signo-letra) nessas identidades assume uma característica específica em que seus respectivos valores indicam a transformação do conceito de número, porém ainda estão 'presos' a um objeto individual real ou imaginário. Quando consideramos $x+b=a;\ bx=a\ e\ x^n=a$ em que o 'x' indica o objeto procurado, temos a generalização do método, pois surge a necessidade de operar com símbolos e estabelecer as condições de 'existência' do 'x' bem como trabalhar com cada membro da equação como se fosse uma função, estudando suas variações como fez Stevin.

A letra-signo, em Vieta, significa o que é geral de uma quantidade. Não apenas as coisas ou unidades numa quantidade definida particular, isto é, o 'Ser' do objeto de sua *arte analítica* não deve ser entendido no sentido platônico e nem no sentido abstrato aristotélico, mas como um símbolo do qual sua objetividade é compreendida como uma objetividade real, relacionada diretamente com Aritmética e Geometria.

O início do simbolismo algébrico moderno, do ponto de vista da relação complementar (intensão e extensão) entre símbolo e objeto, está diretamente relacionado com a transformação do conceito e uso da Logística, pois, em Platão, a Logística trata da relação de um número com outro de forma específica ou singular, mas, na reinterpretação de Vieta, via estudo da Aritmética de Diophantus, a Logística começa a não se referir apenas às relações de particularidade entre números, porém incorpora, no conceito de *arithmo,* um sentido mais geral, chamado de espécie, via simbolização. Isso legitima o fato de que o pensamento precisa de representações, contudo as representações não podem ser confundidas com os objetos.

3.5. A concepção de número em Descartes[69]

O pensamento de Descartes, segundo as regras para direção do espírito, tem como pressuposto a simbolização algébrica, do ponto de vista da relação entre Aritmética e Geometria, elaborada por ele a partir da concepção antiga. Segundo Klein (1992, p. 197), a simbolização algébrica em Descartes não era algum tipo de Aritmética, mas uma 'Arte' geral. Essa arte geral adquiriu *status* de Ciência quando começou a ser utilizada para resolver problemas físicos bem como da própria Matemática.

> Temos a prova disso nas mais fáceis das Ciências, a Aritmética e a Geometria, pois reparamos que os antigos geômetras se serviram de uma análise que estendiam à resolução de todos os problemas, mas da qual, com ciúmes, privaram a posteridade. E agora existe uma espécie de Aritmética, que se chama Álgebra, feita para operar sobre quantidades o que os antigos faziam sobre figuras. Essas duas Ciências não são outra coisa que os frutos naturais produzidos pelos princípios inatos deste método (DESCARTES, 2010, p. 415).

A questão de Descartes ter dito que os antigos privaram a posteridade pode ter sido motivado pela hipótese de que os gregos antigos se preocupavam com os efeitos e não com as operações. A preocupação com as operações (métodos gerais) surge nos séculos XVI e XVII com Stevin, Vieta e Descartes, por exemplo.

Segundo Descartes (2010, p. 408), a Aritmética e Geometria são áreas do conhecimento que nos reconduzem à procura da verdade, pois são isentas de falsidade e incerteza. O aspecto simbólico algébrico de Descartes consiste numa metodologia em que sua *Mathesis Universalis* tem, como ponto de partida, o objeto geral em que o mundo é compreendido como grandezas extensas. Contudo o entendimento de uma arte geral para resolver problemas da Aritmética e da Geometria já havia sido tratado no *Isagoge* de Vieta, em 1591, 'sem o conhecimento' de Descartes. Uma característica fundamental no trabalho de Descartes é a relação figura-símbolo, ou seja, as operações com figuras por meio de símbolos.

---

[69] No apêndice 'H', o texto completo que trata da concepção de Descartes sobre número em Klein (1992) está traduzido integralmente.

A concepção de Descartes de figura-símbolo estabelece conexão entre dois tipos de pensamento, segundo Klein (1992, p. 198):

i) O entendimento de que a Álgebra trata de uma teoria de proporções, em que o objeto é compreensível apenas simbolicamente, adquirindo significado a partir do reino numérico.

ii) A identificação por analogia e a relação do objeto simbólico matemático com os problemas da Física.

Está presente, na concepção de Descartes, a relação entre o conceito de número simbólico geral com possibilidades de aplicações por meio de um método em que o conceito grego antigo de número não coaduna, ou seja, o número começa a ser tratado como relações gerais (tanto na Física como na Matemática) e não somente relações entre segmentos, áreas e volumes como na teoria das proporções de Eudoxus e em Vieta.

Na regra XII de Descartes, ele afirma que o conhecimento leva em consideração duas coisas: nós, que conhecemos e os objetos que devem ser conhecidos. Em nós, há somente quatro faculdades que usamos para conhecer as coisas, a saber: o entendimento, a imaginação, os sentidos e a memória. O entendimento, por si só, é capaz de perceber a verdade, mas acaba sendo ajudado pela imaginação, sentidos e memória. Em relação aos objetos, basta examinar três coisas: em primeiro lugar, analisar o que se mostra espontaneamente; depois, como se conhece uma coisa por outra e, enfim, o que se pode deduzir da coisa.

A imaginação, para Descartes, é essencial a fim de compreender as Ciências da Natureza e a Matemática, pois o espaço físico é, por analogia, similar ao espaço geométrico e o corpo do espaço físico é extenso e, nessa extensão (*res extensa* - a extensão da substância, isto é, o mundo externo), há figuras geradas pelos movimentos e isso pode ser entendido por meio da imaginação, pois a imaginação é uma faculdade mediante a qual a mente (*res cogitans* - substância do pensamento: inteligência, alma, mente, consciência, num sentido amplo no interior do mundo) pode formar imagens das coisas materiais mesmo na

ausência delas. As figuras têm um papel importante na Filosofa de Descartes, pois estão relacionadas a movimentos e representações na mente.

> É preciso conceber que, quando o sentido externo é posto em movimento por um objeto, a figura que ele recebe é transportada para outra parte do corpo, chamada senso comum, instantaneamente e sem que qualquer ser passe, em realidade, de um lugar a outro. Exatamente da mesma maneira que agora, quando escrevo, compreendo que, no instante exato em que cada caractere é traçado no papel, não apenas a parte inferior da pena é posta em movimento, mas qualquer movimento, por pequeno que seja não pode ser nela produzido sem ser transmitido ao mesmo tempo para toda a pena, e que todos esses variados movimentos são igualmente descritos no ar pela parte superior da pena, embora compreenda que nada de real passe de uma extremidade a outra (DESCARTES, 2010, p. 445).

Dessa forma, a imaginação capta o movimento e a expressão desse movimento, via representação, torna-se evidente, pois nada vem mais facilmente aos sentidos do que a figura já que podemos ‘tocar’ ou ver. Assim, a ideia de figura é tão simples e comum que é praticamente inerente ao corpo físico. Nesse sentido, é que há relação entre o mundo físico e o mundo geométrico. Portanto, a imaginação, em Descartes, adota a forma de representação esquemática das coisas, que acaba produzindo dimensões de maneira mais ampla do que a apreensão direta.

Essa figuração do movimento culmina na representação por meio de segmentos de retas e, nessa perspectiva, as figuras tornam-se modelos da Física que está diretamente relacionada com a simbolização algébrica por meio de um novo conceito de número, isto é, Descartes associa a figura com símbolos, exatamente porque a figura é uma representação de um evento. Essa representação é uma maneira de acessar o que se pretende expressar, ou seja, a figura está, de certa forma, unida à extensão.

> Quando falamos de ‘*números’*, por exemplo, temos que ‘representar’ a nós mesmos um objeto que pode ser medido por ‘uma multiplicidade de unidades’. Mesmo se o intelecto ‘despido’ pretende a ‘simples multiplicidade’, ou seja, a multiplicidade como tal, não devemos ainda cometer o erro de acreditar que o conceito de *número* (para o qual corresponde a ‘ideia’ de *número* na imaginação) exclui a *res numerata*, a ‘coisa enumerada’ em si (KLEIN, 1992, p. 199. Tradução nossa).

O entendimento do conceito de números para Descartes pode também ser obtido, exclusivamente, por meio do intelecto e isso é uma nova concepção de abstração. O ser abstrato do qual Descartes fala são produtos da ‘nudez’ ou ‘intelecto puro’ apenas, pois a ‘força cognitiva’ que o representa está livre de toda

mistura de imagens e representações, ou seja, está divorciada da ajuda de qualquer imagem física ou fatos isolados (KLEIN, 1992, p. 200. Tradução nossa).

Descartes estabelece uma relação de dependência e independência entre intelecto puro e imaginação. A independência surge no momento em que a mente trabalha com o ‘cinco’, por exemplo, separado de todas as coisas materiais. Quando falamos cinco unidades, estamos usando a imaginação para relacionar a cinco objetos quaisquer. Então, a ‘nudez’ do intelecto separa a coisa de sua enumerabilidade extensiva, não indicando nenhum ser específico verdadeiramente. É nesse sentido que o método em Descartes pode ser aplicado na Aritmética, na Geometria e também na resolução de problemas da Física. Nessa estrutura de pensamento, a força imaginativa torna possível a representação simbólica de determinados conteúdos que foram separados do intelecto puro (KLEIN, 1992, p. 202).

Nessa relação assimétrica entre imaginação e intelecto puro, o processo de abstrair, ou seja, o sair de, produz o símbolo na forma de figura e depois na forma da simbolização algébrica. Nesse momento, surge a diferença entre a concepção grega antiga e a moderna: o fato de que, na concepção antiga, a abstração é ‘direta’ ou ‘imaginativa’, isto é, os ‘*insights’* dos matemáticos antigos pertenciam mais aos olhos e à imaginação do que ao intelecto (KLEIN, 1992, 202). No início dos séculos XVI e XVII, com Stevin, Vieta e, principalmente, com Descartes, emerge a pressuposição de que o intelecto ‘puro’ em si não tem relação com os objetos do mundo, porém é mediado pela imaginação, Descartes elaborou o seu método (regra IV), dizendo que o conhecimento, até então, estava ‘num mar à deriva’, pois não havia um método que realmente mostrasse o caminho para chegar ao entendimento.

Descartes preocupou-se em elaborar um método que pudesse ser utilizado na compreensão das questões das Matemáticas e da Física. Com esse propósito, Descartes estudou tudo que tratava de Aritmética e Geometria, pois, na época, essas Ciências eram consideradas fundamentais para o entendimento de outras Ciências. Nesse estudo, Descartes percebeu que o conhecimento produzido não tinha um sentido objetivo e as demonstrações obtidas eram

superficiais, encontradas mais por acaso do que por um método. Para Descartes, traços de uma verdadeira Matemática podem ser vistos em Pappus e Diophantus.

> Mas acreditaria de boa vontade que, por uma perversa malícia, tais autores a esconderam em seguida; pois assim como muitos artesões fizeram com suas invenções, tiveram medo de que, sendo muito fáceis e simples, seus métodos perdessem valor uma vez divulgadas e, para que nós o admirássemos, preferiram nos dar, em seu lugar, como frutos de seus métodos, algumas verdades estéreis deduzidas por sutileza, ao invés de nos ensinar o próprio método, o que teria feito desaparecer a admiração. Houve, enfim, homens de um grande espírito que se esforçaram neste século por ressuscitá-lo, pois o método, que se chama pelo nome estrangeiro de Álgebra, não parece outra coisa, desde que, entretanto, se chegue a desembaraçá-lo das somas numerosas e das figuras confusas que o sobrecarregam, a fim de que ele possua, doravante, essa clareza e facilidade suprema que se deve encontrar, como dissemos, na verdadeira Matemática (Descartes, 2010, p. 418).

Com esse entendimento, Descartes tratou da Aritmética e da Geometria como estudos gerais das Matemáticas, pois a Matemática se refere a questões de ordem e medida, não se importando que a medida procurada sejam números e/ou figuras presentes em todo ramo do conhecimento por meio da simbolização algébrica. Em Descartes, a representação simbólica figural adquire importância decisiva em sua *Mathesis Universalis*, pois diz respeito ao modo de ser das figuras (segmentos, planos ou retas) e, por meio dessas figuras, Descartes atinge as três dimensões, as raízes e a duplicação do cubo, por exemplo.

> Com ‘grandezas *contínuas* e indivisíveis’, ‘linhas’ e ‘planos’ nos permitem estabelecer proporções (e, portanto equações) somente a partir de suas ‘medidas comuns’, ou seja, por meio de uma unidade particular estabelecida em cada caso. Se essa condição for atendida, então essas grandezas contínuas podem, por sua vez, ser imediatamente entendidas como ‘números’: ‘devemos entender que grandezas contínuas podem, com a ajuda da unidade que foi assumida, algumas vezes, ser reduzida inteiramente à multiplicidade’ (Regra XIV). Aqui a ‘multiplicidade’ significa um daqueles números com o que a ‘Álgebra’ lida estabelecendo proporções entre ‘A’, ‘B’ e ‘C’ (Regra VII); essas proporções não precisam mais se referir a ‘medidas comuns’, pois a medida não é mais nossa preocupação, agora o foco é somente a ‘combinação’ (ordem). Na regra XIV, Descartes disse: ‘Devemos entender que somos capazes de *arranjar a multiplicidade de unidades em uma ordem tal*, que a dificuldade de antes em resolver um problema de medida, agora depende somente em observar uma ordem, e que o auxílio que nossa arte nos oferece nesse processo é muito importante’ (KLEIN, 1992, p. 204. Tradução nossa).

Nesse sentido, a figura, para Descartes, representa uma multiplicidade ou um número, por isso, ele fez associação de números com grandezas com a ideia de mensurar uma imagem em geral. Cada figura passa a ser um ser abstrato, não se tratando de representação como no livro de Aritmética de Euclides e, sim, um

símbolo designado por letras similar ao da Álgebra de Vieta. De forma que esse caráter figural simbólico de Descartes possibilitou a correspondência mútua de linhas com letras em sua Matemática.

Nesse processo de abstração para gerar o símbolo figural letras-signos ou termos mais gerais, a partir da Geometria ordinária, há necessidade da imaginação e, nesse sentido, o símbolo deve ser o mais curto possível. O modo de ser das figuras refere-se aos números algébricos, à espécie de Vieta, ou seja, toda a transformação no conceito de *arithmos* feita por Stevin, Vieta e outros contemporâneos algebristas, Descartes realizou de forma exemplar e única. Tanto Vieta como Descartes criaram sua *Mathesis Universalis*. A diferença é que em Vieta a separação entre Aritmética e Geometria ainda permanecia como a questão da dimensionalidade. Vieta se preocupava com a computação e construções numéricas, preservando a terminologia antiga numa espécie de continuidade; já Descartes uniu as duas disciplinas, formando uma única, livre da questão da dimensionalidade. Descartes começa a entender as figuras geométricas como estruturas cujo ser é determinado, exclusivamente, pelo seu caráter simbólico (KLEIN, 1992, p. 206). Isso significa que Descartes não identifica Aritmética com a Geometria e, sim, reconhece a Álgebra como Logística simbólica com a Geometria, ou seja, a Geometria é interpretada como Ciência simbólica.

Nesse processo de simbolização algébrica moderna, Descartes disse que a ideia de número passa por separação no intelecto, ou seja, o ser abstrato do número está divorciado de sua multiplicidade. Dessa forma, surge a segunda intenção para designar o que está na mente sem referir a coisas, ou seja, existe apenas no intelecto.

> O intelecto, quando recebe a ‘ideia’ de um número como ‘multiplicidade de unidades’ por meio da imaginação, transforma, como sua natureza requer, num conceito. Consequentemente, vê-se a multiplicidade de unidades não mais ‘diretamente’, não mais no ‘ato praticado’, mas ‘indiretamente’, ‘secundariamente’ ou em termos escolástico (no ‘ato significado’ [isto é, um ato cuja intenção do objeto já é um conceito expresso com significado, como oposto ao objeto da primeira intenção que é um ser sobre o qual o *ato praticado* é imediatamente exercido]). Seu ‘objeto’ imediato agora é a sua própria concepção de que a ‘multiplicidade de unidades’, isto é, o conceito de número como tal; contudo, sua multiplicidade em si aparece como ‘algo’, ou seja, como *um* e, portanto, um ‘ser’. Isto é precisamente o que é a

> abstração no que diz respeito ao que o intelecto se constitui. Transforma a multiplicidade de um número em um ser aparentemente 'independente' em um '*ens'*, ou seja, num '*ser racional'.* Agora, isso é de importância crucial – o *ser racional* como 'segunda intenção' é capturado *com a ajuda da imaginação*, de uma maneira tal que o intelecto pode, por sua vez, tomá-lo como objeto no modo de uma 'primeira intenção' e, nesse caso, lidamos com um *símbolo* ou com uma letra-signo algébrico ou com uma figura geométrica como compreendida por Descartes. Isto é, o sentido no qual falamos anteriormente de 'abstração-generalização-simbolização' (KLEIN, 1992, p. 208. Tradução nossa).

Nos séculos XVI e XVII, o conceito de número passou por mudanças significativas. Tanto que, para Stevin, Vieta e Descartes, a segunda intenção do número expresso no símbolo algébrico torna-se essencial para lidar com problemas das Ciências em geral. Em Descartes, a segunda intenção surge da interpretação do movimento via figuras, em Stevin, via utilidade prática e, em Vieta, a partir da Logística de calculação de Diophantus. Isso evidencia que os objetos da Matemática se justificam pelos seus aspectos pragmáticos no contexto de uma atividade (Complementaridade entre intensão e extensão do pensamento (Otteano).

> A generalização depende, assim, da simbolização. O processo de generalização, como concebido pelo estruturalismo matemático construtivo, é sempre o mesmo: dirige-se a atenção para as "propriedades" relacionais das representações matemáticas dadas, transformando-as em novos objetos por um processo que Piaget e Peirce denominaram "abstração reflexiva" e "abstração hipostática" respectivamente (inlui-se aqui o pensamento relacional de Skemp, grifo meu). Números por exemplo, começando dos seus fundametos mais elementares, são generalizados simbolicamente por representações de atividades aritméticas e pelo ato de se fazer das propriedades relacionais das leis aritméticas assim estabelecidas objeto de consideração. O formalismo, e também Piaget, interpretam isso como um processo de desontologização progressiva da Matemática, tomando o pensamento axiomático moderno como sua mais alta expressão (OTTE, 2001, p. 36).

A concepção de Descartes sobre número simbólico geral está inserida num processo de metodologia, ou seja, de caminhos para representar fatos de sua Filosofia. A imaginação, no pensamento de Descartes, exerce uma espécie de serviço funcional que possibilita e assegura o conhecimento simbólico algébrico por meio da teoria de proporções e equações; pois, para Descartes, assim como para Vieta, toda equação é uma proporção e vice-versa.

A *Mathesis Universalis* trabalha com magnitudes gerais concebidas pelo intelecto como entidade abstrata (KLEIN, 1992, p. 209). Na regra II, Descartes disse que tudo que recebemos do mundo externo com ajuda do sentido é

transferido, por meio do sentido comum, por uma série de impressões, incluindo a imaginação que toma forma de figura e essa figura que foi captada do mundo corpóreo é simbolizada algebricamente por meio da extensão linear. A extensão[70] para Descartes tem caráter duplo, segundo Klein (1992, p. 210), pois, por um lado, é simbólica como objeto da Álgebra geral e, por outro lado, é real como substância do mundo corpóreo.

> Tudo que será preciso considerar na solução de uma dificuldade, nós o designaremos por um signo único, que se pode imaginar como quiser. Para maior facilidade, nos serviremos das letras a, b, c etc., para exprimir grandezas já conhecidas, e de A, B, C etc., para grandezas desconhecidas ... Assim, se escrevo $2a^3$, será como se dissesse o dobro da grandeza designada pela letra a, a qual contém duas relações. Por esse modo, não apenas faremos economia de um grande número de palavras, mas, o que é mais importante, apresentaremos os termos da dificuldade tão puros e despojados que, sem nada esquecer de útil, ali não encontraremos nada de supérfluo e que ocupe inutilmente o espírito quando o pensamento deverá abarcar várias coisas ao mesmo tempo (Descartes, 2010, p. 476).

Um logístico, que calcula com números, designa para cada situação uma determinada unidade. Por exemplo, num triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm, a hipotenusa será $\sqrt{25}$ cm ou 5 cm. Descartes tratou essa situação, representando os catetos por a e b; e a hipotenusa por $\sqrt{a^2 + b^2}$, dizendo que esta forma é distinta e clara, pois indica a hipotenusa de qualquer triângulo retângulo. A vantagem desse procedimento é que o método de Descartes parte do particular, mas a fórmula generaliza para qualquer caso. Há, portanto, sintonia entre o calculista e o algebrista, ou seja, Complementaridade entre *techne e episteme* e entre símbolo e objeto.

O pensamento de Descartes sobre a representação de substâncias do mundo corpóreo na sua *Mathesis Universalis* é sua objetividade simbólica. É somente a partir deste ponto que a Física Clássica foi chamada espaço Euclidiano, pois o mundo geométrico foi conectado ao mundo físico. Este foi o fundamento para Newton estruturar sua Ciência da Matemática da Natureza (KLEIN, 1992, p. 211).

---

[70] Segundo Klein (1992, p. 299), Descartes entende por extensão tudo aquilo que tem comprimento, largura e profundidade.

No quadro comparativo (tabela 02) a seguir, verificam-se as principais mudanças de concepções que envolvem a transformação do conceito de número. De um lado, o aspecto de quantidades específicas, designando objetos contidos numa visão de mundo interpretativo e, de outro, o início do aspecto do número representativo do ponto de vista simbólico geral.

Tabela 02 – Concepção de número na transição da visão contemplativa para operativa.

Concepção de 'Número até o século XVI'	1. Coleção definida de unidades contáveis. 2. Entidades numéricas ideais. 3. A Unidade (um) não é número. 4. O número 2 refere-se a duas unidades. 5. Tende para concepção concreta. 6. Não é possível somar 2^2+2^3 - caráter dimensional (homogeneidade presente em Vieta). 7. O zero não estava associado com o ponto. 8. Distinção entre números como unidades discretas e números como unidades contínuas (distinção entre Aritmética e Geometria). 9. Frações não são números, mas razão entre inteiros positivos. 10. Os números irracionais são absurdos.
Concepção de 'Número a partir do século XVI'	1. O número é essencialmente uma entidade simbólica definida por seu relacionamento com outros números num cálculo simbólico. 2. O número 2, simplesmente número 2, como objeto em si. 3. Tende para concepção abstrata simbólica. 4. Tornam possíveis os números como o zero (marca um lugar – Stevin), um, fracionários, irracionais, raiz quadrada de números negativos, etc. 5. É possível somar $2^2+2^3=12$ – caráter adimensional (Descartes e Stevin). Dissocia da referência direta de suas unidades específicas. 6. Sistema numérico árabe levou à compreensão indireta de números para expressões simbólicas, no sentido de operar com símbolos. 8. O zero é o princípio dos números inteiros positivos.

Motivos	1. Nova Intencionalidade. 2. Necessidade. 3. Novos problemas e desafios. 4. Prensa. 5. Exploração e domínio – navegação – comércio – balística – construção e uso de máquinas. 6. Novas tecnologias.

Nessa transformação, a simbolização algébrica começa a adquirir *status* gerais, caracterizando objetos tanto da Aritmética como da Geometria, ou seja, a relação entre quantidades conhecidas com quantidades desconhecidas é nomeada e manipulada por meio dos símbolos em que os resultados 'experimentais' das calculações algébricas, aliada com a instrumentalização, 'perdem o controle' e por isso há possibilidades de produções de novos conhecimentos para resolver novos problemas, pois as calculações são fontes de conhecimentos. Segundo Otte (2001), os símbolos (como objetos de segunda intenção, grifo meu) permitem-nos criar abstrações, sem as quais não teríamos essa grande máquina de descobertas.

Em Abido (2012, p. 62), há um exemplo dessa situação em que o problema de dividir um segmento de comprimento 10 cm em duas partes cujo produto seja 40. Como resolver essa situação sem a simbolização algébrica? Por meio dessa calculação (Logística) simbólica, encontram-se os valores $(5+\sqrt{-15})\ e\ 5-\sqrt{-15})$ que satisfazem a problemática anunciada. Portanto, nesse processo calculativo, surgiram novos objetos que precisam de significados. E essa busca de significados corrobora a ampliação dos conjuntos numéricos.

3.5.1. A interação entre Geometria e Álgebra na Geometria de Descartes

Descartes viveu numa época de transição de visão de mundo, a partir de ideias provenientes dos gregos antigos e, com isso, vislumbrou maneiras diferentes de pensar a relação entre Matemática e Filosofia. Diante disso, desenvolveu um novo método de buscar a verdade, uma nova Filosofia pautada

na Matemática, tendo como pressuposto o método geométrico antigo de Análise e Síntese. O interesse inicial de Descartes foi com o método, mas depois ele estava preocupado com a nova metafísica, pois imaginava que tivesse descoberto as origens básicas do universo – o mundo é um conjunto de grandezas extensas. Segundo Kline (1990, p. 326), Descartes disse: Dê-me a extensão e o movimento que eu construo o universo. Esse é o princípio inicial da Geometria Analítica, transformar tudo em grandeza. Isso permite matematizar a Natureza que não existia em Aristóteles.

Com essa 'mecanização' ou transformação da Ciência, a Geometria adquire mais força. O mundo, como sistema de grandezas; a Mecânica, como base de raciocínio por analogia. O compasso de Descartes é um sistema mecânico que ele usou na Matemática para interpretar a Geometria de Euclides como uma arte de engenharia baseada na régua e no compasso, bem como para resolver equações algébricas de grau superior a 3. Descartes construiu e ampliou novos tipos de instrumentos. Por exemplo, o triângulo é muito importante na construção, pois ajuda na rigidez e estabilidade de uma estrutura; então, a Geometria possibilita interpretação da Natureza.

Na Filosofia de Descartes, segundo Donatelli (2012), está presente uma espécie de convergência teórica e prática, pois o filósofo propõe a construção de aparelhos[71] que possibilitem emissão de juízos corretos sobre as propriedades dos objetos. A preocupação de Descartes é compreender a estrutura dos fenômenos da Natureza que não são capturados diretamente pelos sentidos. E, consequentemente, construir máquinas que imitam a Natureza. Para Descartes, a Mecânica é um dos ramos da Física e a fundamentação está na metafísica.

Procurando encontrar conhecimentos novos, Descartes criticou o silogismo Aristotélico ou a dialética, pois esta tem, como características, argumentos formados por um conjunto de proposições que preservam a verdade das premissas na conclusão.

> Mas para tornar ainda mais claro que a [dialética] em nada contribui absolutamente para o conhecimento da verdade, devemos perceber que, com base no seu método, os dialéticos são incapazes de

[71] Segundo Donatelli (2012), Descartes elaborou projeto de construção de máquinas para talhar e polir lentes hiperbólicas.

> formular um silogismo com conclusão verdadeira a não ser que já estejam de posse da substância da conclusão, isto é, a não ser que tenham prévio conhecimento da própria verdade deduzida no silogismo (DESCARTES apud SKIRRY, 2010, p. 19).

A crítica de Descartes é que a conclusão estabelecida no silogismo Aristotélico não produz conhecimentos novos, pois o que é concluído, de certa forma, já se faz presente nas premissas. Essa questão pode ser evidenciada por meio de uma adaptação patente em Skirry (2010, p. 19 e 20), a saber:

1) Premissa 1: Todos os prédios com mais de 50 metros de altura são arranha-céus.

2) Premissa 2: Alguns exemplos de construções modernas não são arranha-céus.

3) Conclusão: Portanto, alguns exemplos de construções modernas não são prédios com mais de 50 metros de altura.

De acordo com o pensamento de Descartes, essa conclusão já está contida em pelo menos uma das premissas, ou seja, não há conhecimento novo. Então, o silogismo Aristotélico adapta-se muito bem para explicar o que já se conhece e não para descobrir novas verdades. Portanto, essa crítica de Descartes suscita, pelo menos, duas características principais dos modernos dos séculos XVI e XVII que são o fato de que todos os seres humanos possuem capacidades de interpretar, por si só, os fenômenos, não precisando de especialistas ou de intérpretes na Natureza e também de que o desejo dos modernos não era simplesmente reformular velhos conhecimentos, mas produzir novas verdades que ampliassem o conhecimento científico. Nessa perspectiva, está implícito o nascimento do simbolismo algébrico diferente da Antiguidade. A dialética é boa apenas para objetivos pedagógicos, pois faz um bom trabalho em exercitar as mentes dos jovens e explicar o que já se sabe, mas é inútil na busca de novos conhecimentos (SKIRRY, 2010, p. 21).

Descartes nasceu em 1596 e publicou sua Geometria em 1637 como apêndice do *Discurso do Método*. Isso significa que, até então, já tinha boas produções de Aritmética com Stevin e Petrus Ramus, da Álgebra de Bombelli (1526-1572) e Cardano (1501-1576), e também toda Geometria grega antiga, por exemplo, ou seja, já estava em pauta praticamente por 100 anos toda uma espécie de calculação algébrica que indicava novos caminhos para o início da

simbolização moderna. Descartes estudou Filosofia, Lógica e as Matemáticas do seu tempo e, com isso, percebeu a insuficiência da dialética como método de investigação científica e filosófica. No *Discurso do Método,* ele critica a possível candidatura da Álgebra e da Geometria postas até o momento como métodos não dialéticos para produzir conhecimentos novos.

> Com respeito à Análise dos antigos e à Álgebra dos modernos, além de se estenderem apenas a matérias muito abstratas, e de não parecerem de nenhum uso, a primeira permanece sempre tão adstrita à consideração das figuras, que não pode exercitar o entendimento sem fatigar muito a imaginação; e esteve-se de tal forma sujeito, na segunda, a certas regras e certas cifras, que se fez dela uma arte confusa e obscura que embaraça o espírito, em lugar de uma Ciência que o cultiva (DESCARTES, 2010, p. 75).

Nos trabalhos de Matemática dos gregos antigos, como Euclides, Arquimedes e Apollonius, existiam dois tipos de proposições geométricas, segundo Bos (1984, p. 332), a saber: teoremas e problemas. Os teoremas deviam ser provados e os problemas tinham que ser construídos. A solução de um problema consistia em construir uma figura que satisfizesse as proposições geométricas por meio de retas e círculos, bem como outros tipos de curvas como, por exemplo, a intersecção de cônicas. Contudo, nessas construções, não havia um método que direcionasse a solução ou pelo menos não era explícito e isso soava como procedimentos sintéticos contingentes. Nos séculos XVI e XVII, em função de uma nova intencionalidade, surge uma quantidade de problemas não planos, motivados pela nova interpretação do cosmo que desafiaram a mente dos modernos e também o desenvolvimento de uma nova Álgebra simbólica como instrumento para encontrar soluções ou construções dos problemas geométricos, pois o mundo físico de Descartes e Galileu era geométrico.

Na interpretação de Descartes, o tratamento separado da Álgebra e a Geometria, no sentido de que suas regras excessivas dificultam o pensamento natural, não podia ser utilizado como novo método. Diante disso, Descartes no seu *Discurso sobre o método* captura os benefícios da dialética aristotélica, da Geometria antiga e da Álgebra e propõe apenas quatro regras que são as seguintes:

i) Nunca escolher uma informação como verdadeira se não tiver certeza de sua evidência. Isso previne e evita as conclusões prévias e precipitadas.

ii) Separar cada situação investigada em tantas partes quantas necessárias e possíveis para resolvê-las e entendê-las.

iii) Conduzir ordenadamente o meu pensamento a partir dos objetos mais simples e mais fáceis de entender e, pouco a pouco, ascender, paulatinamente, às questões mais complexas mesmo com objetos que não se sabe de antemão sua ordem precedente.

iv) Realizar enumerações tão completas e revisões tão gerais, de forma que eu tenha certeza que nada omiti.

Para Descartes, essas poucas regras evitam os 'defeitos' do método antigo em ofuscar a iluminação da razão. Por outro lado, Descartes preservou os benefícios do raciocínio Geométrico antigo.

> Aquelas longas cadeias de raciocínio muito simples e fáceis que os geômetras geralmente usam para chegar a suas demonstrações mais difíceis deram-me a chance de supor que todas as coisas que podem cair sob o conhecimento humano são interconectadas da mesma maneira. E pensei que, contanto evitemos aceitar como verdadeiras qualquer que não o seja e sempre mantenhamos a ordem exigida para deduzir uma coisa de outra, nada pode ser tão remoto que não se alcance afinal nem tão escondido que não se descubra (DESCARTES apud SKIRRY, 2010, p. 22).

Dentro da perspectiva dos benefícios do modelo antigo, o seu método geométrico foi inspirado, visto que suas inferências têm, como ponto de partida, uma cadeia de raciocínio geométrico considerado 'simples' para atingir explicações e demonstrações mais complexas. Além do mais, as verdades Geométricas, segundo Descartes, estão diretamente relacionadas com todo o conhecimento humano, ou seja, as Ciências, em geral, podem seguir a estrutura geométrica no sentido de avançar, pouco a pouco, de uma verdade a outra. Dessa forma, assim como a Geometria, na época de Descartes começava com axiomas evidentes por si, o seu método principiava com verdades mais simples para alcançar verdades mais complexas. Esse processo de encadeamento de raciocínio tem, com Descartes, o entendimento da intuição e dedução.

> Ao passo que intuição diz respeito a verdades evidentes em si mesmas e perceptíveis unicamente à luz da razão, dedução é a capacidade mental que todos têm de perceber num encadeamento de raciocínio os elos entre verdades, axiomas ou princípios primeiros intuídos autoevidentes e aqueles que são mais complexos. Descartes caracteriza a dedução com inferência de algo que se segue necessariamente a outras proposições conhecidas de modo certo. O

> essencial na dedução é que se trata da percepção de uma conexão necessária de uma proposição absolutamente certa com outra (DESCARTES apud SKIRRY, 2010, p. 26).

Esse processo intuitivo e dedutivo em Descartes é totalmente analítico, contudo o aspecto sintético teve importância significativa no seu método, pois era o aspecto sintético de produção de conhecimento que Descartes questionava, isto é, os gregos antigos como Pappus, por exemplo, apresentavam os resultados, mas, como as verdades foram descobertas, não aparecia. De forma que a Análise em Descartes era para descobrir verdades novas de maneira tal que preserva a ordem do procedimento geométrico em que as primeiras informações são conhecidas sem saber o que vem depois e o que vem a seguir é conhecido apenas por dedução do que veio antes.

O entendimento do mundo físico, para Descartes, é dedutível dos princípios da Geometria, ou seja, o mundo objetivo é uma espécie de ‘espaço solidificado’ capturado por meio da abstração Matemática (abstração simbólica na perspectiva de Klein). O próprio movimento é resultado de ação de forças e estas forças, segundo Descartes, obedecem a Leis Matemáticas invariáveis; dessa forma, todos os fenômenos podem ser descritos matematicamente.

Segundo Hopkins (2011, p. 312), a abstração em Descartes transforma o conceito de número antigo de multiplicidade de unidades num ser aparentemente independente, isto é, num ser racional (*ens rationis*). Essa razão, ideia ou abstração gera um símbolo como segunda intenção, ou seja, o objeto pretendido torna-se apreensível por meio da imaginação, de modo que o intelecto é capaz de considerá-lo como primeira intenção. Nesse processo, está presente o símbolo como letra-signo ou com uma figura geométrica (a exigência depende de outras coisas). Para Klein (1992), não é a indeterminação da magnitude geral que é simbólica, mas sim a representação dessa indeterminação por algo que seja determinado de algum modo e, portanto, acessível à primeira intenção por meio de letras-signos (Vieta) ou figuras (Descartes). No momento do uso do símbolo, eles se tornam de primeira intenção, mesmo representando objetos de segunda intenção. Isso é chamado de abstração, simbolização e generalização, segundo Klein (1992).

Esse processo de abstração coaduna com o pensamento Otteano por dizer respeito ao fato de que a representação é essencial e indispensável para ‘acessar’ os objetos da Matemática e reforça a ocorrência de que o pensamento algébrico não é simplesmente generalização da Aritmética, mas é também relacional, pois foi nas relações que a Análise se mostrou efetiva na resolução de problemas físicos e matemáticos.

O livro primeiro de Geometria de Descartes trata dos problemas de construção, empregando-se apenas círculos e retas, ou seja, compasso e régua. Na Geometria Analítica, os últimos princípios são a Aritmética. Descartes disse, nas primeiras páginas de sua Geometria, que os gregos não perceberam que as quatro ou cinco operações são suficientes para classificar todos os problemas, tanto da Aritmética como da Geometria.

> Como toda a Aritmética só é composta de quatro ou cinco operações, que são a soma, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração de raízes, a qual se pode tomar por uma espécie de divisão, não se tem assim outra coisa a fazer em Geometria, no tocante às linhas procuradas, preparando-as para ser conhecidas, do que acrescentar-lhes outras ou delas retirar alguma. Ou então, tendo-se uma que denominaria a unidade, para melhor relacioná-las às quantidades, e que pode ordinariamente ser tomada como se queira, e depois mais duas ainda, encontrarem uma quarta que esteja para uma dessas duas como a outra está para a unidade, o que é o mesmo que a multiplicação. Como também encontrar uma quarta que esteja para uma destas duas como a unidade está para outra, o que é o mesmo que a divisão. Por fim, encontrar uma ou duas, ou várias médias proporcionais entre a unidade e qualquer outra linha, o que é o mesmo que tirar a raiz quadrada ou cúbica etc. E não recearia introduzir esses termos de Aritmética na Geometria, a fim de me tornar mais compreensível (DESCARTES, 2010, p. 491).

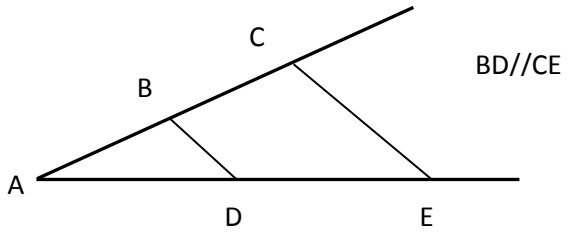
A forma escrita como na citação nos faz ‘perder’ o raciocínio e é por isso também, que a simbolização algébrica não apenas economiza procedimentos, mas pode permitir adquirir novos conhecimentos com a operatividade calculativa (Logística). Dessa forma, representamos essa situação com figuras e símbolos, isto é, a forma como Descartes estabeleceu a relação do cálculo aritmético com as operações da Geometria por meio da simbolização algébrica ou Álgebra de linhas ou segmentos.

Pode-se usar o mesmo cálculo formal da Aritmética, ou seja, interpretando as variáveis como números desconhecidos gerais (variáveis substitucionais) ou no cálculo de segmentos, no qual o produto de dois segmentos indica a área. Os

gregos antigos interpretaram as coisas em termos de objetos (quantidades – o produto de dois segmentos é a área, o produto da área pelo segmento é o volume, apenas isso). Não avançaram, pois, e o mundo grego tem apenas três dimensões e isso foi mantido até o século XIX.

Descartes fez o seguinte: considere os segmentos a e b; a adição e subtração desses segmentos são construídas diretamente. Para explicar a multiplicação, divisão e extração de raízes, Descartes usou a teoria das proporções e o conceito de semelhança de triângulos por meio da introdução de um segmento que funciona como unidade, isto é, o 'um' como unidade de contagem e medida é um fator fundamental para Descartes. Neste caso, o 'um' não é a origem dos números, isto é, o caráter instrumental se faz presente do ponto de vista operacional.

Considere a figura 06[72] (Triângulos semelhantes):



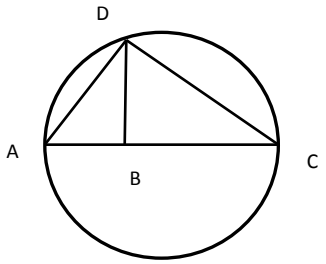
Na construção de ab (axb), fazemos AD=1 e assumimos que queremos multiplicar o segmento AE (denotado pôr a) por AB (denotado por b). Como os triângulos AEC e ADB são semelhantes, pois os ângulos internos são congruentes. Então, $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$, e, isso, AC=ab, ou seja, o produto de dois segmentos é um segmento e não apenas área como na Geometria grega antiga.

No cálculo da divisão (usando a figura 06), podemos considerar que pretendemos dividir o segmento AD por DE. Para isso, vamos efetuar o cálculo da quarta proporcional. Fazendo BC=1, teremos $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$ indicando que $AB = \frac{AD}{DE}$. Se designarmos, na figura 06, AB=x, BC=a, AD=t e DE=m, temos

[72] Em Descartes (2010, p. 492-495) encontram-se as figuras 06, 07 e 08.

$\frac{x}{a} = \frac{t}{m}$. Essa relação é independente de seus objetos. Podemos interpretar de maneira euclidiana em que o produto de dois segmentos indica área ou de maneira cartesiana em que o produto de dois segmentos é outro segmento. Isso significa que a estrutura da Álgebra elementar é por um lado independente do campo das aplicações e dos modelos e por lado dependente, pois apenas as calculações isoladas não tem significado real (para Descartes é o movimento). Por isso, estuda-se, na escola, a Álgebra, pois resolve problemas do cotidiano.

No caso da raiz quadrada, Descartes interpretou por meio da figura 07: Triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência.



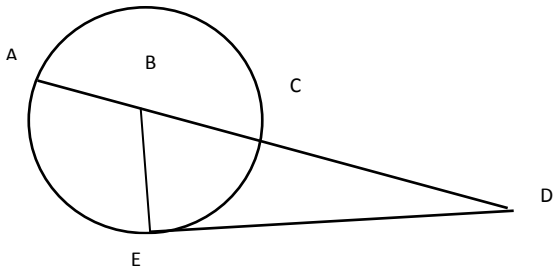
O triângulo ADC é reto em D (o segmento AC é o diâmetro da circunferência) e os triângulos ABD e DBC são semelhantes. Então, $\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{BC}$. Isso significa que $DB = \sqrt{AB.BC}$. Fazendo o segmento AB=1, temos $DB = \sqrt{BC}$. Dessa forma, a aritmetização da Geometria é caracterizada e o conceito de número foi transformado num símbolo geral.

Na Geometria de Descartes, a ideia de Análise é relacional e instrumental, pois:

> Assim, querendo resolver qualquer problema, deve-se primeiro considerá-lo como já feito, e dar nomes a todas as linhas que pareçam necessárias para construí-lo, como também para aquelas que são desconhecidas. Depois, sem considerar qualquer diferença entre essas linhas conhecidas e desconhecidas, deve se percorrer o problema segundo a ordem que mostre, o mais naturalmente possível, de modo que elas dependam mutuamente uma das outras, até que se tenha encontrado um meio para exprimir uma mesma quantidade de duas maneiras, o que se chama uma equação. Pois os termos de uma dessas duas maneiras são iguais àquela da outra (DESCARTES, 2010, p. 493).

Outra situação importante é o momento em que Descartes constrói soluções positivas para equações do segundo grau. Por exemplo, a construção

das raízes da equação $x^2 = ax + b^2$ com a e b quantidades positivas. Para construir x, Descartes considerou a figura 08 (Resolução da equação $x^2 = ax + b^2$ por meio de construção geométrica).



Na figura, AC é o diâmetro da circunferência e o triângulo BDE é reto em E, fazendo o segmento ED=b e BE= $\frac{a}{2}$. De acordo com o teorema de Pitágoras, $BD^2 - BE^2 = ED^2$ e como BD=DA-BE, pois AB=BE. Por substituição, ficamos com:

$$(DA - BE)^2 - BE^2 = ED^2$$
$$DA^2 - 2DA.EB + BE^2 - BE^2 = ED^2$$
$$DA(DA - 2EB) = ED^2$$

$Mas\ ,\ 2BE = a\ e\ ED^2 = b^2.\ Fazendo\quad x = AD,\ temos\quad x\,(x-a) = b^2\ ou\ \ x^2 - ax - b^2 = 0,$

na linguagem atual[73]. Portanto, temos aqui a solução geométrica de uma equação do segundo grau em que o desconhecido foi construído por meio de um método. Isso significa que a solução da equação foi obtida em termos de segmentos, evidenciando a importância do aspecto construtivo da Geometria euclidiana.

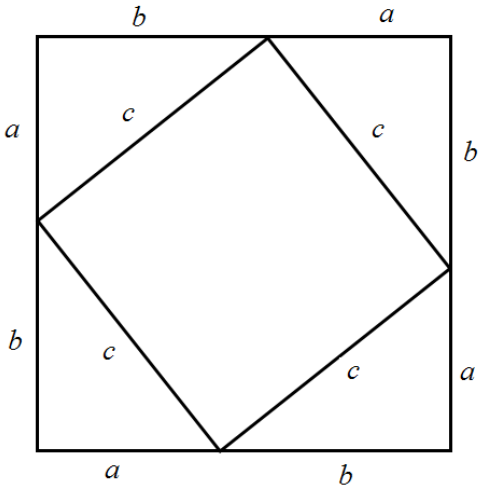
Essas construções iniciais já evidenciam uma forte relação entre Aritmética e Geometria via simbolização algébrica. É importante ressaltar que, em Descartes, já está clara a relação entre o ponto da reta e o ponto geométrico que Stevin, em 1585, já havia estabelecido conexão.

A Geometria de Descartes, segundo Klein (1992), é interpretada como Ciência Simbólica por meio da generalização, simbolização e abstração, por isso,

[73] Descartes não trabalhava com equação da forma $ax^2 - bx - c = 0,$ no sentido de encontrar raízes.

entende-se que essa Geometria é uma analogia entre estruturas (números e espaço). De acordo com Otte (2006), a inovação na Geometria de Descartes diz respeito ao fato de que há uma combinação de números e variáveis por um lado e espaço e quantidade por outro lado. Isso significa que a Geometria de Descartes é uma interação entre número e visualização geométrica (por meio da abstração simbólica), ou seja, não é nem algébrica em nosso sentido e nem uma ciência de estrutura pura (OTTE, 2006).

Otte (2013) elaborou uma intepretação dessa analogia, usando a demonstração do teorema de Pitágoras. A figura 09 (demonstração do teorema de Pitágoras), para Otte, ilustra essa analogia.



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (1)$$

$$= \quad c^2 + 2ab \quad (2)$$

A área do quadrado maior pode ser representada tanto pela expressão (1) como pela expressão (2). Na equação (1), a expressão do lado direito (segundo membro da igualdade) é obtida simplesmente por meio de calculações de acordo com regras da Aritmética, enquanto na expressão (2), comparam-se áreas. De (1) e (2), resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Segundo Otte, nessa situação, assume-se que a estrutura da Álgebra pode ser interpretada como modelo numérico e, por isso, as variáveis tornam-se substitucionais, isto é, 'números desconhecidos' ou de forma equivalente em termos de calculações com segmentos geométricos, isto é, variáveis objetuais ou referenciais. Otte afirma que a estrutura algébrica faz com que a dualidade entre

Aritmética e Geometria seja algo interessante e fértil, ou seja, a interdependência da estrutura e do modelo foi a grande descoberta de Descartes, quando ele aritmetizou a Geometria ou geometrizou a Aritmética.

O que o diagrama da figura 09 mostra é a estrutura das operações e não a interpretação dos objetos sobre o que está sendo aplicado. Isso indica o instrumentalismo, ou seja, o lado operativo da estrutura das operações fica mais ou menos independente dos campos das aplicações. O que importa não são os nomes, mas a estrutura das relações (número é par, ímpar, 3 é ímpar e a soma de 2 mais 1) e assim por diante. A Matemática também é uma Ciência instrumental, pois o ser humano precisa saber calcular, ou seja, saber aplicar a Matemática, bem como conhecer sua estrutura.

Descartes foi, de fato, o precursor da relação de correspondência entre fórmulas e figuras, unificando a Álgebra com a Geometria, pois cada ponto em duas dimensões pode ser descrito por dois números: o primeiro indica a localização horizontal e o segundo, a localização vertical. De acordo com o movimento desse ponto, criam-se equações que relacionam os valores das variáveis desses números com qualquer ponto da figura e isso fez com que a Geometria se transformasse na Álgebra, pois a Geometria foi interpretada por meio de números através de equações. Para Klein (1992), é precisamente o caráter simbólico das figuras cartesianas que torna possível a correspondência mútua entre linhas e letras signos.

A relação de figuras com equações indica transição do contemplativo para o operativo representativo que ocorreu no século XVII, pois, a partir de então, se olharmos um objeto na forma de um arco e quisermos saber se é uma parábola, não focamos no objeto e, sim, na representação desse objeto para capturar suas características principais.

Essa postura interativa entre Aritmética, Geometria e Álgebra que se revela na Álgebra em Descartes permitiu superar a questão da dimensionalidade presente nos séculos XVI e XVII, como em Vieta, por exemplo. Com essa sistematização, envolvendo Aritmética, Geometria e Álgebra, Descartes dividiu sua estratégia de resolução de problemas geométricos antigos, segundo Mancosu (1996, p. 67) em três passos: nomear, equacionar e construir. Na nomeação,

assume-se o problema como se já tivesse sido resolvido e nomeia todos os segmentos necessários para resolver o problema. No equacionamento, 'ignora' as diferenças entre os segmentos conhecidos e desconhecidos e, de forma organizada, estabelece relações entre esses segmentos, obtendo uma ou mais identidades ou equações entre quantidades conhecidas e desconhecidas. E, por fim, a construção, ou seja, os segmentos devem ser encontrados geometricamente. De acordo com Bos (1984, p. 331), entre 1650 e 1750 a construção de equações foi considerada fundamental no estudo da Álgebra simbólica. Isso significa que a álgebra estava conectada com a Geometria.

Descartes, em função do fato de ter assumido o mundo como extensão, ou seja, como unidades de comprimento, tratou de todas as operações com quantidades geométricas de forma similar às operações com números. Isso significa que Descartes não teve preocupação com a homogeneidade[74]. A linguagem dele representa relações entre segmentos que desempenham quantidades arbitrárias.

A Análise serve para estabelecer e formular equações/relações e a Síntese trata da resolução dessas equações. No procedimento geométrico, é a mesma coisa, indo até os princípios básicos de uma situação e a Síntese vai construir as figuras que satisfazem essa situação. A análise, no teorema I de Euclides, expõe que precisamos de dois pontos para formar um segmento e que cada distância pode ser o raio de um círculo. Esses são os princípios e os postulados que precisamos para construir um triângulo equilátero por exemplo. Nessa perspectiva, está a intenção clássica, os axiomas foram verdades básicas, fatos básicos, entendimentos iniciais que servem para o processo de fundamento da Síntese, ou seja, processo que parte desse fundamento, estabelecido pela Análise.

O símbolo algébrico, nos séculos XVI e XVII, não foi abstraído das coisas e nem considerado independente do Ser, mas criado como se tivesse uma objetividade real num contexto de atividades e objetivos estabelecidos.

[74] Contudo, a interpretação do mundo como extensão é, de certa forma, um tipo de homogeneidade de outra natureza.

Capítulo IV

A presença de tensões no estabelecimento de conhecimentos matemáticos

> A Complementaridade entre método e objeto, em termos epistemológicos, é uma alternativa *sine qua non*[75] para discutir a relação entre Filosofia e Educação Matemática.
> Evilásio José de Arruda

Compreender como determinado conceito de Matemática se consolidou no decorrer da História humana torna-se necessário para entender o que é Matemática atualmente. Frequentemente nos encontramos preocupados com o ensino dos métodos e dos objetos que a Matemática utiliza. Percorrendo a História, no sentido de saber como essas Matemáticas foram elaboradas, como as ideias foram percebidas, refinadas, desenvolvidas e, por conseguinte, transformadas em teorias úteis na prática, deparamo-nos com tensões entre o símbolo e o objeto usados na explicação de determinado conceito matemático.

Nesse processo de entendimento, surge a temática da tensão entre o geral e o particular. Por exemplo, temos o triângulo geral e triângulo particular, temos cachorro geral e particular. A diferença é que o geral não é determinado, mas é capaz de ser determinado. O cachorro, de modo geral, não é determinado, mas o cachorro branco com pintas pretas é determinado. O geral é um tipo de contínuo, um universal ou uma generalização acessada por meio da simbolização. A raiz quadrada de 2 e o número de Euler não são totalmente determinados, porém, por meio de um algoritmo, os valores desses números podem ser aproximados tanto quanto se queira e o instrumento permitir.

A calculação é uma determinação que, no final das contas, vai apresentar o número, não no caso da raiz quadrada de 2 que é infinito. O geral é o que não é totalmente determinado, mas acessível à determinação, tendo possibilidade de

[75] Expressão que se originou do latim e significa, por exemplo, condição necessária.

determinar. Para Frege, o geral é um predicado, ou seja, é o que pode ser aplicado a muitos particulares. Considerando azul como predicado, podemos aplicar a várias coisas. Nesse sentido, o geral tem outro patamar de categoria. Os conceitos não são totalmente objetos, mas são funções que podem ser aplicadas. O exemplo específico dessa generalidade é a variável algébrica, o x da Álgebra é o geral não determinado, todavia é tarefa da calculação torná-lo determinado. Generalizar, num sentido de uma nova Ciência algébrica, significa introduzir variáveis. Essa variável, diferentemente da função (Leis e fórmulas), representa uma continuidade entre a Ciência grega antiga e a Ciência moderna, ou seja, entre o conceito de geral no sentido de Aristóteles e o conceito de geral no sentido dos algebristas modernos. A continuidade está nas variáveis e nos tipos de generalidade que essas variáveis representam.

O elo entre o geral e o particular, ou seja, o que propicia sua relação de tensão no sentido de produção de entendimento dos objetos matemáticos e, neste caso, o pensamento algébrico é a atividade, segundo Otte (2003), pois este é um movimento entre o singular e o geral, isto é, entre o que existe de forma ‘real’ e inequívoca por um lado e o que é metafórico e vago, por outro lado.

A realidade, que é para ser entendida, deve ser interpretada. Portanto, a ideia ou essência de uma coisa é, em si, a essência da representação da coisa. A essência da representação é novamente transformada numa representação, pois interpretar é representar. Por isso, Klein (1992) afirma que não é a indeterminação que é simbólica, mas a representação.

> Enquanto a essência é algo relativo e objetivo - essa objetividade se mostra num contínuo de todas as representações, pois a objetividade pode ser atribuída num sentido frutífero e inteligível apenas numa generalidade - singular na melhor das hipóteses opera como um limitador (OTTE, 2003, p. 8. Tradução nossa).

Os signos e representações têm um papel essencial para a Matemática, ou seja, a essência da Matemática é trabalhar com representações. Nesse processo relacional entre signos, representações da realidade objetiva ou imaginativa, há a matematização que significa representar situações por meio de símbolos matemáticos; a calculação que diz respeito às transformações de acordo com regras num sistema de signos e generalização que trata da reestruturação de tais

sistemas de representação, incluindo novos objetos designados simbolicamente ($x^2+10=3$, por exemplo) sem compromissos ontológicos imediatos.

Como é impossível capturar diretamente, por meio da experiência, os objetos ideais e a objetividade da Matemática? Segundo Otte (2003), precisamos das representações. Dessa forma, as representações são as atividades da Matemática e os meios do desenvolvimento do conhecimento matemático. A Complementaridade do pensamento Otteano está na relação entre esses aspectos.

Essa questão da atividade no pensamento Otteano pode ser verificada no processo do início da simbolização algébrica moderna, visto que, no conceito de número de Stevin, por exemplo, há preocupações pragmáticas mais enfáticas por um lado e generalização, por outro lado. Em Vieta, com seu conceito de número como espécie e Descartes com a simbolização algébrica da Geometria, indicavam preocupações teóricas, mas todos eles partiram de atividades relacionais para ‘criar’ ou ampliar novos conceitos e aplicações.

Os símbolos, por exemplo, o ‘x’ da Álgebra, são objetos da atividade, pois o tratamento de uma situação no sentido de procurar resolução depende de suas representações. Nesse caso, a generalização de método no sentido da *Mathesis Universalis* de Vieta e Descartes, segundo Klein (1992), exerce uma importância fundamental, pois a atividade depende de símbolos. Na verdade, os símbolos algébricos utilizados numa atividade como nas operações da duplicação do cubo são elos entre o particular e o geral, pois como vamos operar conceitos sem o símbolo? Nesse contexto que surgiu nos séculos XVI e XVII, a abstração simbólica que é diferente da abstração aristotélica.

Husserl criticou essa especialização fragmentada simbólica via simbolização de Descartes, porém a crítica poderia ser feita em relação à forma e não a sua utilidade na compreensão e produção de conceitos e, além do mais, a representação é essencial para comunicação. Por isso, Klein (1992) trouxe, historicamente, a transformação no conceito de número, no intuito de compreender esse processo de transição.

4.1. Tensões presentes no pensamento matemático grego e na origem da Álgebra na perspectiva de Jacob Klein

Na obra de Klein (1992), está evidenciado que, na Matemática grega antiga, assim como na transição entre essa Matemática e a Origem do Simbolismo Algébrico Moderno nos séculos XVI e XVII, verificam-se tensões dialéticas e complementares entre símbolo e objeto, caracterizadas na relação *episteme* e *techne*.

> Contudo, segundo Klein (1992 p.118. Tradução nossa), o conhecimento e a cognição na perspectiva da *episteme* grega foram reconhecidos pela primeira vez como última possibilidade humana, que permite ao homem desconsiderar todos os fins que poderiam perseguir, para dedicar-se à contemplação em completa liberdade e lazer, encontrando sua felicidade em sua própria atividade.

Enquanto, no mundo aristotélico, a Natureza foi o grande produtor/artífice e a Ciência aristotélica propõe descobrir os objetivos e as causas da Natureza e a cultura cristã é dominada pela ideia de um Deus pessoal, fora do mundo Natural, Newton acreditava que os seres humanos precisavam seguir o exemplo de Deus como o maior artífice.

> A Geometria não nos ensina a traçar essas linhas, mas exige que sejam traçadas, pois requer que primeiro se ensine o aprendiz a descrevê-las com exatidão, para que ele possa penetrar na Geometria, e depois mostra como se podem resolver problemas através dessas operações. Descrever retas e círculos são problemas, mas não problemas geométricos. A solução desses problemas é exigida da Mecânica, e pela Geometria se mostra o uso deles, quando assim solucionados; e a glória da Geometria é poder, a partir desses poucos princípios trazidos de fora, produzir tantas coisas (NEWTON apud SANTANA, 2011, p. 76).

Essa personalização levou ao ‘domínio’ do instrumentalismo na Ciência. Nós, humanos, construímos máquinas para servir a nossos interesses e desejos. A Mecânica de Aristóteles era uma *arte*, que se tornou, no decorrer do século XVII, uma Ciência de grande importância.

A Ciência e a Matemática tornam-se conectadas com a ideia de funcionalidade a serviço dos humanos. A máquina serve para realizar alguma função de interesse dos homens, mas não explica nada, pois se trata de um algoritmo. Diante do fato da realidade ser demasiadamente complexa, tendo uma

espécie de ruído aleatório, então, a tecnologia e o método servem primeiro como uma orientação científica ou cognitiva indispensável.

> Homens como Galileu, Stevin, Kepler e Descartes foram motivados por um impulso original, que é diferente da Ciência escolástica (e Ciência aristotélica, minha inserção). O interesse científico desses homens e de seus precursores surgiu em sua maioria de problemas da Mecânica aplicada, da arquitetura, da construção de máquinas, da pintura e da recém-descoberta óptica instrumental (KLEIN, 1992, p. 119. Tradução nossa).

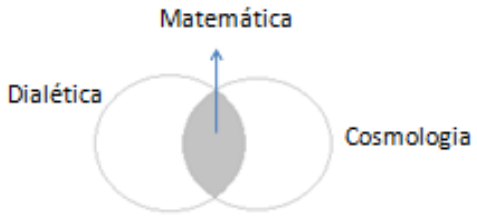
Mas, certamente, não havia apenas contraste e oposição entre a Ciência grega antiga e a nova porque, como sabemos, pelo menos foram a redescoberta e a reinterpretação das conquistas científicas e Matemáticas gregas que trouxeram a revolução científica nos séculos XVI e XVII. Mesmo que a nova Ciência se propunha atingir objetivos muito diferentes do quadro conceptual das ideias dos 'revolucionários', mantém-se derivada do conceito tradicional de Ciência aristotélica e escolástica. A reivindicação da verdadeira Ciência, do verdadeiro conhecimento, induz a necessidade de reorientação contínua por referência ao edifício tradicional, firmemente consolidada da Ciência *(*KLEIN, 1992, p. 119).

Portanto, o desenvolvimento da nova Ciência e da Matemática foi influenciado por uma visão de Complementaridade dos fins teóricos e pragmáticos, por uma dualidade de aspectos descritivos e instrumentais e, consequentemente, por uma interação entre *episteme* e *techne*. A expressão mais característica da ligação acima (do tipo de generalização e o personagem como *arte* e tecnologia da nova Matemática) encontra-se no formalismo simbólico e nas técnicas de cálculo da Matemática moderna (KLEIN, 1992, p. 122).

Faz-se necessário destacar alguns momentos em que Klein expressa no seu livro essas tensões. O primeiro momento dessa tensão aparece na concepção ontológica de *arithmo* em Platão, na parte I do livro de Klein (1992), onde há um subtítulo que trata da Matemática em Platão (*Logístike* e *Dianóia*[76]). Nesse capítulo, Klein afirma não haver dúvida de que a Filosofia platônica, ou seja, as reflexões sobre Aritmética e Logística foram influenciadas pela concepção pitagórica.

[76] Dianóia – faculdade e atividade do pensamento.

No entanto, há tensão entre essas duas Filosofias; enquanto a Filosofia pitagórica é uma ontologia do cosmo (mundo sensível), uma doutrina que diz respeito ao modo de ser do mundo e das coisas contidas nele, assegurando particularmente que as Ciências Aritmética e Logística constituem verdadeiros objetos do mundo (KLEIN, 1992, p. 66). No caso da Filosofia platônica, a concepção de números é totalmente diferente da perspectiva pitagórica, ou seja, há aspectos teóricos (*arithmos* puros separado do mundo sensível) e aspectos práticos que lidam com cálculos e operações diárias. Segundo Klein, o aspecto dialético (Ciência pura) e a cosmologia, em Platão, têm uma espécie de 'fronteira'[77] que une e afeta ambos de forma que a tensão amplia a concepção dos objetos matemáticos. Para Platão, essa fronteira é a Matemática. Veja a figura 10 (diagrama):



Outro momento de tensão que evidencia a relação entre *episteme* e *techne,* na perspectiva da relação complementar entre objeto e símbolo, está no capítulo que trata da diferença entre a conceitualização antiga e moderna.

> A Matemática antiga é caracterizada pela *tensão entre método e objeto***.** Os *objetos* em questão (figuras e curvas geométricas, suas relações, suas proporções de magnitudes geométricas comensuráveis e incomensuráveis, números etc.) conferem à pesquisa o seu direcionamento, porque é, ao mesmo tempo, seu ponto de partida e de chegada. A maneira de determinar o *método* de investigação é mostrada especialmente no caso de provas de 'existência', isto é, demonstração de que o 'ser' de certo objeto é possível porque é desprovido de autocontradição. O problema de aplicabilidade 'geral' de um *método* é, portanto, para os antigos, o problema da generalização dos *objetos* da Matemática em si. Este problema eles podem resolver somente na perspectiva de uma ontologia de *objetos* matemáticos. Em contrapartida, a Matemática moderna centra-se no *método enquanto tal*. Ela determina os seus objetos, *refletindo sobre o modo como eles se tornam acessíveis através de um método geral* (KLEIN, 1992, p. 122. Tradução nossa).

[77] Entendemos que essas fronteiras não são bem determinadas como sugere o diagrama.

Portanto, a Matemática antiga grega lida com objetos matemáticos do ponto de vista descritivo, considerando-os como começo, meio e fim. Isso é uma dificuldade, pois a generalização e justificação tornam-se dependentes do objeto. Ao mesmo tempo em que o método[78] depende do objeto, prevalece o domínio da *episteme* sobre a *techne*, ou seja, por um lado, temos o *arithmo* associado à quantidade de coisas definidas (*techne*) e também o próprio *arithmo* relacionado também com mônadas puras (*episteme*).

Esse 'jogo hierárquico ascendente linear' entre *arithmo* prático e puro foi reinterpretado no início da Matemática moderna, nos séculos XVI e XVII, ou seja, a ideia de *arithmo* como quantidade de coisas definidas e o pensar sobre o significado dessa quantidade de coisas ajudaram a propiciar a Origem do Simbolismo Algébrico Moderno, na perspectiva de Stevin, Vieta e depois Descartes.

Na transformação do conceito de *arithmo*, no início da Matemática moderna, a atenção polariza no *método* como início e fim. A busca é por um *método geral* de resolução dos problemas antigos que os gregos não conseguiram resolver. Essa priorização do *método* ganha força, no momento em que as técnicas (Arte Logística - *techne*) começam a possibilitar construções de aparelhos (luneta) para realização de experiências, ampliando a visão científica do mundo.

Nessa reinterpretação da Matemática grega, a estrutura dos objetos da Matemática (o conceito de *arithmos*) modifica-se também, surgindo uma nova Ciência, tendo no Simbolismo Algébrico papel central de sua transformação.

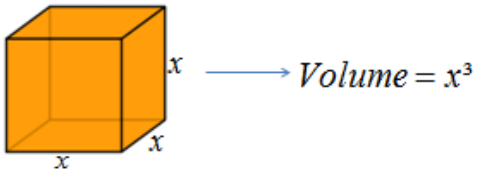
De onde 'tiramos' o processo (método)? E o conceito? Como relacionar métodos e conceitos? E vários métodos com o mesmo conceito? Será que é da necessidade prática ou é uma inquietação inerente da intuição? Ou de ambas? Como os problemas matemáticos não indicam o caminho nem a forma de obtenção dos procedimentos de sua solução, então, surge sempre o aspecto contingente e não determinado, na evolução do conhecimento matemático.

---

[78] Segundo (OTTE, 1993, p. 225), as relações entre objeto e método estão conectadas e ao mesmo tempo se opõem. A Matemática generaliza e constrói novos conceitos por um lado e, por outro lado, os problemas não produzem por si só os métodos para sua solução.

Dessa forma, tanto na construção do triângulo equilátero como na generalização do *método*, há uma Complementaridade entre a *techne* e a *episteme*. Sendo que a *episteme* nos permite pensar, em termos intuitivos, em técnicas que, a princípio, não têm nada a ver com o objeto pretendido, porém possibilitam elaborar diagramas (nesse sentido, fazemos experiências) para visualizar ou perceber, por meio dos órgãos sensoriais, o objeto pensado, ou seja, 'materializamos' o objeto matemático. Por exemplo, na figura 11:

Figura 11: cubo de aresta x



A expressão x³ representa o volume do espaço delimitado por seis quadrados de lado x. Então, qual é a relação dessa expressão com a ideia de volume? A expressão é um instrumento que possibilita exprimir ideias e, com isso, novas ideias surgem também como, por exemplo, pensar no significado da expressão x^4. Nesse sentido, a calculação por meio de representações simbólicas ajuda a produzir novos conhecimentos e novos conceitos.

Na relação *episteme* e *técnica* há uma Complementaridade, evidenciando a atividade como elo dessa tensão. De onde tiramos a atividade que propicia o entendimento do processo e do conceito? A sensibilidade para elaborar a atividade depende da capacidade de pensar sobre a atividade e vice-versa.

O aspecto da presença de tensões no estabelecimento de conceitos matemáticos não tem caráter negativo e, sim, aspectos positivos, pois os objetos matemáticos, como número e figuras, passam por transformações conceituais em função do contexto histórico de sua utilização, necessitando de novos métodos.

Nessa reflexão, a forma de abordar o conceito também se transforma, ou seja, tanto a *techne* como a *episteme* se modificam, produzindo novas interpretações dos objetos e símbolos (conceitos) matemáticos. Por isso, o estudo histórico e epistemológico também é muito importante. A tensão entre símbolo e

objeto discutido por Klein (1992) está inserida tanto no pensamento geométrico como no algébrico.

4.2. O simbolismo algébrico como aspecto instrumental e conceitual no início da Ciência moderna

O conhecimento filosófico, como disse Kant (1997), é o conhecimento racional por conceitos e o conhecimento matemático é conhecimento racional por construção de conceitos. De acordo com Kant, a diferença entre Filosofia e Matemática é que a Matemática tem um método próprio que permite chegar até as ideias, por exemplo, a ideia da construção do triângulo - os empiristas dizem que essa construção é feita na forma de diagrama, ou seja, de objetos particulares. Como podemos usar esse diagrama para construir uma prova geral sobre qualquer triângulo (Teorema de Pitágoras, teorema I de Euclides ou mesmo a generalização de expressões do tipo x^4, por exemplo)?

De acordo com Kant, nós não estamos olhando no diagrama ou no objeto em questão, seja figura ou números, mas nós estamos construindo diagramas, observando nossa própria atividade em toda generalidade. Nesse sentido, o método de Diophantus suscita aspectos gerais. O método de Vieta bem como o de Descartes são procedimentos gerais, pois funcionam com quaisquer dados, indicando que a Álgebra tem características mais gerais do que a Geometria.

O fato de a Matemática ser construtiva transforma-a numa técnica e, portanto, torna-se um caso particular da Filosofia. Dessa forma, a Logística platônica que se transformou nos séculos XVI e XVII num método de calculação sistematizado por meio de regras e operações com símbolos, começa a ser utilizada na interpretação, tanto de fenômenos físicos como de fenômenos naturais. É nesse contexto que, segundo Klein (1992), o simbolismo algébrico teve ‘origem’ de fato.

Para Galileu, em sua criação da Física moderna, considerava a observação, experimentação e a matematização como elementos fundacionais de sua Ciência. Nessa forma de interpretar o mundo, temos Stevin e Descartes que

são diferentes, pois, para Descartes, a Filosofia era mais importante, mas Stevin preocupava-se com a calculação. Foi nesse contexto que o instrumentalismo, o método, por meio de suas atividades, seja cotidiana (Stevin – sistema decimal) ou mesmo de ordem reflexiva, motivaram os modernos a pensar em outra perspectiva, em outra intencionalidade.

Nesse período, os conceitos começaram a ser tratados como instrumentos úteis para construção de teorias na Matemática e nas Ciências Físicas em geral, deixando de ser imagens da objetividade do mundo.

> Quando Galileu fez rolar no plano inclinado as esferas, com uma aceleração que ele próprio escolhera, quando Torricelli fez suportar pelo ar um peso, que antecipadamente sabia idêntico ao peso conhecido de uma coluna e água, ou quando, mais recentemente, Stahl transformou metais em cal e esta, por sua vez, em metal, tirando-lhes e restituindo-lhes algo, foi uma iluminação para todos os físicos. Compreenderam que a razão só entende aquilo que produz segundo os seus próprios planos; que ela tem que tomar a dianteira com princípios, que determinam os seus juízos segundo leis constantes e deve forçar a Natureza a responder às suas interrogações em vez de se deixar guiar por esta; de outro modo, as observações feitas ao acaso, realizadas sem plano prévio, não se ordenam segundo a lei necessária, que a razão procura e de que necessita. A razão, tendo por um lado os seus princípios, únicos a poderem dar aos fenômenos concordantes a autoridade de leis e, por outro lado, a experimentação, que imaginou segundo esses princípios, deve ir ao encontro da Natureza, para ser por esta ensinada, é certo, mas não na qualidade de aluno que aceita tudo o que o mestre afirma, antes na de juiz investido nas suas funções, que obriga as testemunhas a responder aos quesitos que lhes apresenta. Assim, a própria Física tem de agradecer a revolução, tão proveitosa, do seu modo de pensar, unicamente à ideia de procurar na Natureza (e não imaginar), de acordo com o que a razão nela pôs o que nela deverá aprender e que por si só não alcançaria saber; só assim a Física enveredou pelo trilho certo da Ciência, após tantos séculos em que foi apenas simples tacteio (KANT, 1997, BXIII-BXIV).

Essa transformação ou ‘revolução’ científica que ocorreu nas Ciências empíricas dos séculos XVI e XVII mudou a visão da Natureza e, nessa nova perspectiva, a Matemática teve um papel decisivo como o próprio Galileu já disse, e, por isso, essa modificação da Ciência Natural em instrumento como na engenharia, também se aplica à Matemática, transformando-a. Há uma relação entre transformação da visão da Natureza e a transformação da Matemática. É nesse sentido que Klein fala de uma conexão íntima entre o início do simbolismo algébrico e a Física Matemática. É nesse aspecto que o estudo histórico de Klein (1992) contribui no entendimento do início do simbolismo algébrico moderno, pois até então o ‘regresso às Ciências gregas’ permitia retomar e aperfeiçoar a

Aritmética de Diophantus nas mãos de Vieta. Klein (1992) trata do surgimento da Álgebra do ponto de vista da transformação conceitual no interior da Física Matemática.

O início da Ciência moderna desde Vieta e Descartes, segundo Klein, foi construído em referência baseada na concepção de Ciência como foi criado por Aristóteles. Os gregos antigos instituíram a Ciência na ideia de *episteme*, ou seja, a visão ideal e teórica do mundo. Nos séculos XVI e XVII, os modernos já sabiam do que a Ciência trata e, portanto, ficaram dentro da Ciência querendo saber quais são os conceitos certos, quais os métodos certos, ou seja, foi uma discussão dentro da própria Ciência, tendo em mente a intencionalidade da época.

Para Platão, a Matemática tinha um valor na sua luta contra os sofistas. A Matemática foi um instrumento da Filosofia em busca da verdade contra a retórica dos sofistas. Em Platão (Teeteto), discute-se a teoria do conhecimento, na qual se pergunta: o que é conhecimento? Em Mênon – ensinar não é implantar alguma coisa na cabeça do aluno e sim ajudá-lo a encontrar o conhecimento, pois somos partes deste cosmo e, por isso, devemos reencontrá-lo, ou seja, rememorar o conhecimento que está dentro de nós. Nesse aspecto, a estrutura procedimental apresentada em Mênon, além de ser considerada o início do pensamento algébrico, do ponto de vista relacional, pois, segundo Vieta, a Análise tem origem platônica, pode ser usada para propiciar o entendimento de conceitos matemáticos já estabelecidos e também de criar novos conhecimentos no sentido contingencial – o ir e vir reflexivo fundacional do diálogo suscita a mente do sujeito, criando novas abordagens diante de uma nova situação.

Aristóteles foi médico e biólogo e a Matemática não era sua prioridade e, sim, a Biologia e a Física. A causa é uma força que produz um efeito. Atualmente, a Lei da Natureza não é de causa e efeito, é uma relação entre dois termos. Para Aristóteles, a Mecânica não era uma Ciência, era uma arte. Um aspecto essencial na revolução científica foi a transformação da Mecânica numa Ciência, pois essa revolução aconteceu por causa do encontro dos papiros antigos dos monastérios com os engenheiros artesanais da época. A ilustração de Leonardo da Vinci sobre

objetos voadores (pensamento aristotélico - analogia do espaço) transforma-se, a partir do século XVI e XVII, na funcionalidade operativa de voar.

A Mecânica não está copiando a Natureza, está agindo na Natureza, ou seja, constrói máquinas para cumprir tarefas do homem. Como os antigos engenheiros falaram, uma máquina cumpre uma função, mas não oferece uma explicação, não é uma teoria. As teorias explicam, as máquinas cumprem funções operacionais.

Para Newton e Leibniz, a Mecânica foi parte da Filosofia Natural. As mudanças nas Ciências Naturais de um estado contemplativo – olhando nos segredos da Natureza, para um estado de Arte construtiva e experimental – interrogando a Natureza, indicando que o interesse primordial não foi na Matemática e nem na Filosofia e, sim, na exploração da Natureza, ou seja, conhecer a Natureza era o objetivo principal dos modernos dos séculos XVI e XVII.

Nesse período, a base do conhecimento humano começa a ser a atividade humana e a Mecânica estava no centro dessa temática, pois um dos desafios era justamente compreender o funcionamento do movimento dos corpos celestes. Qual instrumento utilizar como base? E é, portanto, nesse contexto que ocorre a transformação da Matemática, pois a visão platônica contemplativa passiva não respondia mais aos problemas da época em que os números designavam nomes de objetos ideais apenas. A Aritmética, Logística e Geometria, ou seja, a Matemática transforma-se num instrumento, enquanto para Descartes foi um instrumento para sua Filosofia, pois o método (*Mathesis Universalis*) usado vale para tudo (Filosofia, Matemática e Ciências empíricas), transformando o mundo num mundo de grandezas.

Para Kant, o que Descartes fez foi uma grande conquista, contudo temos que preservar a diferença entre Matemática e Filosofia, ou seja, método vale para grandezas, mas a Filosofia trata de outras coisas (como a alma, por exemplo). Nesse aspecto, a Filosofia é importante para as Ciências da Educação, pois a Filosofia é o caminho certo para conhecer a si mesmo e não apenas conhecer números e grandezas como na Mecânica.

No momento em que o homem começou a pensar numa Ciência como imagens da realidade e não a realidade, e isso ocorreu nos séculos XVI e XVII, o conhecimento passou por essa transição e, consequentemente, conseguiu avançar. O número para Platão diz respeito ao mundo e, para Stevin, por exemplo, foi um instrumento (aspecto relacional) que cumpre uma função de calculação, como na operacionalização e representação de situações do comércio. É nesse sentido que a instrumentalização do conhecimento entra em cena, ou seja, numa relação complementar entre símbolo e objeto.

A relação entre Matemática e Filosofia está contida numa relação 'maior' que diz respeito à relação entre *episteme* e *técnica*. De forma geral, nessa relação há contextos: o tecnológico, a teoria do conhecimento e a questão social. Do ponto de vista tecnológico, a prensa teve um papel importante no início da simbolização, pois permitiu a padronização, comunicação, revolução do pensamento e, com isso, a expansão do conhecimento (EISENSTEIN, 2009).

A História da Matemática, da Educação Matemática e da Filosofia pode ser conseguida por meio da variação ou oscilação da ênfase dada, no que diz respeito a esses conceitos presentes nesses contextos. Por exemplo, entre os séculos XVI e XVII até Kant, o espírito científico desse período, segundo Foucault (1995) (época clássica), dominava o contexto epistemológico a desfavor de outros contextos - da sociopolítica e da teoria do conhecimento. Com a revolução industrial e com a Educação Matemática, para uma grande quantidade de pessoas do século XIX, domina o contexto da teoria do conhecimento, por isso a Filosofia, atualmente, é guiada pela Filosofia Analítica. Otte explica que a Filosofia Analítica, desde Bolzano (1781-1848), preocupa-se com a semântica, ou seja, com a teoria do conhecimento. A discussão entre Kant e Bolzano foi exatamente porque este último não aceitava mais o ponto de vista epistemológico de Kant. Para Bolzano, segundo Otte, a Matemática deve ser considerada independentemente da maneira que o ser (indivíduo) adquire conhecimento.

Operacionalizar conceitos necessita de um olhar de 'fora', não há especificidade diretamente. No caso do conceito de triângulos, é complicado capturar outros conceitos a partir de conceitos dados como, por exemplo, a relação simbólica entre os seus ângulos, ou seja, se A, B e C são ângulos

internos de um triângulo particular, como concluir algo sobre a sua soma, considerando apenas os conceitos de triângulos? A expressão A+B+C=180° é uma simbolização que indica generalidade, partindo de um triângulo específico. Nesse sentido, há uma tensão entre símbolo e objeto que Klein (1992) trata e que o pensamento Otteano, por meio do conceito de Complementaridade, apresenta uma interpretação.

Na verdade, não depende apenas do triângulo e sim do espaço, das retas etc. Os fatos que a Matemática prova, não saem da análise dos conceitos definidos. No caso do triângulo e sua soma, como explicar os motivos do uso das retas paralelas? Explica-se que são diagramas úteis que permitem a justificativa do teorema, mas não saíram da análise dos elementos dos conceitos envolvidos. Então, há elementos contingenciais na Matemática.

Por isso, a Matemática é uma atividade (OTTE, 1993; 2003) que sempre se encontra dentro de um contexto e, por isso, depende se alguém percebe ou não, ou seja, pode ser similar à experiência sensorial comum num certo sentido – uns observam determinada características de uma situação concreta e outros, não. Devido a isso, o professor não gosta dessa contingência. Precisamos desenvolver uma maneira de tratar semanticamente, o que nos leva a uma ideia mais lógica da Matemática. Isso faz com que acabemos polarizando a Matemática como linguagem, perdendo seu caráter essencial que é a intuição e a criatividade contingencial por meio da atividade.

Nesse sentido, surge o formalismo na Matemática, pois há a preocupação de explicar para outras pessoas o que foi pesquisado. Como esclarecer sem representar? Então, a simbolização entra, também, com esse objetivo. A ideia da aritmetização da Matemática (reduzir a Matemática à Lógica e à Aritmética) que começou com Bolzano e Cauchy deveria ser atribuída às exigências do ensino/aprendizagem. Entre Galileu e Kant, o que importava era a relação do indivíduo (epistemologia), já a partir do século XVIII e XIX, surgem contextos sociopolíticos e semânticos.

A Ciência moderna apareceu com o início do Simbolismo Algébrico e vice-versa. O que importa é a relação do indivíduo com a Natureza. Galileu, Newton, Vieta e Descartes etc. procuravam um método que fornecia certeza para o próprio

ser. Eu quero enxergar por mim mesmo sem depender de interpretações de autoridades. No início da obra ‘O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra’, Klein (1992) diz que a tarefa é clara, pois quer entender o grande impacto que o simbolismo algébrico e a língua Matemática formal representada por esse simbolismo têm para toda revolução científica. Uma maneira de perceber isso é o tratamento dado na interpretação do paradoxo de Zeno, referente à corrida de Aquiles com a Tartaruga.

> Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não consegue alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado de que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga (BOYER, 1996, p. 51).

Até hoje, esse paradoxo é apresentado dessa forma, ou seja, é impossível para um ser humano percorrer esses infinitos pontos ou tarefas. O paradoxo surge no momento em que ficamos reduzindo o movimento de Aquiles e a tartaruga a uma relação entre as posições ou, como Aristóteles argumenta, segundo Otte (2012), há também o tempo, não apenas o espaço, mas o tempo também tem infinitos pontos. Isso significa que Aristóteles reduziu o movimento a uma correspondência entre pontos no tempo e no espaço (uma espécie de tabela); ou seja, o conceito de movimento de Áquiles e a tartaruga foram reduzidos a sua extensão (relação entre o tempo e espaço por meio de uma correspondência). É como reduzir a função algébrica a sua curva.

Temos, na verdade, não o fato de o ser humano precisar percorrer uma infinidade de pontos (tarefas) e, sim, uma correspondência entre intervalos do espaço com intervalos de tempo, uma relação em que o processo do movimento se transforma num objeto chamado função, ou seja, um objeto ideal geral obtido através da abstração simbólica (reflexiva ou hipostática) desse processo, utilizando a algebrização como tecnologia (transformação do conceito de número).

Portanto, é nessa tabela como função que pode ser uma correspondência de números (uma tabela, uma fórmula ou uma curva, por exemplo) entre intervalos de tempo e outra de espaço. Uma função não é introduzida em termos

de uma definição e, sim, em várias maneiras de representar o relacionamento sobre os fatos. Depois de Cantor, segundo Otte (2012), a função foi substituída por objetos de conjunto. Atualmente, a Matemática diz que não precisamos saber o que é a função, número ou qualquer objeto matemático. O que se procura é saber se dois exemplares desses objetos são idênticos ou não. Como discernir essa identidade, caso exista? Precisamos do conceito do axioma da extensionalidade, ou seja, se dois objetos são iguais quando os seus elementos são os mesmos.

Para Leibniz, é o contrário, ou seja, a função é determinada por meio de conceito. Então, qual é a diferença entre Aristóteles e Galileu? A diferença é, exatamente, o simbolismo algébrico, pois com tabelas da forma (x,y) não podemos calcular, mas, se representarmos essa correspondência de intervalos (tempo/espaço) em termos de fórmulas (símbolos), podemos operacionalizar com eles, pois com tabelas fica complicado realizar cálculos. Isso foi fundamental, ou seja, a transformação da correspondência em forma de tabelas para uma analogia em termos de fórmulas. É nesse contexto que o trabalho de Vieta e a interpretação de Klein, sobre a mudança no conceito de número, são importantes.

Nesse sentido, o movimento que era representado em tabelas passa a ser concebido por fórmulas e se transforma em objetos de calculação. Esse objeto de calculação trata-se de uma relação concebida simbolicamente referente a uma especificidade de determinados fenômenos.

O espírito algébrico dessa época que criou a função na forma de uma fórmula tem características importantes: de um lado, permite estabelecer relações, que é o pensamento relacional e, de outro lado, apresenta aspectos de calculação com as fórmulas. São alternativas de interpretação que surgiram nos séculos XVI e XVII e estão no cerne do início do simbolismo algébrico moderno, isto é, não apenas o pensamento relacional no sentido descritivo, mas também no sentido qualitativo com símbolos e conceitos.

É exatamente essa característica que Husserl e Heidegger criticaram em sua Filosofia, porém Klein (1992) apresentou um estudo profundo e detalhado dessa transformação e nem Husserl e, muito menos, Heidegger citaram, com profundidade, as contribuições de Vieta e de Diophantus, pois era comum se

referir a Descartes e Galileu, mas Vieta foi, de fato, o fundador do simbolismo algébrico moderno, segundo Klein. Isso, do ponto de vista histórico, pode ser verificado nas datas de seus nascimentos e mortes: Vieta (1540-1603), Galileu (1564-1642) e Descartes (1596-1650).

É nesse aspecto que a instrumentalização e a funcionalidade foram a grande revolução e evolução que Klein apresenta, pois propiciou a transformação de conceitos, do ponto de vista de estrutura das leis da Natureza.

Na Álgebra simbólica, nomeamos um objeto que ainda não conhecemos, ou seja, trabalhamos com objetos desconhecidos (isso foi extraordinário nos séculos XVI e XVII), isto é, calculamos com números desconhecidos (resolução de equações, por exemplo). Portanto, na Álgebra, lidamos com objetos que não conhecemos como se fossem conhecidos e esse procedimento ajuda-nos a perceber que a Álgebra é um tipo de pensamento relacional, pois, se identificamos um objeto, sabemos suas características, mas se não sabemos, como reconhecê-las? Na Álgebra como pensamento relacional, o que percebemos são suas relações e essas relações surgiram dela, como podemos ver na teoria das proporções de *Eudoxus.*

O pensamento analítico (base de relações) é relacional, no sentido de que o pensamento sintético trata de objetos. Mas, na Análise, o objeto não é dado, distinguimos relações entre objetos conhecidos com objetos desconhecidos; já no pensamento sintético (tem como base características que indicam o objeto), o objeto é dado no início. A Aritmética de Diophantus trata de coisas determinadas, mas não totalmente estabelecidas. A computação real acontece em termos de números bem definidos. Nesse sentido, a justificação consiste em duas coisas: Análise e Síntese. A Análise e Síntese têm significados diferentes no que se refere a proposições ou a construções respectivamente; contudo, a compreensão dos objetos matemáticos se dá na Complementaridade entre o Sintético e o Analítico.

A Análise trata sempre de coisas gerais, preocupa-se apenas com relações. A Síntese, realmente, precisa de objetos, pois é a construção. A diferença essencial entre Análise e Síntese é que a Análise apenas mostra a possibilidade de uma prova ou uma construção, enquanto a Síntese tem de

realizar essa prova, por isso a Síntese precisa de objetos. Segundo Klein (1992), os antigos sabiam da Análise, apenas não viram necessidade de mostrá-la[79].

No século XIX, segundo Klein (1992, p. 163), o brilhante matemático alemão Hermann Hankel (1839-1873) assim como os modernos (Vieta e Descartes) não estava interessado na Síntese, não precisava da existência de objetos, pois, se eu defino a Matemática como Arte analítica, eu só penso em termos de relações entre quaisquer objetos; por exemplo, **a** é dobro de **b**, então **a** e **b** podem ser qualquer coisa. A Análise está descobrindo relações. O próprio Descartes orgulhava-se de sua Análise, pois resolveu o problema que Pappus não havia resolvido.

A Geometria da Antiguidade era Sintética, ou seja, ao invés de procurar as causas ou analisar a situação, 'ficavam escondendo', mostrando apenas o caminho da resolução, não revelando como chegaram até as premissas. Em Descartes, surge a Geometria Analítica, pois a preocupação passa a ser com o método - em se mostrar como chegar até a premissa, ou seja, mostra como chegar ao resultado, evidenciando-se a Análise e não apenas a Síntese. O pensamento sintético indica duas coisas: dentro da teoria, significa dedução, como prova formal, por isso a Geometria euclidiana é chamada sintética, mas a Síntese, na concepção do pensamento Otteano, significa construir, sintetizar, juntar as peças e a Análise significa separar para compreender.

Há Complementaridade entre os aspectos sintéticos e analíticos na elaboração da generalização por meio simbólico, porém, em alguns momentos, a preocupação pode ficar apenas na generalização. Essa característica Sintética está presente na Aritmética de Diophantus, entretanto o aspecto analítico foi capturado também dessa Aritmética por Vieta, segundo Klein (1992).

Nos séculos XVI e XVII, havia a preocupação de que o símbolo precisava representar algo que fosse aritmético ou geométrico, ou seja, sempre 'queremos' carregar o símbolo ao lado das operações. Se o símbolo é definido apenas em termos de suas operações, então, é totalmente beneficiado em sua função

[79] A meu ver, o que impediu os Gregos Antigos a mostrar a Análise, é o fato de eles não terem domínio da simbolização algébrica como fórmula, pois os Gregos não tinham notações algébricas e nem o sinal de igual ou outra notação lógica.

representativa, isto é, o significado do símbolo fica dentro da expressão, por exemplo, o que significa ‘a’ e ‘b’ na igualdade a+b=b+a? Qualquer coisa que satisfaça a sentença. Essa separação começa na metade do século XIX. As reinterpretações e criações de Vieta e Descartes tiveram um papel fundamental, contudo a ‘evolução’ foi progredindo gradualmente - os símbolos algébricos foram cada vez mais se distanciando das coisas.

Para Vieta e Descartes, segundo Klein (1992), toda proporção é uma equação e uma equação é uma proporção. A equação é uma relação entre termos conhecidos com termos desconhecidos, pois a Análise de Vieta tem origem na dialética platônica. Uma das diferenças entre a Análise de Vieta e a dialética platônica é: a simbolização e a operacionalização dos conceitos por meio dos símbolos. O conceito de *arithmo* grego tratado como espécie em Vieta é simbólico. É nesse sentido que o trabalho de Klein (1992) torna-se relevante, pois interpreta a Matemática antiga em termos prospectivos conceituais simbólicos. Para Descartes, o mais importante é encontrar equações que determinam o *lócus* de um conjunto de pontos. Quando encontramos uma equação que representa uma circunferência, por exemplo, não estamos calculando, mas, sim, estabelecendo relações. Isso é importante, pois a calculação não é novidade, porém as relações entre objetos (figura-equação) são necessárias e, portanto, utilizamos símbolos.

Michael S. Mahoney (1946-2006) apresentou uma palestra na primavera de 1970 num Colóquio sobre problemas na História da Ciência, na Universidade de Munich. Nessa conferência, Mahoney diz que há três características fundamentais no pensamento algébrico moderno que começou nos séculos XVI e XVII, a saber:

1) O modo desse pensamento é caracterizado pela operação simbólica, isto é, um simbolismo que não apenas utiliza letras para representar como na Aritmética de Diophantus, por exemplo, mas que, de fato, opera conceitualmente.

2) As operações simbólicas lidam com relações, ao invés de objetos, mesmo que as próprias relações se tornem objetos.

3) O pensamento algébrico está livre de compromissos ontológicos.

O pensamento de Mahoney diz respeito também à Álgebra abstrata do século XIX, porém podemos observar que as características 1) e 2) já se fazem presentes nos trabalhos de Vieta e Descartes, pois, mesmo em Descartes, ainda há uma dependência do objeto, isto é, das grandezas. Nesse sentido, sua *Mathesis Universalis* é Sintética, segundo Boutroux (1955). De forma que, de um lado, tivemos continuidade com Vieta, pois, em sua terminologia, usava aspectos tradicionais no sentido de ampliar a concepção grega antiga, mantendo a homogeneidade, segundo Klein (1992). De outro lado, há descontinuidade com Stevin e Descartes, por exemplo, pois não estavam mais preocupados com a homogeneidade.

A Matemática trabalha com símbolos (até o final do século XVIII, antes de Euler) e estava totalmente claro que cada símbolo tinha que representar um objeto, ou seja, possuía características ontológicas, tendo o entendimento de que todos os signos precisam ter, além de um sentido, uma referência, um objeto. Nos séculos XVI e XVII, o ontologismo está relacionado com segmentos e números. O ontologismo foi 'abolido' somente a partir do século XIX com a Álgebra abstrata (terceira característica do pensamento algébrico em Mahoney).

Na *Mathesis Universalis*, a Matemática era o método de unidade, pois Descartes trabalhou com analogia entre grandezas e Aritmética, representando as operações Aritméticas por segmentos, pois os gregos antigos não tinham Matemática Universal. Na verdade, tinham uma divisão entre Aritmética e Geometria. No início da idade moderna, seus representantes possuíam como ideia superar essa divisão por meio do método universal matemático, ou seja, apenas uma Matemática. A *Mathesis Universalis* é importante para separar o símbolo do objeto e a preocupação com a união da Geometria com a Aritmética é um fator importante nessa separação.

As línguas diferentes, ou seja, os problemas de comércio, problemas de engenharia, problemas de movimentos, problemas de navegação, são situações em que, nos séculos XVI e XVII, começam a ser aplicadas a 'mesma' Matemática. A ideia de Stevin, Vieta e Descartes foi criar uma Matemática que pudesse ser aplicada em todas essas situações. O caráter universal da Análise é similar ao pensamento relacional, pois estamos analisando objetos conhecidos com objetos

desconhecidos, isto é, o *lócus* como lugar geométrico - conjunto de todos os pontos de uma figura que pode ser representada por equações, ou seja, que goza de uma determinada propriedade (o equacionamento – relação entre conhecido e desconhecido por meio de símbolos, propicia a percepção dessa propriedade).

O modo de pensamento da Antiguidade não está totalmente fora do nosso alcance, de nossa maneira de pensar, ou seja, temos que procurar entender a revolução científica nos séculos XVI e XVII no sentido de que o fundamento se faz presente no conceito grego de Ciência aristotélica, pois não foi uma criação do nada como aconteceu com os gregos antigos, que conceberam, praticamente, sem predecessores. A revolução científica dos séculos XVI e XVII tinha, ao mesmo tempo, continuidade e descontinuidade. As ideias iniciais de Aristóteles e Galileu são ‘similares’ e a diferença surgiu na sequência, com o simbolismo algébrico. A algebrização simbólica operacional colocou uma perspectiva instrumental, ou seja, de repente, a Lei surge como fórmula, pois uma função passa a ser interpretada como instrumento de cálculo. Para Aristóteles, o movimento foi um conceito muito amplo que indicava mudanças como o crescimento de plantas, por exemplo. Galileu ficou se especializando, ou seja, o crescimento das plantas é uma coisa, o movimento dos corpos da Mecânica é outra coisa. E o simbolismo foi criado para representar, operar e encontrar soluções para problemas de naturezas específicas e, assim, diminuiu a extensão dos conceitos. É isso que permite o instrumentalismo.

A ideia de monas (unidade) é muito mais ampla do que a unidade para Stevin, por exemplo. A especialização, a divisão do trabalho foi uma característica da Ciência moderna em comparação com a Ciência aristotélica. A Geometria de Euclides é uma Geometria de construção. É bem diferente da Ciência Aritmética e Logística de Platão. Pode-se dizer que há uma dicotomia complementar entre *episteme* e *técnica* tanto em Platão como nos modernos dos séculos XVI e XVII. Em Platão, havia a Geometria dos artesãos, a Logística de calculação e, em contrapartida, a ‘teoria dos números’ e a cosmologia. Contudo, essa dicotomia é ampla e, de outro modo, é específica e é nesse contexto que o conhecimento surge e se ‘consolida’ com a Álgebra.

A nova Ciência compartilha com a Ciência escolástica a mais geral pressuposição da atitude científica que foi desenvolvida pelos gregos antigos em oposição à existência Natural. Nos séculos XVI e XVII, há compartilhamento com a generalidade do universo, não ficando aprisionado na particularidade. Por isso, o estudo da tensão entre o particular e o geral, do ponto de vista da relação símbolo e objeto, amplia o entendimento da representação como elemento fundamental para o pensamento algébrico do ser humano e, por conseguinte, cria novas teorias.

A Ciência para Galileu foi a Mecânica em função dos problemas cotidianos do início da idade moderna, quando ficaram pesquisando novas interpretações do mundo, tendo, na matematização instrumental, seu elemento norteador de certeza. O pensamento relacional por meio da simbolização equacional esteve acompanhando essas transformações.

A revolução científica dos séculos XVI e XVII não foi apenas revolução de conceitos, de métodos, mas também da ontologia. Para Descartes, existem duas coisas no mundo: as mentes e o conceito, ou seja, o mundo é feito de *res extensa*, de grandezas, isto é, são coisas que podem ser medidas. Essa foi a construção da Ciência, baseada na Matemática. Nesse sentido, a nova conquista dos séculos XVI e XVII foi construir uma relação entre Geometria e Aritmética fundamentada numa ‘nova ontologia’, uma nova concepção de mundo. O mundo agora é um mundo visível de grandezas extensas e isso chega à teoria de conjunto de Cantor. A Matemática transforma-se numa Ciência de grandezas extensas, não de conceitos. Galileu, Vieta e Descartes perceberam que, para matematizar a Natureza, deveriam mudar a visão de mundo, deveriam transformar o mundo de fato num conjunto de grandezas de objetos.

Os gregos distinguiram o objeto do símbolo, já os modernos não. Na verdade, em termos da conceitualização, o conceito de número foi um regresso, pois perdeu o aspecto de semelhança, mas, em termos instrumentais, foi um progresso, permitindo a operacionalização. Até 1800, aproximadamente, a Matemática era aplicada, ou seja, a Física Matemática (aplicação da Geometria e da Aritmética) em que a questão da simbolização tinha como objetivo resolver problemas relacionados tanto com a Natureza como da própria Matemática. A

partir do século XIX, a Matemática começa a se preocupar menos com objetos do tipo numérico ou de grandezas, passando a considerar o aspecto puramente formal, ou seja, criar conceitos com liberdade desde que não tenham contradição, criando coisas que estão fora de nossas mentes. Otte, numa aula[80] do dia 12/04/2013, disse que, na Matemática, há dois tipos de variáveis: substitucionais e referenciais. Para Otte, as variáveis da Álgebra, de forma geral, são substitucionais, enquanto na Geometria são referenciais.

A grande revolução dos séculos XVI e XVII, em relação aos tipos de variáveis, começou com Vieta, pois diz respeito ao surgimento de dois tipos de variáveis (substitucional e objectual) na Aritmética e na Axiomática, respectivamente. A axiomática moderna surgiu da Geometria e da Álgebra, ou seja, temos dois tipos de Matemática (desde Descartes): a Matemática aritmetizada (variáveis substitucionais – Matemática discreta) – onde os números são explicados em termos da teoria de conjuntos (como na Matemática moderna) e a Matemática estrutural, axiomatizada (variáveis objectuais). Segundo Klein (1992, p. 176), as regras do quarto[81] capítulo do *Isagoge* representam os primeiros axiomas do sistema moderno, pois Vieta criou um contexto sistemático que, originalmente, define os objetos para os quais eles se aplicam.

Por exemplo, na lógica – 'x é homem, então x é mortal'. Aqui, o x indica um lugar, ou seja, um vazio. O objetivo não é procurar um x que vai tornar verdadeira a sentença. Essa afirmação é sempre verdadeira. Não estou procurando o valor de x, pois não tem valor nenhum, é apenas um símbolo vazio que marca esse espaço. Na Álgebra do início do século XIX, o x é uma variável substitucional, ou seja, a variável representa objetos desconhecidos ou não. Enquanto que, no início do pensamento algébrico moderno, descrito por Klein (1992), as variáveis da Álgebra em Stevin, Vieta e Descartes são referenciais ou objectuais bem como substitucionais em termos de números desconhecidos (são complementares), pois cada uma variável está indicando números da Aritmética e/ou grandezas

[80] Aula realizada na UNIBAN, gravada no dia 12/04/2013 por Jacqueline Borges de Paula.
[81] Segundo Klein (1992, p. 328-338), o capítulo IV do *Isagoge* de Vieta trata das regras e preceitos da Logística Especiosa. Nesse capítulo, são apresentadas e explicadas quatro regras: i) acrescentar uma grandeza a uma grandeza; ii) subtrair uma grandeza de uma grandeza; ii) multiplicar uma grandeza por uma grandeza e IV) aplicar (dividir) uma grandeza a uma outra grandeza. Nisso está presente características da axiomatização da Álgebra.

geométricas. Isso significa que o signo é usado tanto em termos substitucionais como objectualmente num processo dinâmico.

> As variáveis na Aritmética são consideradas 'números desconhecidos', isto é, variáveis substitucionais, enquanto as variáveis na Geometria são objetuais, isso significa objetos em geral e, portanto, completamente não especificado, como o 'triângulo geral' ou noções como 'maçã' na sentença: 'uma maçã é uma fruta'. Boyer (2004, p. 60) enfatizou a importância do trabalho de Vieta, atribuindo a Vieta a distinção entre números desconhecidos e números desconhecidos fixos (coeficientes, minha inserção) e variáveis genuínas no sentido de parâmetros (OTTE, 2013)[82]

É importante destacar que as noções iniciadas com Stevin, Vieta e Descartes acabaram se transformando, no século XIX, em dois grupos: 1º) os ingleses (De Morgan, Boole, Grassmann, etc.) – para eles, a lógica é um tipo de Álgebra, a variável é como na Álgebra ou Matemática, ou seja, representa objetos; 2º) Frege, Russell, Bolzano - a lógica é uma língua, não uma Álgebra; a lógica é tratada como fundamento da Matemática e não parte da Matemática; então, a variável é substitucional, não representa objetos e, sim, marca um lugar, um espaço dentro de um argumento de função proposicional, sinalizando o lugar do substantivo.

4.3. Reflexões sobre o pensamento de Klein referente ao início da simbolização moderna

Klein (1992) argumentou sobre a transformação do conceito de número, desde Pitágoras até o século XVII, no contexto do desenvolvimento da Física Matemática. Dessa forma, tratou da distinção entre objetos de primeira intenção e de segunda intenção, afirmando que o signo designa objeto de segunda intenção, ou seja, indica outro conceito e não o ser (KLEIN, 1992, p. 174). Essa afirmação nos faz pensar que essa distinção está diretamente relacionada com o fato de que, na concepção antiga de número – indicando multiplicidade de objetos ou de coisas ou mesmo de uma entidade qualquer e, na concepção atual de número – indicando generalidade, propicia perceber que essa distinção expressa o modo de

[82] Esta citação consta de um manuscrito de artigo de Michael Otte (Fundamentals of Mathematic Education) que está em processo de elaboração.

ser dessas duas concepções de número, pois o aspecto geral no conceito de número não era acessível aos gregos antigos e também na teoria moderna do conhecimento do início dos séculos XVI e XVII. Porém, no princício da Idade moderna, com Vieta, Stevin e Descartes, por exemplo, a ideia de 'número geral', como símbolo representando coisas, estava incipiente, pois dizia respeito a quantidades e grandezas apenas.

Klein (1992), ao descrever a mudança do significado de *arithmo a*ntigo (*Anzahl*) para o significado de número, no início da modernidade (*Zahl*), argumenta sobre a transformação que ocorreu no conceito de conceitualização, pois a interpretação do mundo mudou, devido a novas perspectivas e novos instrumentos. Nesse sentido, a primeira intenção de um objeto diz respeito a sua essência ou ao objeto em si e a segunda intenção refere-se ao fato da possibilidade de tornar conhecido o desconhecido na mente do sujeito; apreender sobre o vir a ser ou, 'até mesmo', o será-aí de Heidegger do ponto de vista de calculações simbólicas. A característica da conceitualização moderna de número é exatamente a possibilidade de 'equivalência' entre a apreensão do objeto de primeira intenção por meio do objeto de segunda intenção.

O aspecto do símbolo como segunda intenção, no caso do 'x' cartesiano, indica grandezas, portanto, não é totalmente segunda intenção e sim característica de 'primeira intenção', pois está relacionado ao modo de ser dos objetos e são relações de dependência entre objetos e não as relações em si. Sobre isso, encontramos em Unguru (2004. Tradução nossa):

> O pensamento geométrico trata do espaço e suas propriedades. No pensamento geométrico é empregada a representação diagramática, acompanhada de componente retórico, a prova. O pensamento algébrico é caracterizado pela operação simbólica, se preocupando com relações Matemáticas ao invés dos objetos matemáticos, pela liberdade sem quaisquer compromissos ontológicos, ou seja, o foco é a abstração suprema.

Esse argumento corrobora o aspecto Sintético da Geometria dos séculos XVI e XVII e fortalece o argumento de que, no pensamento algébrico, está presente a Análise, ou seja, o pensamento relacional. Além do mais, a questão da intencionalidade em Husserl como correlação entre consciência e objeto é tratada por Klein (1992) por meio do 'uso' do símbolo do pensamento algébrico, caracterizando o fato de que houve continuidade no início da consolidação da

Ciência moderna, pois o conceito do Ser presente na ideia de *arithmo* ainda estava no pensamento de Descartes, ou seja, há continuidade entre o conceito de *arithmo g*rego antigo e o conceito de número nos séculos XVI e XVII, isto é, a ontologia antiga foi substituída pela ontologia das grandezas, porém o 'ganho' foi o tratamento simbólico do conceito de número, começando a substituir o ser 'individual' das coisas por conceitos.

Nessa mudança ontológica, há uma espécie de combinação entre conceitos completamente indeterminados e não perceptíveis (quantidade em geral) com símbolos completamente perceptíveis e determinados, pois o símbolo (x, por exemplo) pode ser, até certo ponto, 'arbitrário', não tendo nenhuma relação direta com o objeto representado uma vez que o conceito expresso pelo signo não é o signo. É nesse sentido que o conceito de Complementaridade entra no processo de interpretação do pensamento de Klein (1992).

Qual é a diferença entre o símbolo 2 e o 'x' que representa a solução de uma equação? Há continuidade e descontinuidade entre o símbolo 2 e o 'x'? O símbolo 2 indica conceito de '2', ou seja, uma dualidade, em geral, podendo ser qualquer tipo de objeto individual, inclusive, uma relação, de acordo com o pensamento Otteano. No caso do 'x', sugere caráter geral, inclusive, a dualidade. Então, a continuidade ocorre no sentido de ampliação e descontinuidade no que diz respeito ao tratamento, supostamente, geral, porém esse processo está inserido no aspecto contingencial, na intuição movida pela atividade em questão.

No caso da igualdade A=B, os símbolos 'A' e 'B' designam indicações diferentes que têm referências idênticas por meio de analogia e regras de calculações, porém isso não significa que o valor numérico de 'A' é o mesmo de 'B', mas indica algo mais do que uma igualdade, isto é, identidade entre distintos, ou seja, é algo mais do que uma simples igualdade. Isto é, em contextos diferentes propiciam interpretações também diferentes, pois de acordo com Otte (2011) dois conceitos extensionalmente equivalentes agem diferentemente em relação a determinado contexto no que diz respeito ao aspecto cognitivo.

Na igualdade 4+7=11, o uso do '4' e do '7' na forma de adição permite-nos concluir que o resultado é '11'. Agora, na igualdade a+b=b+a, já remete à ideia da criação de possibilidades diferentes de combinar os termos da igualdade,

propiciando aplicação em contextos diferentes. Isso nos faz pensar que o significado da simbolização surgiu da necessidade do uso por meio da atividade e não priorizando a referência.

A maneira de captar o modo quantitativo ‘indeterminado’ do ser do conceito é por meio do símbolo matemático que, com o decorrer da ‘nomeação’, incorpora o objeto, indicando a inseparabilidade entre o símbolo e o objeto representado. No caso do símbolo ‘2’, como disse Klein (1992, p. 106), o conceito de dualidade pode ser entendido, ao mesmo tempo, como duas ‘entidades’. Um indicando dois lápis e outros dois objetos arbitrários, tendo no símbolo sua conexão. Então, a simbolização algébrica surge de contexto prático e/ou teórico. Por isso, há necessidade da Complementaridade entre intensão e extensão.

Na transição do mundo contemplativo para o mundo operativo, está a transformação do conceito de número, pois essas duas ‘entidades’ relatadas por Klein (1992) indicam uma tensão entre o aspecto do pensamento matemático (dianóia) e o aspecto do objeto do sentido (aistheta). A simbolização diz respeito a uma ‘absoluta’ falta de referência imediata a qualquer coisa definida, preocupando-se com o fato de que o símbolo matemático está localizado no momento em que algo não inteligível possa se tornar inteligível, por meio de identidades e diferenças.

Nesse sentido, a sintaxe e a semântica no pensamento algébrico possibilitam compreender que as estipulações das regras de calculações e de operações com números ‘não simbólicos’ propiciam entender o significado das operações com os símbolos porque, assim como o número, o símbolo também trata de relações visto que os signos usados na Álgebra são diferentes dos signos usados para comunicação, pois a sintaxe comunicativa, de certa forma, refere-se a coisas já sedimentadas numa determinada linguagem. Se num grupo de pessoas, todos conhecem a língua portuguesa, sabe o que significa cadeira, nenhum deles vai confundir com maçã, por exemplo. Dessa forma, os símbolos estão diretamente relacionados a coisas da Aritmética e Geometria por meio de relações.

Contudo, os signos da Álgebra atual não se referem a números, magnitudes ou qualquer coisa específica e essa indeterminação é importante,

pois possibilita tratar os signos como variáveis, ou seja, como símbolos matemáticos da Matemática formal. Essa característica dos símbolos do pensamento algébrico surgiu com Vieta influenciando todo o desenvolvimento conceitual, tanto da Matemática como das Ciências em geral. Klein (1992) sustenta que o conceito de número simbólico apareceu primeiro como espécie por meio do estudo da Aritmética de Diophantus porque, nessa Aritmética, encontrou a palavra '*eidos'* ou 'espécie' (*arithmo*), indicando número desconhecido. Vieta juntou essa ideia com o método de Pappus (Análise), por meio do qual ele determinava magnitudes desconhecidas na Geometria.

Vieta denotou '*eidos'* ou 'espécie' para valores desconhecidos, isto é, variáveis. A seguir, realizou operações e calculações sem fazer qualquer distinção se o objeto era conhecido ou não; assim, o 'salto' epistemológico de entendimento foi a possibilidade de trabalhar com manipulações de fórmulas, indicando relações entre objeto e não o objeto em si. Portanto, Vieta substitui as quantidades (número de alguma coisa definida) e as magnitudes (segmentos, áreas e volumes) por calculações com espécies, denominando de Logística Especiosa ou Logística das Formas, segundo Klein (1992).

Para ilustrar essa situação, vejamos o procedimento usado atualmente no Ensino Fundamental para determinar a quarta proporcional. Considere os valores numéricos: 5; 10; 20. A quarta proporcional é designada por x=10.20:5=40. Nesse caso, estamos trabalhando com o conceito de quarta proporcional e com os objetos determinados. E se tivermos a situação: a, b e c, então a quarta proporcional será x=b.c:a. Possuímos, aqui, uma relação de coisas que não conhecemos, pois não sabemos o que significam os termos a, b e c, mas temos convicção de que a relação conceitual procede e essa relação pode ser aplicada em contextos totalmente dferentes, evidenciando a força da representação. Neste caso, o objeto principal da Matemática é a relação e não apenas os números em si.

Portanto, estamos fazendo calculações, operações com objetivo de operatividade, envolvendo conceitos por meio de fórmulas. Isso significa que, no pensamento relacional da Álgebra, a fórmula é o resultado procurado e foi exatamente essa possibilidade de tornar determinados, por meio de símbolos

algébricos, os objetos desconhecidos no contexto da Física Matemática que o pensamento algébrico teve desenvolvimento substancial. Nesse sentido, Klein (1992) enfatiza, já no início de sua obra, a íntima conexão entre a linguagem formal da Matemática com a Física.

4.4. Representação e Linguagem de conceitos matemáticos no início do simbolismo algébrico moderno

A compreensão do início do simbolismo algébrico moderno, a partir de Klein (1992), remete-nos à relação entre Matemática e Linguagem, pois trata também dos modos da representação. Se a Matemática fosse uma linguagem apenas, não tinha problema com objetos gerais; agora se a Matemática é uma Ciência e não é apenas linguagem, então, qual é o objeto que ela estuda? Qual é a distinção principal? A distinção principal é justamente a questão do objeto. Se a Matemática fosse linguagem, não teríamos esse problema. Claramente, a linguagem não tem objeto e, sim, fala ou discurso sobre objetos. A linguagem serve, em primeiro lugar, para coesão social e não para representar o mundo objetivo. Nesse sentido, a Complementaridade entre expressão e significado é importante, pois, se a Matemática não é uma linguagem, então, temos a pergunta sobre o objeto. Platão apresentou uma resposta por meio da rememorização e do ‘abandono’ aos sentidos.

> A leve pomba ao sulcar livremente no ar, cuja resistência sente, poderia crer que no vácuo melhor ainda conseguiria desferir o seu voo. Foi precisamente assim que Platão abandonou o mundo dos sentidos, porque esse mundo opunha ao entendimento limites tão estreitos e, nas asas das ideias, abalançou-se no espaço vazio do entendimento puro. Não reparou que os seus esforços não lograram abrir caminho, porque não tinha um ponto de apoio, como que um suporte, em que se pudesse firmar e aplicar as suas forças para mover o entendimento (KANT, 1997, B 9).

No caso do nominalismo, crença de que os objetos matemáticos são mentais e, por isso, não existem fora do pensamento humano, são elementos da intuição pura, segundo Kant (1997). Isso foi a revolução copernicana da epistemologia, isto é, não procura objetos fora do pensamento, mas dentro da mente.

Quando a realidade social começa a se apresentar como elemento importante no processo, a forma de nossa Matemática atual surgiu da necessidade da Educação devido à revolução industrial, pois havia o imperativo de ensinar Matemática para maior quantidade de pessoas. Isso foi um fator que pode ter motivado tratar a Matemática como uma linguagem, mas pode ser Ciência também. Então, temos duas separações, pois a linguagem encerra esses dois lados: expressão e significado, ou seja, em termos de linguística, eu posso falar sobre semântica **–** pesquisa relação entre símbolo e significado. A sintaxe pesquisa as regras da expressão linguística corretamente.

É nesse sentido que Thom (2013) fez a comparação entre as linguagens em termos de significado. A ideia de que a Matemática é uma Ciência formal ou uma linguagem analítica surge mais facilmente da Álgebra do que da Geometria e, por isso, os gregos antigos nunca chegaram ao entendimento da Matemática como Análise simbólica, porém os árabes e os indianos conseguiram, num ponto de vista de regras de calculação ou de uma ‘Logística’, com os dígitos do sistema de numeração decimal. A sintaxe da Geometria são todos os movimentos das funções possíveis dentro do espaço. A sintaxe da Álgebra é arbitrária, comutativa, não comutativa, é mais ampla e, portanto, com mais possibilidades de usos e aplicações.

Nos séculos XVI e XVII, ocorreu a transformação epistemológica (contemplativo para o instrumentalismo), como diz Foucault (1995) e teve também o surgimento do simbolismo, ou seja, de uma nova língua, a Álgebra (via representação decimal de Stevin, *arte* analítica de Vieta e a Geometria Analítica de Descartes) que, de acordo com Klein (1992), teve papel decisivo para descrever o livro da Natureza. Por que a língua algébrica é importante? Porque podemos trabalhar com a representação da realidade ao invés da realidade e isso propicia especialização. E mais, a linguagem contribui positiva ou negativamente com o entendimento do conceito. Positivamente, se considerarmos os aspectos contingenciais; negativamente, se ponderarmos a Matemática apenas como linguagem.

Isso pode ser verificado numa situação comum no Ensino Fundamental quando estamos trabalhando com crianças; vejamos: num quintal há apenas

coelhos e galinhas perfazendo 32 pés. Sabendo que há nesse quintal 10 animais entre galinhas e coelhos, pergunta-se: qual é o número de coelhos e galinhas que estão nesse quintal? Uma maneira de responder é por meio de ilustrações, onde desenhamos os corpos dos animais sem os pés. A seguir distribuímos os pés para cada animal. No final, verificamos que quem ficou com 4 pés são coelhos e quem ficou com dois pés são galinhas. Contamos a quantidade de cada um e finalizamos a atividade.

Podemos apresentar essa mesma situação do ponto de vista conceitual, mas em outro contexto. Vejamos: Num hotel há 32 camas disponíveis aos hóspedes, perfazendo 10 quartos. Sabendo que há apenas quartos com duas camas e quartos com 4 camas. Perguntam-se: quantos quartos de duas camas há nesse hotel? Seguimos a mesma orientação dos problemas das galinhas, ou seja, distribuímos o total de camas nos quartos de acordo com o que é permitido. Depois, contamos a quantidade de quartos que ficaram com duas camas e concluímos a atividade.

Uma determinada criança que esteja participando dessa atividade pode achar cruel a resolução na situação das galinhas, pois, para resolver a situação, precisamos cortar seus pés. No caso dos quartos do hotel não há essa preocupação. E essa ansiedade pode ser um fator que dificulte o entendimento do conceito. Então, a estrutura conceitual não é um problema, mas sim a forma de apresentar o problema; a representação é necessária e pode ser decisiva no processo de entendimento.

Nesse sentido, a simbolização algébrica, criada nos séculos XVI e XVII, ajuda a perceber a importância da operacionalização de conceitos tanto positiva como negativamente.

Pensar em termos de triângulos, equações e identidades, como no caso dos problemas das galinhas e do hotel, ou seja, a simbolização, de forma geral, precisa da Análise de conceitos (semântica). A prova de um teorema ou a resolução de um problema não progride tendo como base a análise, exclusivamente, de conceitos postos na situação porque eu não estou usando conceito de reta, conceito de ângulo, conceito de vértice; estou usando conceitos que se referem a instâncias (casos particulares) e não o conceito geral, como no

caso da demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo bem como nos métodos Diophantinos, de Vieta ou de Descartes no que diz respeito a soluções gerais. Lembrando que, no método de Diophantus, o aspecto geral está implícito, segundo Vieta, na concepção de Klein (1992).

O matemático não argumenta a respeito de conceitos, mas acerca de casos particulares desses conceitos, ou seja, a reta r é paralela à reta b, ... (usa particulares para explicar). Essa é a diferença entre raciocínio à base de conceitos (teoria) em vez de raciocínios à base de casos particulares, chamada de conhecimento racional por conceitos e conhecimento por construções de conceitos, respectivamente, de acordo com a concepção kantiana. O pragmatismo estuda o uso das palavras, por isso, a Matemática é uma atividade e não uma fala.

A resolução de Diophantus ou mesmo considerando a definição antiga de números como quantidade de objetos é capaz de nos ajudar a perceber determinada generalidade quando estamos com outra intencionalidade, pois o número pode ser usado como variável, ou seja, conseguimos mudar a unidade, por exemplo, para medir, pode-se usar 1/4 ou 1/2 como unidades de medidas – isso pode ser visto no momento em que Stevin apresentou significado de potências de expoente 4 e também nos mais variados sistemas de numeração que são exemplos de um tipo de universalização do conceito de número. Isso começa a ficar evidente a partir dos séculos XVI e XVII. A separação total do símbolo do objeto ou dos conceitos dos objetos (intensões) do sentido, da extensão ou referência, ocorreu apenas no século XIX a partir de Bolzano.

A linguagem comum serve muito bem para comunicação, depende apenas do significado das palavras, mas, para representação de situações que devem ser resolvidas, perde qualidade como, por exemplo, as representações em Vieta. O simbolismo algébrico representa situações (problemas), por meio das quais resolvemos situações desconhecidas, estabelecendo relações. Segundo Foucault (1995), houve, nos séculos XVI e XVI, ruptura entre a época da interpretação e a nova época da representação, ou seja, os textos começam a se separar das coisas, os signos começam a se separar dos objetos.

A simbolização algébrica, além de se tornar importante no processo de pesquisa, interpretação e resolução de problemas da Física Matemática, foi usada para resolver problemas que os gregos não conseguiram resolver, como a duplicação do cubo, pois os gregos antigos se limitaram a usar apenas régua e compasso. Descartes encarou essa situação com sua *Mathesis Universalis,* dizendo que deveria ser construído outro tipo de compasso - o compasso de cônicas. Com esse compasso, foi possível resolver o problema da duplicação do cubo, incluindo novos métodos na Álgebra, pois equacionou (estabeleceu relações) a situação. Os gregos antigos poderiam dizer: mas não vamos encontrar exatamente esse valor se nos referirmos à medida da aresta do cubo. No entanto, a precisão depende da exatidão da máquina, na concepção de Descartes e isso evidencia a importância da instrumentalização, do método para acessar o valor desejado.

As investigações Matemáticas de Vieta estão conectadas intimamente com suas obras cosmológicas e astronômicas. Normalmente[83], os historiadores da Matemática pensam que os modelos da Astronomia não têm relevância para criação de novas ideias, símbolos, teorias e linguagem na Matemática. Mas os modelos possibilitam conquistar novos resultados. O campo das aplicações, as interpretações objetivas e os objetos da Matemática ajudam na elaboração de novas ideias. As novas aplicações, os novos interesses para o mundo podem ser de origem prática como navegação ou teórica, como na cosmologia que ajudaram ou estimularam o desenvolvimento da teoria e do próprio simbolismo algébrico moderno.

A Matemática ‘formalizada’ chegou aos séculos XVI e XVII na forma da Geometria de Euclides cujo conteúdo é totalmente determinado por meio de regras no uso de régua e compasso (conforme explica os postulados) como instrumentos de construção que indicam aspectos construtivos. Os axiomas de Euclides são verdades totalmente gerais, não são específicos, ou seja, são argumentos, afirmações que todos os raciocínios têm de obedecer. Na verdade, são regras lógicas. Se quisermos saber como Euclides entende a Geometria, isto é, como o pensamento geométrico está presente nos *Elementos*, devemos

[83] Segundo Otte no dia 07/11/2012.

analisar os postulados. Os postulados apresentam as seguintes características: se é possível realizar tal construção, então, temos a possibilidade de outra construção; por exemplo, se eu posso desenhar um segmento entre dois pontos quaisquer e, se eu posso desenhar um círculo de centro qualquer e com raio qualquer, então isso prova que é possível construir triângulos equiláteros de qualquer medida para a base.

É muito importante deixar claro que, quando se fala da *teoria axiomática* e da *Geometria de Euclides,* há diferenças cruciais, pois, nas demonstrações Matemáticas atuais, funciona da seguinte forma: se essas *proposições* a, b e c são verdadeiras, então as *proposições* d e f etc., são verdadeiras também. Já na Geometria Euclidiana é da seguinte forma: se essas *construções* a, b e c são admitidas, então essas *construções* d e f são possíveis. Isso é fundamental, pois evidencia consequências essenciais no sentido de que a Geometria Euclidiana trata de figuras, como triângulo, por exemplo. O triângulo, no sentido da Matemática moderna, é um conjunto de pontos e não uma figura construída numa determinada maneira. Para os gregos antigos, é impossível considerar espaço, retas e planos como um conjunto.

Os limites da Matemática moderna, no sentido da teoria axiomática (*proposições* do tipo se, então), estão no limiar da lógica como constata o teorema de incompletude de Gödel – num sistema de proposições consistentes, chamado axiomas, haverá, nessa teoria, proposições que são verdadeiras e que não podem ser derivadas formalmente a partir desses axiomas (OTTE, 2003).

A incompletude da Geometria Euclidiana surge no momento em que há coisas que não são construtíveis com os postulados admitidos como, por exemplo, a aresta de um cubo com o duplo volume de um cubo dado (OTTE, 2003). Nesse sentido, a Geometria tem um alcance maior, pois exige a ampliação do sistema de números. Isso caracteriza a incompletude da Aritmética. A Aritmética permite contar apenas números até os racionais, não há contagem de números irracionais, porém é possível construí-los geometricamente. Então, neste caso, a fronteira é ampliada em relação à Aritmética. No caso da $\sqrt[3]{2}$ é o reverso, ou seja, este número não é construtível, mas pode ser calculado se admitirmos números irracionais. Mas, como vimos, a Geometria de Euclides poderia (pelos

menos, parcialmente) ser entendida dessa forma, isto é, como um tipo de construtivismo. Então, sob o ponto de vista construtivista da Matemática, os limites estão nos instrumentos.

A diferença de interpretação dos objetos geométricos, no sentido de Cantor e Euclides, é que, para Euclides, o triângulo é resultado de uma construção, é um conceito e, para Cantor, é um conjunto de pontos, isto é, um objeto. A Matemática até 1800 foi baseada em conceitos e, por isso, é chamada Sintética. O instrumentalismo surgiu da visão construtiva. Esse aspecto construtivo foi para a Aritmética, por exemplo, calça e sapatos são diferentes em termos de uso, todavia, em termos de valor, podem ser equivalentes. Para os árabes, os números não são reflexão do mundo como foram para Platão, mas, sim, para realizar calculações no mercado.

Do ponto de vista da atividade, seja de engenheiro, pedreiro, Geômetra ou comerciante, todo conhecimento tem especificidade estrutural em sentidos diferentes. Nesse aspecto, a Matemática não tem objetos, tem objetividade que realiza uma determinada função num contexto específico, realizando operações, calculações, construções, instrumentos etc. Contudo, essa perspectiva remete-nos a um labirinto onde não conseguimos ver saídas.

De um lado, temos o pensamento cotidiano que é mais influenciado pela maneira de falar, bem como por meio do significado das palavras e, em contrapartida, o pensamento formal da Álgebra que não expressa um objeto específico, em relação à linguagem algébrica e geométrica. No segundo Congresso Internacional da Educação Matemática (1972), em Exeter, o brilhante matemático francês René Thom (1923-2002), contrariamente, sugeriu usar a Geometria como uma linguagem intermediária que propiciasse levar o aluno da língua comum à língua formal da Álgebra. Nesse sentido, Thom aponta três pontos de vista para analisar a relação entre a linguagem algébrica e geométrica, a saber: i) O significado é um contínuo ou é bem delimitado? ii) A sintaxe é rica ou pobre e simples? iii) O sentido é intuitivamente claro ou não?

Diante dessa concepção, Thom analisou possíveis respostas, tendo, em mente, aspectos da língua cotidiana, da Geometria euclidiana e da linguagem algébrica.

> Na linguagem cotidiana: i) a sintaxe é pobre; ii) os sentidos das palavras são claros; iii) a classe de equivalência para uma palavra (um conceito) não é formalizado de forma geral. Na Geometria euclidiana: i) o significado é bem delimitado (a congruência é a relação que estabelece a classe de equivalência); ii) a sintaxe é rica; iii) o sentido das palavras é intuitivamente claro. Na linguagem algébrica: i) o significado é bem delimitado; ii) a sintaxe é rica; iii) o sentido não é intuitivamente claro, às vezes, não há qualquer relação semântica direta ou indireta (THOM, 2013. Tradução nossa).

Nessa comparação entre a linguagem da Geometria e da Álgebra, Thom (2013) enfatiza que a Geometria pode servir para educar as pessoas, no sentido de começar no estudo da linguagem formal, mas devemos observar que os objetos da Matemática são definidos em termos de identidade e diferença. Na Matemática moderna, a comparação é feita quanto à identidade de dois conjuntos (axioma de extensionalidade) e também no que diz respeito em saber se o sentido da sintaxe é rico ou é pobre. Por exemplo, se quiséssemos formalizar o conceito de cadeira, como fazer? Não há limites, não é bem definida, mesmo considerando o sentido das palavras claras.

A sintaxe, nesse aspecto, é pobre, pois é composta de sujeito e predicado e mais alguns complementos apenas, ou seja, a gramática de nossa linguagem é pobre. Na Geometria de Euclides, a igualdade é formalizada por meio da congruência e, por isso, não há dúvidas. A sintaxe na Geometria Euclidiana é rica, pois todos sabem, por exemplo, construir um triângulo com dados delimitados. Na Geometria de Euclides não tem pontos, pois não existe espaço. Nela, a sintaxe é clara e rica, pois entendemos orientações dadas na construção de um triângulo, por exemplo, ou seja, o sentido das palavras é claro.

Portanto, temos de um lado, aspectos mais formalizados (pois a classe de equivalência de um conceito é formalizada) e, de outro lado, a sintaxe é mais rica. Na Álgebra, a sintaxe é mais rica ainda, pois podemos criar qualquer coisa, como, por exemplo, a Álgebra de Boole, com propriedade comutativa, sem a propriedade comutativa e com e sem distributiva.

Em termos semióticos, há Complementaridade na tensão entre a expressão da linguagem (simbolização) e a semântica (significado). Essa tensão pode ser descrita em termos de sintaxe (regras de calculação, pois, sintaticamente, faz sentido). Agora, semanticamente (em termos de significado), pode não fazer sentido. A tensão acontece porque o significado não toma conta

de toda situação sintática criada, uma vez que ficamos escrevendo novas fórmulas e não conseguimos dar sentido a essas expressões. Dessa forma, pode ocorrer a produção de novos conhecimentos, criando novos conceitos.

Vieta e Descartes ampliaram o entendimento da relação entre Aritmética e Geometria, tendo o simbolismo algébrico como elemento dessa ampliação, no sentido de que o 'x' adquiriu *status* de representar coisas da Aritmética e da Geometria. A inspiração dessa ampliação está em Platão em que o "um" não é número, pois Platão entendia a medição não apenas de coisas empíricas, mas também de ideias ou monas, expressando relações. O número é a quantidade de monas necessárias para medir grandezas. Nesse sentido, o 'mona' torna-se variável, pois pode referir-se à área, comprimento etc. É essa perspectiva que motivou Vieta a elaborar o conceito de número como espécie, usando a unidade, tanto na Aritmética como na Geometria.

No caso de Stevin, que foi empirista, considerou apenas a unidade como número, ou seja, o número para ele serve para calculação. A atitude prática de Stevin e a idealista de Platão evidenciam a visão de mundo de cada um; enquanto Platão via o mundo como um organismo em conjunto, Stevin especificou, fragmentou esse mundo para resolver problemas específicos, porém Stevin representa a parte Logística de Platão.

Nesse universo de aplicação, a unidade é tratada como grandezas – Stevin e Descartes intensificam o número com essa funcionalidade. Mesmo assim, o argumento de Platão é muito convincente e, com isso, podemos discordar de Stevin, mas a unidade não é igual, pois dependendo da situação, usamos uma unidade específica, indicando a concepção de Platão de que a unidade não é número. Vieta, Stevin e Descartes não fizeram essa distinção. A ideia da Geometria analítica é exatamente identificar as grandezas com os números (Álgebra de linhas – a *Mathesis Universalis* de Descartes e de Vieta). Essa interpretação indica aritmetizar o contínuo, isto é, significa pensar as grandezas em termos de conjunto de números.

No momento em que Stevin associou números com grandezas como, por exemplo, o zero indica o ponto 'O', formou uma espécie de analogia, o contínuo 'passa' para os números. Nesse sentido, Stevin e Descartes provocaram

‘rupturas’, mas Vieta continuou com pequenas ampliações da Matemática grega antiga. A Álgebra dos séculos XVI e XVII começa a trabalhar com cálculo simbólico de variáveis com letras, ocorrendo determinada ‘ruptura’ com a sintaxe e com o significado. Portanto, pode-se dizer que a transição do aspecto contemplativo para o operativo tem, como elemento central, o simbolismo algébrico moderno. Essa transição ocorre gradualmente no momento em que ficamos nos liberando do ontologismo antigo - da exigência de que cada expressão (equação) deve ter não só um sentido, ou seja, formulado corretamente, mas que tenha também significado. Os gregos antigos não conseguiram se libertar desse ontologismo, pois não estavam preparados para aceitarem expressões sem significado como, por exemplo, $(x^2 + x^4)$ não tinha significado.

Mesmo na Álgebra Geométrica da Antiguidade, procurava-se por medidas de grandezas que eram consideradas objetos, não havia operacionalização de grandezas desconhecidas como no pensamento formal dos séculos XVI e XVII.

O simbolismo algébrico levanta uma questão que incomodava os gregos antigos, os modernos e, também, na atualidade, pois, de um lado, a Matemática deve ter aplicabilidade, isto é, uma utilidade universal no sentido de medir grandezas gerais. Por outro lado, não é formal no sentido da lógica. A lógica tem a ver apenas com a sintaxe, ou seja, com regras do pensamento não se referindo ao mundo que está fora. A Matemática, segundo Kant (1997), lida com regras do pensamento, com objetos e construções. A lógica não sofre essa tensão entre símbolo e objeto de Klein (1992). O sucesso ou o progresso dos modernos aconteceu em certo sentido porque eles ignoraram os problemas da semântica e construíram fórmulas sem estar preocupados, diretamente, com o significado, ou seja, Vieta, Stevin e Descartes ‘ignoraram’ a tensão entre sintaxe e semântica ou entre símbolo e objeto.

Portanto, se a aplicabilidade da Matemática é universal, então não pode ter significado específico. De outra forma, se a Matemática não é exatamente um jogo formal de acordo com certas regras e, por conseguinte, não tem significados fixos como a teoria das plantas, então, na Matemática há campos de objetos

variáveis, indicando que a forma de lidar com o entendimento de seus objetos é por meio do conceito de Complementaridade do pensamento Otteano.

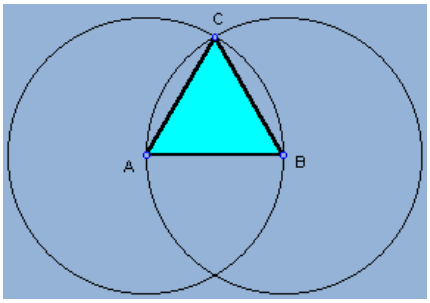
4.5. Pensamento geométrico: a construção do triângulo equilátero

Em se tratando do pensamento geométrico, vamos analisar o que aconteceu numa aula[84] de Matemática no início da década de 1990. Lembro-me como se fosse hoje, eu estava munido de esquadros e compasso, explicando ou descrevendo, de forma empolgada, para um grupo de estudantes que hoje seria o equivalente ao 8º ano do Ensino Fundamental, a forma de construir um triângulo equilátero. Após falar sobre o *conceito* de triângulo equilátero, apresentei na forma de desafio aos estudantes que construíssem um triângulo equilátero, utilizando apenas o esquadro e compasso. De posse do conceito e com os instrumentos em mãos, o grupo de estudantes começou a fazer experiências na tentativa de atender ao pedido. Depois de algum tempo de tentativa e erro, percebi que os estudantes, mesmo tendo em mente o conceito do *objeto* (triângulo equilátero), não estavam conseguindo elaborar um *método* para construir o triângulo pedido.

Então, com toda minha suposta ‘sabedoria’, peguei o esquadro e perguntei aos estudantes: qual será a medida do lado do triângulo equilátero que vamos construir? Marquei no meio do quadro a medida sugerida pelos alunos. Nesse momento, percebi certa expectativa por parte deles. Diante desse entusiasmo, peguei o compasso e fiz a construção, seguindo as orientações do teorema I de Euclides. Veja a figura 12:

[84] A aula referida foi lecionada por Evilásio José de Arruda numa disciplina chamada desenho geométrico. Nessa época, era comum na disciplina de Artes, tratarem de construções geométricas. Essa tensão entre método e objeto foi retomada contigencialmente novamente no momento em que estávamos conversando com o professor Michael Otte sobre a relação entre o método e objeto que utilizamos para compreender determinados conceitos matemáticos.

Figura 12: Construção do Triângulo Equilátero



Após a conclusão da construção, todos entenderam o processo e acabaram repetindo algumas vezes para consolidar a memorização do *método*. Nesse momento, um aluno me fez a seguinte pergunta: ‘o que a circunferência tem a ver com o triângulo equilátero’? Fiquei sem resposta, lembro-me que respondi dizendo algo sobre a genialidade de Euclides em desvelar o *método* de construção.

Contudo, essa pergunta renasceu por meio do estudo do pensamento Otteano, ou seja, como podemos associar a *episteme* do triângulo com a *techne* de sua construção, do ponto de vista filosófico? Portanto, temos aqui o aspecto intuitivo kantiano. O desafio sempre é o de criar novos métodos/técnicas diferenciados para designar a mesma *episteme* bem como elaborar novos conceitos. Para isso, há necessidade de atividades.

Pode-se dizer que, nos diagramas de construções geométricas, há tensão entre símbolo e objeto, pois temos algoritmos (*métodos*) que são possibilidades de expressar, de forma notável, a aplicação de certo conceito. Mas, o que significam esses algoritmos expressarem o mesmo conceito? O desenho do professor na lousa é, certamente, maior do que a do aluno no seu caderno. Porém, cada desenho de tamanhos diferentes mostra a mesma estrutura relacional, permitindo afirmar que há leis e teoremas que regem a diversidade de diagramas.

O desafio é acessar, por meio da intuição, novos métodos, novas tecnologias, no sentido de expressar o mesmo conceito, pois o algoritmo, isoladamente, não fornece nenhuma explicação. Se um aluno constrói um triangulo retângulo ou expressa uma resolução de uma situação por meio da

Aritmética e/ou Álgebra de uma maneira bem rudimentar e, mesmo nessa suposta precariedade, podemos perceber, visualizar ou mentalizar, bem como associar com a Lei geral, então, pode-se dizer que esse fato propicia aos platonistas conceberem que as leis e as ideias são independentes, universais e eternas. Assim, a intuição que conduz ao processo representacional simbólico é tão crucial quanto a própria representação. Isso evidencia a necessidade de tratar dos objetos matemáticos por meio da Complementaridade entre intensão e extensão, mediados pela atividade.

4.6. O pensamento algébrico como pensamento relacional

Há situações que indicam o aspecto central do Pensamento Algébrico que não se fazia presente na época grega antiga. Esse aspecto fundamental começou com Vieta no momento em que se estabelecem relações de coisas conhecidas com coisas desconhecidas por meio de manipulação de símbolos, objetivando, num certo sentido, quantificar uma determinada situação para tomada de decisões.

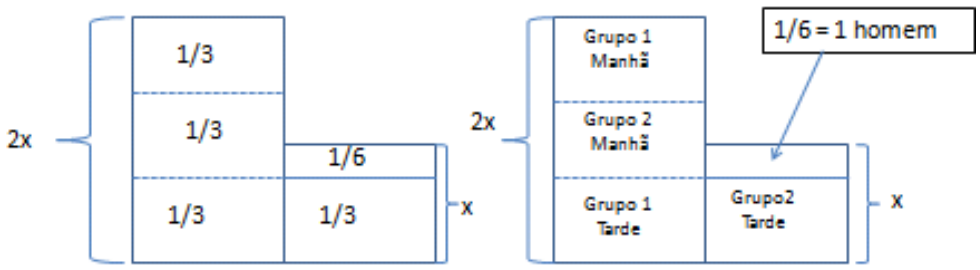
A realidade é composta de objetos distintos por um lado e signos e significado, por outro. A questão é capturar a forma da dinâmica do seu entrelaçamento. Segundo Otte (2011), a universalidade, que é característica do pensamento algébrico, do ponto vista de compreensão de conceitos matemáticos, não é mais bem entendida como abstrações no sentido platônico, mas, sim, como relações (abstração simbólica na concepção de Klein), ou seja, somente as relações podem ser objetivamente acessadas e comunicadas.

No intuito de perceber a importância do Pensamento Relacional na Educação Matemática, visando compreender que essa perspectiva teve origem na estrutura dos diálogos platônicos, desenvolvida a partir dos séculos XVI e XVII, consideramos as seguintes situações:

1) A uma equipe de homens foi atribuída à tarefa de ceifar dois pastos, um tendo o dobro do tamanho do outro. Até meio dia, todos os homens ceifaram juntos no pasto maior. Depois, a equipe foi dividida em dois grupos iguais. O primeiro grupo

permaneceu no pasto maior e concluiu o trabalho no final da tarde. O segundo grupo foi ceifar o pasto menor; entretanto, no final da tarde, restou uma porção desse pasto para ceifar. Essa porção foi ceifada no outro dia por apenas um homem que trabalhou durante um dia inteiro. Quantos homens estavam ceifando na fazenda?[85]

Resolução:



Na resolução dessa situação, devemos estabelecer relações de igualdade entre quantidades desconhecidas com quantidades conhecidas, supondo inicialmente que conhecemos esse valor desconhecido. Por meio de manipulações dessas relações, podemos apresentar resposta numérica dessa situação.

Observando a ilustração acima, constatamos o seguinte: se a equipe trabalhou no pasto maior em um período do dia (manhã) e a metade da equipe no outro período do dia (tarde), então a metade da equipe pode cortar 1/3 do pasto em um período do dia. Analisando o pasto menor, verificamos haver uma porção sem cortar igual a 1/2 menos 1/3, que é igual a 1/6. Dessa forma, 1/6 corresponde ao trabalho de um homem em um dia. Diante disso, podemos constatar que a área total de 6/6+2/6=8/6 foram ceifadas, então havia 8 homens trabalhando.

2) Outra situação que ilustra a necessidade de se trabalhar com relações numéricas é a seguinte: um professor tem duas peças, uma vermelha e outra azul; tem também pesos de 1 kg e 2 kg, respectivamente. Diante de um grupo de crianças, diz que as peças juntas pesam 2 kg e que a peça vermelha sozinha pesa 1 kg a mais do que a peça azul. Então, propõe ao grupo que realize

[85] Este problema e sua resolução se encontram na tese de doutorado intitulada ‘Aspectos do Pensamento Matemático na Resolução de Problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii’ de Gladys Denise Wielewski, página 228, defendida em 2005.

experiências com diferentes relações de peso no sentido de estabelecer equivalências entre as peças azuis e os pesos.[86]

Após algum tempo de manipulações dos pesos e peças, as crianças eventualmente podem chegar à conclusão de que duas peças azuis equivalem a 1 kg. Se esse grupo de crianças não dispõe da ideia de igualdade e diferença, no sentido relacional, não avança muito, pois com números apenas não se pode fazer muita coisa. Nesse sentido, o mundo de objetos distintos está 'preso' à Aritmética. Contudo, para avançarmos além do mundo discreto, precisamos aceitar que os objetos de estudo da Matemática são relações.

É importante perceber que, na relação entre as quantidades conhecidas ou não, surgem as identidades e diferenças por meio das quais encontramos um valor específico que satisfaz essa situação. Essa dinâmica de resolução coaduna com a Logística Especiosa de Vieta e Descartes, no sentido em que se resolve uma situação por meio da Análise com instrumentos da Aritmética e Geometria. Além disso, esse processo evidencia a essência do pensamento Otteano ao dizer que a relação é um 'ser' independente do sujeito e do objeto, da *episteme* e da *técnica*, ou seja, a relação é expressa no interior de uma atividade. Contudo, não é possível acessar a relação desconectada da *episteme* e da *técnica*, por isso a Complementaridade entre *episteme* e *técnica* é essencial no trato dos objetos de estudo da Matemática.

4.7. O compasso de Descartes

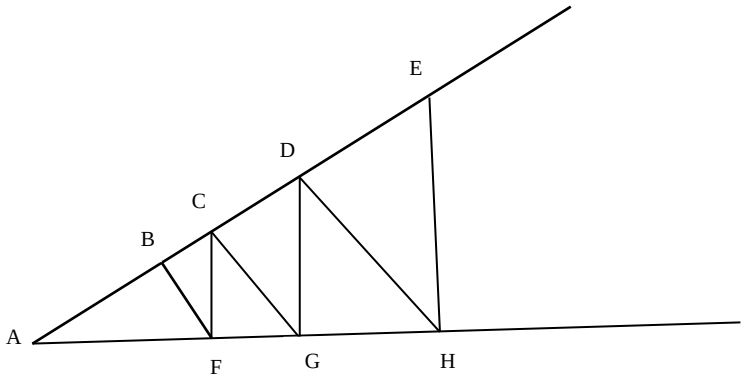
No compasso de proporção contínua de Descartes, a Síntese usa o instrumento chamado princípio de continuidade como instrumento analítico que os gregos antigos não aceitavam, por permitirem apenas régua e compasso como instrumentos de Análise e não da Síntese. Na Álgebra moderna, realmente, precisamos da simbolização para mostrar o resultado da Análise. Na Geometria, podemos usar o desenho (instrumento - compasso de Descartes), pois calculamos, operamos ou construímos com objetos, com instrumentos, mas, na

[86] Esta situação se encontra em Otte (2011).

Álgebra moderna, calcula-se com variáveis. Nesse sentido, nos séculos XVI e XVII, os modernos como Galileu aperfeiçoaram a construção da luneta, Descartes construiu um compasso diferente, ou seja, surgiram instrumentos para acessar novos conhecimentos, devido a uma nova visão de mundo, a uma nova intencionalidade, a uma nova visão filosófica etc. Nesse contexto, a Análise e a Síntese adquirem uma estrutura simbólica algébrica também diferente, indicando características do início do simbolismo algébrico moderno.

A figura 13[87] ilustra o compasso proporcional que Descartes construiu para obter resultados que vão além da Geometria Euclidiana.

Figura 13: compasso proporcional de Descartes



Os ângulos ABF, CFA, ACG, AGD, ADH e AHE são retos. Por meio da proporcionalidade de triângulos semelhantes, obtemos uma proporção que pode ser continuada infinitamente. Nessa sequência de triângulos semelhantes, temos a proporcionalidade:

$$\frac{AB}{AF}=\frac{AF}{AC}=\frac{AC}{AG}=\frac{AG}{AD}=\frac{AD}{AH}=\ldots.$$

Fazendo AB=1 e AF=x, obtemos a proporção contínua:

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2}=\frac{x^2}{x^3}=\frac{x^3}{x^4}=\frac{x^4}{x^5}=\ldots.$$

[87] Essa figura encontra-se na tese de doutorado intitulado ‘A Influência da Matemática nas Regras para a Direção do Espírito e em O Discurso do Método’ de Duelci A. de Freitas Vaz, defendida em 2007. Esse Desenho pode ser obtido também, a partir da figura formada por uma composição de réguas para ‘acessar’ a continuidade em Descartes (2010, p. 507).

A manipulação dessa proporção contínua permite: i) construir potências, ii) construir raízes, iii) construir resolução de raízes positivas para equações cúbicas e iv) construção da duplicação do cubo.

Vejamos:

i) Construção potências;

Fazendo AB=1 e AF=x, temos $AC = x^2,\ AG = x^3,\ AD = x^4, \ldots$

ii) Construção de raízes;

Fazendo AF=1 e AB=x, temos $AC = \frac{1}{x},\ AG = \frac{1}{x^2},\ AD = \frac{1}{x^3}, \ldots$

iii) Construção de soluções para equações cúbicas de raízes positivas.

Na igualdade da proporção contínua, podemos interpretar a solução da equação $x^3 - x = 2$, pois, FG=AG-AF, então: FG= $x^3 - x$. Se considerarmos FG exatamente igual a 2, temos $x^3 - x = 2$, ou seja, o segmento AF=x é uma solução positiva da equação.

iv) Construção da duplicação do cubo

Fazendo AG=2, AB=1 e AF=x têm-se $x^3 = 2$.

Esse instrumento possibilita interpretar a relação entre Aritmética, Geometria e Álgebra simbólica em que os aspectos analíticos e sintéticos estão presentes, ou seja, é analítico quando eu considero o problema resolvido e capturo as identidades a partir dessa perspectiva e é sintético no processo construtivo da resolução, isto é, o pensamento geométrico, assim como o pensamento algébrico, está intrinsecamente relacionado.

A Geometria analítica de Descartes mostrou-se útil no momento em que a construção ou síntese falharam, pois apenas com régua e compasso não foi possível resolver a duplicação do cubo. Com a introdução de outras curvas, de outros instrumentos, a construção foi realizada, ou seja, com apenas a Geometria euclidiana não foi possível, pois teve necessidade da continuidade e da

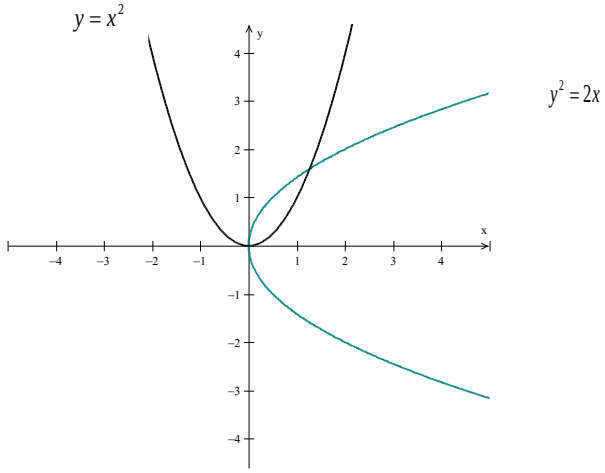
Geometria do espaço. E para provar que esse número fica fora da Geometria de Euclides houve necessidade da Álgebra abstrata do século XIX.

Na duplicação do cubo, por meio das coordenadas da Geometria Analítica atual, a solução é fornecida de forma simples, pois:

$$x^3 = 2 \text{, então } x^4 = 2x .$$

$$\text{Substituindo } y = x^2 \ (1) \text{, temos } y^2 = 2x \ (2) .$$

O valor procurado (x) é construído exatamente como intersecção das parábolas (1) e (2). A figura 14 (Esboço das parábolas: $y = x^2$ e $y^2 = 2x$) ilustra essa construção.



> Toda Geometria Analítica de Descartes foi derivada, a partir do exame minucioso da proporcionalidade[88]. A descoberta de um ou mais meios proporcionais, através da associação apropriada de termos conhecidos com termos desconhecidos, é o paradigma de sua engenhosa descoberta e construção em termos de representações metafóricas (OTTE, 2006. Tradução nossa).

Os meios proporcionais na Análise de Descartes foram baseados na introdução de termos intermediários entre suposição e conclusão e isso ganha importância quando procuramos entender como a Matemática justifica suas afirmações, estabelecendo elo entre o que se conhece com o que não se conhece por meio da simbolização algébrica. Contudo, o período de Descartes foi uma época de descoberta sem se preocupar com a fundamentação e, nesse processo, o novo conceito de número exerceu papel essencial.

---

[88] Isso legitima o que Klein (1992) disse sobre Vieta e Descartes – toda equação é uma proporção e toda proporção é uma equação (grifo nosso).

4.8. Situações que evidenciam a transição do aspecto descritivo para o operativo

Do ponto de vista da transformação do conceito de número, situações numéricas e geométricas surgiram do contexto cotidiano bem como da resolução de problemas da própria Matemática. De forma que a simbolização surge dessas situações, pois, diante de inúmeros problemas apresentados no início da Idade moderna, fica cada vez mais complicado elaborar métodos específicos para cada problema apresentado. Então, as próprias situações 'forçaram' os modernos dos séculos XVI e XVII a criarem estratégias e resolução cada vez mais gerais.

4.8.1. A resolução de equações por meio do método da falsa posição

No livro História da Matemática na sala de aula, de Helder Pinto, publicado em 2007, há resolução de vários problemas por meio do método egípcio de falsa posição[89] em que mostra como as equações eram resolvidas no final do século XV e início da idade moderna[90]. Vamos analisar duas dessas resoluções, no sentido de perceber que, nesse período, as resoluções de equações estavam condicionadas e dependentes do objeto, ou seja, no método há necessidade de se trabalhar com o objeto. Isso dificulta a operacionalização de conceitos e a generalização.

Problema 1 – Uma quantidade e a sua quarta parte somadas perfazem 15. Qual é a quantidade?

Para resolver este problema, o *escriba* da época utilizava uma técnica chamada de falsa posição, onde assumia, por hipótese, que a quantidade procurada era 4 (é um tipo de Análise que depende do objeto), ou seja, a solução da situação proposta é 4. Em seguida, fazia a calculação para verificar (um tipo de síntese calculativo) o valor encontrado. Veja:

[89] O método de falsa posição também foi usado por Diophantus, segundo Klein (1992).
[90] Esse método é usado até hoje por professores nas aulas de Matemática na Educação Básica.

$$4+\frac{1}{4}\times 4=5$$

Partindo do resultado encontrado que, neste caso, são 5 e não 15, ou seja, o número 4 não é solução do problema, então o *escriba* aplicava uma espécie de 'fator de correção'. Para obter 15, que é o valor desejado, o calculista tem que multiplicar o 5 por 3 (3 é o fator de correção). Dessa forma, podemos multiplicar o valor assumido 4 por 3 também (4x3=12). Então, o valor 12 resultante dessa manipulação é a solução da situação. A seguir, fazia a verificação para confirmar a resposta encontrada. Então: $12+\frac{1}{4}\times 12=15$.

Problema 2 – uma quantidade e a sua sétima parte adicionadas perfazem 19. Qual é a quantidade?

Neste problema, o *escriba* utilizava o número 7 como possível resposta, a seguir fazia a verificação. Veja: $7+\frac{1}{7}\times 7=8$. De posse desse resultado, que não é o esperado, aplica-se o 'fator de correção'. Neste caso, o fator de correção é $\frac{19}{8}$, pois esse número multiplicado por 8 resulta 19. Então, a solução dessa situação será $7\times\frac{19}{8}=\frac{133}{8}$. Finaliza a resolução fazendo a verificação. Observe que a solução da equação será obtida pela multiplicação do número referente à falsa solução pelo fator de correção.

Por quais motivos, os calculistas da época utilizaram o 4 e o 7 como falsas soluções nos problemas 1 e 2 apresentados? Presume-se que esse artifício era usado para evitar manipulações com frações. Portanto, nesta sequência de procedimentos, o método não universalizado, em termos de independência do objeto, pode ser aplicado em contextos similares.

4.8.2. Resolução de problemas por Diophantus e Vieta

No livro I da Aritmética de Diophantus, há vários problemas resolvidos de forma detalhada. Vamos utilizar um desses problemas para compreender o movimento de transição do descritivo para o operativo, na transformação do conceito de a*rithmo* grego antigo, pois foi nas mãos de Vieta que essa mudança ocorreu, segundo Klein (1992), e, por conseguinte, o surgimento da Álgebra simbólica moderna.

Segundo Heat (1964, p. 131), o problema é apresentado sob a forma: Dividir um número dado em dois números em que a diferença também é dada[91].

> De acordo com Klein (1992, p. 330. Tradução nossa), Diophantus toma 100 como número dado e 40 como a diferença dada entre as partes. Resolve o problema considerando que o número menor era 1 *arithmo;* portanto, o maior número era 1 *arithmo* mais 40 unidades. Como consequência, a soma destes dois números era 2 *arithmos* mais 40 unidades. Associando termos semelhantes a termos semelhantes, obteve 2 *arithmos* igual a 60 unidades e, portanto, um arithmo valia 30 unidades. Assim, os números procurados eram 30 e 70.

Nessa resolução apresentada, verificamos que os valores 100 e 40 são considerados condições necessárias na solução desse problema específico, ou seja, em Diophantus, não há preocupação em generalizar procedimentos (métodos gerais) de resolução, que é um dos méritos dos séculos XVI e XVII. Por outro lado, esse método pode ser generalizado, pois pode ser aplicado em situações similares, porém não implica generalidade do método, ou seja, os objetos ainda são específicos.

No que diz respeito à letra para representar números desconhecidos, isso está implícito no trabalho de Diophantus no momento em que o número procurado é considerado como um *arithmo*. Contudo, em Diophantus, o método de resolução também depende do conhecimento do objeto, ou seja, operacionaliza mais objeto do que símbolos.

O fato de Diophantus considerar o procurado como um *arithmo* estimulou Vieta a associar esse processo à Análise (nesse sentido a Aritmética de Diophantus é uma teoria Logística para Klein), visto que a Análise mostra a

[91] To divide a given number into to two having a given difference. A tradução desse problema está presente em Gil (2011).

possibilidade de uma construção ou resolução a partir de valores conhecidos (aspecto relacional), de forma que o conceito de *arithmo* adquire *status* de número geral via ideia de espécie por meio de letras-signos. Isto é, a letra-signo representa um elo fundamental na operacionalização de conceitos de segunda intenção e, consequentemente, na generalização de métodos gerais.

Na resolução apresentada por Vieta desse mesmo problema, em sua Logística Especiosa[92], ele designou *B* como a diferença entre os dois números procurados e *D* como a sua soma. Observe a generalidade da abordagem de Vieta, fruto de sua *Logística Especiosa,* enquanto a *Logística numérica* diophantina o fez escolher valores específicos (40 para a diferença e 100 para a soma). Segundo Klein (1992, p. 331. Tradução nossa[93]):

> Considerando *A* menor valor[94], o maior valor era *A* + *B.* Logo, a soma das raízes era *2A* + *B* e, portanto, *2A* + *B* era igual a *D.* Por transposição, *2A* era igual a *D*-*B* e, dividindo ambos os membros por 2, *A* era igual a $\frac{D}{2}-\frac{B}{2}$. Vieta considerou ainda que, se *E* fosse o maior valor, o menor valor era *E*-*B.* Logo, a soma dos valores era 2*E*-*B* e, portanto, 2*E* -*B* era igual a *D*. Por transposição, *2E* era igual *a D* + *B* e, dividindo ambos os membros por 2, *E* era igual a $\frac{D}{2}+\frac{B}{2}$. Vieta concluía assim que se podiam encontrar duas raízes, dadas a sua diferença e a sua soma. Com efeito,
>
> A metade da soma das raízes menos a metade da sua diferença é igual a menor raiz; e as mesmas adicionadas é a maior raiz.
>
> Vieta terminou exemplificando numericamente a solução encontrada. Tomando *B* igual a 40 e *D* igual a 100, *A* seria igual a 30 e *E* a 70.

A escolha dos números 40 e 100, para verificar solução do problema, indica a ligação de Vieta à *Aritmética* de Diophantus, pois são os mesmos usados pelo matemático de Alexandria na resolução deste problema.

Na Análise ou Álgebra moderna atual, a resolução dessa situação pode ser realizada também por meio de um sistema de duas equações lineares de duas incógnitas. Veja abaixo a resolução:

Designamos a soma e a diferença por A e B respectivamente cujos números procurados por x e y (x>y). Então, estabelecemos as igualdades.

---

[92] Logística Especiosa – trabalha com espécie genérica, ampliando a concepção Logística numérica de Diophantus que utilizava números.
[93] A tradução dessa situação também se encontra em Gil (2011, p. 75).
[94] Segundo a Logística Especiosa, Vieta designava as quantidades desconhecidas por vogais.

$$\begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases} \Rightarrow x=\frac{A+B}{2} \; e \; y=\frac{A-B}{2}$$

Na resolução apresentada por Vieta, está presente o início da manipulação de símbolos gerais como representantes de valores desconhecidos (variáveis substitucionais e objectuais), ou seja, começa a deixar de lado as especificidades do objeto, passando a considerar o método como objeto geral por meio da simbolização algébrica.

Segundo Klein (1985, p.23), a situação: dois *arithmos* e três unidades são iguais a sete unidades, era representada por Diophantus em sua Arithmética sob a forma: $\varsigma^{ot}\beta\ \overset{\circ}{M}\gamma\ \iota\sigma o\iota\ \ \varepsilon\iota\sigma\iota\nu\ \overset{\circ}{M}\sigma\iota\zeta$. Na notação de Vieta, essa situação seria representada por *'2 em A mais 3 igual a sete'*, pois ele usava vogais para indicar quantidades desconhecidas. Observe que a manipulação, na forma de Diophantus, é muito mais complexa do que em Vieta, além do mais, é dependente do objeto *arithmo*. Mas a notação de Vieta facilita a operacionalização de símbolos que indicam conceitos, tornando-se útil no estudo de fenômenos, pois possibilita representar Leis gerais. Esse 'pulo' ou 'salto' é o novo tipo de abstração, no sentido de criar novos objetos e relações que permitem, ao mesmo tempo, pensar sobre as ações e também se libertar dessas ações motivadas pela atividade num contexto sócio-histórico que, por sua vez, é contingente e intuitivo, como diz Kant.

Essa manipulação que teve origem em Diophantus é um dos pontos de partida de Vieta, no que diz respeito ao começo do Simbolismo Algébrico Moderno, ou seja, em Vieta, o símbolo começa a se separar do objeto. Isso significa que o símbolo começa a se distanciar do conhecimento do objeto (abstração simbólica).

O elo entre a Logística numérica de Diophantus (teoria Logística) e a Logística Especiosa de Vieta numa perspectiva de intencionalidade atual pode corroborar a compreensão das dificuldades do ensino do pensamento algébrico na atualidade.

Dropisch, segundo Oliveira (2011, p. 41), apresenta uma situação em que o método operativo universal evidencia a importância do uso da simbolização algébrica na análise de um problema numérico. O problema consiste em determinar dois números em que a soma seja igual a 25 e um deles seja múltiplo de dois e o outro, múltiplo de 3 e ímpar.

Nesta pesquisa, a ênfase é caracterizar a simbolização algébrica (sistema signos) como instrumento da 'Análise e/ou Álgebra' na relação de igualdade entre valores conhecidos e desconhecidos. Na situação apresentada, se o domínio são os números naturais, a solução depende do número (objeto) diretamente e, com isso, fica fácil determinar os pares de números que satisfazem a situação, os quais são: (22,3), (16,9), (10,15), (4,21). Se o domínio for o conjunto dos números inteiros, as quantidades de pares possíveis são infinitas. Nesse caso, faz-se necessário elaborar um procedimento por meio de uma fórmula (que será uma função) que permita determinar um par de números específicos.

Oliveira (2011, p. 42) apresenta uma solução algébrica para obter os pares de números inteiros que tornam a situação verdadeira.

> Todos os valores do primeiro número serão representados pela função A(z) e todos os valores do segundo número por B(z). Para satisfazer a primeira condição, usa -se:
>
> $$A(z)+B(z)=25 \quad (1)$$
>
> Para satisfazer a segunda condição, que exige ser o primeiro número múltiplo de dois, por conseguinte, par, e o segundo, múltiplo de três e ímpar, usa-se:
>
> $$A(z)=2z \quad (2)$$
>
> $$B(z)=3(2z+1) =6z+3 \quad (3)$$
>
> A equação (1) reescrita e B(z) substituída por seu valor (3) encontra-se: A(z)+6z+3=25 e isolando A(z) no primeiro membro obtém-se;
>
> $$A(z)=25-6z-3=22-6z \quad (4)$$

Na verdade, os valores que podemos atribuir a z podem ser qualquer número inteiro e as fórmulas A(z)= 22-6z e B(z)=6z+3 permitem determinar tantos pares quantos se queiram nas condições solicitadas. A abstração neste processo engloba todos os casos particulares, diferentemente da abstração aristotélica que depende da percepção de características comuns dos objetos. Essa manipulação foi possível a partir do fato de que o conceito de número foi ampliado, e o número

como espécie de Vieta contribuiu significativamente nessa problemática, corroborando a criação da generalidade do método.

Contudo, compreender o método suscita associar à *episteme*. Isso significa que, mesmo nas técnicas egípcias de resolução de equações, nos procedimentos de Diophantus e em Vieta, há uma espécie de '*ente'* organizador fazendo com que escolhamos o método adequado na resolução de cada situação problema apresentada. Qual é a relação entre a *techne* e a *episteme* na organização do método? Será que temos aqui o aspecto intuitivo *kantiano*? Como elaborar mecanismos alternativos que possam indicar a mesma *episteme*? São aleatórios?

Podemos dizer que, nos procedimentos de resoluções, há tensão entre símbolo e objeto, pois temos algoritmos (*métodos*) que são possibilidades de expressar de forma notável a aplicação de certo conceito.

Na sequência de passos na resolução das situações apresentadas, há, de forma geral, características similares. Porém, cada procedimento indica a mesma estrutura relacional, permitindo afirmar que pode haver Leis e procedimentos que regem a diversidade de formas diferentes de resolução. Portanto, o desafio é acessar, por meio de atividade contingencial (pensamento Otteano), métodos no sentido de expressar, de forma diferenciada, determinado conceito, pois o algoritmo, isoladamente, são apenas cálculos sem significado.

4.9. A relação entre símbolo e objeto na construção do conceito da irracionalidade

As reflexões sobre o conceito de número foram fundamentais nos séculos XVI e XVII na interpretação da cosmologia bem como nas finanças, ou seja, em toda conjuntura das Ciências dessa época e, consequentemente, na Educação Matemática, pois nos direcionam a um tema essencial do ensino da Matemática, que é a questão do como ensinar ideias porque, para aprender alguma coisa, precisamos saber que coisa é essa. Os conceitos matemáticos são instrumentos complicados, por isso nós não podemos usá-los sem saber nada sobre a sua natureza em geral.

O conceito de números irracionais é a situação em que podemos evidenciar a relação entre símbolo e objeto sob o aspecto da simbolização. Arruda (2007)[95] discutiu a questão da irracionalidade, a partir da incomensurabilidade da diagonal do quadrado e da construção geométrica do número de Euler. Nessa perspectiva, foram abordadas construções geométricas para perceber e visualizar a irracionalidade. Isto nos dá oportunidade para indicar a relevância da noção de Complementaridade no que diz respeito aos conceitos matemáticos, levando em conta seus lados operativos e descritivos. Dessa forma, ampliamos possibilidades dos métodos de ensino.

O número de Euler que é um exemplo importante de número irracional, mesmo sendo tratado superficialmente na Escola Básica quando comparado com o π, por exemplo, pois, normalmente, na escola, assim como na universidade, fala-se dos números irracionais como números não racionais e, na realidade, não há outra possibilidade no contexto do mundo discreto da Matemática. As considerações geométricas, em contraste com o mundo discreto, oferecem a probabilidade de indicar algumas caracterizações positivas dos números irracionais, observando que o número de Euler, mesmo sendo irracional, é computável.

Nos tópicos 4.9.1 e 4.9.2, há situações exemplares que evidenciam tensões complementares entre símbolo e objeto, sobre os quais Klein (1992) discute, pois a tensão propicia criar alternativas que são contingenciais na consolidação de conceitos matemáticos, no sentido de que o objeto matemático precisa da representação por meio da simbolização algébrica, de diagramas e evidentemente num processo interativo entre ambos. Isso legitima o fato de que o objeto da Matemática se efeiva na relação entre a mente do sujeito e o objeto por meio de uma atividade.

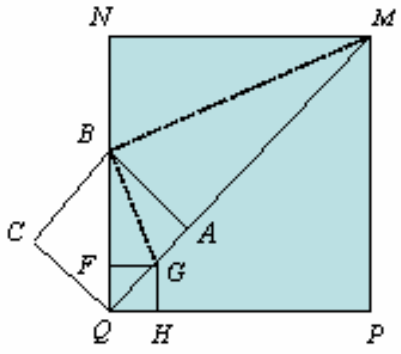
[95] Refere-se à dissertação de Mestrado de Evilásio José de Arruda, defendida em 2007 sob a orientação de Michael Otte.

4.9.1. O algoritmo de Euclides e a incomensurabilidade da diagonal do quadrado

Na Geometria, há um campo extenso em que os números precisam ser ampliados para dar conta da resolução de problemas que surgem da própria Geometria. Um desses problemas é mostrar diretamente que há grandezas incomensuráveis, pois os conceitos matemáticos precisam de formas diferentes de apresentar um mesmo objeto e, com isso, o conceito torna-se mais suscetível de aplicação bem como de compreensão sobre a necessidade da fundamentação da Matemática.

Para compreender o conceito de incomensurabilidade da diagonal do quadrado, do ponto de vista do contínuo, partimos de um processo de construção infinita de quadrados conforme a figura 15:

Figura 15: Construção de quadrados para percepção da irracionalidade



Na figura 15 acima, temos o quadrado QPMN com diagonal MQ e lado MN. Com centro em M e raio MN, traçamos um arco de circunferência NA, a qual intercepta a diagonal MQ no ponto A. No ponto A, traçamos a tangente ao arco NA que corta o lado NQ em B. Esta construção mostra que os triângulos MBA e MBN são congruentes, pois têm dois lados correspondentes congruentes (MN=MA) e os ângulos $M\hat{N}B$ e $M\hat{A}B$ retos. Então, o lado AB é igual à NB. Pode-se afirmar também que ABCQ é um quadrado, pois o ângulo $A\hat{B}Q = 45° = A\hat{Q}B$. Repete-se o processo de construção, utilizando o quadrado construído ABCQ. Portanto, com centro em B e raio BA, traçamos um arco de circunferência AF, a

qual intercepta a diagonal BQ do quadrado ABCQ no ponto F. No ponto F traçamos uma tangente ao arco AF que corta o lado do quadrado ABCQ em G. Os triângulos ABG e BGF são congruentes (AG=FG) e QHGF é um quadrado, pois $H\hat{Q}G = 45° = H\hat{G}Q$. Esse processo de construção pode ser repetido tantas vezes quantas se queiram, tanto do ponto de vista macro como micro.

Essa construção ajuda a perceber que, se o lado e a diagonal do primeiro quadrado (QPMN) tiver uma medida x em comum, então todos os quadrados construídos terão a mesma medida x em comum, em relação aos seus lados e diagonais. Assim, pode-se afirmar que, do ponto de vista discreto, que utiliza conceitos quantitativos, esta medida x teria um tamanho próximo de ‘zero’, pois será menor do que qualquer grandeza. Do ponto de vista do contínuo, não se fala de tamanho e, por isso, basta observar que, no curso da construção, a relação permanece a mesma, pois todos os quadrados são semelhantes e, por isso, a relação entre o lado e a diagonal permanece sempre a mesma, ou seja, no que diz respeito ao contínuo temos apenas um quadrado, indicando-nos que as figuras geométricas são universais, no sentido de Platão.

A incomensurabilidade entre a diagonal (A) e o lado (B) do quadrado MNPQ da figura 15 acima pode ser evidenciada se nós aplicarmos a ideia do algoritmo de Euclides. Esse algoritmo pode ser interpretado em dois mundos: no mundo discreto da Aritmética e no mundo contínuo da Geometria. No mundo discreto, esse algoritmo determina o maior divisor comum entre dois números por meio de divisões sucessivas. Se A e B forem números inteiros, o maior divisor comum é obtido da forma A=B.t+m; B=w.m+p etc. Nesse caso, o maior divisor comum de A e B é o último resto diferente de zero. Nesse processo, o resto diminui a cada passo e, no caso de números inteiros, o processo não pode continuar indefinidamente, pois, em um determinado momento, o resto será igual a zero, indicando-nos seu maior divisor comum.

O algoritmo de Euclides pode ser aplicado para analisar o aspecto relacional (contínuo) entre a diagonal do quadrado (A=MQ) e o lado (B=NQ). Este procedimento pode nos ajudar a constatar a incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado. Na tabela 03 (tendo como referência a figura 15), temos os registros dessas medições sucessivas.

Tabela 03 – Medidas das relações entre o lado e a diagonal de um quadrado.

	$Q_1 = AM$	$Q_2 = NF = 2QA$	$Q_3 = 2GH = 2GA$	...	...	Q_n	...
$A = MQ$	$B = NQ$	$QA = R_1$	$FQ = R_2$	...	R_{n-2}	R_{n-1}	...
$QA = R_1 \neq 0$	$FQ = R_2 \neq 0$	$R_3 \neq 0$	...	...	$R_n \neq 0$		

Onde:

$A = Q_1 B + R_1$; $B = Q_2 R_1 + R_2$; $R_1 = Q_3 R_2 + R_3$; ...; $R_{n-2} = Q_n R_{n-1} + R_n$. Como as características das grandezas A e B não são totalmente definidas e os restos R_1, R_2, R_3,... R_n nunca serão exatos, pois este processo pode ser continuado infinitamente. Portanto, podemos dizer que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado nunca serão exatos.

O que foi feito até agora foi medir a diagonal MQ usando como unidade MN=NQ e depois medir NQ=MN pelo resto (MQ-MN=QA), então NF=2NB=2QA e o resto dessa operação é FQ, ou seja, conseguimos perceber, nesse processo, as regras do algoritmo Euclidiano. Podemos dizer então que, se MN e QA são comensuráveis, então MQ (MQ=MN+QA) e MN são também comensuráveis.

Podem-se realizar várias medidas como, por exemplo, BQ pela unidade BA e QG pela unidade FQ. Diante disso, verifica-se que as relações $\frac{QG}{FQ} = \frac{BQ}{BA} = \frac{QM}{MN}$ representam a mesma relação entre a diagonal e o lado de um quadrado. Como todos os quadrados são semelhantes e esse processo de construção dos quadrados pode continuar indefinidamente, conseguimos dizer que o resto nunca vai desaparecer.

Esse processo de medição que permitiu passar do quadrado QPMN por meio do quadrado ABCQ até o quadrado QHGF mostra-nos os restos QA e FQ respectivamente, ou seja, esse processo reproduz a mesma relação. Portanto, esse método pode ser estendido infinitamente, designando a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado.

O procedimento usado na construção dos quadrados semelhantes (igualdades de forma e não de grandezas) permite-nos perceber/mentalizar um diagrama que, aliado ao modelo algorítmico Euclidiano, indica-nos a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado de uma forma 'direta', ou seja, não utilizamos o método da contradição, pois, no que diz respeito ao contínuo, tratado como semelhanças, não faz sentido a contradição. Porém, nesse processo de semelhança, é necessário compreender como esse procedimento é construído, pois ele não pode terminar, chegando sempre na mesma forma de um quadrado. Todavia, podemos perceber que, nesse recurso geométrico/diagrama, há possibilidade de percepção/mentalização da analogia entre o contínuo geométrico e o numérico.

Do ponto de vista discreto, suponhamos por absurdo que MQ e NQ, diagonal e lado, respectivamente, do quadrado MPQN, sejam comensuráveis. Então, podemos assumir que existirá um terceiro segmento x, que é submúltiplo comum de MQ e NQ. De forma que x será também submúltiplo comum de BQ e QA, segmentos esses que são, respectivamente, a diagonal e o lado do quadrado QCBA.

O processo pode ser estendido indefinidamente até se encontrar uma construção tal que a diagonal do quadrado seja menor que o segmento x que é um submúltiplo dela e do lado do quadrado, e isso é uma contradição, ou seja, o segmento x deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejarmos. Portanto, a diagonal e o lado do quadrado não são comensuráveis. Diante disso, podemos concluir que a diagonal e o lado de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis, ou seja, não há como encontrar um número racional $\frac{a}{b}$ (b ≠ 0) tal que $MQ = \frac{a}{b} QP$.

Esta explicação faz comparações entre uma unidade escolhida e os segmentos que representam a diagonal e o lado. Nesse sentido, usamos um processo algorítmico, ou seja, um modelo discreto que nos indica a contradição, bem como a impossibilidade da comensurabilidade. Verifica-se que, nesse processo, há Complementaridade entre o processo algorítmico de construção (discreto), que é a comparação das magnitudes da diagonal e o lado dos

quadrados, e a questão da estrutura infinita que é a continuidade do processo de construção geométrica. Lembrando que, do ponto de vista do infinito, não faz sentido estabelecer diferenças entre essas magnitudes, pois as razões terão o mesmo ‘valor numérico’.

Na justificativa da incomensurabilidade entre a diagonal do quadrado e o seu lado, usamos o processo de semelhanças de quadrados (contínuo) e o processo operativo discreto, numa relação entre o conceito e o objeto. No primeiro, não tem sentido o uso do tamanho de grandezas e, sim, uma maneira de perceber que a construção dos quadrados pode ser continuada indefinidamente. Já no processo operativo discreto, consideramos o tamanho das grandezas, indicando-nos uma contradição.

Temos, portanto, dois processos cognitivos que podem agir em nossa mente, ou seja, o procedimento operativo que calcula e compara e o procedimento de semelhança que é intuitivo, que capta a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado por meio da sensibilidade. Esses processos cognitivos atuam simultaneamente em nossa mente, provocando ações complementares entre o contínuo (intuição) e o discreto (algoritmo) na compreensão da incomensurabilidade que, por sua vez, propiciam compreender o conceito de número irracional via simbolização.

4.9.2. A construção geométrica do número de Euler

Na Matemática, existem números ‘importantes’ que fazem parte de sua fundamentação e caminham paralelamente com a história da humanidade. No início dos tempos e até hoje, os números inteiros positivos foram e são usados pelos seres humanos tanto para enumerar quantidades que possuímos como para efetuar medidas, ou seja, na conceitualização de número está presente o tratamento complementar entre o processo algoritmo de contagem e o processo contínuo de medida. O surgimento da necessidade de efetuar medidas é inerente ao processo de construção do conhecimento humano, devido ao estabelecimento de relações com a Natureza e, consequentemente, com o próprio homem

também. A curiosidade inerente do ser humano de compreender com profundidade as questões referentes à nossa existência leva-nos a observar detalhadamente a Natureza, procurando desvendar os mistérios da composição do universo, buscando compreender os fenômenos que apresentam ou não determinadas regularidades.

A raiz quadrada de dois $(\sqrt{2} \approx 1{,}41...)$ que é irracional (incomensurável), obtida quando se determina a diagonal de um quadrado de lado unitário, provoca discussão sobre a extensão dos números racionais e o número $\pi \approx 3{,}14...$, que é outro exemplo importante de número irracional e que está diretamente ligado ao círculo e à elipse.

A construção da raiz quadrada de dois e do número π é muito discutida em livros do Ensino Fundamental, Médio e do Ensino Superior, pois são números que recuam à Antiguidade e não dependem de um conhecimento 'avançado' de Matemática.

Em relação ao número de Euler, isso não ocorreu, provavelmente, devido ao fato de ele ser 'mais jovem', pois sua história está muito ligada ao Cálculo Diferencial, assunto tradicionalmente considerado como a entrada para a Matemática 'superior'. Nos livros do Ensino Médio e Superior, o tratamento dado ao número de Euler **e** ≈ **2,718...**, no aspecto da compreensão de sua importância, bem como na questão do seu significado, está sendo discutido de forma superficial.

O número de Euler (**e**) que surgiu a partir do século XV[96], provavelmente, motivado não só pelas relações comerciais promovidas pelo homem, mas pelo desejo natural do ser humano em expandir seus horizontes e, também, pela necessidade e curiosidade de conhecer as peculiaridades da relação número/Natureza. É importante ressaltar que a tensão entre símbolo e objeto presente na raiz quadrada de dois surge a partir de relações na Geometria. E, no

[96] Há indícios de que, no cálculo financeiro dos babilônios, já havia a noção do valor aproximado do número **e**. Porém, a história desse número confunde-se com a história do Cálculo Diferencial e Integral. Nos séculos XVI e XVII começa uma corrida para aplicação da Matemática e isso, motivado pela transição do aspecto interpretativo para o operativo que enfatiza o trato da Mecânica, da Logística, da Arte como Ciência por meio da experimentação calculativa.

caso do número de Euler, essa tensão pode aparecer da relação entre o homem com o próprio homem, como no caso da capitalização contínua (juros compostos).

Este fato indica uma nova intencionalidade no sentido de cálculos de processos infinitos, evidenciando a necessidade da emergência da simbolização algébrica nos séculos XVI e XVII. Contudo, o número de Euler está também ligado a logaritmos e à área sob um ramo da hipérbole. O grande mistério que envolve o número "**e"** é o fato de que a função exponencial de base "**e"** ser igual a sua própria derivada, bem como as conexões que essa função faz com os números π e i (unidade imaginaria), os quais têm personalidades tão diferentes. Essas conexões legitimam as calculações algébricas no sentido de 'perda de controle' do aspecto semântico de seus resultados e, com isso, o efeito dessas algebrizações é a produção de novos conhecimentos. Essa perspectiva Husserl negligenciou, mas o estudo histórico de Klein (1992) retoma essa característica da simbolização algébrica.

O conceito do número de Euler é apresentado por meio de suas representações, como as expressões: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ e $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ ou definindo-o por meio da integral da forma $\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt=\ln x=1\ (x=e\approx 2{,}718\ldots).$

A partir daí, constrói-se o logaritmo de base **e**, chamado logaritmo natural, que tem todas as propriedades do logaritmo comum e a derivada da função logarítmica natural só é obtida depois de sua definição por meio da integral.

Em seguida, aplica-se o logaritmo na base **e**, a função exponencial de base **e**, e sua derivada em várias áreas do conhecimento, deixando uma lacuna na construção do conceito desse número, cuja postura pode dificultar o processo de assimilação desse conceito.

Com a intenção de apresentar outras maneiras de acessar o número de Euler, foi elaborada uma explicação geométrica que possibilitasse melhorar o processo de ensino/aprendizagem do conceito desse número por meio da simbolização.

O fato do número **e** de Euler ser irracional propicia discussões sobre a continuidade da reta. Sobre isso, Dedekind (1831–1916), em sua obra: *Essays on the Theory of Numbers*, (1963, p. 9. Tradução nossa) declara:

> Podemos afirmar que a reta é infinitamente mais rica em pontos que o conjunto dos números racionais o é em números. Portanto, os números racionais não bastam para poder seguir aritmeticamente todos os fenômenos sobre a reta e é, por consequência, indispensável aperfeiçoar o instrumento racional, criando novos números, de modo que o campo dos números assim adquiridos seja tão completo, ou tão contínuo como a reta.

Os números racionais não são suficientes para 'descrever matematicamente o mundo' nem as figuras geométricas, por isso, precisamos construir os números reais que objetivam conectar com os fenômenos que envolvem o processo de compreensão das 'coisas'. Os números irracionais podem ser construídos de várias formas, mas o nosso propósito é apenas mostrar alternativas de construção do número **e** de Euler, para evidenciar a associação número/grandeza de Stevin que tinha preocupações práticas, suscitando questionamento teórico de fundamentação com Dedekind.

Dessa forma, foi elaborada uma construção geométrica do número de Euler, partindo da definição $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ e que pode ser transformado por meio de manipulações analíticas na expressão $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. A partir daí foi preparada uma possível justificativa para compreender que o número **e** de Euler não é racional. Dessa forma, o valor do número **e** será computado por um processo operacional algorítmico discreto na forma de intervalos encaixados, ou seja, tratamos a relação entre continuidade (parte da reta) e operação na construção desse número por meio da comparação de intervalos da reta.

Este processo de construção nos permitirá não só perceber, como também provocar uma discussão no sentido de apreender, para aprendermos e melhorarmos o nosso entendimento sobre o contínuo numérico, pois, além de propiciar uma possibilidade do cálculo de seus dígitos, vai nos remeter a um ponto que caracterizará uma possível visualização/mentalização do lugar geométrico no qual, provavelmente, localiza-se o número **e** de Euler.

A definição do número **e** permite-nos escrevê-lo por meio de uma série representada por:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}+...\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3!}+...$$ ou

$e=\sum_{k=0}^{k}\frac{1}{k!}+\sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{1}{t!}$. Podemos fazer $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

A expressão $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ representa uma série infinita que generaliza o conceito de soma infinita. Determinando seus primeiros termos, trazemos os valores conforme resultados da tabela 04 – Computação dos primeiros dígitos do número de Euler.

N	$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}$
1	$S_1=2$
2	$S_2=2+\frac{1}{2!}=\frac{5}{2}=2{,}5$
3	$S_3=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{16}{6}\approx 2{,}66...$
4	$S_4=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=\frac{65}{24}\approx 2{,}70833...$
5	$S_5=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=\frac{326}{120}\approx 2{,}7166...$
6	$S_6=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=\frac{1957}{720}\approx 2{,}7180555...$
7	$S_7=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{13700}{5040}\approx 2{,}7182539...$

Esse procedimento pode ser continuado indefinidamente. Diante disso, pode-se perceber que os termos da série, a partir de S_6, ficam cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja, o seu valor estaciona próximo de 2, 718 (que é o valor do número de Euler com três casas decimais).

A série $S = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ permite-nos construir infinitos intervalos fechados da forma $I_n = [a,b]$, com extremidades racionais, de modo que o valor aproximado do número **e** de Euler, ou seja, o número 2,71828182845 ... esteja contido em cada um desses intervalos.

Os primeiros intervalos a serem construídos são $I_1 = [2,3]$ e $I_2 = \left[\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}\right]$. O fato de *S* ser maior que 2 e $\frac{5}{2}$ está claro, pois $S_1 = 2 \; e \; S_2 = \frac{5}{2}$. Para mostrar que *S* é menor que 3, faremos o seguinte. Observe:

$S = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4\times 3} + \frac{1}{5\times 4\times 3} + ...\right] < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...\right] < \frac{5}{2} + \frac{1}{2!} \times \frac{1}{2} < 3.$ Seguindo esse processo, podemos construir o próximo intervalo. Observe:

$$S = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{5\times 4} + ...\right] < \frac{16}{3!} + \frac{1}{3!} \times \frac{1}{3} < \frac{16}{3!} + \frac{1}{3!}.$$

Portanto, o número **e** de Euler (2,718281828 ...) está presente em cada um dos intervalos $[2,3], \left[\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}\right], \left[\frac{16}{3!}, \frac{17}{3!}\right]$. De maneira análoga, podemos construir tantos intervalos quanto quisermos como, por exemplo: $\left[\frac{326}{5!}, \frac{327}{5!}\right] e \left[\frac{1957}{6!}, \frac{1958}{6!}\right]$.

Como esse processo operacional tende para o infinito, conseguimos definir esse número como uma construção contínua. Entretanto, o processo contínuo tratado por meio do conceito de limite nos permitirá entender que o número **e** de Euler está no processo relacional entre o algoritmo operacional e a continuidade, pois, para conceber a ideia do número **e** de Euler, precisamos da noção do contínuo.

Cada um desses intervalos pode ser representado numa reta e, com isso, conseguimos perceber que o comprimento do intervalo para **n** suficientemente grande tende a zero. Diante disso, perguntamos: será possível encontrar um

único número e, por sua vez, um único ponto para o qual a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ converge? Se conseguirmos, como garantir a 'unicidade' e 'existência' desse número?

Diante desses intervalos, vamos argumentar que a definição $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ está contida no intervalo $I_n=\left[S_n, S_n+\frac{1}{n!}\right]$. Para isso, denotaremos: $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ e $S=e=\sum_{k=0}^{k}\frac{1}{k!}+\sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{1}{t!}$.

Então, temos:

$$S=S_n+\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\ldots\right]<S_n+\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]<S_n+\frac{1}{n!}$$

Dessa forma, o número $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ está no interior do intervalo $I_n=\left[S_n, S_n+\frac{1}{n!}\right]$.

Esse intervalo pode ser utilizado para elaborar explicações no sentido de compreender a não racionalidade do número de Euler.

O número de Euler sugere a ampliação do conceito de número, a partir de situações comerciais, pois está relacionado à capitalização contínua e a juros compostos. É evidente que ninguém irá capitalizar continuamente determinado valor, mas o processo, ou seja, o método propicia criar números que não são racionais sem ter a Geometria como ponto de partida, pois na Educação Básica é comum mostrar a necessidade da ampliação dos números racionais por meio da Geometria.

O objeto matemático pode e deve ter várias maneiras de se definir e isso estimula o processo de construção de definições mais simples e eficientes, pois o que podemos, de fato, definir são conceitos, de forma que esses conceitos refiram-se a determinados objetos dentro de uma estrutura de linguagem temporal por meio da atividade. Dessa forma, quando temos várias definições do mesmo

objeto matemático, podemos ter quantidade maior de aplicações e utilidades. Segundo Otte (1993, p. 15), é preciso considerar o assunto sob diferentes pontos de vista, movimentar-se nele. Para isso, como no teatro, são necessários personagens distintos. São essenciais, portanto, a comunicação e aplicação em diferentes contextos.

Há inúmeras maneiras ou métodos para determinar o valor do número de Euler. Porém, o número irracional não pode ser acessado de forma direta e por isso usamos símbolos. A igualdade A=B não significa uma relação entre objetos, mas entre dois nomes do mesmo objeto, ou seja, A e B são designações ou representações diferentes que acessam ou indicam o mesmo objeto. Isso ajuda na apresentação de perspectivas da realidade no sentido de que o o conceito de segunda intenção, de acordo com Klein (1992), por meio da simbolização nos faz perceber as multifaces do objeto em contextos diferentes.

Considere $A = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e $B = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!}$. Observe a tabela 05 – Comparação de processos calculativos do número de Euler.

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!}$
1	2	2
2	2.25	2,5
3	2,37037	2,66667
4	2,44140	2,70833
5	2,48832	2,71666
6	2,52162	2,71805
7	2,54649	2,718254
8	2,65578	2,71827
9	2,58117	2,71828

Na tabela 05, tanto A como B são intensões do número de Euler, pois indica esse número do ponto de vista teórico por um lado e a calculação permite, por outro lado, ‘materializar’ num instante o valor desse número, porém do ponto de vista prático e imediato não são idênticos. Por exemplo, para x=9 há diferenças significativas no resultado entre as representações A e B, ou seja, A e B são igualdades de distintos e, por isso, são dinâmicos e evolutivos.

Nessa Logística, podemos perceber tensão entre símbolo e objeto gerado pelo próprio método. Na Matemática antiga, havia dependência do objeto na realização das operações e, segundo Klein (1992), existia tensão entre símbolo e objeto. Os gregos antigos, segundo Klein, não souberam lidar muito bem com essas tensões, pois não tiveram a percepção de uma linguagem simbólica algébrica para tratar do infinito e das calculações como um todo. A partir dos séculos XVI e XVII, a preocupação era com a aplicação, com o método, no sentido de número como símbolo geral em Vieta, Stevin e Descartes. Nessa nova forma de calculação em que se trabalhava com variáveis conhecidas e desconhecidas, surgiram novos desafios, como a solução da equação $x^2+1=0$ que para ser resolvida precisa da ‘criação’ de mais raízes da unidade.

Nesse movimento de tensão entre símbolo e objeto na transformação do conceito de número, pode-se perceber que há Complementaridade entre o símbolo e objeto por meio das representações, linguagens e atividades. Nessa ótica, a tensão possibilita ampliar entendimento do conceito de número que, por sua vez, mostra que essa transformação foi fundamental no início da simbolização moderna.

Observamos tanto na incomensurabilidade da diagonal do quadrado como na construção do número de Euler que a questão do infinito está presente. Conceito esse que não era confortável na Matemática grega antiga. Contudo, a partir dos séculos XVI e XVII, em que o método começa a tornar-se o foco principal por meio da simbolização algébrica, do ponto de vista da operacionalização de ideias, o conceito de infinito foi, aos poucos, sendo

‘matematizado’[97]. Isso é importante no sentido de que a transição entre o mundo contemplativo para o mundo operativo na perspectiva da criação de uma nova língua propiciou interpretação totalmente diferente dos objetos matemáticos.

[97] Até hoje a questão do infinito é muito complicada, pois o infinito não é um número, então o que é realmente o infinito? Entendo que, quanto mais entendermos o infinito, mais compreenderemos a quarta dimensão.

Considerações finais

O início do simbolismo algébrico moderno na perspectiva do desenvolvimento do conceito de número, conforme os quatro capítulos deste trabalho, está no contexto da relação entre a antiga e a nova Ciência que surgiu nos séculos XVI e XVII. Os caminhos percorridos nesse processo estão nos fatos de que, para Platão, a contagem e calculação ocorrem simultaneamente em que a Aritmética trata dos tipos de números e a Logística se preocupa com as relações entre os números. A interpretação da Logística, nos séculos XVI e XVII (uma espécie de Álgebra que trata os números em suas relações com alguma coisa) possibilitou o tratamento das Leis Naturais por meio de fórmulas, transformando a Mecânica numa Ciência metódica, numa conjuntura que envolve a relação entre Filosofia e Matemática.

A relação entre objeto e símbolo na Matemática no contexto sócio-histórico, na Física e na Mecânica em relação à mudança no conceito de número, caracteriza mudanças de intencionalidades, legitimando o fato de que a relação entre objeto e símbolo não é uma simples dualidade como expressa em Kant, pois, nos séculos XVI e XVII, em Vieta, Stevin e Descartes, havia aspectos sociais, práticos e teóricos envolvidos, ou seja, estava presente a questão da atividade, da sintaxe e da semântica num processo circular, dinâmico e complementar.

Para Otte (1993;2003), objeto é qualquer problema ou tipo de resistência da realidade contra a atividade do sujeito e os meios (métodos) são qualquer coisa (‘algo’) que seja apropriada para alcançar a mediação entre o sujeito e o objeto na cognição.

Nos séculos XVI e XVII, no que diz respeito à transformação do conceito de número, esse ‘algo’ refere-se à simbolização algébrica operativa. Stevin estava preocupado com operações decimais e hidráulicas; Vieta tinha preocupações com ensino de sua pupila Catherine de Parthenay e com problemas cosmológicos, e Descartes, com o movimento-figura, por exemplo. Portanto, os objetos com os quais os modernos se depararam forçaram-nos a criar uma simbolização própria

para dar conta das relações que cada um, a seu jeito, estabeleceu entre o sujeito e o objeto na cognição, ou seja, relação entre mente e mundo.

A simbolização algébrica operativa é fruto desse ‘confronto’ com os problemas da realidade, num processo dinâmico interativo e complementar. Dessa forma, percebemos que as mudanças operadas nesse período conduziram a uma ‘apropriação’ da Linguagem no desenvolvimento do pensamento matemático como nunca antes realizável. Nesse sentido, o conceito de Complementaridade fez-nos perceber que as transformações, nas relações entre símbolo e o objeto, são evolutivas e dinâmicas, pois são de tipos lógicos diferentes e, por isso, criamos representações para entender o mundo por meio de um sistema de atividades. De acordo com o pensamento sobre Complementaridade de Otte, o ‘abismo’ entre o simbolismo e o objeto só pode ser superado do ponto de vista evolucionista genético não por uma dualidade, mas por meio da hermenêutica, agindo e reagindo no ‘confronto’ com os fenômenos em que a relação entre intensão e referência seja tratada de forma independente e dependente. Isso significa que o símbolo operativo conceitual foi criado para tratar de algo desconhecido como se fosse conhecido, via imaginação simbólica que Klein chamou de abstração, generalização e simbolização.

Para os gregos e os medievais, a Ciência era a representação da verdade. No século XVII, a Ciência universal não é entendida como representação da verdade, mas, sobretudo, como uma Arte de encontrar a verdade. Stevin, Vieta e Descartes procuravam maneiras para que a verdade pudesse ser encontrada. A Álgebra é a Arte de encontrar e, por isso, o aspecto representativo que Foucault ressalta depende de um método, isto é, a Ciência universal é totalmente dependente de procedimentos metódicos, de acordo com regras de calculação, por meio de relações entre símbolos e objetos.

Klein (1992) faz-nos pensar que a relação entre a Física e Filosofia é tensa do ponto de vista de seus métodos, de suas pressuposições e do significado atribuído aos seus assuntos em debate. A Ciência dos séculos XVI e XVII não detectou a tensão que sempre há entre os conteúdos, os conceitos e o uso que são feitos deles, ou seja, na linguagem do pensamento, a relação complementar entre a sintaxe, semântica e pragmática.

Os estudiosos da Física, dos séculos XVI e XVII e até mesmo dos Físicos da última metade do século XVIII, não ficaram ‘presos’ às dificuldades que surgem do aparato formal da linguagem algébrica. Há, nos dias atuais, essa característica de que os Físicos, por meio de calculações simbólicas instrumentais, ‘empurram para os lados’ o aspecto Filosófico, objetivando atingir novos conhecimentos. Por outro lado, a Filosofia discute os aspectos dessa produção. Assim, há relações mútuas que transformam tanto a Física como a Filosofia, pois na Física estão implícitas questões essenciais da *episteme*, da experimentação, ou seja, da possibilidade do conhecimento.

Foi no interior do debate entre a Ciência antiga e a nova Ciência que os modernos estabeleceram o ‘levante’, no sentido de criação de uma nova linguagem - a linguagem algébrica, numa situação intencional diferente dos antigos, que teve, na instrumentalização, fator decisivo de consolidação. Por exemplo, o compasso de Descartes, a luneta etc. são instrumentos que, de certa forma, inauguraram o início da mecanização do mundo Físico que, no século XVIII, culminou com a revolução industrial e com a utilização de máquinas na realização de trabalhos até então artesanais. Contudo a calculação (Logística) pode ser interpretada também como motivadora da fundamentação e justificação da Matemática visto que, desde a descoberta dos incomensuráveis pelos pitagóricos, da teoria da proporção de *Eudoxus* – que evidencia tratamento geral, do conceito de número em Stevin, da questão do número de Euler - é um número irracional que pode ser entendido, a partir das relações sociais (capitalização contínua e é computável), por exemplo, até os números reais de Dedekind, foram fatos estabelecidos por meio da simbolização algébrica.

Os conceitos em Galileu são muito mais amplos do que em Aristóteles. Para Aristóteles, a Mecânica não foi uma Ciência, foi uma Arte. A essência da revolução científica do século XVII é exatamente o fato de que a Mecânica se transformou numa Ciência e numa Filosofia. O cosmo se transforma numa máquina gigantesca. É nessa conjuntura que está a tensão entre a visão contemplativa e a operativa e, no interior dessa tensão, ocorreu a transformação do conceito de número bem como a relação entre símbolo e objeto.

No platonismo, o sujeito já está imerso no cosmo e, então, já faz parte de todos os entes do cosmo. No início da modernidade, começa o enfrentamento desse mundo estranho, um mundo desconhecido em que se precisa operar e construir, ou seja, ser ativo por meio de pesquisa e da experimentação. Essa visão de mundo não tinha na Antiguidade, pois consideravam todos os conhecimentos implícitos, no sentido de Mênon. Para os Modernos, isso não é verdadeiro, pois basta olhar na Natureza que já encontramos fatos contrários. Por isso, a tensão é essencial, ou seja, no caso de Mênon, basta lembrar. E para os modernos, temos que saber qual tipo de conhecimento usar para resolver e entender os problemas postos pelas novas necessidades sociais. É nesse sentido que a tensão 'explodiu', adquirindo uma força muito maior, pois essa tensão foi o 'motor' da transição entre o conhecimento já implícito para o conhecimento que precisamos criar para enfrentar os novos desafios.

Até os séculos XVI e XVII, a interpretação do número era dominada pelo aspecto descritivo representando quantidades. Até hoje, usamos palavras diferentes para espécies diferentes, por exemplo, 6 como meia dúzia. O número estava 'grudado' no conteúdo. Os algarismos romanos têm essa característica de conectar com o conteúdo e não com a operação.

Na Antiguidade, a definição de número como quantidades discretas de objetos inseridos numa interpretação cosmológica em que o número faz referências às ideias e imagens, indicando preocupação direta com os *efeitos* (Logística platônica e Aritmética de Diophantus) dos procedimentos e das construções como na Geometria de Euclides. Nessa estrutura, a Análise tinha como objetivo buscar e provar e a Logística tratava de calculações práticas do cotidiano, fazendo referências a objetos particulares. Mesmo na teoria das proporções de *Eudoxus* em que as relações poderiam ser segmentos, áreas e volumes, havia dependência com a homogeneidade, ou seja, o gênero ou a espécie do objeto em questão devia ser indicado diretamente para ser operacionalizado.

A revolução científica nos séculos XVI e XVII foi uma revolução, no sentido de não ter sido uma criação da Ciência a partir do nada, ou seja, já existia a Ciência escolástica aristotélica e a Geometria de Euclides, por exemplo. E foi

criada uma nova linguagem (Álgebra simbólica operativa) para capturar, operativamente, a compreensão dos fenômenos (compreender a estrutura). A nova Ciência foi uma revolução contra as crenças da Ciência aristotélica, opondo-se às suas verdades. A revolução consistia na análise das premissas implícitas dos argumentos da Ciência aristotélica. No século XIX, as premissas são mais explícitas na aritmetização, por exemplo. É impossível não usar conhecimentos implícitos, pois o processo é infinito, como é dito nos diálogos platônicos – em algum momento temos que partir de algumas hipóteses. O perigo é não perceber os conhecimentos implícitos e isso ocorreu na Ciência de Aristóteles, por não usar os experimentos. Nos séculos XVI e XVII com o uso da experimentação, as premissas começaram a ser questionadas, surgindo interpretações contrárias à Ciência antiga.

Nos aspectos qualitativos da Antiguidade, o número representa uma imagem, as linhas indicam especificidades por meio da contemplação. A interpretação quantitativa do mundo encontra fundamento nos trabalhos de Stevin, Vieta e Descartes, evidenciando significado ‘um pouco mais geral’ na relação entre Aritmética, Geometria e Álgebra presente na Geometria Analítica. Stevin, com sua posição de ‘ruptura’ como engenheiro, focou seu trabalho nas aplicações. Vieta, a partir da reinterpretação da produção Diophantina e do método de Pappus, bem como Descartes, inspirou-se em trabalhos antigos como do próprio Pappus, Diophantus e Apollonius. Isso evidencia que a linguagem da Física Matemática surgiu da reinterpretação da Matemática antiga num contexto (*habitus*) totalmente diferente da época tradicional. Por isso, podemos dizer que houve continuidade e descontinuidade entre a Ciência antiga e Ciência moderna, caracterizando a representação e a ‘metodolização’.

Nos séculos XVI e XVII, os fenômenos naturais continuaram acontecendo da mesma forma, mas as intencionalidades dos modernos dessa época deslocam-se para as ‘operações’ e para os métodos (Stevin, Vieta e Descartes), isto é, o objetivo é encontrar procedimentos gerais por meio de símbolos (e é nesse processo que o conceito de número é transformado), evidenciando a mudança de tratamento frente aos objetos da Matemática. A Logística platônica

reinterpretada nesse período como Arte de calculação teórica começa a não se preocupar com relações particulares.

A partir dos séculos XVI e XVII, os aspectos do conceito de número (número como ideia - *arithmo*) e da função desse conceito (operativo) mudaram com Stevin e Descartes. Stevin se interessou pelo lado operativo, pois reclamava da diversidade de maneiras diferentes de medir. O sistema decimal foi introduzido para facilitar calculações.

Do ponto de vista relacional, Stevin, Vieta e Descartes são um regresso, pois Descartes trabalhou com segmentos diminuindo as relações. Nos séculos XVI e XVII, a ênfase mudou – do conteúdo para o lado instrumental. A Geometria tem mais conteúdo e é menos operativa. A Álgebra é mais operativa e tem menos conteúdo. O conteúdo da Álgebra são as regras de calculações (leis associativas, axiomas – são funções de calcular). O paradigma mudou nesse sentido, ou seja, nos séculos XVI e XVII, as calculações ficaram evidentes, pois precisam de regras claras e de fácil manipulação, seja por especialista ou não.

A Análise nos séculos XVI e XVII tem a força de produzir, ou seja, de *exibir* diferentes demonstrações, referentes a particulares (as definições do número de Euler e o sistema de representação decimal de Stevin são exemplos da força da Análise, pois são procedimentos aplicados em contextos totalmente diferentes). A interpretação de Vieta de número como espécie permitiu tratar fatos da Ciência Natural por meio de fórmulas. Nessas fórmulas, os conceitos são operacionalizados por meio de identidades e proporções.

As calculações algébricas produzidas, a partir desse processo, adquirem *status* de ‘ventre’, propiciando o surgimento e ‘criações’ de novas ‘entidades’ Matemáticas. Essa mudança nos faz pensar por meio do pensamento Otteano em que deve ter Complementaridade entre os *efeitos* e as *operações* tanto na Aritmética, Geometria e na Álgebra. Na Geometria Analítica de Descartes, há interação por meio da simbolização algébrica e de sua metafísica entre as disciplinas. Descartes não identifica a Aritmética com a Geometria e, sim, a Álgebra como Logística simbólica que está relacionada com a Geometria, surgindo, pela primeira vez, uma Ciência simbólica num contexto em que a Logística platônica e a Mecânica transformaram-se numa Ciência.

Na Geometria de Descartes, as relações e proporções representadas simbolicamente indicam generalizações de forma mais simples possível (uso de letras que indicam a segunda intenção do objeto) para ‘facilitar’ a captura por meio dos órgãos sensoriais e da imaginação. Essa simbolização algébrica indica conceitos que se referem diretamente a outros conceitos por meio das variáveis, sugerindo objetos específicos indiretamente. A equação da circunferência, por exemplo, não indica uma instância da circunferência ‘pura’, apenas simboliza uma estrutura de possibilidades de qualquer circunferência, ou seja, são conceitos gerais que se referem a procedimentos gerais, surgindo, com isso, a generalidade do método com objetos de segunda intenção. É nesse sentido que, nos séculos XVI e XVII, o método adquire *status* de certeza do conhecimento como disse Foucault. Por outro lado, essa forma de capturar o conhecimento é contingente, segundo Kant, bem como dinâmico do ponto de vista genético evolutivo, por meio de atividade contextual, como argumenta o conceito de Complementaridade do pensamento Otteano.

O fenômeno precisa ser explicado, mas como fazer isso? Nos séculos XVI e XVII, o movimento foi um fenômeno importante. Descartes interpretou esse movimento como figura e, como tal, há necessidade de representação. E a representação precisa da Aritmética, da Geometria, ou seja, precisa de uma concepção de mundo. Para Descartes, o mundo é extenso e, por isso, a simbolização e a representação algébrica são essenciais. Esses aspectos não são problemas, são possibilidades de nos colocar no mundo por meio de atividades contextuais. O que aconteceria com as Ciências se eliminássemos a simbolização e a representação bem como as operacionalizações de conceitos? Como ficaria, por exemplo, a resolução de uma equação? Existiria equação?

Há uma notável analogia entre Aritmética e Álgebra, pois na história dos números ocorreu uma ‘luta’ devido à falta de simbolização adequada na resolução de situações, pois a Álgebra que se tinha até os séculos XVI e XVII era reduzida a regras, na qual os resultados numéricos eram obtidos por ‘acaso’, não havia um método geral de resolução.

Do ponto de vista da relação símbolo e objeto, o ‘número desconhecido’, em Diophantus, era designado por ‘ς’ (última letra da palavra *arithmos* em grego -

ἀριθμός). Stevin usou o símbolo ①, Vieta as vogais do alfabeto e Descartes o ‘x’. Isso significa que, em Diophantus, há semelhança entre o símbolo e o objeto representado, caracterizando a intencionalidade interpretativa (uma espécie de afinidade), isto é, o objeto representado tem similaridade com o símbolo. Em Stevin, Vieta e Descartes, o símbolo ‘descola’ totalmente do objeto representado, indicando convencionalidade e/ou arbitrariedade possibilitando transformações na forma de lidar com os objetos matemáticos, tornado-a uma ciência do possível e do ideal.

Do ponto de vista da percepção do contexto dessa transformação, ocorreu mudança de intencionalidade em relação à cosmologia, pois, na antiga, a ordem indicava o qualitativo, isto é, o objeto de primeira intenção e a nova cosmologia (nova Ciência) interpretou a ordem como Lei (quantitativo de segunda intenção). Essa é a diferença de intencionalidade. Isso foi expresso por fórmulas e símbolos, e, por isso, o conceito de número mudou. A ordem antiga preocupava-se com corpos elementares e o novo entendimento da ordem passa a ser pelo movimento figural dos corpos.

Isso foi fundamental na elaboração da *Mathesis universalis* (Ciência universal da medida e da ordem cujo método é a Álgebra e o instrumento é o sistema de signos), pois a representação descolada do objeto favorece a operacionalização nas equações, evidenciando a transição do aspecto interpretativo para o aspecto operativo.

Com Vieta, Stevin e Descartes, os procedimentos de calculações foram gerais aplicados no contexto da Aritmética, Geometria, comércio, navegação e Astronomia. Isso evidencia o uso, ou seja, o aspecto pragmático, indicando que a simbolização algébrica não são calculações vazias, desprovidas de sentido.

A generalização presente nos séculos XVI e XVII, com Stevin, Vieta e Descartes, principalmente em Descartes, são processos crescentes que partem dos objetos de primeira intenção (números, figuras e movimento) até ‘atingir’ os objetos de segunda intenção (símbolos e variáveis) por meio de relações de identidades e diferenças recíprocas. Nesse sentido, podemos estabelecer a relação entre Aritmética, formas geométricas, movimento e Álgebra, ou seja, a *Mathesis Universalis* com o procedimento analítico da Antiguidade.

A unificação da Geometria com a Álgebra está, nessa estrutura de relação, entre substituir particulares por magnitudes gerais, via simbolização e isso coaduna com o entendimento de esquema de Kant quando diz que a "representação de um processo geral na imaginação para fornecer a imagem de um conceito é designada pelo nome do esquema desse conceito". Esse nome que pode ser dado ao esquema refere-se à simbolização algébrica (o famoso 'x') de quantidades conhecidas ou não.

Na transição do contemplativo para o operativo que começou nos séculos XVI e XVII em que essa unificação, por meio da interpretação do método da Análise dos antigos, provocada pela interpretação e exibição simbólica das formas geométricas e as razões Aritméticas por outro lado, num contexto teórico e prático, evidencia o aspecto da Complementaridade no estudo da evolução dos objetos da Matemática.

Do ponto de vista epistemológico, há evidências de que o fundamento da *Mathesis Universalis* de Descartes está também condicionado e, talvez, 'dependente' de toda Álgebra e da linguagem algébrica formulada pelos seus antecessores imediatos nos séculos XV e XVI. Um desses pensadores eruditos da época foi Vieta que, segundo Klein, foi responsável pela mudança conceitual que houve entre a Álgebra até o século XVI e depois do século XVI. A transição do mundo contemplativo para o mundo operativo tem, como um dos elos principais, o trabalho de Diophantus, reinterpretado pelos modernos e Vieta foi uma dessas pessoas, criando, a partir da Aritmética de Diophantus, sua Logística Especiosa. Isso significa que, com Vieta, a Álgebra como regras de resolução de equações começou a adquirir *status* de método geral na resolução de problemas gerais (Aritmética e Geometria). Nesse sentido, a nova Ciência evidencia o método por meio da algebrização simbólica.

Na Geometria, o objeto geral não funciona, pois o geral só pode ser representado pelos exemplos particulares. Para dar a ideia de um triângulo geral, posso apenas oferecer a ideia de exemplares. Não é possível desenhar um triângulo geral. A Síntese precisa de objetos determinados, se eu quero construir um triângulo, preciso de 3 (elementos) objetos bem definidos. A Geometria não pode ter objetos gerais, mas a Aritmética pode, pois os números são objetos

gerais visto que, na doutrina de Aristóteles, o geral é sempre um aspecto ou uma forma do particular. Os números são aspectos de quaisquer objetos, por exemplo, o tamanho indica características de uma determinada magnitude. Para Diophantus, o número, mesmo antes de representar números gerais por meio de variáveis, já tinha indícios de conceito geral.

Do ponto de vista da Filosofia, as simbolizações de objetos gerais, em termos de números, já estavam presentes nas coisas do mundo, pois havia a crença de que tudo pode ser enumerado ou contado, então, nesse sentido, já temos uma ideia de Ciência geral. O que os modernos fizeram foi operacionalizar com conceitos e começaram a criar fórmulas sem se preocupar com a semântica imediata.

Na ideia de *arithmo* da Aritmética grega antiga, o conceito de número como quantidades definidas de objetos (uma 'coisa' qualquer) foi reinterpretado nos séculos XVI e XVII, noutra intencionalidade. Essa 'coisa' no início da idade moderna foi considerada como sendo o próprio número ou grandezas nas mãos de Vieta e Descartes, do ponto de vista da operacionalização, por meio da simbolização algébrica. Então, essa 'coisa', presente na ideia de contagem e medida, corroborou o uso simbólico operativo do número. Contudo essa 'coisa', no século XIX, transformou-se num mero símbolo, indicando um espaço vazio.

Por meio da obra de Klein (1992) percebemos que, no início da idade moderna, os algebristas trabalhavam com a *Arte das coisas*, ou seja, a escrita e a operação da Álgebra por meio de símbolos. Klein (1992) procura trazer foco para a produção de Vieta, pois é comum, em Husserl e Heidegger, a crítica da simbolização tendo em mente trabalhos de Galileu e Descartes, mas, do ponto de vista histórico, na concepção de Klein, os fundamentos da Matemática moderna foram estabelecidos por Vieta, pois é com ele que, realmente, houve o início do 'salto' epistemológico.

É importante ressaltar também que, na simbolização algébrica, o método e a mecanização não são problemas, pois o que essa simbolização fez e faz são apenas maneiras de 'acessar' o conhecimento, pois, como estabelecer a comunicação do conteúdo? Dessa forma, Klein (1992) faz-nos pensar que Husserl e Heidegger cometeram equívocos em criticar exageradamente a

simbolização algébrica. Por um lado, não há sentido em culpar o instrumento pelo fato do resultado não ser satisfatório, ou seja, o bisturi não é o motivo do erro médico. Por outro lado, a simbolização algébrica não é apenas um instrumento ou mesmo uma língua e, sim, uma estrutura computacional de produção de novos conhecimentos.

Nesse sentido, o pensamento Otteano ajuda a refletir sobre os problemas do conhecimento algébrico, a partir do ponto de vista de relações e não apenas como generalização da Aritmérica ou mesmo da polarização, como ocorreu em Klein (1992) quando enalteceu o trabalho de Vieta, em Kant (1997) – supervalorizou o sujeito epistêmico, em Husserl e Heidegger que colocam a volta às coisas mesmas, ou seja, ao fenômeno. O pensamento Otteano é, portanto, uma via segura na compreensão histórica e epistemológica dos aspectos sintático, semântico e pragmático dos objetos matemáticos, pois considera as multifaces da relação símbolo e objeto (mudança no conceito de número) como consequência da simbolização algébrica.

A notação literal como símbolo geral, isto é, a letra foi liberada da ‘escravidão’ da palavra, passando a designar objetos quaisquer na forma de estrutura organizada. Isso propiciou uma nova era para a Álgebra e para todas as Ciências. No interior dessa analogia, está presente a transformação do conceito de número, expresso por Klein (1992), bem como os conceitos da Matemática tratados como atividades dinâmicas (relação entre o sujeito e o objeto matemático num contexto) sem polarização nem no sujeito e nem no objeto, permitindo compreender a transição entre o aspecto descritivo para o aspecto operativo.

O conceito de Complementaridade tem a ver com a matematização, ou seja, esse ‘choque’ entre a visão ativa, construtiva e técnica que o mundo moderno tem sobre a Natureza e a visão de Aristóteles (visão de médico e de biólogo), ou seja, mais contemplativo. Esse ‘choque’ começa realmente quando se matematiza a Ciência. Cada vez mais os conceitos são também diferenciados e, nessa perspectiva, claramente a simbolização algébrica contribui significativamente, pois permite manipular o desconhecido por meio de identidades e diferenças.

O simbolismo algébrico ajuda nesse sentido, pois a fórmula reúne as ideias da tabela, corroborando a operacionalização e a percepção. Perceber as relações nas tabelas de correspondências é mais complicado do que trabalhar com fórmulas. Vieta (o número como espécie – que é uma categoria de grau ‘superior’, ou seja, distancia um pouco do objeto) e Descartes, em contexto de realidades de mundo diferentes, perceberam que as letras poderiam ser usadas para representar conceitos que, por sua vez, poderiam ser operacionalizados.

A ‘Álgebra e/ou Análise’ não é apenas uma língua mais adequada para resolver situações, mas pode ser considerada também como instrumento, pois, em determinado momento, a complexidade é muito grande para uma simples lógica discursiva. Nessa perspectiva, o conceito de Complementaridade, por meio da simbolização, ajuda-nos a perceber que a essência de uma coisa é a essência da representação dessa coisa e a essência da representação dessa coisa é simplesmente outra representação (OTTE, 2013). Não há coisas absolutas e definitivas. Por isso, há um círculo de Complementaridade, ou seja, conexão (relação) circular entre os dois aspectos: objeto e símbolo com o uso (aplicação) por meio de uma atividade. A representação é imprescindível e determinante, pois, por meio dela, a relação entre a consciência e objeto se efetiva.

Atualmente resolvemos, a partir do 8º ou 9º ano da Educação Básica, inúmeras equações do segundo grau com raízes positivas, mas raramente associamos com segmentos e, sim, com raízes, maximização e parábola. O aspecto histórico e epistemológico de Descartes, por exemplo, na resolução por construção, ajuda a perceber a Complementaridade que há entre os aspectos da linguagem, da simbolização, do método e do contexto físico, pois isso ajuda no acesso ao sentido da resolução de uma equação. A simbolização é o elo entre a Aritmética e a Geometria sem provocar crise no homem e na humanidade, como disse Husserl.

É muito comum nas aulas de Matemática comentários da forma: fazer as calculações com números (Logística platônica), tudo bem, mas, quando entra o ‘x’, tudo fica complicado, ou mesmo perguntas do tipo, por que o ‘x’ na Matemática? Este estudo histórico e epistemológico, fundamentado no pensamento Otteano, possibilita ampliar o entendimento dessa problemática, pois

a calculação com objetos tem características diferentes do que calculação com conceitos, porém são complementares. Essa dificuldade expressa na fala dos estudantes coaduna com a tensão entre símbolo e objeto, abordada por Klein (1992) na Matemática grega antiga, nos séculos XVI e XVII, em Stevin, Vieta e Descartes, bem como também na atualidade, no momento em que tratamos das implicações da simbolização no desenvolvimento do pensamento e na produção de novos conhecimentos, pois nesse período surgiram, de forma mais evidente, dois tipos de variáveis (substitucional e objetcual) na Matemática.

As vantagens do simbolismo algébrico são significativas no sentido de que uma fórmula, como y=ax+b ou um triângulo pode ser associada a vários tipos de interpretações em contextos totalmente diferentes. É comum reclamarmos da linguagem formal porque ficam vazios de sentidos, mas isso é exatamente o seu potencial, pois podemos trazer interpretações de nossos sentidos de acordo com nossas percepções.

As figuras e os diagramas são coisas que podemos visualizar, pois não depende das nuanças dos sentidos. Galileu disse que a natureza é interpretada por meio da Geometria. Isso significa que os modernos começaram a perceber que para aplicar os conhecimentos da antiguidade, precisavam trabalhar com representações da realidade. Contudo, essa representação da realidade é outra representação da realidade. É um processo contínuo indicando a necessidade dos signos e do conceito de complementaridade Otteano.

Podemos dizer que Descartes geometrizou a Aritmética e não aritmetizou a Geometria para representar a forma como ele entendia o mundo. Por isso, a Geometria para Descares foi compreendida como simbólica. A Álgebra nos séculos XVI e XVII era vista como uma disciplina de excelência, pois propiciava descobrir coisas novas. Contudo, havia necessidade da justificação, e, para isso a Geometria foi muito importante.

O espírito algébrico surgiu da interação complementar da Geometria e da Aritmética. Nessa interação está presente o contexto da descoberta e o contexto da justificação. No contexto da descoberta que diz respeito a aquisição de conhecimentos novos, há o método da Álgebra por meio de seu sistema de

signos e no contexto da justificação (o fundamento), está a Geometria construtiva e sintética euclidiana.

A Geometria euclidiana foi um ‘estoque’ de conhecimentos matemáticos que foram usados para criar a Álgebra (transformar o conceito de número). Isto é, os modernos, como Vieta e Descartes por exemplo fizeram duas coisas: i) criaram a Álgebra operativa através de soluções de equações algébricas e ii) usaram o método da Álgebra simbólica operativa para resolver os famosos problemas da antiguidade que os gregos não conseguiram resolver bem como aplicaram esse método na interpretação de fenômenos da Física.

Tanto o contexto da descoberta como o contexto da justificação estavam presentes nos séculos XVI e XVII, pois, para resolver um problema não era suficiente apenas os cálculos, mas construir a solução com raízes em termos de segmentos, ou seja, para resolver um problema algébrico, temos que calcular em termos da simbolização e depois construir geometricamente a solução.

O método da Álgebra criou novas verdades. Mas, a Geometria foi fundamental na justificação. O método da Análise descobre e a Síntese justifica. O mundo de Descartes é um conjunto de grandezas. A nova Álgebra não estabeleceu sem a Geometria de Euclides, pois no processo de desenvolvimento das ciências sempre há complementaridade entre o contexto da descoberta e o contexto da justificação.

Do ponto de vista histórico e epistemológico, a ‘origem’ do ‘x’ de Descartes está diretamente relacionada à estrutura dos diálogos platônicos, pois isso pode ser verificado nas perguntas que estão em Mênon (80 D) e Teeteto (196 E – 197 A). A interpretação dessa estrutura por Vieta, aliada a sua simbolização literal (Logística especiosa) no contexto da Física dos séculos XVI e XVII, foi fundamental na compreensão da ‘tensão’ entre símbolo e objeto no início da consolidação da simbolização algébrica moderna.

Como procurar algo que não fazemos ideia do que seja? Como operacionalizar essas ideias desconhecidas? É nessa perspectiva que o ‘x’ de Descartes, a simbolização e a representação por meio das relações entre os signos do ponto de vista da forma, das relações entre os signos e os objetos, no

que diz respeito ao conteúdo e ao aspecto pragmático, ou seja, o contexto da simbolização torna-se relevante e útil.

O processo de ensino/aprendizagem, bem como a busca de novas interpretações da simbolização algébrica, é um caminho que tem apenas começo, pois, a cada estudo, suas peculiaridades ampliam. Este trabalho não encerra aqui, mas acrescenta argumentos que podem subsidiar, significativamente, reflexões em relação ao início do pensamento algébrico simbólico, tanto do ponto de vista teórico como do aspecto didático de sua constituição epistemológica.

Na Educação Matemática, há perspectivas teóricas e/ou práticas no que diz respeito à formação Matemática do ser humano. Dessa forma, esta pesquisa pode se desdobrar em outros projetos, como, por exemplo, a teoria das proporções de *Eudoxus*, a questão da Aritmética de Diophantus, a concepção de número de Stevin, o número como espécie de Vieta e a Álgebra de segmentos de Descartes, pois são temas que oportunizam pesquisas que auxiliam na ampliação do entendimento do pensamento algébrico moderno.

A todo o momento surgem novas tecnologias e a forma de abordar os problemas pode mudar, contudo o conceito de Complementaridade do pensamento Otteano, em relação aos conceitos e objetos, por meio de representações simbólicas, é necessário, pois indica sempre que é no aspecto relacional temporal que os objetos matemáticos adquirem sentido e significado.

Referências

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia.** 5 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ABIDO, Alexandre Silva. **A Interpretação Geométrica dos Números Imaginários Segundo Jean Robert Armand**. Cuiabá, MT: UFMT, 2011. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso, 2011.

ANGUS, Ian. **Jacob Klein's Revision of Husserl's Crisis: A Contribution to the Transcendental History of Reification**. Disponível em http://www.ianangus.ca/klein.html. Acesso no dia 20 de setembro de 2012.

ARRUDA, Evilásio José. **O Número de Euler e os Fundamentos dos Números Reais**. Cuiabá: MT, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT, 2007.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciaturas**. 2. ed. São Paulo: Edgard Luche, 2005.

BATESON, Gregory. **Steps to an Ecology of Mind: Collected Essays in Anthropology, Psychiatry, Evolution, and Epistemology**. Londres: Jason Aronson Inc., 1972.

BITTAR, Eduardo C. B. **Curso de Filosofia Aristotélica: leitura e interpretação do pensamento Aristotélico**. Barueri, São Paulo: Manole, 2003.

BICUDO, Maria Aparecida Vigianni; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **Filosofia da Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BINI, Edson. Platão: **Diálogos I: Teeteto, Sofista e Protágoras**. Bauru, SP: EDIPRO, 2007.

_____. Platão: **Diálogos IV: Parmênides, Político, Filebo e Lísis**. Bauru, SP: EDIPRO, 2007.

_____. Platão: **Diálogos V: O Banquete, Mênon, Timeu e Crítias**. Bauru, SP: EDIPRO, 2007.

BOHR, Niels. **Física Atômica e Conhecimento Humano**. 2. ed. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

BOS, H. J. M. **Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations"**. Disponível em http://www.jstor.org/stable/41133725. Acesso dia 20 de fevereiro de 2013.

BOUTROUX, Pierre. **L'Idéal Scientifique des Mathématiciens**. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

BOYER, Carl B. História da Matemática. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora, Edgard Blücher, 1996.

_____. History of Analytic Geometry. New York: Dover Publications, Inc, 2004.

BURCKHARDT, Jacob. **A Cultura do Renascimento na Itália**. Tradução de Vera Lúcia de Oliveira Sarmento e Fernando de Azevedo Corrêa. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1991.

BURNET, John. **Platão – Menon**. Tradução de Maura Iglesias. Rio de Janeiro: PUC-RIO, 2011.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

CASANOVA, Marco Antônio. **Compreender Heidegger**. 3. ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2012.

CORRÊA, Bruna Moustapha. **A introdução à arte analítica de François Viète: comentários e tradução**. Rio de Janeiro: RJ, 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 2009. Disponível em http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/08%20Bruna%20Moustapha.pdf. Acesso dia 21 de dezembro de 2011.

COSGROVE, Joseph K. **Husserl, Jacob Klein, and Symbolic Nature**. Disponível em http://digitalcommons.providence.edu/philosophy_fac/5. Acesso em março de 2011.

DANTZIG, Tobias. Number: **A Linguagem da Ciência**. New York: A Plume Book, 2007.

DONATELLI, Marisa C. de O. F. **Descartes: artes Mecânicas e Filosofia**. Disponível em www.unicap.br/ojs-2.3.4/index.php/agora/article/download/165/151. Acesso: dia 28 de Agosto de 2013.

DEDEKIND, Richard. **Essays on the Theory of Numbers**. New York: Dover Pubications, Inc, 1963.

DESCARTES, René. **Descartes: Obras Escolhidas**.Tradução de J. Guinsburg, Bento Prado JR., Newton Cunha e Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2010.

DEVREESE, J. T; BERGHE, Vanden. '**Magic is No Magic': The Wonderful World of Simon Stevin**. Boston: WIT press, 2008. p. 310.

EISENSTEIN, Elizabeth L. **The Printing Revolution in Early Modern Europe**. 2. ed. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2009.

FREGE, Gottlob. **Sobre o Sentido e a Referência**. In Lógica e Filosofia da Linguagem. São Paulo: Cultrix – USP, 1978.

FOUCAULT, Michael. **As Palavras e as Coisas**. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

GALILEU, Galilei. **O Ensaiador**. Tradução de Helda Barraco. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.

GIL, Paulo Duarte Bastos. **François Viète: o despontar da álgebra simbólica**. Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto - Departamento de Matemática Pura, 2001. Dissertação de Mestrado em Matemática – Fundamentos e Aplicações. Disponível em: <repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/.../3596_TM_01_C.pdf> Acesso 27 de fevereiro de 2011.

GOBRY, Ivan. **Vocabulário Grego da Filosofia**. Tradução de Ivone C. Benedetti. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

HEALT, Sir Thomas. **Diophantus of Alexandria: A Study the History of Greek Algebra**. 2ª ed. New York: Dover Publications, 1964.

HEIDEGGER, Martin. **Introdução à Filosofia**. 2. ed. Tradução de Marco Antônio Casanova. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

_____. **A History of Greek Mathematics Volume I: From Thales to Euclid**. New York: Publisher University, 1921.

HOPKINS Burt. **The Philosophical Achievement of Jacob Klein**. Seatle University. Disponível em http://www.seatle.edu/workArea/DownloadAsset. aspx? id=59625. Acesso em 01 de outubro de 2012.

_____. **The Origin of the Logic of Symbolic Mathematics: Edmund Husserl and Jacob Klein**. Bloomington: Indiana University Press, 2011.

HUSSERL, Edimund. **Die Krisis der euroäisexchen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie**. Philosophsiche Bibliothek. Felix Meiner Verlag Hamburg, 1996.

_____. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental: Uma Introdução à Filosofia Fenomenológica**. Tradução de Diogo Falcão Ferrer. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

_____. **Ideias para uma fenomenologia Pura e para uma Filosofia Fenomenológica**. 4.ed. Tradução de Márcio Suzuki. Aparecida, São Paulo: Editora Ideias e Letras, 2006.

_____. **The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology: An Introduction to Phenomenological Philosophy**. Tradução e Introdução de David Carr. Evanston: Northwestern University Press, 1970.

JAPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. 3.ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1996.

KANT, Immanuel. **Crítica da Razão Pura**. Traduzido por Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 4ª ed. Lisboa: Serviço de Educação Fundação Calouste Gulbenkian, 1997, p.670.

KHUN, Thomas S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. 9.ed. Tradução de Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. São Paulo: Perspectiva, 2006.

KLEIN, Jacob. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Álgebra**. Trad. Eva Brann. New York: Dover Publications, 1992.

_____. **Lectures and Essays**. Editado por Robert B. Williamson and Elliot Zuckerman. Annapolis, Maryland: St. John's College Press, 1985.

KLINE, Morris. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1990. Volume I.

KOYRÉ, Alexandre. **Estudos de História do Pensamento Científico**. 2ª ed. Tradução de Márcio Ramalho. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

LEIBNIZ, Gottfried W. **A Monadologia e outros textos**. Tradução de Fernando Luiz Barreto Gallas e Souza. São Paulo: Hedra, 2009.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectiva em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4.ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2001

MAHONEY, S. Michael. **The beginnings of Algebraic Thought**. Disponível em http://www.princeton.edu/~hos/Mahoney/articles/begginnings.htm. Acesso dia 12/04/2012.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade**. 2ª ed. São Paulo: Cortez Editora, 1989.

MANCOSU, Paolo. **Philosophy of Mahematics & Mathematical Practice in the Seventeenty Century**. New York: Oxford University Press, 1996.

MARQUES, Edgar. **Considerações sobre verdade e existência em Leibniz**. Disponível em http://www.cle.unicamp.br/cadernos/21-1.html. Acesso dia 01 de outubro de 2013.

NAETS, Jurgen. **How to Define a Number? A General epistemological Account of Simon Stevin's Art of Defining**. Disponível em http://www.springerlink.com/content/341017t2856033p6. Acesso dia 03 de maio de 2011.

NETO, Sérgio L. O que significa 'Matemática'? **RPM: Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 77, p.10-13, 1º quadrimestre, 2012.

OLIVEIRA, Jefferson Bernardo. **Francis Bacon e a Fundamentação da Ciência como Tecnologia**. 4.ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

OLIVEIRA, José Carreira. **Substância e Função em Ernst Cassirer: Uma construção de conceitos nas Ciências naturais exatas**. Disponível em http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/BUOS-8MHFM8/disserta__o_final.pdf?sequence=1. Acesso dia 19 de setembro de 2013.

OTTE, Michael. **O Formal, O Social e o Subjetivo: Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**. Trad. Raul Fernando Neto. São Paulo – SP: Unesp, 1993.

_____. **Complementarity, Sets and Numbers**. Educational Studies in Mathematics. Netherlands, n.53, p.203-328, 2003.

_____. **A Realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para Educação Matemática**. Tradução de Alexandre Silva Abido. et all,. Cuiabá: Editora da Universidade Federal de Mato Grosso, 2012.

_____. **Proof-Analysis and Continuity**. Springer: Foundations of Science, março de 2006, v. 11, p. 121-155.

_____. **Evolution, Learning and Semiotics from a Peircean Point of View**. Educational Studies in Mathematics, Netherlands. v. 77, p. 313-329, 2011.

_____. Manuscrito não publicado. **Fundamentals of Mathematic Education**, 2013.

_____. **Epistemologia Matemática de um ponto de vista semiótico**. Trad. Maria Laura Magalhães Gomes et al. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, vol. 3, n. 2, p. 11-58, 2001.

OTTE, Michael; CAMPOS, Tânia M. M.; BARROS, Luiz G. X. **Generalizing is necessary or unavoidable**. Manuscrito ainda não publicado, 2014.

OTTE, Michael; CAMPOS, Tânia M. M.; ABIDO, Alexandre. **Plato, Pascal and the dynamics of personal knowledge**. Disponível em http://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs10649-012-9435-5.pdf#. Acesso em novembro de 2012.

PALARO, Luzia Apareceida. **A Concepção de Matemática de Henri Lebesgue**. São Paulo: PUC, 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

PIAGET, Jean; GARCIA, Roland. **Psicogênese e História das Ciências**. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2011.

PIAGET, Jean; BETH, Evert W. **Mathematical Epistemolgy and Psychology**. Traduzido por W. Mays. Paris: D. Reidel Publishing Company/Dordrecht-Holland, 1966.

PINTO, Helder. **História da Matemática na Sala de Aula**. 2.ed. Lisboa: Ludus, 2011.

PLATÃO. A **República**. Tradução de Maria Helena da Rocha Pereira. 9. ed. Lisboa: 1949.

POINCARÉ, Henri. **O Valor da Ciência**. Tradução de Maria Helena Franco Martins. 4. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

QUINE, Willard Van Orman. **From a Logical Point of View: Logico-Philosophical Essays**. New York: Harper & Row, Piblishers, Incorporated, 1963.

ROSSI, Paolo. **A Ciência e a Filosofia dos Modernos**. Tradução de Álvaro Lorencini. São Paulo: Editora UNESP, 1992.

SHABEL, Lisa. **Kant on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts**. Disponível em http://people.cohums.ohio-State.edu/Shabel1/papersshabel1.pdf. Acesso dia 07 de fevereiro de 2013.

SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 5, 2003: Rio Claro, SP. **Anais**. São Paulo: SBHMat, 2003.

SANTANA, Geslane Figueiredo. **Pierre Boutroux e Revolução na Matemática Moderna**. Cuiabá: MT, 2011. Dissertação (Mestrado em Educação), Univesidade Federal de Mato Grosso – UFMT, 2011.

SILVA, Jairo José. **Filosofias da Matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

SKEMP, Richard R. **The Psychology of Learning Mathematics**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erbaum Associates, Publishers, 1987.

SKIRRY, Justin. **Compreender Descartes**. Tradução de Marcus Penchel. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2010.

STEVIN, Simon. **[II B] The Principal Works of Simon Stevin, Mathematics, Vol. II B**. Committee of Dutch scientists, Struk, D. J (eds), Amsterdam, 1958. Disponível em: <http://www.digitallibrary.nl>. Acesso em 22 de janeiro de 2009.

THOM, René. **Mathematiques Moderns et Mathematiques Toujours**. Disponível em http://michel.delord.free.fr/thom.pdf. Acesso dia 05 de fevereiro de 2013.

UNGURU, Sabetai. Words, Diagrams, and Symbols: Greek and Modern Mathematics or 'On the need to rewrite the history of Greek Mathematics' Revisited.**The St. John's Review**, Maryland, V. XLVIII, n.1, 2004.

VASCONCELOS, Fernando de Almeida Loureiro. **História das Matemáticas na Antiguidade**. 2.ed. Lisboa: Ludus, 2009.

VAZ, Duelci A. **A Influência da Matemática nas Regras para a Direção do Espírito e em O Discurso do Método**. Rio Claro, São Paulo: UNESP, 2007. Tese (Doutor em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Instituto de GeoCiências e Ciências Exatas. Disponível em http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=77900. Acesso dia 04 de janeiro de 2012.

VEIGA, Itamar Soares. **O Confronto de Heidegger com o 'Motivo matemático' da Metafísica Moderna**. Disponível em http://seer.ucp.br/seer/index.php/synesis/index. Aceso dia 26 de fevereiro de 2012.

WALDEGG, Guilhermina. **L'Arithmetisation des Grandeurs Geometriques Chez Stevin**. Disponível em http://www.peires.org/New%20site/Actes.Dhombres/waldeg.pdf. Acesso dia 05 de agosto de 2011.

WIELEWSKI, Gladys Denise. **Aspecto do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada na obra de Krutetski**. São Paulo: PUC, 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/gladys_denise_wielewski.pdf >. Acesso em novembro de 2007.

ZILSEL, E. **Die sozialen Ursprünge der neuzeitlichen Wissenschaft**, Herausgegeben von Wolfgang Krohn, Frankfurt: Suhrkamp, 1976.

Obras consultadas

BACHELARD, Gaston. **A Formação do Espírito Científico: Contribuição para uma Psicanálise do Conhecimento**. 8.ed. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BEZERRA, Cícero Cunha. **Compreender Plotino e Proclo**. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2006.

BICUDO, Irineu. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

BUNNIN, Nicholas; TSUI-JAMES, E. P. **Compêndio de Filosofia**. Tradução de Luiz Paulo Rouanet. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

BRANN, Eva. Jacob Klein's Two Prescient Discoveries. **The St. John's Review**, Annapolis, n.1, v.52, 2010. Disponível em: http:www.stjohnscollege.edu/news/pubs/review.shtml. Acesso em 01de março de 2011.

_____. Klein on Myth of Learning. **The St. John's Review**, Annapolis, n.1, v.51, 2009. Disponível em: http:www.stjohnscollege.edu/news/pubs/review.shtml. Acesso em 01de março de 2011.

CASSIRER, Ernst. **Indivíduo e Cosmos na Filosofia do Renascimento**. Tradução de João Azenha JR; Mario Eduardo Viaro. São Paulo: Martins Fontes: 2001.

CATTANEI, Elisabetta. **Entes Matemáticos e Metafísica: Platão, a Academia e Aristóteles em confronto**. Tradução de Fernando S. Moreira. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

COELHO, Sônia Pitta; MILIES, Polcino. **Números: uma introdução**. 3.ed. São Paulo: Edusp, 2003.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Autores Associados, 2009. p. 228.

FONSECA, Rogério Ferreira. **A Complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceitualização de número real proposta por John Horton Conway. Disponível em** http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/FONSECA_rogerio.html. Acesso dia 01 de setembro de 2012.

FREGE, Gottlob**. Os Fundamentos da Aritmética**. Tradução de Antônio Zilhão. São Paulo: Imprensa Nacional- Casa da Moeda, 1992. p.117.

ISRAEL, Jonathan I. **Iluminismo Radical: A Filosofia e a Construção da Modernidade 1650-1750**. Tradução de Claudio Blanc. São Paulo: Madras Editora, 2009.

KLEIN, Jacob. **A Commentary on Plato's Meno**. London: The University of Chicago Press, 1965.

KOYRÉ, Alexandre, **Galileu e Platão: Do mundo do mais ou menos ao Universo da precisão**. Tradução de José Trindade Santos. Gradiva: Lisboa, 1986.

MALBERRY, J. P. **The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets**. Disponível em: http://www.bristol.ac.uk/philosophy/department/staff/jpm/preface.pdf. Acesso em 01de abril de 2011.

OTTE, Michael. **O pensamento Relacional: Equações**. Bolema, São Paulo, Ano 9, especial 3, p.71-79, 1994.

ROGUE, Christophe. **Compreender Platão**. Tradução de Jaime A. Clasen. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2005.

ROTMAN, Brian. **Signifying Nothing: The Semiotics of Zero**. Califórnia: Stanford University Press, 1993.

SANTOS, Mario Ferreira. Platão: **O Um e o Múltiplo – Comentários sobre o Parmênides**. São Paulo: IBRASA, 2001.

_____. **Pitágoras e o Tema do Número**. São Paulo: IBRASA, 2000.

SEARLE, John, R. **Expressão e Significado: Estudos da Teoria dos Atos da Fala**. Tradução de Ana Cecília G. A. De Camargo e Ana Luiza Marcondes Garcia. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

Apêndices

A. Glossário – notas da tradutora da obra de Jacob Klein do alemão para a língua inglesa por Eva Brann

A palavra grega *Arithmo* foi traduzida do texto Alemão como *Anzahl*[98]: 'um número de [coisas]', para distingui-la de nossa forma moderna denominada *Zahl*: 'número'. Uma vez que na Língua Inglesa, o termo aproximado para *Anzahl* é um tanto quanto obsoleto. Tanto *Anzahl* como *Zahl* foram traduzidas simplesmente como 'número', *contudo é o objetivo principal deste estudo mostrar que o 'arithmo' grego e o 'número' moderno não tem o mesmo significado*, eles diferem em sua *intencionalidade*, pois o *arithmo* indica *coisas*, isto é um número de, enquanto o número indica *um conceito*, isto é, aquilo que tem quantidade. *Intencionalidade* e *conceitualização* foram traduzidos a partir da palavra alemã *Begrifflichkeit*.

A seguir termos transliterados do grego que estão presentes na obra de Jacob Klein.

aísthesis (*αϊσθησις*) – sentido, percepção.

aisthetón (*αἰσθητόν*) – objeto do sentido.

analogía (*ἀναλογία*) – proporção.

aóristos [dyás] (*αοριστοσ δυασ*) – indeterminado, infinito [duplo].

ápeiron (*ἄπειρον*) – o ilimitado, infinito.

apódeixis (*ἀπόδειξχιξς*) – demonstração, prova [rigorosa].

[98] Entendo que *Anzah*l, para Klein (1992), significa número cardinal – definido como número usado na simples contagem para indicar quantos itens existem num conjunto (primeira intenção) e *Zahl* é o número como conceito, isto é, simbólico, e, está intimamente relacionado ao método de calculação (Logística moderna) em que a abstração, generalização e simbolização produz o símbolo, que por sua vez é concebido como objeto real do ponto de vista das operações (segunda intenção).

aporía (*απορία*) – dúvida, questão, dilema, impasse, paradoxo.

arché, plural *archai* (*ἀρχή, ἀρχαί*) - origem [governativo], começo.

chorismós (*χωρισμός*) – separação.

dianóia (*διάνοια*) – [a faculdade e atividade] do pensamento.

dýnamis (*δύναμις*) – força, potência.

eidetikós (*ειδητικός*) – adjetivo de *eidos*.

eidos, plural de *eíde* (*εἶδος, εἴδη*) – literalmente: 'olhar'; tipo; forma, espécie, 'ideia'; algumas vezes: 'figura'.

epistéme (*ἐπιστημή*) – Latim: scientia, conhecimento, Ciência.

génos, plural gene (*γένος, γένη*) – gênero, família, classe; frequentemente: a *eide* superior.

hen (*ἕν*) – um.

hýle (*υλη*) – material.

idéa (*ίδέα*) = eidos.

koinón (*κοινόν*) – coisas comuns.

koinomía ton eidón (*κοινωνία τῶν ειδῶν*) – comunidade da *eide*.

katá to pléthos (*κατὰ τὸ πλῆθος*) – de acordo com a multiplicidade.

kath' autó (*καθ αὐτό*) – por si mesmo.

kathólou pragmateía (*καθόλου πραγματεία*) – tratamento geral ou estudo.

Kat' eídos (*κατ είδος*) – de acordo com o tipo.

kínesis (*κίνησις*) – movimento, mudança.

logistiké (*λογιστική*) – arte Logística, contabilidade, calculações práticas. A Arte de calculação (Logística) diz respeito ao comportamento das quantidades definidas em relação a uma outra coisa, isto é, nas relações mútuas que nos capacita a relacionar quantidades definidas, ou seja, calcular com eles (HOPKINS, 2011, p. 158).

lógos, plural *lógoi* (*λόγος*, *λόγοι*) – discurso razoável, razão.

máthema (*μάθημα*) – aprender o assunto.

mathemathiká (*μαθηματικά*) – objetos matemáticos.

máthesis (*μάθησις*) – estudo, disciplina.

méthexis (*μέθεξις*) – participação.

monás (*μονάς*) – mônada, unidade.

morphé (*μορφή*) – forma, moldar.

noéton (*νοητόν*) – o que é do pensamento, objeto do pensamento.

noésis (*νόησις*) – atividade do pensamento, intelecto.

nous (*νοὺς*) – [atividade direta e perfeita do] pensamento, intelecto.

on; me on (*όν, μή όν*) – ser; não ser.

páthos, plural *páthe* (*πάθος, πάθη*) – característica, propriedade.

póson (*ποσόν*) – Latim: *quantum*; o objeto da questão; ‘quantos?’ O que tem quantidade; para evitar embaraço traduza como ‘quantidade’.

pros állo (*πρός άλλο*) – em relação a outro.

prós ti (πρός τι) – [o que está] em relação a algo.

stásis (*στάσις*) – repouso.

tautón (*ταύτόν*) – o mesmo.

táxis (*τάξις)* – ordem.

téchne (*τέχνη*) – arte, habilidade.

tháteron (*θάτερον*) – o outro.

B. Vocabulário ligado ao conceito da Complementaridade[99]

A Semântica é o estudo das maneiras como as pessoas se comunicam em termos linguísticos. A Semiótica é mais ampla e trata basicamente do como os signos de todos os tipos se referem aos seus objetos.

Distinção entre dois tipos de valor semântico de signos em geral.

1. extensão: os objetos (caso existam) aos quais um signo se refere, ou seja, as classes das coisas 'reais' às quais o termo se aplica.

2. intensão: o conteúdo ou sentido do signo, as vezes se fala também do significado do signo.

Exemplos 1) 'capivara', *hydrochoerus hydrochaeris* e 'maior roedor do mundo' são três representações (intensões) diferentes do mesmo animal (da mesma extensão); 2) 2n e múltiplos de 2 são instâncias diferentes para designar números pares. A simbolização algébrica pode designar objetos conhecidos (números, segmentos etc.) ou não (espaço vazio na Álgebra simbólica do século XIX).

***3. intenção*:** palavra comum, por exemplo: tenho a intenção de visitar você amanhã, isto é, faz referência a uma atividade prática.

***4. intencionalidade*:** Se pensamos, pensamos em alguma coisa. A mente contém em si um objeto em que nossos pensamentos estão concentrados; nossos pensamentos tem um conteúdo. Não existem pensamentos vazios. Isso se chama intencionalidade na tradição filosófica inaugurada na modernidade pelo filósofo alemão Franz Brentano (1838-1917).

***5. intensidade - extensão*:** aqui a palavra *extensão* aparece num sentido mais comum em relação ao número 1. Por exemplo: A casa tem uma grande extensão ou ela é estendida.

Para Descartes a essência do mundo material foi a extensão. Kant considerava a proposição: *Os corpos têm extensão* como uma proposição

[99] Este vocabulário foi elaborado a partir de um texto produzido pelo professor Otte (2012) sobre termos usados no conceito de Complementaridade.

analítica, isto é, inevitavelmente verdadeira partindo do significado das palavras, ou seja, numa proposição analítica, o predicado já está contido no sujeito de tal forma que o juízo em questão consiste apenas em um processo de análise por meio do qual se extrai do sujeito àquilo que já está contido nele. Exemplo: *Os corpos são extensos.*

***6. intenso - extenso*:** palavras comuns: 'Meus estudos foram extensos, mais não intensos'.

***7. grandezas extensivas e intensivas*.** Existem dois tipos de grandezas, as extensivas e as intensivas. Os comprimentos se adicionam, são extensivos, mas as temperaturas não se adicionam, são intensivas. Para medir a temperatura temos de conectá-la com uma grandeza extensiva (Mercúrio). Em Física e Química as propriedades intensivas são propriedades de um sistema que não dependem de seu tamanho ou da quantidade de material que ele contém. Exemplos de propriedades intensivas: pressão, temperatura, viscosidade, densidade, etc.

C. Índice da obra 'Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra' (O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra)

Parte I

1. Introduction: purpose and plano of the inquiry (Introdução: propósito e plano de investigação).

2. The opposition of logistic and arithmetic in the Neoplatonists (A oposição entre Logística e Aritmética nos Neoplatônicos).

3. Logistic and Arithmetic in Plato (Logística e Aritmética em Platão).

4. The role of the theory of proportions in Nicomachus, Theon de Smyra e Domninus (O papel da teoria das proporções em Nicomachus, Theon de Smyra Domninus).

5. Theoretical Logistic and the problem of fractions (Logística teórica e o problema das frações).

6. The concept of arithmos (O conceito de arithmos).

7. The ontological conception of the arithmoi in Plato (A concepção ontológica de arithmo em Platão).

A. The science of the Pytagoreans (A Ciência dos pitagóricos).

B. Mathematics in Plato – *logistike and dianoia* (Matemática em Platão – *Logística e dianóia*).

C. The *arithmos eidetikos* (Os *arithmos eidéticos*).

8. The Aristotelian critique and the possibility of a theoretical logistic (A crítica aristotélica e a possibilidade de uma teoria Logística).

Parte II

9. On the difference between ancient and modern conceptualization (Sobre a diferença entre a conceitualização antiga e moderna).

10. The Arithmetic of Diophantus as theoretical logistic. The concept of eidos in Diophantus (A Aritmética de Diophantus como Logística teórica. O conceito de eidos em Diophantus).

11. The formalismo of Vieta and the transformation of the arithmos concept (O formalismo de Vieta e a transformação do conceito de arithmos).

A. The life of Vieta and the general characteristics of his work (A vida de Vieta e as características gerais de seu trabalho).

B. Vieta's point of departure: the concept of syntetic apodeixis in Pappus in Diophantus (O ponto de partida de Vieta: o conceito de apodeixis sintético em Pappus e Diophantus).

C. The reinterpretation of the Diophantine procedure by Vieta (A reinterpretação do procedimento Diophantino por Vieta):

1. The procedure for solutions 'in the indeterminate form' as an analogue to geometric analysis (O processo de soluções 'na forma Indeterminada' como análogo a Análise geométrica).

2. The generalization of the *eidos* concept and its transformation into the 'symbolic' concept of the species (A generalização do conceito de *eidos* e sua transformação no conceito simbólico de espécie).

3. The reinterpretation of the katholou *pragmateia as Mathesis Universalis* in the sense or *ars analytice* (A reinterpretação do *tratamento geral ou estudo como Mathesis Universalis no sentido da arte analítica*).

12. The concept of ‘number’ (O conceito de ‘número’).

A. Em Stevin

B. Em Descartes

C. Em Wallis

Apêndice – Introdução a Arte Analítica por Vieta.

D. Tradução da introdução: purpose and plan of the inquiry (Propósito e plano de investigação)[100]

A criação da linguagem Matemática formal teve significado decisivo na constituição da Física Matemática moderna. Se a apresentação Matemática é considerada como um mero dispositivo, preferível somente por que os conteúdos da Ciência natural possam ser expressos por meio de ‘símbolos’ de maneira mais simples e exatas possíveis, então o significado do simbolismo, bem como os métodos da Física serão incompreendidos. É verdade que nos séculos XVII e XVIII ainda era possível expressar e comunicar descobertas relativas as relações “naturais” de objetos em termos não matemáticos, mas mesmo assim – ou melhor, particularmente depois – era a forma, o método geométrico (*mos geometricus*), que assegurava sua credibilidade e confiabilidade. Depois de três séculos de intenso desenvolvimento, finalmente torna-se impossível separar o conteúdo da Física Matemática de sua forma. As apresentações elementares da Ciência Física, que até certo ponto não são matemáticos surgem completamente livres de pressuposições das derivações de conceitos fundamentais (tendo recorrido às ‘intuições’ imediatas) que estão ainda em voga, porém esse fato não deve nos enganar sobre a questão de que é impossível, e sempre foi impossível,

[100] Nos rodapés dos textos traduzidos estão as ‘Notas’ bem como o número da página que a referida ‘Nota’ se encontra na obra ‘O pensamento matemático grego e a origem da álgebra’.

capturar o significado do que hoje chamamos Física, independente de sua forma Matemática. Daí surgem insuperáveis dificuldades em que as discussões sobre as teorias Físicas modernas tornam-se complicadas, pois os físicos ou não físicos tentam desconsiderar o aparato matemático e apresentam resultados de pesquisa científica na forma popular. A íntima conexão da linguagem Matemática formal com o conteúdo da Física Matemática decorre de um tipo especial de conceitualização que é concomitante com a Ciência moderna e que foi de importância fundamental para sua formação.

Antes de tratar da discussão dos problemas que a Física Matemática enfrenta atualmente, devemos investigar a origem e a estrutura conceitual de sua linguagem formal. Por esta razão, a questão fundamental no tocante as relações internas entre o aspecto 'teórico' da Matemática, Física e do 'experimento' com o procedimento 'sistemático' e 'empírico' no interior da Física Matemática, serão totalmente ignoradas neste trabalho. Limitaremos a tarefa de recuperar alguns graus das fontes que hoje estão quase totalmente escondidos da nossa moderna Matemática simbólica. Contudo, a investigação não vai perder de vista a questão fundamental, que está diretamente relacionada com as dificuldades conceituais surgidas no interior da F*ísica* atualmente. No entanto, superficialmente sua formulação será determinada no decorrer deste estudo.

A criação da linguagem formal na Matemática é idêntica com a fundação da Álgebra moderna. A partir do século XIII até a metade do século XVI, o Ocidente absorveu a 'Álgebra' (*al-g'abrwa'l-muqabāla*) dos Árabes na forma de teoria das equações, provavelmente derivado da Índia e dos gregos[101]. Nas fontes gregas estão presentes a influência da Aritmética de Diophantus em relação ao conteúdo, mas a sua forma é inconfundível com a Ciência Arábica[102] – isto se evidencia no próprio *Liber Algorismi* de *Al-Khowarizmi*, a partir do século X[103]. Com a elaboração, particularmente na Itália, da teoria das equações que os

[101] Veja, J. Ruska, 'Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst', *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Kasse*, 1917, 2. Abhandlung, especialmente pp. 35, 49, 60 f., 104, 109 f., 113 f. Permanece aberta a questão se as fontes Indianas regressam aos gregos ou se retornam às origens orientais. (Nota 01, página 227).
[102] Cf. Tannery, *Zeitschrift für Mathematic und Physik, Historisch-Literarische Abteilung*, XXXVII (1892), pp. 41 ff., e Mémoires scientifiques, II, 428 ff.; IV, 275 ff. (Nota 02, página 227).
[103] Cf. Ruska, *Sitzungsberichte*, 1917, pp. 28 e 69. Os escritos perdidos de Anatolius (terceiro século dC) parece ter constituído outra fonte grega. (Nota 03, página 227).

Árabes tinham passado para o Ocidente, o texto original de Diophantus, já no século XV, começa a se tornar bem conhecido e influente. No entanto, foi a partir do último quarto de século XVI que Vieta compreendeu, ampliou e modificou a técnica de Diophantus de maneira crucial. Portanto, Vieta torna o verdadeiro fundador da Matemática moderna.

As apresentações convencionais da história deste desenvolvimento, de fato, não conseguem ver a importância do renascimento e assimilação da Matemática grega no século XVI. Entretanto, a Matemática simbólica é concebida e tratada naturalmente. Os interpretadores convencionais não estão suficientemente conscientes do *caráter* da transformação conceitual que ocorreu no decorrer desta assimilação, o que constitui condição indispensável do simbolismo matemático moderno**.** Além disso, a maioria das histórias-padrões tentam compreender a Matemática grega por meio do simbolismo moderno, como se tratasse de uma 'forma' externa que pudesse ser adaptado para qualquer 'conteúdo' desejável. Mesmo no caso de uma intenção genuína de investigação da Ciência grega, verifica-se que a pesquisa começa a partir de um nível conceitual que é desde o início, a respeito de conceitos fundamentais, determinado pelos modos do pensamento moderno. Desacoplar-se desse modo de interpretar a Ciência grega é a primeira preocupação de nossa empreitada.

Contudo, nosso objetivo não é avaliar o renascimento da Matemática grega no século XVI em termos de seus resultados retrospectivos, mas ensaiar o percurso de sua gênese prospectivamente. Na assimilação e transformação de Vieta da técnica de Diophantus, temos como se fosse um pedaço da emenda pela qual a 'nova' e antiga Ciência estão conectados. Mas, para ser capaz de esclarecer (lançar um olhar) às características essenciais desta assimilação e transformação, devemos primeiro de tudo olhar o trabalho de Diophantus do *ponto de vista de suas próprias pressuposições.* Somente depois podemos começar a distinguir a '*Ars Analytice'* (Arte Analítica) de Vieta dos fundamentos gregos de modo a revelar as transformações conceituais que estão expressas nele.

Deve ser dado à *Aritmética* de Diophantus um lugar de destaque no âmbito geral da Ciência grega-helenística para que possamos imaginar como pode ter

sido sua pré-história. Contudo, isso nos conduz imediatamente a comparação dos fundamentos da *Aritmética* às 'Aritméticas' da literatura Neoplatônicas que forma seu fundamento, porém as categorias Neoplatônicas impediram a integração da *Aritmética* à literatura. Nos tópicos 2 até 4 da **parte I**[104] são investigados a classificação da Ciência Matemática nos escritos Neoplatônicos; estas classificações voltam a Platão, porém não são idênticos com Platão. Mostramos que a divisão Neoplatônica de Ciências dos números entre Aritmética teórica e prática Logística (arte de calculação) não pode ser atribuída sem ambiguidades à 'teoria da razão e proporção'. Este último (teoria da razão e proporção), por outro lado parece idêntico com a 'teoria Logística' postulada por Platão. Para este, a 'Logística teórica' tem relação com a Logística prática.Essa relação é similar ao que a 'Aritmética teórica' tem com a 'Aritmética prática. A 'Logística e Aritmética teórica' têm como objetos – em contraste com as correspondentes artes práticas (Aritmética prática e Logística prática) – coisas não experimentadas por meio dos sentidos, mas unidades 'puras' indivisíveis que são completamente uniforme entre si e que pode ser capturada como tal apenas no pensamento. Ambas as disciplinas teóricas decorrem diretamente, por um lado, da contagem, e por outro lado da *calculação*, isto é, do ato de relacionar números uns com os outros, tanto no sentido de contar como de calcular. A tarefa das disciplinas teóricas é reduzir essas atividades 'práticas' para suas pressuposições (premissas) verdadeiras. Os comentadores Neoplatônicos sobre as definições platônicas da Aritmética e Logística em *Charmides* e em *Górgias* mostram que nessa 'redução', a Aritmética está preocupada com 'tipos' de números, enquanto a Logística está preocupada com o seu 'material'.

A postulação de Platão de uma teoria Logística como análoga a noética e como pressuposição a qualquer arte de calculação foi ignorada, pelos Neoplatônicos, como mostra o tópico 5 (Logística teórica e problema das frações). Isso porque essencialmente, a propriedade da indivisibilidade das mônadas *noéticas* e o uso de partes fracionárias na unidade de calculação são inevitáveis na calculação, e, isso não pode ser justificada com base nas mônadas. Uma

[104] Nos tópicos 2 até 4 são tratados dos seguintes assuntos: A oposição entre Logística e Aritmétca nos Neoplatônicos, Logística e Aritmética em Platão e o Papel das teorias de Proporções em Nicomachus, Theon de Smyra e Domninus.

razão adicional foi a elaboração da teoria das razões na teoria das proporções *gerais*, o qual depende da descoberta de magnitudes incomensuráveis, o que conduz além do reino das coleções contáveis.

Contudo, as dificuldades que surgem da postulação platônica de uma teoria Logística podem ser totalmente compreendidas somente se os fundamentos ontológicos que determina essa concepção forem chamados à mente. E isso requer, por sua vez, clarificação aprofundada do conceito de *arithmo* que forma a base de toda Aritmética e Logística grega. No tópico 6 (O conceito de arithmos), o *arithmo* é tratado no sentido de que *nunca* significa outra coisa senão 'um número para definir objetos definidos'. A Aritmética teórica cresce inicialmente fora do entendimento de que o processo de 'contagem' de qualquer que seja o objeto possa ser feito por meio do uso de conhecimento de 'números contáveis' que já estão em nossa posse e que, como tal, pode ser coleções de objetos 'indiferenciados', ou seja, unidades 'puras' semelhantes. O problema da possibilidade de tais semelhanças, isto é, a questão do como é possível que *muitos* 'uns' deve formar *uma* coleção de 'uns', conduz a procura da *eide* como 'propriedade específica' definida, tais como a unidade fornecerá, permitindo classificação de todas as coleções contáveis. Portanto, a Aritmética grega é, originalmente, nada mais do que a teoria da *eide* dos números, enquanto na arte de 'calculação', e, portanto na Logística teórica, estas coleções contadas são consideradas apenas com referência ao seu 'material', isto é, refere a unidade como tal. A possibilidade da Logística teórica é, portanto, totalmente dependente do modo de ser da unidade pura.

Por essa razão, a Filosofia pitagórica e platônica e suas relações com os problemas fundamentais com a Matemática são tratadas no tópico 7 (A concepção ontológica de *arithmo* em Platão). Na primeira parte o ponto de vista geral da cosmologia 'Matemática' pitagórica e sua conexão com o conceito de *arithmos* é apresentado. Na segunda parte, o significado que é atribuído a n'habilidade de calcular e contar' na Filosofia platônica é discutido: na Aritmética e Logística 'pura', o sucesso do pensamento humano em tornar-se consciente de seu verdadeiro objeto e das pressuposições de suas atividades, sempre permanecem ligadas a percepção do sentido. Na terceira parte segue através de

consequências que surgem de Platão, a partir de posições privilegiadas que ele atribui a teoria dos números: na estrutura do conceito de *arithmos*, ele descobre a possibilidade de uma solução fundamental do problema da participação que sua 'dialética' necessariamente conduz, sem, portanto, ser capaz de fornecer uma solução. Portanto, a tentativa de uma ordem aritmológica pitagórica de todos os seres foi repetida por Platão com o reino das ideias em si; isso equivale a uma correção decisiva da tese Eleática do 'Um'.

Esta concepção de número *eidético* bem como da Matemática como semelhanças, cujo ser é autosubsistente e originalmente separado da percepção do sentido é a base do ensino Platônico, é criticado por Aristóteles. Isso é discutido no tópico 8 (A crítica aristotélica e a possibilidade de uma teoria Logística). Ele mostra que a unidade 'pura' são meramente produtos de uma 'redução' realizada no pensamento que transforma tudo que é contável num material 'neutro'.

A unidade 'pura' tem, portanto, não o seu próprio ser. Sua indivisibilidade é apenas uma expressão do fato de que contar e calcular sempre pressupõe uma última 'unidade', irredutível que é para ser entendida como uma 'medida' dada. Segue-se que não existe nada que impeça a introdução de uma medida nova e 'muito menor'; em outras palavras, pode operar com partes fracionárias da antiga unidade. Somente tendo como base, a concepção aristotélica, a Logística científica platônica pode ser realizada.

Na **parte II**, voltamo-nos à relação da Álgebra simbólica com a *Arithmética* de Diophantus. Depois de uma consideração geral da diferença entre a formação de conceito antigo e moderno do qual o trabalho de Diophantus é a base, pois essa relação é resultado da interpretação da parte I, isto é, o trabalho de Diophantus é interpretado como 'teoria Logística' (é o tema do tópico 9 – sobre a diferença entre a conceitualização antiga e moderna). Na formulação e solução dos problemas, a teoria Logística sempre conserva uma dependência do conceito de *arithmos* grego, embora aparentemente incorpore uma tradição pré-grega 'algébrica' mais geral, este é o foco de discussão do tópico 10 (A Aritmética de Diophantus como Logística teórica: o conceito de *eidos* em Diophantus).

Finalmente nos tópicos 11 (O formalismo de Vieta e a transformação do conceito de *arithmos*) e 12 (O conceito de número em Stevin, Descartes e Wallis), a transformação da técnica de Diophantus nas mãos de Vieta e Stevin é descrito. Na conclusão deste tópico mostramos que o renascimento e assimilação da Logística grega nos séculos XVI e XVII conduziu ao entendimento *simbólico* do número que por sua vez clarifica a estrutura conceitual do simbolismo algébrico que é o seu produto. Ao mesmo tempo, traçamos a transformação geral que está intimamente conectada com o entendimento simbólico do número numa consciência 'científica' dos últimos séculos. Essa transformação vai aparecer especificamente no conceito de número de Stevin, Descarte e Wallis.

E. Tradução do capítulo 09: on the difference betweem ancient and modern conceptualization (Sobre a diferença entre a conceitualização antiga e moderna)

Os resultados das investigações precedentes (parte I) nos permitem interpretar o trabalho de Diophantus sob a luz das pressuposições conceituais mais gerais da Aritmética e Logística grega. Porém, esta aproximação não pode nos colocar em conflito com a apresentação padrão da *Aritmética* de Diophantus como um estágio rudimentar da Álgebra moderna, e, portanto, da nossa Matemática simbólica em geral. A última interpretação de Diophantus está, como veremos, intimamente conectada com a própria concepção da Matemática moderna desde Vieta, Stevin e Descartes. Este novo empreendimento da nova autodefinição repousa essencialmente sobre certa reinterpretação da Matemática antiga bem como de toda Ciência antiga. A clarificação desta reinterpretação significa nada menos do que obter acesso renovado da doutrina numérica grega, que é precisamente o que tentamos fazer na Parte I deste estudo. No entanto, uma melhor compreensão dos tópicos desta obra requer reflexões a mais sobre assuntos fundamentais.

As dificuldades na maneira de uma compreensão adequada da doutrina numérica grega consistem acima de tudo (como dificilmente são apontados), em

nossa própria maneira de lidar com a Natureza dos conceitos de *nossa própria intencionalidade*. Por intencionalidade se entende o modo pelo qual o nosso pensamento, e também nossas palavras significam ou tem em mente seus objetos.[105] A necessidade de se abster, tanto quanto possível, do uso de conceitos modernos na interpretação é, geralmente aceito, e até mesmo enfatizado. Está claro que uma interpretação não baseada em pressuposições modernas é limitada, mesmo se conseguirmos nos livrar completamente da terminologia científica atual, permanece imensamente difícil que o meio da intencionalidade comum correspondente ao nosso modo de pensar, um modo essencialmente estabelecido nos últimos quatro séculos estão incrustrados em nossa formação mental. Por outro lado, o modo do pensamento antigo e suas concepções são, acima de tudo, não totalmente 'estranho' ou desconhecido para nós. Mas, na relação de nossos conceitos com os conceitos antigos há uma estranha 'ruptura' – o acesso a compreensão do mundo está enraizado no reconhecimento da Ciência grega, porém escapou das pressuposições que determinou o desenvolvimento da Ciência grega. Se queremos esclarecer nossas pressuposições conceituais devemos sempre manter em mente a diferença nas circunstâncias da nossa Ciência e a dos gregos.

Na *episteme* grega, a existência da 'cognição' e 'conhecimento' foram reconhecidos pela primeira vez como última possibilidade humana, que permite ao homem desconsiderar todos o fins que poderiam perseguir, para dedicar-se à contemplação em completa liberdade e lazer, encontrando sua felicidade em sua própria atividade. Esta possibilidade é contrastada com a dependência das questões da atualidade. Na interpretação contemplativa, a Ciência original está em oposição imediata com atitude não científica que ainda é o seu solo no qual suas raízes são estabelecidas. Na tentativa de se colocar acima dessa atitude não científica, a Ciência preserva seus fundamentos. Portanto, é possível e necessário aprender a ver a Ciência grega do ponto de vista de sua base 'natural'. Em sua soma total, a Ciência grega, representa toda uma complexidade de *cognições* '*naturais'* que estão implícitas em atividades pré-científicas que estão

[105] See J. Klein, 'Phenomenology and the History of Science', Philosophical Essays in Memory of Ed. Husserl (Cambridge, Mass., 1940), pp. 143-163 [Trans.].

em movimentos no reino da opinião e apoiado numa compreensão pré-conceitual do mundo.

Nossa Ciência, a 'nova' Ciência cujos fundamentos foram estabelecidos nos séculos XVI e XVII, é diferente devido aos fatos circunstanciais. Nos séculos XVI e XVII os fundamentos 'naturais' são substituídos por uma Ciência já existente, cujos princípios são negados, cujos métodos são rejeitados, cujo 'conhecimento' é ridicularizado – pois, a vida do homem, como um todo, é colocada acima de qualquer dúvida. A *Ciência* surge como um bem humano inalienável, que pode de fato tornar-se aviltado e distorcido, mas o seu valor está fora de questão. Na base desta Ciência, cujos fundamentos reivindica validade, é agora erguida e reconhecida como sendo o edifício da 'nova' Ciência, mas construída em deliberada *oposição aos conceitos e métodos em relação* a Ciência antiga. É perfeitamente verdadeiro que, como apontou novamente, os fundadores da 'nova' Ciência – homens como Galileu, Stevin, Kepler e Descartes foram motivados por um impulso original, que é diferente da Ciência escolástica (e Ciência aristotélica, minha inserção). O interesse científico destes homens e de seus precursores surgiram em sua maioria de problemas da Mecânica aplicada, da arquitetura, da construção de máquinas, da pintura e da recém-descoberta óptica instrumental[106]. No entanto, é fato que a estrutura conceitual desses novos conteúdos é derivada dos conceitos tradicionais. A constituição da *verdadeira* Ciência, do *verdadeiro* conhecimento induz a necessidade de reorientação contínua referente ao tradicional, consolidando com isso, em bases firmes o edifício da nova Ciência. Esta Ciência compartilha com a Ciência escolástica a maioria de suas pressuposições gerais no sentido de que a 'atitude científica' desenvolvida pela Ciência grega está em oposição a existência 'natural'. Além disso, a nova Ciência, retorna às fontes das Ciências gregas que tinham sido negligenciadas pela Ciência escolástica. Embora, as fontes e pressuposições sejam, tanto da Ciência grega antiga como da escolástica, sua interpretação é completamente diferente da Ciência antiga. É esta interpretação do corpo da doutrina grega, que trouxe com ela a característica da transformação de todos os conceitos antigos que estão nos fundamentos não apenas de todas as formações

[106] Isto tem sido mostrado com muita ênfase por Leonardo Olschki em seu *Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur* I-III, Heidelberg, 1919-1927. (Nota 126, página 242).

de conceitos de nossa Ciência, mas também em nossa intencionalidade comum que é por sua vez derivada da Ciência antiga.

O que especialmente caracteriza a 'nova' Ciência e influencia seu desenvolvimento é *a concepção que ela tem de sua própria atividade*. Concebemos o desenvolvimento da Ciência grega como novo acesso, isto é, como elaboração e recuperação da cognição 'natural'. Vê-se não apenas como Ciência da N*atureza*, mas como Ciência '*natural'* – em oposição a Ciência *escolástica*. A 'naturalidade' da Ciência grega é determinada precisamente pelo fato de que ela surge a partir dos fundamentos 'naturais', de modo que é definida ao mesmo tempo em termos de sua distinção e de sua origem. Os fundamentos da 'naturalidade' da Ciência moderna é uma expressão de sua atitude polêmica em relação à Ciência. Esta postura especial da 'nova' Ciência fundamentalmente define seu horizonte, delimita seu método, sua estrutura em geral e o mais importante, determina o caráter conceitual de seus conceitos.

Na Ciência Grega, os conceitos são formados numa dependência contínua da experiência pré-científica 'natural', do qual o conceito científico é 'abstraído'. O significado dessa 'abstração', por meio do qual o caráter conceitual de qualquer conceito é determinado, é o problema ontológico da antiguidade; torna-se esquematizado no problema dos universais da idade media, e, com o tempo desapareceu completamente. A 'nova' Ciência, por outro lado, geralmente obtém seus conceitos por meio de um processo polêmico contra os conceitos da Ciência escolástica tradicional. Tais conceitos, não tem mais a ambiguidade dos significados causados pelos discursos comuns, onde o verdadeiro sentido se distingue de uma série de significados menos precisos. Não é mais a coisa pretendida pelo conhecimento do conceito do objeto dado *imediato*. Nada mais do que a conexão interna de todos os conceitos, seus relacionamentos mútuos, sua subordinação total ao edifício da Ciência, determina um sentido *único* tornando acessível a compreensão do conteúdo que é especialmente científico e relevante. Na sua própria evolução de conceitos no decorrer do combate à Ciência escolástica, a nova Ciência cessa a interpretação dos conceitos da *episteme* Grega preservada na tradição escolástica a partir do ponto de vista de seus fundamentos 'naturais'; ao contrário, interpreta-os em referência a função que

cada conceito estabelece com a Ciência como um todo. De forma que cada conceito novo obtido é determinado por *reflexão total sobre o contexto desse conceito*. Todo conceito da 'nova' Ciência pertence a uma nova dimensão conceitual. A intencionalidade especial de cada um desses tais conceitos não são mais problemas: são indiferentemente o mesmo para todos os conceitos; é um meio além da reflexão, no qual o desenvolvimento do mundo ocorre. O mais recente esforço para fornecer fundamentos lógicos e firmes não altera os aspectos dessas situações.

Neste estudo tratamos apenas da história da formação de conceitos na Matemática. O que está sendo dito aplica-se também nesta área da Matemática. O desenvolvimento da Matemática não poderia ser isolado da história geral dos modos de compreensão do mundo, contudo um esforço árduo pode ser feito para configurar a Matemática numa disciplina independente. Indo mais além, a natureza da modificação que a Ciência Matemática do século XVI e XVII trouxe sobre as concepções da Matemática antiga é *exemplar* para o modelo total do conhecimento humano nos últimos anos: o que estamos nos referindo é a íntima conexão entre o modo de '*generalização'* da 'nova' Ciência e o seu caráter como uma '*Arte'*.

A expressão mais característica dessa conexão é encontrada no formalismo simbólico e nas técnicas de calculação da Matemática moderna. Veremos exibido em tudo que segue, em particular, sua íntima relação entre o modo de generalização empregada pela nova Ciência e seu caráter de 'A*rte*' que determinou a moderna interpretação da Matemática antiga. Zeuthen não foi o primeiro a compreender o modo antigo de apresentar fatos matemáticos como 'Álgebra geométrica'.[107] Contudo, foi o primeiro a usar esse conceito consistentemente. A antecipação dessa interpretação pode surgir somente na base de uma insuficiente distinção entre *generalidade do método* e *generalidade do objeto* de investigação. O próprio Zeuthen conecta imediatamente seu conceito de 'Álgebra geométrica' como sendo um método geral que tem como objeto a

[107] Veja Zeuthen, *Die Lehre Von den Kegelsehnitten in Altertun* (1886). (Nota 127, página 242).

'magnitude geral'[108]. Portanto, todos os problemas complexos apresentados pelos antigos em função de seu interesse científico foram centrados em questões relativas ao modo de ser dos objetos matemáticos. A Matemática antiga é caracterizada pela *tensão entre método e objeto*. Os objetos em questão (figuras e curvas geométricas, suas relações, suas proporções de magnitudes geométricas comensuráveis e incomensuráveis, números, etc.) conferem à pesquisa o seu direcionamento, porque é ao mesmo tempo seu ponto de partida e de chegada. A maneira de determinar o método de investigação é mostrada especialmente no caso de provas de 'existência', isto é, demonstração de que o 'ser' de certo objeto é possível porque é desprovido de autocontradição. O problema de aplicabilidade 'geral' de um método é, portanto, para os Antigos o problema da 'generalização' dos objetos da Matemática em si. Este problema *eles* podem resolver somente na perspectiva de uma ontologia de objetos matemáticos. Em contrapartida, a Matemática moderna e toda a interpretação da Matemática centra-se no *método enquanto tal*. Ela determina os seus *objetos, refletindo sobre o modo como eles se tornam acessíveis através de um método geral*. Portanto, argumentando a partir da 'generalidade' da apresentação em termos de segmentos no livro de 'Aritmética' de Euclides, ou seja, do fato de que as relações com *todos os arithmos* são considerados, então seus proponentes concluem que a 'generalidade' da apresentação é a intenção da 'magnitude geral'. O que caracteriza essa 'magnitude geral' é sua indeterminação, que como tal, é um conceito que pode ser formado somente no reino do procedimento simbólico. Mas, a apresentação Euclidiana *não* é simbólica. A apresentação Euclidiana, sempre tem a intenção de *determinar* o número de unidades de medição, e isto sem *qualquer desvio através de uma 'noção geral' ou um conceito de uma 'magnitude geral'*. Cada número determinado de unidades de medição por medidas de distância *não* faz duas coisas que constitui o coração do procedimento simbólico: *não* identifica o objeto representado com os meios de sua representação e *não* substitui a determinação real de um objeto com a *possibilidade* de torná-lo determinado por um signo que, de fato, indica um determinado objeto e não dá uma ilustração intuitiva dele. Contudo, na

[108] *Ibid*., p. ix, pp. 3 ff.; cf. Também Zeuthen, "*Sur la constituition des livres aritmétiques d'Euclide* ...," *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger*, 1910, p. 404. (Nota 128 p. 242).

apresentação linear do livro de ‘Aritmética’ de Euclides estão adaptados às exigências do tema do livro X, com o qual os livros anteriores têm uma conexão ‘sistemática’. No entanto, os objetos deste livro são *diferentes*, apesar de ter métodos *semelhantes*. Os livros VII-IX lida com números comensuráveis, enquanto o livro X, por outro lado, lida com magnitudes cujas razões não podem ser reduzidas a razão de números, e por causa disso são incomensuráveis. Quando no livro de Aritmética um aritmético (calculista) ou mais exatamente uma proposição Logística é *geralmente* demonstrada com ajuda de linhas, isso no mínimo, não significa que exista um conceito geral de número e nem mesmo um conceito ‘geral’, isto é, números indeterminados correspondendo a esta prova geral. No segundo livro de Pappus ele apresenta os comentários do sistema de contagem e calculação de Apollonius no qual podemos ver diretamente a maneira em que a ‘aproximação linear’ geral pretende determinar somente números.[109] Pois, aqui, como em Euclides, as simples ilustrações de linhas são adicionadas e identificadas por uma letra, de forma que surge a possibilidade de representar números pretendidos por essas letras. Contudo, isto não equivale à introdução e indicação do simbolismo. As letras para indicar magnitudes e números parecem ter sido usadas já em Archytas. Sobre essas letras Tannery comenta: ‘A letra substitui bem um número qualquer ..., mas somente onde assume-se ser colocada; não simboliza um valor e não são utilizados nas operações’, isto é, *a letra não simboliza o valor de um número e não são operacionalizados*.[110] Aristóteles, também usou tais letras na Matemática, por exemplo, na *Physics* e em *On the Heavens*; ele mesmo introduziu em suas investigações ‘lógicas’ e ‘éticas’. Mas, tal letra nunca é um ‘símbolo’ no sentido de significar o símbolo em si como ‘objeto’ em geral.[111]

---

[109] Isso possui exatamente a mesma maneira de relação em *apodeixis* para as *numerosas e indeterminadas* soluções em Diophantus. O apodeixis como tal é geral, mas fornece somente números *particulares* em cada caso. Por provas usamos *aproximação linear* (Nota 129, página 242).

[110] Isso assegura o uso de magnitudes representadas por letras no século XVII. (Nota 130, página 242).

[111] Em particular, isso falha no caso de milhares ou do seu dobro, ou seja, as miríades de Apollonius e Pappus que foi considerada por Cantor para representar a ‘generalidade altamente significante’. A tensão entre método e objeto é expressa diretamente na diferença fundamental entre ‘análise’ e ‘síntese’. (Nota 131, página 242).

Nos tópicos seguintes da obra de Klein (1992) traçaremos a transformação conceitual que permitiu o conceito de *arithmos* antigo aparecer como 'número' ('Zahl') – em oposição a 'conjunto de números' ('Anzahl') e c*oncomitantemente* como '*magnitude geral*'. Esta transformação é anunciada no final da Idade Média por crescentes interesses práticos, isto é, a disciplina Matemática aplicada. Ao contrário da Aritmética 'teórica' e Geometria (Aritmética e Geometria especulativa), tal como especialmente Boethius, usando fontes Neopitagóricos e Neoplatônicos, passou na Idade Média, a corresponder a disciplinas 'práticas' de Logística e medição (Aritmética e Geometria prática) são, agora preferidos. Estas disciplinas são consistentemente compreendidas como '*artes*'; aprendê-las significa dominar as 'regras correspondentes de sua arte'. 'Procedimentos habilidosos', a 'prática' ou 'práxis' de calcular e medir é o objeto dessa doutrina. Agora, o momento significante dessa disciplina, seu primeiro sucesso, ou seja, quando essa disciplina ganhou reconhecimento como parte 'oficial' da Ciência, é precisamente a partir do seu caráter como 'Arte', que se pensa a dar-lhes a verdadeira dignidade teórica.[112] Juntamente com isso a estrutura dos objetos com o que a Matemática lida é transformada. Um novo tipo de generalização que pode ser denominado 'abstração, generalização, simbolização', que lida diretamente no estabelecimento de uma nova disciplina, isto é, a 'analítica geral', que assegura um lugar central na arquitetura da 'nova' Ciência. Todo esse processo é a nossa tarefa em descrevê-los em detalhes, iniciado principalmente pela reintrodução e assimilação da Aritmética de Diophantus.

[112] Esta identificação é certamente sugerida também pelo fato de que a disciplina Matemática tradicionalmente pertence entre as 'Artes liberais'. Na Idade Média as 'Artes liberais', e especialmente a Aritmética e Geometria continuou sendo considerado disciplinas 'teóricas', porém precisamente em oposição explícita às Artes Mecânicas 'práticas' (cf., por exemplo, Thomas aquinas, Summa Theologica II, I, Qu. 57, Art. 3, Ob. 3: '... justamente por que as Artes Mecânicas são práticas, as Artes liberais são teóricas'). É fato de que o caso da 'Aritmética' tradicional contém muitos elementos consideráveis iniciais da Logística que fornecem os fundamentos teóricos das calculações 'práticas'. Portanto, é muito difícil esboçar um limite entre Aritmética por um lado e Logística como Arte de calculação, por outro lado. Porém, o ponto crucial é que em *geral* as distinções entre as A*rtes liberais* e as A*rtes Mecânicas* estão vagarosamente desaparecendo, isto é, de que o caráter 'habilidoso' de toda a Matemática tem suas raízes na similaridade original da *techne* e *episteme*, que são identificados com 'aplicações práticas' no sentido de aplicação de um *método* habilidoso. (Nota 132, página 242).

F. Tradução do capítulo 11: O formalismo de Vieta e a transformação do conceito de arithmos

Parte A – a vida de Vieta e as características gerais do seu trabalho

As investigações Matemáticas de Vieta (1540-1603), são em todos os aspectos, características da situação da 'nova' Ciência na virada do século XVII. Estas investigações são verdadeiras se considerarmos o lugar em que Vieta viveu. Nascido num ambiente católico, mas pessoalmente descomprometido com questões da fé, por profissão um advogado, entrou para o serviço de Huguenot Antoinette d'Aubeterre, realizando atividades de consultoria jurídica, aos 24 anos, e, com essa função de conselheiro jurídico torna-se envolvido na disputa entre Catolicismo e Calvinismo[113] que balançou os fundamentos da França. Paralelamente ao seu trabalho ele supervisionou a educação de Catherine de Parthenay, depois de Rohan (filha de Antoinette d'Aubeterre), de quem permaneceu amigo fiel e conselheiro por toda a sua vida. Sobre as conferências concedidas no período de 1564 até 1568 que compreendiam todas as áreas do conhecimento, somente um chegou até nós. Esse texto apareceu pela primeira vez em 1637 numa tradução francesa intitulada *Principles de cosmographie*[114] que indica interesse especial de Vieta sobre questões cosmológicas e astronômicas. Seu principal trabalho *Harmonicum coeleste* (*Harmonic Construction of the Heavens*), que nunca apareceu impresso, ainda estava disponível no século XIX (Os livros são responsáveis pelo seu desaparecimento posterior)[115], e parece ter sido o primeiro desenvolvimento de seu ensaio didático.[116] *Todas as investigações Matemáticas de Vieta estão intimamente*

---

[113] Cf. Frédéric Ritter, 'François Vieta, inventor da álgebra moderna, 1540-1603. Ensaio sobre sua vida e sua obra', *La revue occidentale, philosophique, sociale e politique*, 2d series, Vl. X (1895), pp. 239-241;246. O estudo de Ritter é apresentado [em 1934] somente a monografia da vida e o trabalho de Vieta. Ritter fez também uma tradução para o Francês moderno do *Isagoge* e a *Notae priores ad logisticen speciosam (Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, I, pubbl. Da B. Boncampagni, I [1868], pp. 225-276). (Nota 193, página 253).

[114] Ritter, *Revue occidentalle philosophique* ..., Vol. X, p. 242. (Nota 194, página 253).

[115] Ibid., p. 269. (Nota 195, página 253).

[116] Ibid., p.241. (Nota 195, página 253). Na carta dedicada a Catherine de Parthenay que está no início de *Isagoge* Vieta disse: "... Divina Melusine, devo especialmente a você todo o estudo de Matemática à qual me apaixonei estimulado por você, pois possui habilidade nessa Arte, e melhor, compreende o conhecimento de todas as Ciências [enciclopédicas] que nunca pôde ser suficientemente admirado por uma pessoa de seu sexo e raça". O fato referido é velado pela

conectados com seu trabalho de astronomia e cosmologia. *The Canon mathematicus, seu ad triangula (Mathematical Canon ou Sobre Triângulos*, 1579), é baseado no trabalho de Regiomontanus e Rheticus,[117] que teve a intenção de preparar parte de seu principal trabalho de 'trigonometria'.[118] A segunda parte do *Canon*, o *Universalium Inspectionum ad Canobem mathematicum líber singularis* (Um livro de *General Tables attached to the Mathematical Canon*), fornece, entre outras coisas, o método de calculação usado na construção do Canon (construção canônica), e ensina, em particular, a calculação do plano e do triângulo esférico, e ainda ajuda nas relações trigonométricas gerais que há entre as diferentes determinações dos componentes de tais triângulos. Estas relações coletadas por Vieta na forma de tabelas permite leitura diretamente por meio de proporção (analogia), obtendo um componente desconhecido das três conhecidas do triângulo.[119] Este trabalho está diretamente relacionado aos problemas de formulação de equações como aquelas tratadas no trabalho 'algébrico' contemporâneo de Cardano, Tartaglia, Nonius, Bombeli e Gosselin. Referenciado por Peletier e Petrus Ramus,[120] bem como as traduções de Xylanders, certamente foram fatos que introduziu Vieta à Aritmética de Diophantus,[121] e indubitavelmente, Vieta conheceu também, o original.[122] A partir do estudo do

---

ornamentação barroca que é o estilo de Instrução de Vieta a Catherine, pelo qual ele tirou inspiração extensiva, e com isso realizou o seu próprio estudo. O quanto ele sentia em débito à Catherine de Parthenay por todo seu trabalho matemático, é mostrado pelas observações lúdicas que ele apresenta na parte inicial do terceiro problema do capítulo 9 de seu trabalho *Ad problema, quod ... prposuit Adr. Romanus, Responsum*, contendo a resposta do problema proposto por Adrianus Romanus: movido pela alegria dessa descoberta, divina Melusine, eu sacrifiquei por você cem ovelhas ao invés de um Pitágoras. (Nota 197, página 253).

[117] Cf. Ritter, *Revue occidentale philosophique* ..., Vol. X, pp. 251; 353-373; Zeuthen, *Geshicht der Mathematik im 16, und 17. Jahrhundert* (Leipzig, 1903), p. 115. (Nota 198, página 255).

[118] Cf. Ritter, *Revue occidentale philosophique* ..., Vol. X, p. 242; cf.p.354. (Nota 199, página 254).

[119] Cf. Ibid., pp. 251, 255 f., 366 ff. (nota 200, página 254)

[120] Cf. *Jacobi Peletarii Cenomani, De occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, libri duo* (Paris, 1560); no prefácio é mencionado um parecer no qual Diophantus é considerado o fundador da álgebra. Ramus tinha conhecimento de Diophantus como autor da *Aritmética* já em 1569: '... De Diophantus temos conhecimento de seis livros em Grego, embora o próprio autor diga serem treze livros que trata de assuntos de aritmética e que envolve admirável sutileza que é popularmente clamado pelo seu nome Arábico, álgebra – *scholarum methematicarum libri unus et triginta*, livro I, citado conforme a segunda edição de L. Shoner [Frankfurt, 1599], p. 35.). A propósito, *em Universalium Inspectionum ad canonem mathematicum líber singularis*, PL. 71, Vieta refere a Petrus Ramus explicitamente como 'o homem mais perspicaz). (Nota 201, página 254).

[121] Vieta cita Diophantus já em 1579, ou seja, no Canon acima mencionado, pl. 30, claramente seguindo a edição de Xylanders, onde está o trigésimo problema do primeiro livro. (Nota, 202, página 254).

[122] Cf. Cantor, II², 630, nota 4, Vieta deve ter tido acesso ao manuscrito que nessa ocasião estava na posse de Catherine de Medici (agora Parisinus 2379), o qual representa uma cópia dos dois

trabalho de Diophantus que a sua Álgebra simbólica surgiu, cujas características fundamentais ele esboçou programaticamente em seu trabalho *In artem analyticen Isagoge* (Introdução a Arte Analítica), que apareceu em 1591. Sobre o texto anunciado, somente uma parte apareceu no tempo em que ele era vivo. Vieta foi chamando a ocupar cargos oficiais de alta posição, foi conselheiro de Henry III e Henry IV[123], por isso dificilmente encontrava tempo para dedicar aos seus escritos,[124] mas no final forneceu um trabalho matemático de forma adequada para publicação.[125]

É importante deixar claro sobre o fato de que a Matemática moderna é guiada desde o início por interesses astronômicos e cosmológicos. Isso é verdadeiro, não somente em Vieta, mas também em Kepler, Descartes, Barrow, Newton, etc. A esse respeito, a 'nova' Ciência repete o curso da Ciência antiga. Mas, a maneira pelo qual os fundadores da Ciência moderna começaram a atingir uma compreensão Matemática da estrutura do cosmo, revela desde o início, uma concepção diferente do mundo, uma compreensão diferente do ser no mundo em relação aos antigos. Eles não são, em sua maior parte, conscientes de suas próprias pressuposições; daí surge a tensão com a Ciência que eles fundaram. Eventualmente, o legado antigo entrou em conflito com o modo de cognição moderno que recai sobre uma nova compreensão ontológica. No século XIX, esse conflito levou a uma nova 'formalização' dos fundamentos da análise infinitesimal,

---

mais velhos códices (espécie de livro antigo) do Vaticano, e, que mais tarde foi usado por Bachet na sua edição de Diophantus. (Regiomontanus já tinha referido a existência dos manuscritos de Diophantus em 1463-1464; observe que a queda de Constantinopla foi em 1453.). (Nota 203, página 254).

[123]Veja Ritter, *Revue occidentale philosophique* ..., Vol. X, pp. 246, 250, 258. (Nota 204, página 254).

[124] São eles: (I) o polêmico escrito contra Scaliger (Ritter, pp. 260,262); (2) a solução dos problemas postos por Adriaen van Roomen e o próprio Vieta (Ritter, pp. 264-2670; Zeuthen, *Geschichte der Mathematik*, pp. 119 ff.); (3) estudos para reforma do calendário; o próprio Vieta no fim de sua vida, avaliou melhor e se permitiu realizar sobre sua responsabilidade e engajar numa polêmica contra Clavius (Ritter, ibid., pp. 270-273). (Nota 205, página 254).

[125] Veja Ritter, *Revue occidentale philosophique* ..., Vol. X, pp. 270, 374, 370. Aferir especialmente a carta de Marino Ghetaldi para M. Coignet que está publicado no final do trabalho de Vieta *De numerosa potestatum ad Exegesin Resolutione* (1600), sobre resolução de equações que tem solução numérica; além disso, no prefácio de *De aequation recognitione et emendatione tractatus duo*, de Anderson, ed. Van Shooten, p.83, um trabalho sobre a descoberta e transformação de equações. Vieta disse na introdução de seu Ad problema, quod ... proposuit Adr. Romanus, responsum [1595]: 'Eu que não sou um matemático, mas que, sempre que houver tempo livre, deleitarei em estudos matemáticos ...'. (Nota 206, página 255).

e hoje seus efeitos sãos vistos na luta para fixar os princípios da Física Matemática. A origem disso já se apresenta em Vieta.

Ao contrário de seus contemporâneos, como por exemplo, Petrus Ramus e Bacon, a compreensão humanística de educação de Vieta não o leva a desencadear uma explícita oposição à Ciência tradicional. Porém, ele se assemelha a eles no sentido de não neglicenciar as fontes da literatura antiga tradicional. No entanto, ele deseja em todos os aspectos ser o preservador fiel, redescobrir e continuar o ensino dos antigos.[126] *The Harmonicum coeleste*, cujo tempo de origem coincide com *Mysterium cosmographicum* (1596) de Kepler, tinha a tarefa de renovar *o pensamento de Ptolomeu* por meio de sua *Composição Matemática*, o *Almagesto*. Vieta parece aceitar a tese copernicana, pois, ele mantém o método da Ciência de Ptolomeu.[127] Similarmente, em seus

[126] O mais novo contemporâneo, o historiador *De Thou*, cuja carreira política e de jurista lembra Vieta e que compartilha a predileção de estudos matemáticos com Vieta, disse: 'em assuntos matemáticos, ele é tão excelente que descobriu e *renovou* seu próprio pensamento de qualquer que seja a natureza do que foi descoberto pelos antigos e que tinha sido proferida. Relatos escritos que pereceram ou foram deteriorados por meio da devastação no tempo, e que ele *acrescentou* muitas coisas de sua própria cabeça e coisa que ele já tinha engenhosamente descoberto' – Vieta, *Opera mathematica*, Ed. Van Schooten [1646] p.4. (Nota 207, página 255).

[127] Cf. Ritter, *Revue occidentale philosophique* ..., Vol. X, pp. 241, 269. Sobre a posição de Vieta em relação a Copérnico vê-se, especialmente em *Apollonius Gallus*, Appendicula II (ed. Van schooten, p. 343; primeira edição 1600, p. II), onde há uma referência ao trabalho destinado a corrigir os erros de Copérnico e os defeitos de Ptolomey. Era para ter tido o nome *Francelinis* e deveria conter entre outras coisas, uma composição chamada *Epilogistice motuum coelestium Pruteniana*; 'forneceremos lacunas e corrigir erros em *Francelinis* no qual estabeleceremos a *Prussia Reinterpretation of Heavenly Motions* baseado na hipótese de Apollonian [isto é, a hipótese do movimento excêntrico] da hipótese Ptolomaica, quando libertada do movimento em torno de um centro estranho [isto é, equant] e subcentros ou inclinações dos epiciclos [uma hipótese para corrigir a anomalia lunar, veja *Almagest* V, 5] não são completamente aceitos'. 'Pruteniana', isto é 'Prussia'. de Pru(h)tenia é uma alusão a Copérnico e a *Prutenicae Tabulae coelestium motuum* de Erasmo Reinhold (ou Reynoldus), que surgiu primeiro em 1551 e incorporou a hipótese Copernicana. No prefácio há uma menção publicada por van Shooten, edição de 1646, além do *Hamonicum coeleste*, um 'fragmento que investiga o mesmo tema' (fragmentum que eodum spectans). Cf. o título de um trabalho já mencionado aqui de Anderson: *ad triangulorum sphaericorum epilogismum*, um 'manual' com novas calculações sobre triângulos esféricos. (The *Harmonicum coeleste*, foi incidentalmente, não totalmente completado ainda em 1600, aparecendo em uma carta de Marino Ghetaldi para Coignet. (Nota 208, página 255).

Vieta deve ter tomado a direção do trabalho de Ptolomeu no proemium (prefácio) da *Syntaxi*s (Heiberg, I, 5-7) que repetiremos aqui, pois, mostra claramente a ideia de conhecimento 'certo' e 'exato', pois de modo algum distingue das características da 'nova Ciência'. A cosmologia antiga e moderna distingue um do outro não pela *função*, mas pela *natureza* de sua Matemática. O caráter do 'novo' tipo de Matemática está condicionado à uma mudança de compreensão ontológica do mundo; isto está diretamente evidenciado na extensão de seu 'reino da aplicabilidade' para *toda* a 'Natureza'. Ptolomeu, reinterpretando a doutrina estóica Peripatética, afirma que há três genes da parte filosófica 'teórica' (cf. Aristotele, *Methaphysics* E I), a 'teologia', a Ciência que está afastada de tudo que é percebido pelo sentido, bem como de todas as mudanças que diz respeito a fonte exterior da origem do movimento 'erguidas em algum lugar com as mais nobres coisas do cosmos' e 'physics' – Ciência das 'qualidades' materiais das coisas impermanentes com a esfera sublunar,

escritos matemáticos remanescentes ele está sempre preocupado não somente com a utilização de termos diretamente da terminologia antiga (ou pelo menos, ele inventou novos termos combinando-os tanto próximo quanto possível), mas também interpretando todas essas 'inovações', uma vez que foram introduzidas como um mero desenvolvimento da tradição. Todas as 'inovações' foram, para ele como para tantos outros contemporâneos, '*renovação*' (*renovatio, restitutio; cf. L. Olschki, galilei und seine Zeit* [1927] P. 147; também nos escritos de Tartaglia, Commandinus, Galileu, Viviani). No prefácio da carta de *Isagoge,* que foi endereçado a Catherine de Parthenay, ele disse caracteristicamente: 'aquelas coisas que são novas costumam no início ser estabelecidos rudemente, e as que não são definidas devem ser polidas e aperfeiçoada nos séculos seguintes. A arte que eu apresento é *nova*, mas é *tão antiga e contaminada* pelos bárbaros, que eu considero necessário introduzir uma forma inteiramente nova de pensar e publicar um novo vocabulário, livrando-se de todos os termos pseudo-técnico, sob pena de manter uma linguagem de baixo calão e continuar a tratar a Ciência natural à maneira antiga ...' A edição de 1591 do *Isagoge* está descrito como parte de '*Opus restitutae Mathematical Analyseos*' (*Opus of the restored Mathematical Analysis*) ou a 'nova *Algebra'*.[128] A mesma expressão 'Álgebra' ou 'Álgebra e

---

tendo em grande parte característica de conjecturas, isto é, depende de $(\rightarrow \text{fazer-imagem} \rightarrow \text{conjectura})$; apenas Matemática é a Ciência da (→figura), da $(\rightarrow da\ quantidade, números)$, da $(\rightarrow magnitude), do\ (\rightarrow locus \rightarrow espaço),$ do$(\rightarrow tempo)$ que pertencem 'a todas as coisas simples' e que representa certeza e uma Ciência irrefutável. Portanto, Ptolomeu dedicou especialmente a astronomia que tem como objeto o eterno, o curso imutável do divino, os corpos imutáveis celestiais, um objeto que é, de fato, apropriado ao caráter de uma 'Ciência' do *conhecimento*, que permanece sempre o mesmo e que não altera com a opinião. Heiberg, I, 6, II-7, 4: '... pensando que os outros dois gêneros da teoria seria descrito como *conjectura* ao invés de concepção científica, pois o teológico é inteiramente sem aparência e inapreensível, o físico é, portanto, material e instável e incerto, de modo que, por causa disso, os filósofos nunca esperam pensar a mesma coisa sobre eles, *apenas a Matemática*, provém aproximação no espírito de investigação fornecendo aos que tentam tais *certezas* e conhecimento fidedigno como vem demonstrando tanto a aritmética como a Geometria, segundo procedimentos incontestáveis – estes pensamentos foram conduzidos, preferencialmente, a estudar o possível de nossa habilidade como uma *disciplina teórica de tal modo que, especialmente diz respeito a coisas celestes e divinas*, pois só ela está envolvida nas investigações relativas *as coisas que são sempre como elas são* e por causa disso é capaz, desde que o tipo adequado de apreensão seja, nem incerta e nem desordenada *para ser em si sempre com ela é* – que é propriedade peculiar da Ciência – e ainda coopera numa base igual com outras disciplinas.' (Nota 209, página 256).

[128] Sob o mesmo título geral há mais nove escritos mencionados aqui, no qual somente o *Suplementum geometriae* (1593) e *De numerosa protestatum ad Exegesin Resolutione* (1600) surgiu na forma anunciada. (Pois, em relação a *Zeteticorum libri quinque* [1593] fui incapaz de determinar o subtítulo.) Vieta disse já em *Liber inspectionum*, comentando sobre as *novas* 'proporções' dado por ele para novas calculações do triângulo retângulo esférico, que sua

almucabala' claramente pertence a Vieta, esta 'pseudo-terminologia' bárbara. A propósito, Descartes segue-o nisto, falando em seu *Regulae* que 'a arte que os bárbaros chamaram de Álgebra' (Adam-Tannery, X, 377).[129] 'Ars magna',[130] que é cercada de mistério e lembra a Arte obscura dos alquimistas. Vieta diz ter sido o primeiro a ter descoberto o 'ouro genuíno anteriormente enterrado' (aurum fossile et probum) pelos matemáticos *antigos* que eles tinham guardado zelosamente, cuja a posse desse 'ouro genuíno' o permitiu resolver não somente, como as pessoas fizeram antes dele, 'resolver este ou aquele problema individualmente', mas precisamente para gerir este tipo de problema em qualquer quantidade desejada. O rigor nesse pensamento[131] são complementados por uma consciência de capacidade imensa que sua descoberta oferece para humanidade e que ele antecipou por séculos, expressos com orgulho e liberdade no final de seu *Isagoge*: '*Não há nenhum problema que não possa ser resolvido' – 'Nullum non problema solvere*'.

Parte B – O ponto de partida de Vieta: o conceito de apodeixis sintético em Pappus e em Diophantus

Para compreender melhor a relação de Vieta com os antigos, uma relação típica dos séculos XVI e XVII, voltamo-nos a sua própria apresentação no *Isagoge*. As duas principais fontes gregas que o trabalho de Vieta apresenta

---

compilação (elaboração) abre caminhos para reparar e restituir uma nobre Ciência que está praticamente em ruínas – pl. 37). (Nota 210, página 258).

[129] Na introdução de seu trabalho Ad problema, quod ... proposuit Adr. Romanus, Responsum (1595) Vieta disse: 'Com certeza, o termo bárbaro algébrico é satisfatório'. (Nota 211, página 258).

[130] Luca Pacioli, em sua *Summa* (1494) já falou da álgebra como 'Arte Magiore' (cf. Cantor II², 321). Seguindo-o Cardano chama seu trabalho de: *Artis magnae sive de regulis algebraicis líber unus* (1545); Peletier: De occulta parte numerorum quam Algebram vocant (1560); Bombelli: *L'Algebra*, parte *maggiore dell' Arithmetica* (1572); Gosselin: De *Arte magna seu de occulta parte numerorum, quae et* Algebra et Almucabala *vulgo dicitur* (1577). A expressão arábica 'Almucabala' foi traduzida como 'líber de rebus occultis' (livro de coisas ocultas), como por exemplo, ainda por Schoner in *Petri Rami Arithmetices libri duo*, *et Algebrae totidem*: *a Lazaro Shonero emendati et explicati*, etc. (Frankfurt, 1586), p. 322, conforme Descartes, *Regulae ad directionem ingenii*, Rule, IX, Ad.-Tann. X, 402: 'Sobretudo, algo que existe e que me parece que tem que ser mantido em mente, ou seja, aquilo que todos devem se convencer firmemente é que qualquer Ciência, por mais que seja oculta, deve ser deduzida *não de coisas grandiosas e obscuras*, mas somente a partir de coisas fáceis e óbvias. (Nota 212, página 258).

[131] '... *mihi pauca admiranti* ...' (para mim, que se maravilha com poucas coisas) ele próprio declara na mesma *Dedicatória Epistle*. (Nota 213, página 258).

aparecem imediatamente na abertura do capítulo: (1) O livro VII de Pappus, que estava destinado a continuar a desempenhar um papel tão significante no desenvolvimento da Matemática moderna;[132] (2) A Arithmética de Diophantus.[133] Vieta disse, que há na Matemática, um procedimento especial para descoberta, 'uma certa maneira de investigar a verdade' (veritatis inquirendae via quaedam) que é tão reivindicada, e que foi primeiro descoberto por Platão.[134] A esse modo de procura da verdade Theon de Alexandria chamou 'Análise', definindo-a como o processo em que se supõe aceite o que é procurado e, trabalhando através de consequências lógicas dessa suposição, se chega à verdade. Isto é, contrário à 'síntese', em que se supõe o que já é conhecido e, trabalhando através das consequências dessa suposição, se chega ao entendimento do que é procurado. Estas definições[135] que foram atribuídas a Theon de Alexandria, também ocorrem em Pappus de forma clara e modificada, ou seja, no início do livro VII (Hultsch, II, P. 634, II ff.).[136] Nas *interpretações* de Euclides[137] mostra-se com referência ao

[132] O comentário da edição em Latim de Pappus apareceu em 1588-1589 (cf. Hultsch, I, p. Xvii); contudo, Vieta, sem dúvida, já tinha acesso aos manuscritos de Pappus antes desse período. Apollonius Gallus (isto é, Apollonius da *França*) também retrata uma 'restituição', ou seja, o trabalho (Sobre Tangentes) de Apollonius, o qual Pappus fala no mesmo livro VII (Hultsch, II, pp. 636, 21; 644, 23 ff.: 820-852). (Nota 214, página 259).

[133] Cf. Descartes, Regulae, Rule IV, Ad.-Tann, X, 376: 'De fato, certos traços desta *verdadeira Matemática* ainda me parece surgir em Pappus e Diophantus...'). (Nota 215, página 259).

[134] Proclus, em Euclides, 211, 19-22 (cf. Diogenes Laertius III, 24. (Nota 216, página 259).

[135] Nas explicações de Euclides XIII, 1-5 (Heiberg-menge, IV, 364 f.) podemos ler: 'Então, *análise* é considerar o que é procurado como se fosse conhecido e [passo a passo] tirar consequências a partir do que foi admitido como conhecido e, a seguir obter a verdade, enquanto a *síntese* considera algo admitido e [passo a passo] elabora consequências a partir desse algo para obter a verdade'. No século XVI uma maneira de pensar, que tinha na ocasião, sido expressa anteriormente (cf. Cantor, II², 102) era atual, no sentido de que a edição de Theon da Alexandria dos *elementos* de Euclides representou uma completa reformulação do texto original. Era ainda suposto que as provas foram completamente realizadas por Theon e não por Euclides. Xylander, Petrus Ramus (e seu círculo, cf, Cantor, II², 549) e Candalla (François de Foix-Candalle), o mais importante editor e revisor de Euclides da época e muitos outros (cf. Heiberg, *Studien über Euklid*, pp. 175 e 168) compartilhavam opiniões similares. Vieta se familiarizou com os dois últimos, bem como com Forcadel, Peletier, Gosselin, e provavelmente também com Bressieu, em Paris; cf. Ritter, Revue occidentale philosophique, Vol. X, p. 245; ademais C. Waddington, Ramus, *Sa vie, ses écrits et ses opinions* (Paris, 1885), pp. 109, 156, 353. Portanto, foi da época de Vieta *as interpretações* acima bem como a de Theon; veja também; além disso, em Nesselmann, *Algebra der Griechen*, p. 59; sobre a discussão moderna desta interpretação veja T. L. Heath, *O terceiro livro dos elementos de Euclides²* (Cambridge, 1926), I, 137 e III, 442. A preferência por Theon em relação a Euclides corresponde a tendência humanística geral para depreciar a autoridade dos escritores que foram reconhecidos como autoridades nas academias com o fundamento de conhecimento 'melhor' dos antigos. (Em relação a Theon, Johannus Buteo e caracteristicamente, Clavius forma uma exceção, cf. Cantor, II², 563 e 556). (Nota 217, página 259).

[136] Pappus disse: 'A análise é o *caminho* do que se está procurando, como se estivesse estabelecido, através de suas consequências em direção a algo que é estabelecido previamente pela síntese ... mas, na síntese, *ao contrário*, assumimos o que foi obtido por último na análise como já tendo sido estabelecido, e, colocando agora na ordem natural, como precedentes, o que

primeiro dos cinco teoremas do livro treze, como a 'síntese' resulta de cada caso da 'análise' *por meio de conversão* (tanto do processo da análise como a de síntese 'sem desenhar a figura' (Heiberg-menge, Pp. 366, 4; 368, 16). Pappus menciona o procedimento supracitado referindo-se ao tão chamado *Treasury of Analysis*, no qual enfatiza a relação de conversão. De acordo com a aplicação pode ser feito a 'análise' – quer seja para aplicar na descoberta da *prova de um teorema* ou na solução [Isto é construção] de *um problema.* Pappus distingue *dois tipos*, *duas genes* da análise: uma delas procura pela verdade [Isto é, zetetic, da busca] e é chamada de *teorética* e a outra serve para realizar o que era desejado de se fazer [isto é poristic, para fornecer] é chamada *problemática* (Hultsh, II, P. 634, 24 -26). Portanto, no primeiro caso a conversão da análise à síntese, representa uma *apodeixis* direta, enquanto no segundo caso (da síntese a análise) consiste em primeiro lugar de uma construção geométrica ou ocasionalmente um porisma (isto é, a produção ou descoberta de algo já implícito na figura (Hultsh, II, p. 650, 16 ff.) sobre o qual o então apodeixis segue.[138] No entanto, na elucidação da diferença entre análise 'teórica' e 'problemática', Pappus, chama síntese simplesmente de '*apodeixis*': 'e, ao contrário, a prova é o

---

antes seguia da suposição inicial; adequando-os uns aos outros atingimos uma construção completa do que era procurado. Isto é o que chamamos de síntese'. Sobre o conceito de (o procurado) e (o admitido) em Platão, Meno 79 D, onde eles já foram empregados com uma visão geral no contexto 'geométrico' do diálogo. A afirmação de que Platão foi o descobridor do método 'analítico' perde sua estranheza quando compreendido no contexto original das características da Filosofia platônica referente ao ensino e aprendizagem. O jogo Socrático de perguntas e respostas nos diálogos platônicos encontram-se certo contraste com o método 'matemático' que começa com definições, axiomas e postulados. A pureza do procedimento sintético matemático não é encontrada em sua dialética (cf. Theaetetus 196 E: 'já há um bom tempo nossa discussão tem sido continuamente *manchada* pela falta de clareza'; cf. também *Meno* 75 C-D). A dialética começa com 'opiniões' que pressupõe o que é 'procurado' como 'conhecido', a fim de chegar por meios de refutações àquelas opiniões como 'opiniões falsas' ou 'opiniões corretas' que estão adormecidos na alma que deve, uma vez que é encontrado, ser fixado por meio de uma exata *explicação da razão pela qual* o torna *conhecido* (cf. *Meno*, 98 A). No curso dessa *maneira de buscar a verdade* – a maneira verdadeiramente Socrática de 'reminiscência' que é o mesmo assunto de *Meno* – o termo que *designa* o desconhecido ou a coisa procurada é, portanto, sempre usado como se a coisa designada já fosse conhecida e admitida. Isto é precisamente a raiz da potência 'analítica' dos diálogos Socráticos (Theaetetus, 196 E-197 A: 'Thea.: mas como discutiremos, Sócrates, se nos abstermos dessas palavras [isto é palavras que designam coisas procuradas]? Sócrates.: 'seria inteiramente impossível para um homem como eu'; cf. *Meno* 98 B). Cf. também Tannery, La géométrie grecque, pp. 112 f., que trata do método analítico, referindo-se ao livro VI da República. A ascensão da dialética para o que (não suposto) deve ser caracterizado como 'analítica' no sentido estabelecidos aqui, embora os últimos passos conduziriam além do reino do *logos*. [Cf. J. Klein, A commentary on Plat's Meno (Chapel Hill, 1965), pp. 83 f., 120 ff., 158 ff.] (Nota 218, página 260).

[137] Idem nota 217 da página 259.

[138] Cf. Tannery, *Mém. Scient*. III, 162 f.; Hankel, *Zur Geshicgte der Mathematik* …, p. 144. (Nota 219, página 261).

inverso da análise'. E*m Diophantus,* e, isto foi claramente crucial para terminologia de Vieta, a conversão de cada solução, ou seja, a 'prova teste' a que se destina é mostrar que os números encontrados, de fato satisfazem as condições do problema e esse processo é chamado de *apodeixis. A*s palavras 'e a provas são claras', isto é, uma forma de conclusão de toda uma série de seus problemas (cf. segundo volume da edição de Tannery, veja o índice).[139] Por outro lado, devemos recordar que isto é, acima de tudo, particularmente característica do procedimento de Diophantus que opera com *quasetium (adquirido)*, ou seja, com número procurado em cada caso, *como algo já dado* ou conhecido. Construir uma equação significa nada mais do que colocar as condições de um problema numa forma em que nos capacita ignorar se as magnitudes são 'conhecidas' ou 'desconhecidas'. As consequências estabelecidas de tais equações, ou seja, do passo a passo da transformação para a forma canônica[140] (sua forma padrão, como diríamos), finalmente conduz, por meio de calculações, descobrir o número procurado, isto é, o 'verdadeiro' número será 'concedido' apenas no final. No caso de um número 'impossível' resultante no final da computação, o problema em si é considerado como tendo sido mal representado, ou seja, impossível como Pappus disse: 'se concordamos com a impossibilidade [com a solução], o problema também será impossível' (Hultsch, P. 636, 13f.). Nesse caso é necessária uma condição de possibilidade ou nas palavras de Pappus (636, 15, f.), uma 'condição adicional, para quando e como e em quantas maneiras o problema seria possível'; Diophantus chama essa condição de *prosdiorismos.*[141]

O ponto de partida da 'renovação' de Vieta é o seguinte: Ele reúne esses fatos que são apresentados por Pappus apenas em referência aos teoremas *geométricos* e problemas (tais como são encontrados em Euclides, Apollonius e

---

[139] Ammonius, *Commentaria in Artistotelis Analyticorum Priorum* (Ed. M. Wallies; Berlin, 1889), I, Proemium, 5, 27-31, cita a definição de *análise* de Geminus – '*análise* é descoberta da *demonstração*'. Marinus, também repete essa definição (In Euclid. Data, Heiberg-Menge, VI, 252-254, impresso na edição de Pappus de Hultsch, III, p. 1275). Aqui, lemos também: 'a maior coisa que possui a analítica é o poder que ela tem de ter muitas demonstrações referentes a particulares' Cf. Heron, *Métrics* (Schöne), p. 16, 12-14: faremos nossas medições por meio da *síntese* dos números [que segue] logo após da *análise*' (cf. Tannery, *Mem. Scient*. III, 146 f.) (Nota 220, página 261).

[140] A expressão 'canônica' da equação é de origem recente; seu autor é Th. Harriot; cf. Cantor, II², 791) e também em Vieta, *Isagoge*, V, 12 que usou a expressão 'ordinata' (ordered). (Nota 221, página 261).

[141] A propósito, em Vieta o termo judicial 'cautio' (segurança) é usado. (Nota 222, página 261).

Aristaeus) com os procedimentos da *Aritmética* de Diophantus. *Na base da exposição de Pappus, Vieta chama esse procedimento de 'análise*' ou '*arte analítica*'. Ele está completamente ciente do caráter puramente geométrico da análise desejada por Pappus. Na *Appendicula* I de *Apollonius Gallus* (ed. Van Schooten, pp. 339 ff.), há determinados problemas que comparados com aqueles que Regiomontanus[142] poderia resolver 'algebricamente, como ele disse' (algébrico, como se fala), mas não geometricamente fornecendo sua construção geométrica, e, nota por meio de uma introdução que estas construções geométricas *também* são importantes: 'Mas, a Álgebra, como Theon de Alexandria, Apollonius, Pappus e outros analistas antigos trataram, é *geralmente geométrico* e sempre exibe magnitudes que são procurados seja como *um objeto* [isto é uma construção visível] ou como *um número* ou então ele será um problema 'irracional ou absurdo' [que aqui simplesmente significa 'impossível'[143]]. Ele é da opinião de que a insuficiência *geométrica* de Regiomontanus é neste caso devido ao fato de que ele não conhece a genuína 'Álgebra'. Adrianus Romanus (1561-1615) no final de seu trabalho propôs como resposta ao problema de construção a todos os Matemáticos de todo o mundo em 1595 um problema que ele pega do livro VII de Pappus e resolve-o com o nome de 'Apollonius Gallus' acrescentando na conclusão: 'Os problemas que Regiomontanus resolveu algebricamente, ele confessa, que alguns não poderiam ser construídos *geometricamente*. Pois, a *Álgebra* que *estava* sendo *praticada até aquele momento era impura.* Amigos do conhecimento abrace a *nova Á*lgebra; dê adeus aos métodos antigos e olhe para o lado legítimo e bom da nova Álgebra – van Schooten, p. 324)'. Esta 'nova' e purificada Álgebra, que é representada pela 'Arte Analítica', é para Vieta tanto 'geométrica' como 'Aritmética'. Portanto, ele conjectura que um procedimento generalizado não está confinado a figuras e números, não está apenas oculto sob a Análise geométrica dos antigos, mas

[142] De triangulis omnimodis libri quinque (1553). Este problema, até hoje, não admite solução de maneira geométrica, mas podemos tentar alcançá-lo por meio da Arte da coisa [isto é, o desconhecido] e sua força. (Nota 223, página 261).

[143] Neste uso lingüístico do primeiro capítulo de *Variorum de rebus mathematicis responsorum, líber octavu*s, onde Vieta, amparado em Plutarch, Life of Marcellus, capítulo 14, chama o tradicional problema de construção de dois meios proporcionais, isto é, a duplicação do cubo, um problema (irracional) e também (inexprimível) – 'não porque ele não pode ser explicitado em números, como as linhas são chamadas irracionais, mas porque sua estrutura não é elaborada por uma razão e sim por um instrumento'. (Nota 224, página 262).

também, como veremos subtendido na *Aritmética* de Diophantus – embora para Vieta o principal objetivo deste procedimento é de fato para descobrir construções geométricas e números; no último caso, isso significa descobrir 'possíveis' números, ou seja, de acordo com a passagem de *Apollonius Gallus*, tais números tem uma interpretação geométrica direta.

A concepção de Vieta de uma Álgebra '*geral* pura' que poderia ser aplicada igualmente a magnitudes geométricas e numéricas aparece de forma incompleta na *teoria geral das proporções* de Eudoxus, como já foi apresentado no livro V de Euclides. Aristóteles já tinha usado a teoria das proporções Eudoxiana, juntamente com as 'noções comuns', como exemplo clássico de uma disciplina que tem um 'objeto geral' que não está vinculado a um reino específico de objetos: 'Dentre as [Ciências] Matemáticas ... a Geometria e Astronomia lidam com determinado tipo de natureza, enquanto na Ciência em geral, é comum lidar sobre todas as coisas' (Metaphysics E I, 1206 em 25-27). Na *Posterior Analytics*: 'Exatamente como costumava ser usado para provar separadamente que numa proporção os termos podem ser alternados [cf. Euclides V, Def. 12 e Prop. 16] na medida em que trata-se de uma proporção de números, linhas, sólidos e tempo [o último se refere a astronomia de acordo com a Metaphysics (M 2, 1077 em 1-4; 12), *de modo que agora pode ser mostrado para todos numa demonstração, pois,* todos os objetos, isto é, números, comprimentos, tempo e sólido são considerados separadamente e não tem qualquer nome, diferindo um do outro em espécie, mas *agora* [usando o modelo de Eudoxus] está provado genericamente (A 5, 74 em 17-25). Proclus, da mesma maneira (Euclides, p. 7 ff.; 18 ff.), fala de 'uma Ciência' que reúne todo conhecimento matemático em um, e de seus 'teoremas comuns' que pode, na verdade, ser estudado em 'números, magnitudes e movimentos', mas que não são idênticos nem com a Geometria, nem com a Aritmética e nem mesmo com os teoremas da astronomia. Esta Ciência, diz respeito, acima de tudo, aos teoremas das teorias das razões e proporções (cf. Euclides V, Def. 14,15,16,12, Prop. 17, 18, e os corolários de 19 até 16; e Nicomachus I, 17-II, 4; II, 21-29): 'os [teoremas] *sobre proporções*, suas composições e divisões, suas conversões e alternâncias sobre todas as razões como suas multiplicidades, seus superpartients (um termo excede o outro em pelo menos uma unidade, por exemplo 5:3. Grifo nosso) e seus contrários, ou seja, os

teoremas são comumente estabelecidos e tem em comum características de igual e desigual simplesmente' (Proclus, em Euclides, 7, 22-27). Os teoremas para Proclus significa que não estão anexados a 'figuras, números, ou movimentos [de corpos celestes]', mas 'uma determinada natureza comum' é capturada 'por si mesma', como tal. Nessa conexão Proclus também menciona o procedimento de 'Análise' e 'Síntese' que *é comum a toda disciplina Matemática*: 'o caminho das coisas se conhece melhor, partindo da coisa procurada e o inverso [do processo, de forma a ir] do último para o primeiro, que eles chamam de análise e síntese' (8, 5-8). Com esta tradição em mente Vieta afirma (na conclusão do segundo capítulo de *Isagoge*) que toda 'equação' é uma 'solução de uma *proporção*' e correspondentemente toda proporção é a 'construção de uma equação'. Portanto, ele sempre fala de 'equações e proporções juntos, por exemplo, no final do capítulo II está dito: 'Uma proporção pode ser chamada de construção de uma equação, e uma equação é a solução de uma proporção', ou seja, Álgebra 'pura' é para ele não somente uma 'teoria geral de equações', mas ao mesmo tempo, uma 'teoria geral de proporções'.[144] Isto é o porquê ele funde algumas 'noções

[144] Gosselin em seu trabalho de Álgebra já acrescenta a 'Álgebra' à divisão da Matemática em Geometria e astronomia, aritmética e música dos antigos pitagóricos, atribuindo-lhe, juntamente com a 'música', o reino das quantidades relacionais: 'os aritméticos considera os números *em si mesmo*, os musicistas e os *algebristas* de fato conhecem números, mas em suas relações *com alguma coisa'.* Isto é por assim dizer a primeira introdução 'oficial' da Álgebra no sistema da Ciência reconhecida pela academia. Até que ponto a 'Arte da coisa e sua força, isto é, o desconhecido e o seu quadrado' foram mais ou menos obscuros. Foram ainda considerados adequados exibir para o público na forma de competições, e, isso despertou admiração das pessoas que fizeram truques acrobáticos ou magias: Portanto, em 1548 realizou-se em Milão um turbulento concurso público entre Tartaglia e Ferrari, aluno de Cardano (cf. Cantor, II², 494), que tratavam de soluções de equações cúbicas. Esta tradição de competições continuou ainda com Vieta e Romanus, e mesmo por Descartes e Stampion, embora não sendo mais na forma de exibições públicas (conforme Descartes, *Oeuvres*, Adam –Tannery, XII, 272 ff). No começo do século XVII, a Álgebra era quase uma 'iluminação' e a predileção da alta sociedade; cf. G. Cohen*, Écrivains français en Hollande dans La première moitié Du XVIIe siècle* (Paris, 1920) p. 378. Foi acima de tudo graças a Petrus Ramus, que pertenceu ao ciclo de Gosselin, para o qual a Álgebra era admitida no reino oficial da Ciência; de fato, Ramus defendeu a Matemática como o *modelo* de Ciência, embora ele não tivesse muita compreensão disso. Em particular ele foi o fundador da cadeira de Matemática no Collège Royal, que mais tarde foi ocupado por Roberval (de 1634 até 1675; cf. Waddington, Ramus ..., pp. 188 e 326 ff.: também na p. 108 ff.). O próprio Ramus, a propósito publicou um texto sobre Álgebra em 1560 (anonimamente em Paris, por meio de Andr. Wéchel), que foi republicado em 1586 por Lazarus Schoner e foi reimpresso várias vezes.
No trabalho mencionado anteriormente, Gosselin disse (p. 3) 'todo objeto da Ciência Álgebra é composto de *proporções*', e surpreendentemente vejo os fundamentos dessa Ciência em Euclides IX, 8. Gosselin foi tradutor do Francês de Tartaglia (*L'aritmetique de Nicolas Tartaglia Brescian, grand mathematcien, et Prince des praticiens etc.*, 1. ed. 1578, 2ed. 1613). Portanto, foi o maior contribuídor para dispersar a técnica Algébrica, cf. H. Bosmans, '*Le De Arte magna*' de Guillaume Gosselin', Bibl. Math. 3d series, Vol. VII, pp. 44-66. Na definição de 'equação' de Vieta em

comuns' enumeradas no livro I dos elementos de Euclides com algumas definições e teoremas 'generalizado' no livro V com os livros II e VI de Geometria e os livros VII e VIII de Aritmética para conceber e 'dispor suas equações e proporções' (Capítulo II)[145], que estão para servir como fundamentos gerais e firmes 'por meio do qual as equações e proporções são obtidas como conclusões' – Capítulo I.[146]

De fato, Vieta prova para si mesmo que é fiel preservador e interprete da doutrina tradicional. Mas, a diferença crucial no que diz respeito ao 'tratamento geral' antigo aparece na concepção que Vieta tem de *objeto*, embora aqui também ele refira diretamente aos aspectos tradicionais. Seus pontos de vista são: (1) sugerido pela comparação que pode ser traçado entre o papel da

---

Isagoge, Chap. VIII, 2: 'Uma equação é uma comparação de uma magnitude desconhecida com uma magnitude determinada'. (Nota 225, página 262).

[145] Symb. 2= Noção comum I do livro I de Euclides. Symb. 3= Noção comum II do livro I de Euclides. Symb. 4= Noção comum 3, do livro I de Euclides. Symb. 7= Definição 12 e 13 da proposição 16 do livro V de Euclides. Symb. 10=Livro VI de Euclides, 23; VIII, 5. Symb. 13=Livro II de Euclides, I. Symb. 15 e Symb. 16= Livro VI de Euclides, 16 e 17; VII, 19 (significativamente não o livro V!). Symb. 5 é prefigurada nas noções comuns 5 do livro I de Euclides. Symb. 6 é prefigurada nas noções comuns 6 do livro I de Euclides. Symb. 8 é prefigurada em Euclides, livroV, 12. Symb. 9 é prefigurada em Euclides, livro V, 19. Symb. 12 é prefigurada em Euclides, livro VII, 17. Symb. 14 é prefigurada em Euclides, livro VII, 16. Symbol I: 'o todo é igual a soma das partes' é muito citada da edição de Euclides de Clavius como axioma XIX (edição de 1589, Vol. I, p. 72). Symbol II é o inverso do symbol 10. A enumeração do Capítulo II é introduzida pela seguinte sentença: 'A Arte analítica assume como demonstrado às estipulações mais conhecidas que regem as equações e proporções fundamentado nos *Elementos*, que são rudemente estes ...'. No capítulo I é dito que o *symbola* são 'derivados tanto das noções comuns como dos teoremas fornecidos pela força da própria análise'.

Por um 'symbolum', isto é, uma estipulação, Vieta compreende como 'estipulação contratual' que corresponde ao conceito judicioso do *symbolon* Grego. Talvez a influência do uso teológico tenha desempenhado um papel importante. (Nota 226, página 263).

[146] A importância do conceito da teoria das proporções na origem da Ciência moderna não pode ser exagerada. Visto que há em Thomas Bradwardine (primeira metade do século XIV) e Albert de Saxony (segunda metade do século XIV) uma tradição acadêmica fixa relativa a estes assuntos, que, através da mediação de intelectuais tão diferentes como Nicolaus de Cusa e Luca Pacioli, exerceu influências cruciais na Ciência dos séculos XVI e XVII. Esta influência teve duas tendências que tem uma origem comum, que se funde novamente; uma dessas tendências lida com o atual estudo e a tentativa de mostrar a importância da Álgebra, a outra lida com os fundamentos da *física* e *astronomia* moderna. Galileu em sua teoria do movimento, bem como Kepler em suas investigações astronômicas, estão – embora isto seja geralmente negligenciado – em busca de determinadas 'proporções'. O trabalho de Kepler sob influência da Ciência antiga, especialmente dos platônicos *Timaeus* e de Proclus, enquanto por outro lado, Galileu é estimulado em seus estudos da física Matemática por disciplinas práticas de Estática, Mecânica, Hidráulica, Arquitetura militar etc., e por meio do trabalho de Euclides e Arquimedes; ainda ambas as tendências continuam a tradição pitagórica-platônica, embora, em diferentes aspectos e com tendências divergentes. Para eles, como para Descartes (*Principia*, III, 47), a principal orientação de suas investigações é o significado das palavras 'proportio vel ordo' (proporção e ordem), apesar do significado dessas palavras usado por eles representarem uma maior transformação do significado correspondente as palavras *analogia* e *taxis* grega. (Nota 227, página 264).

‘Análise’ na Geometria por um lado e na *Aritmética* de Diophantus por outro lado, (2) mais fortemente apoiado pelo uso do conceito de *eidos* em Diophantus, (3) extensivamente influenciado pela posição de Proclus sobre a teoria geral das proporções. Pode ser perfeitamente compreendido somente sob a reinterpretação fundamental que o modo antigo de intencionalidade vivencia na Matemática moderna e que alcança sua característica mais expressiva na transformação da compreensão do conceito de ‘*arithmos*’.

Parte C – A reinterpretação do procedimento de Diophantus por Vieta

1 – Os procedimentos ‘da forma indeterminada’ como uma analogia à análise geométrica

Para a Ciência antiga, a existência de um ‘objeto geral’ não significa uma simples consequência da existência de uma ‘teoria geral’. Aristóteles disse: ‘A proporção geral em Matemática [ou seja, os ‘axiomas’, isto é, as ‘noções comuns’,[147] e todos os teoremas da teoria das proporções Eudoxiana] *não são sobre coisas separadas* que existe *fora e ao lado* das magnitudes [Geometria] e dos números, pois são exatamente estes que são suscetíveis de ter uma magnitude ou de ser divisível [em unidades discretas]’ (*Methaphysics* M 3. 1077 b 17-20). Não pode haver objeto matemático específico que seja ‘nem um número [determinado] de [mônadas] nem pontos [indivisíveis geométricos], nem uma magnitude [geométricas arbitrariamente indivisíveis] nem um [determinado período de] tempo’ (*Methaphysics* M 2, 1077 a 12). Além do mais, isto não é algum dogma aristotélico especial, mas sim uma premissa *geral concedida* no argumento Aristotélico: ‘se, isto é, [concedida a ser] impossível ...’ (1077 a 12 f.; veja também em Posterior Analytics A 24, 85 e 31-b 3). Do mesmo modo a tradição platônica, como se fez ouvir pela última vez em Proclus, não designa objeto especial no ‘estudo geral’ da *Matemática*. Seguramente isso pode ser visto como uma tentativa de compreender a possibilidade de qualquer ‘razão’, ‘proporção’ ou ‘harmonia’ como estando na base da ‘propriedade comum’ de um

[147] Cf. Methaphysics K 4, 1061 b 17 ff. e Posterior Analytics A 10, 76 a 41; b 14 e 20 f. (Nota 228, página 264).

tipo primordial. Porém, logo que essa tentativa é realizada no reino da Matemática, ela será superada. Esta mesma concepção fundamental dos objetos da Matemática certamente adquire em Diophantus, isto é, na medida em que nos seus problemas e soluções, ele admite somente números *determinados* de mônadas. Mas, é precisamente por conta disso que o relacionamento entre Análise e Síntese, que é tradicional na Geometria, passa por uma mudança significativa na *Aritmética* de Diophantus. Na solução dos problemas *geométricos* são requeridas formas *construtivas,* que são a *primeira parte da síntese*; o apodeixis que segue utiliza relações entre magnitudes 'dadas', relações que são em si 'dadas' *no início* juntamente com aquelas trazidas à luz pela construção para provar que esta construção satisfaz as condições do problema. Nos problemas '*Aritméticos*' de Diophantus, *o último passo da Análise*, ou seja, a calculação final que produz o número procurado é *ao mesmo tempo o primeiro passo da Síntese* – a *computação* final realmente corresponde a 'construção geométrica'. Portanto, a conversão do processo de solução em Diophantus, corresponde somente a segunda parte da Síntese 'problemática' na Geometria.[148] A maneira 'Analítica' de encontrar soluções em Diophantus e a Análise geométrica são compreendidas como procedimentos completamente paralelos, como Vieta de fato compreende, então uma linha nítida deve ser traçada entre as *transformações* de equações e a *computação* dos números procurados com o que Diophantus geralmente esboça. Em outras palavras, a calculação final '*do indeterminado*' (a solução), *que o próprio Diophantus utiliza apenas como procedimento auxiliar deve ser compreendido como análogo à Análise geométric**a***. Nas soluções 'indeterminadas' são permitidos uma multiplicidade arbitrária de soluções 'determinadas' baseada nos números assumidos a vontade. Para Diophantus há somente possibilidades limitadas no uso deste procedimento, porque ele ainda associa com suposições de *números* determinados. Aqui a comparação com Análise *geométrica* faz Vieta ir além de Diophantus.

[148] A este respeito, os 'problemas' aritméticos de Diophantus estão próximos dos teoremas 'geométricos' ao invés dos problemas 'geométricos'. A *apodeixis* sintética, isto é, o 'teste', é aqui simplesmente o inverso da *apodeixis* Analítica. De qualquer maneira, aqui também o bakground geométrico (Euclidiano) da terminologia em Diophantus deve ser notado. (Nota 229, página 264).

2- A generalização do conceito de Eidos e sua transformação no conceito ‘simbólico’ de e*spécies*

Quando Hankel (1839-1873) (*Zur Geschichte der Mathematik*..., p. 148) reclama da ‘peculiaridade étnica grega’ que carrega para baixo cada solução Analítica em Geometria com o ‘lastro inútil’ de ‘uma síntese completamente trabalhados, que diz tudo outra vez em ordem inversa’, ele perde a diferença essencial entre Análise e Síntese. A Análise meramente mostra a *possibilidade* de uma prova ou uma construção. Um teorema pode ser ‘provado’ somente quando os fatos em questão tenham sido *efetivamente* derivados das magnitudes ‘dadas’. A construção de uma determinada figura por determinadas condições definidas ocorre somente quando essa figura foi realmente traçada usando as magnitudes ‘dadas’ com *exatamente estas determinadas dimensões*. Os ‘dados’ que a Análise utilizam deveriam ser compreendidos somente como ‘dados possíveis’. Portanto, enquanto a Análise está imediatamente preocupada com a generalidade do procedimento, a Síntese está, em conformidade com a concepção fundamental grega dos objetos matemáticos, obrigado a ‘realizar’ este procedimento geral em um *objeto determinado inequívoco*. Estes ‘dados possíveis’ aparecem na Análise geométrica no fato de que a construção, que é considerada como já efetivada, não precise usar as magnitudes ‘dadas’ de forma determinada e inequívoca, mas somente tendo o caráter de um ‘dado’ ser (cf. Aristóteles, *De Memoria* 450 a 1 ff.). Como pode essa situação ser transferida para Análise ‘Aritmética’? Claramente, dessa maneira – que os números ‘dados’ em problema também são considerados somente em seu caráter de um dado ser e não apenas como estes números determinados. Em outras palavras, para assimilar a Aritmética como Análise geométrica completamente, os números ‘dados’ devem da mesma maneira ser permitido numa certa indeterminação que deve, de fato, ser limitado somente pela ‘condição de possibilidade’ do problema. Por isso, uma solução ‘na forma indeterminada’ seria possível para todos os casos, e, três estágios sempre poderiam ser distinguidos no processo de solução: (1) a construção da equação, (2) a transformação para o qual o problema é submetido até ter adquirido uma forma canônica que imediatamente fornece a solução ‘indeterminada’ e (3) a

exploração numérica do último valor encontrado, isto é, a computação da determinação inequívoca dos números que cumprem as condições estabelecidas pelo problema. Aqui, apenas os dois primeiros estágios representam propriamente o procedimento 'analítico'. O último estágio realmente já pertence a Síntese, visto que corresponde a 'construção' geométrica. Mas, como é possível permitir que 'dados' e, portanto, números determinados desempenham uma parte indeterminada? Neste ponto, o modelo de Diophantus pode ser direcionado a representar exatamente número desconhecido – embora seja em si, também, determinado pelo seu *eidos*, sua '*espécie*', que deixa a questão do 'quantos' provisoriamente indeterminado, logo, *cada número pode ser expresso pela sua 'espécie'.* Então, a *eide* do desconhecido e sua potência aparece em Diophantus como nova unidade de calculação, enquanto a computação toma lugar em termos de números determinados, a calculação que é realizada exclusivamente com números, 'espécie', deveria ser inteiramente deslocada para o domínio do 'indeterminado'. Este último passo crucial é também considerado por Vieta. Ele toma consciência e confirma uma longa prática usada entre os antigos (encontrada especialmente em Diophantus), embora não suficientemente clarificada por eles. No decorrer do entendimento deste último passo ele é forçado a reinterpretar pontos essenciais da Antiguidade.

Tendo estabelecido a Análise geométrica como paralelo aos procedimentos Diophantino, como foi mostrado, Vieta chega na concepção de um modelo de calculação que é realizado completamente em termos de 'espécies' de números e chama-o de '*Logística especiosa*' (em contraste com a calculação com números determinados, que é a 'Logística numerosa'; cf. Início de *Isagoge*, Chap. IV).[149] Consequentemente a 'Logística especiosa' está originalmente muito próxima e conectada com os procedimentos de Diophantus, que, por sua vez torna a 'Aritmética' análoga a Análise geométrica. Porém, ao mesmo tempo – e, isto é, o sintoma significante na formação de conceito da Matemática moderna – Vieta dedica a '*L*ogística especiosa' a serviço da álgebra '*pura*' e a compreende como a arte 'analítica' mais compreensível possível, aplicada indiferentemente a números

[149] Em Vieta, o termo 'logistice' significa 'Arte de calculação', ou seja, a Arte 'teórica' de calculação, sem referir a 'relações' particulares de um número com outro. De qualquer forma, este termo é perfeito, se o desvio, descreve o caráter 'logístico' da *Aritmética* de Diophantus. (Nota 230, página 265).

e magnitudes geométricas. No decorrer disso, o conceito de *eidos* e o conceito de 'espécies' são *submetidos a uma universalização extensiva preservando seu vínculo com o reino dos números. Em função deste procedimento geral, a espécie* ou como Vieta também disse, a 'forma das coisas' [150] representa simplesmente a magnitude 'geral'.

Vieta assume que a nova organização da arte 'analítica' foi influenciada pela extensão do conceito de *eidos* de Diophantus.[151] Para os dois tipos de Análise mencionado por Pappus, o 'teórico' e o 'problemático', Vieta acrescenta um terceiro tipo de análise, que ele chama de *rhetic*, isto é, 'produzir' ou algumas vezes 'exegética', isto é, 'exibir'. Para o primeiro dois primeiros tipos, Vieta de maneira significativa toma emprestado do texto de Pappus, não as expressões 'teórica' e 'problemática' e sim *zetic*, isto é a 'busca [da verdade] ' e poristic, isto é 'produzir [o teorema proposto].' Enquanto para Pappus a diferença entre Análise teórica e problemática é uma diferença de tipo de objeto apresentado num teorema e num problema, Vieta distingue apenas superficialmente a diferença entre Análise 'zetética' e porística', porque Vieta concentra-se suas reflexões nos procedimentos e não na diferença entre 'teoremas e 'problemas', ou mais exatamente *ele vê todos os teoremas como problemas*. Ele está menos interessado nas 'verdades' em si que podem ser encontrados e sim preocupado em encontrar o procedimento correto de descobrir as coisas. Isto é, também a origem de sua definição geral da 'arte analítica' como a 'teoria para descobrir [o que é procurado] em Matemática [em geral].' Na 'Zetética' e na 'porística', Vieta explicitamente observa que se destinam às definições de Theon de Alexandria de Análise – ambos representam aqueles dois primeiros estágios propriamente

[150] Xylander traduziu *eidos* algumas vezes como 'espécies' e algumas vezes como 'forma'. (Nota 231, página 265)

[151] Embora o proposto pelos antigos tratasse de uma dupla análise, ou seja, a Arte da 'busca' [zetetic] e a 'prova' [poristic], *para pertencer principalmente às definições de Theon*, porém acrescento um terceiro tipo de Análise, que é chamado de Arte de 'produzir e exibir' [*rhetic* ou *exegetic*]: é adequado que poderia ser [1] uma Arte zetética, pelo qual se transforma um problema numa equação ou proporção, ligando grandezas desconhecidas com grandezas conhecidas, [2] uma Arte porística que é um processo a partir da equação ou proporção e consequentemente o teorema estabelecido é examinada se é verdadeiro ou não, e [3] uma Arte exegética, é um método a partir do qual a grandeza procurada é determinada a partir de uma equação ou proporção estabelecida, ou seja, a procura da magnitude que *é em si o ser procurado*. Essas três partes da Arte Analítica têm como função e pode ser definida como a disciplina que procura a verdade em Matemática. (Nota 232, página 265).

analítico do processo de solução mencionado anteriormente. A 'Zetética' é definida por Vieta como o procedimento 'por meio do qual a equação ou a proporção é encontrada, que é para ser construída com ajuda das magnitudes dadas, tendo em vista a magnitude procurada'. A porística é definida como o procedimento 'por meio do qual, mediante a equação ou proporção, a verdade do teorema estabelecido e investigado.'[152] Em ambos os casos a 'magnitude' é tratada num sentido mais geral. O novo tipo de Análise introduzido por Vieta é

[152] O que esta definição pretende dizer pode ser visto, a partir de uma pequena parte do capítulo VI: Sobre as investigações do teorema pela Arte porística, que lidam mais com a 'síntese' e sua relação com a 'análise' do que com a 'porística'. De acordo com a 'via Porística', deve ser tomado quando um problema é dado e que não se encaixe imediatamente num contexto sistemático, isto é, que ocorre por mudança ou incidentalmente. Mas, algo *não familiar* é *descoberto* ou alguma *mudança é encontrada*, porém é a verdade que deve ser ponderada e investigada sendo proposto pela prova, então a maneira porística deve ser primeiramente tentada. Exemplo disso foi dado por Theon em vários livros dos *elementos* (por meio do qual Vieta interpreta Euclides XIII, 1-5, onde análise e síntese são definidas) e nas cônicas de Apollonius e por Archimedes. Claramente Vieta está aqui pensando no significado do termo *porisma* como 'corolário'. Cf. Proclus, em Euclides, Friedlein, p. 212, 12-17: 'Nós referimos especificamente a um porisma quando temos uma conseqüência de coisas demonstradas e que aparece outros teoremas que não foram enunciadas e que por causa disso eles chamam 'porisma' [isto é um proveito obtido] como sendo *um ganho* que é um sub-produto da demonstração científica'.

Vieta parece ter composto um trabalho 'porístico' paralelo a sua 'zetética' (*Zeteticorum libri quinque*, 1593). No quinto capítulo de seu *Variorum de rebus mathematicis responsorum, líber octavus*, contendo várias respostas de problemas matemáticos, ele trata do tradicional problema de duplicação do cubo, isto é, a construção de dois meios proporcionais de maneira sintética, referindo ao '*ex Poristicis methodus*' que ele tinha apresentado no *Supplementum Geometriae*. (Ambos destes livros apareceram também em 1593). No *Supplementum Geometriae* o problema é de fato resolvido de 'maneira analítica' (com a ajuda do neusis (método antigo de construção geométrica – grifo nosso) antiga, isto é, '*verging*', procedimento, ou seja, como conseqüência da proposição VII). Na proposição VI, Vieta usa lemas do qual ele disse que foram provados na 'Porística'. Este trabalho não foi preservado. Talvez pertença aos conteúdos de outros sete livros de 'várias respostas', que no *Isagoge*, Vieta atribui a *Opus of the restored mathematical Analysis*, obra essa que Marino Ghetaldi diz ter em sua posse (Ritter, *Revue occidentale philosophique* ..., X, p. 408).

Ramus está preocupado tanto com a equação como com o problema e, por isso, foi seu defensor vigoroso. No terceiro livro de seu trabalho muito lido intitulado *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta* (1569), disse em referência as relevantes definições de Proclus: 'toda diferença entre problemas e teoremas pertence à escola e, é fictício, mas não matemático'. Em outra passagem ele disse que essa diferença é 'vazia e claramente sofista' – citação da edição de L. Schoner [Frankfurt, 1599], pp. 86; 84. A polêmica proposta de Ramus é para 'popularizar' a Matemática removendo todas as 'obscuridades' e distinções supérfluas; todo o livro X de Euclides torna-se vítima dessa tendência. Ramus, que de acordo com testemunha de seu contemporâneo Estienne Pasquier foi 'Uma pessoa que tinha grande interesse em novidades' (Waddington, *Ramus* ... p. 13), é um daqueles homens que pode-se dizer que teve posição autoritária 'inventiva' na Ciência da segunda metade do século XVI. Ramus designa o primeiro e mais importante de duas partes da 'dialética', que para ele toma o lugar da lógica e que ele compreende como 'dialética' ou 'lógica natural'; cf. *Dialecticae institutiones* (1575, reimpresso da primeira edição de 1543), pp. 1 ff. e 100; veja também Waddinghton, Ramus ..., pp. 376 ff. A ambiguidade do termo '*inventio*', que significa 'descoberta' e 'invenção', não deve ser negligenciado; cf., por exemplo, a carta de Johannes Sturm para Heinrich Schor, impresso no início da *Commrntarius doctissimus in Dialecticam Petri Rami* por Rudolph Snell (1595): 'se as mesmas coisas forem sempre para ser pensadas e ditas – *seria proibido de chegar a algo novo*. Aqui Sturm explicitamente inclui os matemáticos entre aqueles a quem ele recorre. (Nota 233, página 265).

definido como um procedimento ‘por meio do qual a magnitude procurada é *em si* produzida fora da equação ou proporção estabelecida [na forma canônica].’ Esta magnitude requerida ‘em si’ não é um número determinado, e, portanto comunicável apenas na linguagem e nem uma magnitude geométrica *visível.* Aqui surge o duplo nome do terceiro tipo de análise cujo objetivo é o efeito da *computação* na ‘Aritmética’, bem como a construção das magnitudes ‘geométricas’ começando a partir das equações ordenadas canonicamente; esse processo é chamado de *rhetic* que diz respeito a números com o qual se está tratando e que pode ser expresso e denominado por número ordinário de nossa *linguagem*; agora exegética diz respeito a magnitudes geométricas que torna diretamente disponíveis à *vista*.[153]

A ‘Rhetic’ ou ‘exegética’ representa o terceiro (e final) estágio na solução de uma equação, que já é realmente uma parte da Síntese e, que é, não obstante compreendida por Vieta como um procedimento analítico.[154] No último estágio da

---

[153] Cf. Capítulo VII: (‘Sobre as funções da Arte *rhetic*’): Quando a equação da magnitude procurada tiver sido definida [na forma canônica], a Arte *rhetic* ou exegética exerce sua função – sobre números, se a procura é por uma magnitude expressível *em números*, bem como comprimentos, planos ou sólidos se a *coisa em si* puder ser mostrada conforme a citação de Apollonius Gallus. Porém, ambas as designações foram usadas por Vieta indiscriminadamente; dessa forma no capítulo VIII, 23, ele explicitamente fala de ‘Exegética em Aritmética’ e chama o trabalho correspondente ‘*Sobre Resoluções Numéricas de Potências*’ [isto é, do desconhecido] em relação a E*xegética*. (Nota 234, página 267).

[154] A ‘Síntese’ em Vieta geralmente toma o segundo lugar da ‘análise’, embora nos problemas geométricos ele frequentemente usa-os e reconhece sua prioridade tradicional. No sexto capítulo de *Isagoge* ele diz expressamente que o resultado da análise tem que ser trazido ‘sob a ordem da arte’ em conformidade com as ‘leis’ (isto é, na linguagem acadêmica: pressupondo ‘cada instância de seu sujeito’, ‘essencialmente’, ‘comensuravelmente com o universal’). Estas formulações que voltam a Aristóteles (*Posterior Analytcs*) são aqui interpretadas por Vieta em conformidade com Ramus, que enfatiza em todas as circunstâncias, especialmente no prefácio do *Scholae physicae* ([1565]; cf., também *Scholae mathematicae*, pp. 78 ff.), como ‘leis lógicas’ válidas para todas as Ciências. Através da lei ‘de todas as instâncias’, disse Ramus, ‘não o que é falso, mas também o que seja *acidental* é removido’; conforme a definição de Vieta de ‘porística’, que ele declara intencionalmente no sexto capítulo, contrariando essa lei. A lei ‘*essencialmente*’ exige que todas as ‘regras da Arte’ (*artis decretum*) sejam homogêneas, ou seja, do mesmo gênero e as partes como se fossem do mesmo corpo; cf., também a ‘lei dos homogêneos’ de Vieta. Portanto, tais resultados ‘como são firmementes estabelecidos e demonstrados pela zetética’ devem ser submetidos a ‘síntese’, ‘que é a maneira logicamente adequada de demonstração’; isso significa que as ‘trilhas da Análise, são, portanto repetidas’ ao contrário. Mas, Vieta significativamente acrescenta, ‘*isto é em si também analítico*’ e não o incomoda por conta da introdução por ele de calculação por meio de espécies. No contexto de sua preferência pela Análise, o termo correspondente em Latim, equivocadamente chamada de ‘*resolutio*’ significa: (1) ‘solução inversa’ no sentido de Pappus (Hultsch, II, 634, 18), (2) ‘resolução’ em elementos fundamentais (cf. O início de *De Numerosa potestatum ad Exegesin resolutione*: ‘Nada é tão *natural* de acordo com todos os filósofos, como resolver algo por meio das coisas que a compõe’, e finalmente, (3) simplesmente a ‘solução’. Para Descartes, a ‘Análise’ é muito mais essencial do que a ‘Síntese’; cf., especialmente o *Secundae responsiones*, ad.-Tann. VII, PP. 155-159, onde ele disse (p. 156):

‘Análise’ devemos nos tornar um ‘geômetra’ ou um ‘logicista’ no sentido ordinário.[155] Como um *geômetra*, ele faz o seu trabalho encontrando a ‘solução’, de ‘outro, porém similar’ ao problema em questão, na medida em que ele repete em sua construção a ordem inversa, ‘sinteticamente’, de forma que a Análise que será realizada em *outras* magnitudes ‘dadas,’ ou seja, a Análise algébrica ‘pura’. Fazendo isso, ele pode esconder o trabalho ‘analítico’ puramente algébrico, que precede e simula ter resolvido o problema imediatamente por um processo ‘sintético’, atacando-o analiticamente, e, posteriormente (como se fossem para auxiliar os interessados nos cálculos) começa a partir da equação obtida na construção sintética.[156] Portanto, a ‘solução geométrica’ é influenciada de tal maneira que ‘não decorre e justifica a síntese a partir da equação, exceto a equação da construção sintética – embora cada [síntese] trate de si’ (Capítulo VII).[157] Como um logicista ele encontra soluções numéricas – seja exatamente ou

---

‘mas eu tenho usado somente a Análise que é o verdadeiro e o melhor caminho de instruir em minhas Meditações’. A desvantagem da Síntese diante da Análise consiste para Descartes no fato de que’ não ensina a maneira pelo qual as coisas são *encontradas’* (Regulae, Regra IV, Ad.-Tann. X, 375). (Nota 235, página 268).

[155] Em último caso o próprio analista mostra ser um geômetra, pois, realmente realiza o seu trabalho imitando o processo analítico. No caso, o ex-logicista resolvendo qualquer que seja as potências que foram numericamente, sejam eles simples ou conjugados – capítulo VII. (Nota 236, página 269).

[156] Assim o habilidoso geômetra, por meio de uma Análise *expert* dissimula seu método e apresenta e explica seu problema como se fosse sintético, como se ele pensasse [somente] sobre como completar o seu trabalho; depois disso, para ajudar o logicista, ele constrói e demonstra o teorema em termos de proporção ou equação reconhecível [no problema]. Capítulo VII. (Nota 237, página 269).

[157] Nesse sentido a *Revisão Canonica de Soluções Realizadas Geometricamente* e o *Supplementum Geometriae* (ambos de 1593) pertence a ‘exegética.’ O último representa um ‘suplemento’, na medida em que, como Vieta disse na página 25 do capítulo VIII de *Isagoge* (cf., também no início do próprio suplemento) ‘o defeito da Geometria é, por assim dizer, fornecido pela Geometria’, isto é, pela *neusis* usada neste caso. Por meio desse ‘defeito’, ou seja, equações quadráticas ou biquadradas que determinado problema planimétrico normalmente lida, pode ser evitada. O postulado correspondente, em conformidade para o qual sempre é possível traçar uma linha reta a partir de um ponto dado que intercepta duas linhas retas dadas (ou um círculo e uma reta) de tal maneira que o segmento de reta traçada para qual foi cortado as duas linhas dadas (ou a linha e o círculo) é de um dado comprimento, é uma procura que não é difícil de ser efetivada, como Vieta, confiando na autoridade de Nicomedes e especialmente em Archimedes (cf. Zeuthen, *Die Mathematic im Altertum und imMittelalter*, p. 41), relatou (Isagoge, Capítulo VIII, 25 e no início do *Suple. Geom*.). ‘Exegética’ pertence também ao tratado *Analytica angularium sectionum in tres partes tributa* sobre secções angulares, que foi publicada postumamente por Anderson em 1615 (ed. van Schooten, pp. 287-304). Cf., também em *Isagoge*, Capítulo VII, 24- 27.

A *Exegética na Geometria* representa ‘Álgebra geométrica’ num sentido estrito. Os precursores de Vieta a esse respeito é Bombelli, ou seja, os dois últimos livros de sua Á*lgebra* foram publicados somente recentemente por Bortolotti, que contém sua ‘parte geométrica’ (cf. Bortolotti, Bombelli, p. 19), e Bonasoni, que expressamente intitulou o seu tratado de *Àlgebra Geométrica* (cf. Bortolotti, *Primordi della geometria analítica*, *L’Algebra geometrica di Paolo Bonasoni nel Mss. 314 della Biblioteca Universitaria di Bologna* [1925], publicado na coleção de trabalhos do mesmo autor:

por procedimentos aproximados – que pode ser ou uma simples equação (Análise *pura* de expoentes, isto é, cujo expoentes das grandezas desconhecidas são todos iguais) ou uma composição de equações, ou qualquer outra pretendida (solução conjugada de potências, isto é, equações impuras cujas grandezas desconhecidas tem diferentes expoentes de ocorrências diversas).[158] Em nenhum caso ele deve esquecer de deixar claro, por meio de uma amostra, o dispositivo engenhoso empregado.[159] A '*Rhetic*' ou Exegética compreende uma série de 'regras' e, é portando, para ser considerada como a parte mais importante da 'analítica' – O caráter de uma arte é atribuído as primeiras regras da 'arte analítica' - enquanto 'Zetética' e 'Porística' consiste essencialmente de 'exemplos'. '*Rhetic* ou Exegética deve ser considerada a mais poderosa que diz respeito ao estabelecimento da arte, visto que as duas outras [partes da analítica] fornecem

---

Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII, [1928]. A partir dos trechos do tratado de Bortoletti, escrito entre 1574 e 1587, podemos concluir que Bonasoni (ibid., pp. 14 e 15) cita não somente Buteo, mas também Estienne de la Roche (Villa Franca). O trabalho de La Roche (ou Stephanus Gallus, como Bonasoni o chama), que fez extensivo uso de seu trabalho, *Triparty en la science des nombres*, escrito em 1544 por Nicolas Chuquet e publicado somente em 1880 por Aristide Marre, deve, portanto, ter sido bem conhecido naquele tempo em Bologna. Isto sugere que o compatriota Bombelli de Bonasoni, que é explicitamente citado e usado por Bonasoni (cf., ibid., pp. 15 e 16), também veio, através de la Roche, sobre a influência de Chuquet. Em particular, permitiram uma explanação natural das designaçoes das potências usada por Bombelli (sobre o relacionamento de Chuquet com de La Roche, cf. Aristide Marre na introdução da edição de Chuquet no *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* publicado na B. Boncampagni, XIII [1880], pp. 569-580; também Cantor, II², 347-364 e 371-374). Também deve ser notado que Bonasoni, e mais tarde Vieta, refere exclusivamente a soluções algébricas de problemas por Regiomantanus e procede para 'suplementá-los' 'geometricamente' (Bortolotti, Primordi del. geom. anl., p. 16). Cf., também Marino Ghetaldis em *Variorum problematum collectio*, 1607 (Cantor, II², 809) e finalmente Clavius, Geometria prática (1604), lib. VI. (Nota 238, página 269).

[158] A Arte [analítica] produz ainda mais soluções se todas as potências sejam puras – e isso, nem os antigos e nem os modernos sabiam. Tais soluções são encontradas no trabalho *De numerosa protestatum as Exegesin resolutione* (1600); além disso, no tratado publicado somente em 1615 por Anderson, chamado *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo* (*Dois tratados sobre a descoberta e transformação de equações*), ed., van Schooten, PP. 84-158; cf. Especialmente p. 127: 'Mas, agora a atenção de nossa compreensão deve ser mais direcionada para *análise numérica*, contudo este tratado está mais preocupado com o segundo estágio do processo analítico, ou seja, a transformação que torna uma equação em sua forma canônica ou padrão (cf. Ritter, *Revue occidentale philosophique* ..., X, pp. 390,396 f.). O Tratado de *emendatione* apresenta o tema do trabalho anunciado no *Isagoge* sob o título *Ad logisticien speciosam Notae posteriores* e contém uma série de formulas ('*notae*') pertencendo a transformação de equações. Em particular, ele ensina métodos gerais de solução de equações do terceiro e quarto grau, partindo parcialmente do modelo de Bombelli. O trabalho Ad logisticien speciosam Notae priores (primeiramente publicado por Jean de Beaugrand em 1631) representa uma coleção elementar geral de fórmulas algébricas que corresponde a proposições aritméticas do segundo e nono livro dos *Elementos* de Euclides. (Nota 239, página 270).

[159] Estas observações voltam-se diretamente a Diophantus. (Nota 240, página 271).

exemplos, ao invés de *regras*, como devemos por direito outorgar aos logicistas.'[160]

Esta organização da arte 'analítica' por Vieta mostra que a 'analítica geral' é compreendida nada mais do que como *meios* auxiliares indispensáveis para solução de problemas numéricos e geométricos, e não como uma disciplina completa e auto-suficiente. A 'analítica geral' é primeiro de tudo uma 'técnica', como se utiliza na expressão moderna – seu objetivo não é nem o de abrir e estender um domínio de verdades razoavelmente controladas, nem resolver um determinado números de problemas; ao contrário, pretende ser um *instrumento* de solução de *problemas em geral.* Se o 'material' não é um simples problema ou uma série de problemas simples, mas como o próprio Vieta disse, o problema da habilidade geral para resolver problemas; é o 'problema dos problemas', isto é, *a arte de descobrir, ou a descoberta da descoberta*. A analítica geral de Vieta é um '*organon*', um instrumento no reino da descoberta Matemática no mesmo sentido do trabalho da 'lógica' de Aristóteles, acima de tudo, a 'analítica' (*Prior e Posterior*) são um *Organon* no reino de todo e qualquer que seja o conhecimento possível. Porém, com Descartes a 'analítica geral' assume uma função de uma disciplina ontológica fundamental antiga, nesse sentido, é feito um esforço para deixá-lo substituir completamente a lógica tradicional antiga. A batalha entre os proponentes do silogismo Peripatético e a análise Matemática[161] sobre a primazia de suas respectivas interpretações relativas a estrutura do mundo, que é, portanto, iniciada no século XVII, ainda está sendo travada atualmente, só que agora sob a forma do conflito entre 'lógica formal' e 'lógica Matemática' ou 'Logística,' embora suas pressuposições ontológicas tenham sido completamente obscurecidas.

Mesmo em Vieta, a 'arte analítica' como *um todo*, ou seja, todos os três 'tipos', fica a serviço de suas investigações astronômicas e cosmológicas, que estão preocupadas principalmente com explorações e soluções numéricas e,

---

[160] O conceito de 'praecepta' (regras) e 'exemplo' que originalmente pertence a retórica, novamente revela a influência de Ramus, cuja 'renovação' da lógica consistiu precisamente no fato de que ele tentou desenvolvê-lo, a partir da retórica. Portanto, por 'lógica' devemos compreender aqui a reforma dos seguidores de Ramus. (Nota 241, página 271).

[161] Cf. Descartes, *Regulae*, Ad.-Tannery. X, 365, 6-9; 372 f.; 405 f.; 439 f. Cf., também o tratado de Jacobus Acontius, *De Method*, 1558, novamente editado por H. J. De Vleeschauwer (*Tratado do método de Jacob Acountius* [Antwerp-Paris, 1932]). (Nota 242, página 271).

portanto, com a '*rhetic*' ou 'exegética'. Aqui surge seu esforço para desenvolver procedimentos aproximativos, que pode muito bem reivindicar um lugar dentro da estrutura de uma arte que é considerada um 'instrumento' para 'descoberta'.[162] Isto é, a razão da prioridade da '*rhetic*' ou 'exegética' sobre os outros dois 'tipos' de análise. Se apenas por essa razão, desconsiderarmos a 'porística', somente a 'zetética' emprega a 'Logística especiosa'; então, estritamente falando, ela sozinha representa a 'analítica geral', a 'nova álgebra'. Mas, já vimos que a 'Logística especiosa' de Vieta tem uma dupla função: é compreendida por um lado como procedimento da álgebra *geral* 'pura' e por outro lado como procedimento análogo à análise geométrica e diretamente relacionado com a *Aritmética* de Diophantus. As duas interpretações são simultaneamente possíveis somente porque a álgebra 'geral' tem um papel de procedimentos meramente auxiliares. Conectado com este fato é a suposição de Vieta de que Diophantus resolveu seus problemas 'aritméticos' com a ajuda da 'zetética' como compreendido pelo próprio Vieta, mas que ele achou melhor esconder esse fato. No final do capítulo V de *Isagoge*, 'Sobre as leis da Zetética', Vieta disse: 'A Zetética, em Diophantus, foi empregada mais sutilmente em todos aqueles livros que foram escritos sobre o tema da Aritmética. *Mas, exibiu-o como se fossem fundados somente em números e não também em espécie – embora ele mesmo usou-os – de modo que sua sutilidade e habilidade pode ser mais admirado*, visto que a coisa que aparece muito sutil e obscuro para uns que calcula com números [isto é, Logística prática numerosa] aparece muito familiar imediatamente óbvio para aqueles que calculam com espécies [isto é, *Logística prática especiosa*] '.[163] A arte dos 'antigos analistas' aparece como um 'tédio' porque pretende trabalhar com números ao invés de procedimentos 'com habilidades que lhe é própria' e calculação inteiramente em espécie. Quando Vieta fala de 'calculação de espécies que deve ser *novamente* introduzido', ele quer dizer somente a

[162] Isto também aplica no uso de frações decimais. (Nota 243, página271).
[163] Num de seus livros, Diophantus escreveu sobre a utilização da zetética na Aritmética de forma sutil. Porém, ele a exibiu fundado em números e não em espécies – embora tenha usado – portanto, sua sutileza e habilidade deve ser mais admirada, visto que as mesmas coisas que parece sutil a um calculador com números e, mesmo obscuro, são completamente familiar e imediatamente óbvias a um calculador com espécie. (Nota 244, página 271).

reativação de uma arte conhecida e aprovada na antiguidade.[164] Ele encontrou suporte para isto, não somente no uso instrumental do conceito de *eidos* de Diophantus, mas também nas soluções indeterminadas que posteriormente usou como um *procedimento auxiliar* e que Vieta aparentemente viu traços da verdadeira *arte* Diophantina, isto é, a *analítica pura* é concebida como uma *técnica auxiliar na Matemática 'geral'.*[165]

Com esta interpretação da *Aritmética* de Diophantus, que tem exclusivamente um procedimento 'habilidoso', porém tem também um pequeno interesse na determinação de soluções (segundo Descartes) são 'verdades inúteis'' mas, a pesquisa histórica prescrita por Vieta, rege até hoje. Desse ponto de vista, surge a expressão no sentido de aceitar o tema em questão referente a

---

[164] Descartes que expressa sua desconfiança cada vez mais nitidamente, tem exatamente a mesma opinião. Pappus e Diophantus, ele disse (Regulae, Ad.-Tann., X, 376 f., Regra IV), mantiveram seu conhecimento de nós a partir de uma certa esperteza prejudicial: 'Para os verdadeiros matemáticos da época, exatamente como muitos inventores, temendo a banalização da *popularização* de sua descoberta, então preferiram exibi-los para nós, *os resultados de sua Arte* como certas verdades inúteis, demonstrando-o por dedução de forma profunda, de modo que podemos admirá-lo ao invés de nos ensinar a A*rte em si*, que seria muito subvertido a nossa admiração'. Cf. Também. ibid., p. 373: 'Temos evidências suficientes que os antigos geômetras fizeram uso de uma *determinada análise*, que eles estenderam para solução de *todos* os problemas, embora eles *ressentiam o mesmo para a posteridade*. E, agora floresce um determinado tipo de aritmética chamado Álgebra, que realiza com números aquilo que os antigos faziam com figuras. Além do mais, de acordo com o início da Regra III', no *Secundae Responsiones* (Ad.-Tann. VII, 156) Descartes disse que os antigos em seus escritos usaram a 'síntese', mas não a 'análise' (!), não porque eles não sabiam a análise, mas até onde eu posso avaliar, por *que eles já fizeram tanto que eles desejavam reservá-lo como segredo para si mesmos*. Para os restos, Descartes agiu de acordo com sua prescrição – ele escreve sua 'obscura' *Geometria* de propósito; cf. Ad.-Tann. II, 510 ff.; I, 411, também 377 e 478. Sobre a popularização, além do mais conforme *Cogitationes privatae*, Ad. Tann. X, 214: 'Ciência é como uma mulher, se permanece pura com um homem, é adorada, se ela é promíscua, torna-se inútil'. Em Wallis, que a esse respeito, é claro, dependente de Vieta e Descartes, ainda interpretamos, em referência ao uso correto de magnitudes 'algébricas': visto que, no tempo dos *antigos algebristas*, eles desconheceram ou não prestaram atenção suficiente ou *talvez ocultaram ou mesmo até fizeram um mistério a esse respeito* ... – *Mathesis universalis*, Opera I, 1695, p. 53. Cf. Wallis *Algebr*a, '*Praefatio*' (Opera, II, 1693): 'Não podemos duvidar de que no tempo Grego Antigo, eles tinham essa Álgebra, mas eles ocultaram com cuidado e não difundiram indiscretamente'. E no Capítulo II (ibid., p.3.): para mim, certamente, não há dúvida de que os antigos sabiam e provaram o seu uso, de uma determinada habilidade de investigação, que, chamamos de *Álgebra*. *Os antigos, portanto, cuidadosamente ocultaram sua Arte de investigação*. Newton também realizou em sua *Principia* em conformidade com essa tradição; ele disse a seu amigo Rev. Dr. Derham que 'para evitar 'críticas' de pessoas que tem pouco conhecimento de Matemática, ele intencionalmente fez seu *Pincipia* de difícil compreensão; Porém, segundo ele, imaginando que seria entendido por matemáticos capazes de compreender suas demonstrações concordando-o com sua teoria' (*Portsmouth Collectiuon*). Cf. Copernicos na 'dedicatória do prefácio' das *revoluções das esferas celes*tes (Encyclopedia Britannica [Chicago, 1952], p. 506). (Nota 245, página 272).

[165] A generalização de Bombelli das soluções dos problemas de Diophantus também tem como modelo os últimos procedimentos de soluções indeterminadas (cf. Bortolotti, *Bombelli*, pp. 18 f.; 44). (Nota 246, página 273).

consciência moderna da revolução do modo antigo de formar conceitos e de interpretação do mundo, que tomou forma concreta quando Vieta fundou sua 'analítica geral'.

O que precisamente são as pressuposições conceituais que torna a 'Logística' Diophantina possível? O que Vieta compreende por espécie que forma o objeto da 'analítica geral' e de que maneira ele compreende-os? Moritz Cantor (II², pp. 631 e 519) foi da opinião que 'espécies' são 'signos de estruturas espaciais que produz sentidos perceptíveis', isto é, 'magnitudes, não números'. Ele recorreu ao apoio do uso linguístico de Vieta, pois, no capítulo IV de *Isagoge* ele designa as operações a ser realizada com espécies, isto é, aquelas de 'multiplicação' e 'divisão' (mencionadas com as mesmas palavras no segundo capítulo) por '*ducere*' (para compor uma magnitude com uma magnitude) e '*adplicare*' (para aplicar uma magnitude a uma magnitude). Mas, estes termos, Cantor observou originalmente nas representações *geométricas*, e isso aparece em *General trattado di numeri et misure* de Trataglia (~1500-1560) que ainda atribui os termos '*multiplicare*' e '*partire*' aos aspectos numéricos, mas '*ducere'* e '*misurare*' ao reino geométrico (sendo este último destinado às 'frações', por que divisão contínua é possível somente com objetos geométricos). Inquestionavelmente, a 'espécie' para Vieta tem implicações geométricas tradicionais, visto que sua nomenclatura é (como já era de fato em Diophantus) remanescente da doutrina antiga de números *'figurados*', fato esse, que foi, naturalmente conhecido por grandes especialistas na literatura Matemática antiga, como Vieta, por exemplo, era leitor de Nicomachus e Theon de Smyra.[166] Relembramos aqui o relacionamento do conceito Diophantino correspondente ao conceito geométrico de figuras triangulares dadas. Isso pode ter sido uma das razões para ele conjecturar que atrás da Análise geométrica, escondia precisamente a mesma 'arte analítica' que em sua opinião se fazia presente na

[166] Se o conhecimento de Theon está documentado por sua referência às observações de Adraustus que ocorre em Theon (Hiller, 73, 18 f.). Magnitudes 'algébricas' são equiparadas também com números 'figurados' em outros lugares na literatura Matemática contemporânea. Portanto, por exemplo, lemos em *Fundamentum astronomicum* (1588) de Raimarus Ursus (p. 13): '... seja na maneira realmente chamada Geometria em triângulos equiângulares ou mesmo *em números, ou algébrica ou figuras'. Em Adrianus Metius,* Artmética e Geometria prática *(1611), livro II, capítulo III, p.p. 56:* as magnitudes *'algébricas'* ainda são introduzidas como *'números figurados'.* Cf. Descartes, *Regulae*, Regra XIV, Ad.-Tann. X, 450 f. (Nota 247, página 273).

base da *Aritmética* Diophantina. Porém, o mais essencial da estrutura do conceito de espécie do que as reminescências geométricas são: (1) a generalização que o conceito de *eidos* submetem-se nas mãos de Vieta, uma generalização por meio da qual a espécie se torna o objeto de um disciplina Matemática 'geral' que não pode ser identificado nem com a Geometria e nem com a Aritmética, e (2) a conexão direta com a 'Logística numerosa', isto é com a 'calculação', que é mantido por Vieta. No seu sentido original da *Logística numerosa* pressupõe uma homogeneidade no campo das mônadas, e, consequentemente está dependente do conceito de '*arihtmos*' e de suas relações. Após isso, Vieta deu 'significado respeitável a mais' no sentido de progressão para magnitudes desconhecidas '*gerais',* ou seja, uma série venerável ou escala de magnitudes ascendente ou descendente de espécie para espécie pela sua própria potência em proporção[167] [continua] (capítulo 1) e complementa-o no terceiro capítulo com as séries correspondentes de magnitudes conhecidas relacionadas a grandezas desconhecidas.[168] No capítulo IV, estabelece as regras fundamentais, '*das regras fundamentais de calculação por espécie*' (os preceitos da Logística especiosa canônica). Estas regras correspondem a adição, subtração e multiplicação usado para instruir calculações simples.[169] Cada espécie é representada por uma letra

---

[167] Isto é, proporção contínua: $x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = \ldots$ (Nota 248, página274).

[168] As grandezas desconhecidas são chamadas 'magnitudes escalares' (escalar ou grandezas escalares). Seus graus (grados) são: Latus ou Radix (lado ou raiz, isto é, x); Quadratum (Quadrado, ou seja, x²); Cubus (Cubo, ou seja, x³); Quadrato-quadratum (Quadrado-quadrado, ou seja, x^4); Quadrato-cubus (Quadrado-cubo, ou seja, x^5); Cubo-cubus (Cubo-cubo, ou seja, x^6); Quadrato-quadrato-cubos (Quadrado-quadrado-cubo, ou seja, x^7); Quadrato-cubo-cubus (Quadrado-cubo-cubo, ou seja, x^8); Cubo-cubo-cubus (Cubo-cubo-cubo, ou seja, x^9). Isto não é, portanto a nomenclatura '*Anatolian*' corrente naquela época e que ainda foi usado por Bombelli (*L'Algebra*, p 6) e Gosselin, que em termos modernos, resulta da multiplicação de forma que os expoentes vão até nona potência, mas sim de uma suplementação da nomenclatura Diophantina em que os expoentes surgem pela adição. Vieta acrescenta no final que os restantes podem ser designados pela sua série e método (Capítulo III, 3, 4). Gosselin expressamente desaprova a nomenclatura Diophantina; cf. *De Arte magna*..., pp. 4 ff., Capítulo VI, 'Sobre os nomes dos números'. As grandezas conhecidas ('as magnitudes comparáveis') são ordenadas correspondentemente: *Longitudo latitudove* (comprimento ou largura); *Planum* (Plano); *Solidum* (Sólido); *Plano-planum* (plano-plano); *Plano-solidum* (Plano-sólido); *Solidum-solidum*; *Plano-plano-solidum*; *Plano-solido-solidum; solido=solido-solidum*. 'Doravante, a série seguinte segue os métodos subsequentes.' Sobre a série de 'escalares', cf. Diophantus 4, 14-16,5; sobre a série 'comparativa', Diophantus 2, 18-4, 7, onde para Vieta, a expressão lado serve como o primeiro grau do 'escalar'. No século XV, a propósito, ocorre dois casos em que a nomenclatura de Diophantus é usada; cf. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, II³. 137 f. (Nota 249, página 274).

[169] Sobre as regras de multiplicação e divisão, cf. Diophantus, 'Definição IV' (8, 1-10) e 'Definição X' (14, I f.). Além desses 'preceitos', Vieta apresenta também '*leis zetéticas*' no *Isagoge* (Capítulo

(as vogais representam as grandezas desconhecidas e as consoantes grandezas conhecidas).[170] Sobre os quais se juntaram a designação do grau ou gênero, começando com o segundo grau. A calculação realizada com espécie na 'analítica geral' no livro X de Vieta há, por exemplo:

$\frac{Acubos - B\,sólido\,3}{C\,em\,E\,quadrado}$. Leia: O cubo de A menos 3 vezes sólido B dividido por C vezes E quadrado. Na notação moderna fica $\frac{x^3 - 3b}{cy^2}$.

Vieta disse no início do capítulo II que devemos manter em mente o tempo todo a *lei fundamental de homogeneidade,* pois, somente grandezas de 'gênero similar' podem aparecer na mesma equação e devem ser comparadas uma com a outra; sejamos cuidadosos em 'comparar magnitudes homogêneas com homogêneas'. Esta lei representa a 'primeira e eterna lei das equações ou proporções,' dizendo que na terminologia moderna, todos os números da equação devem ter a mesma dimensão. De acordo com isso, somente tais magnitudes podem ser relacionadas através da adição ou subtração como pertencentes ao mesmo ou correspondente 'grau', contudo, isso não se sustenta para multiplicação e divisão.[171] Portanto, a 'lei de homogeneidade' de Vieta não tem conexão imediata com a explicação de Adrastus[172] da definição III de Euclides, que Vieta cita, e de acordo com essa definição uma *razão* pode existir somente entre grandezas 'homogêneas': 'Uma razão é uma parte da relação entre duas

---

V), que referem às operações elementares com equações, ou seja, em particular, a '*antítese*' (a transferência de um termo de uma parte da equação para a outra parte – 'passar do primeiro membro para o segundo membro'), o '*hypobibasm*' (a redução de graus da equação de uma equação por meio da divisão de todos os membros da equação por uma espécie comum a todos eles) e o '*parabolism*' (a remoção do coeficiente da incógnita de mais alto grau ou conversão da equação em forma de uma proporção, um 'analogismo') e também em Diophantus p.14, II ff. (Nota 250, página 275).

[170] Sobre a possível conexão desta notação com as letras usadas por Ramus, cf. Cantor, II², 632; 564, convém notar que Vieta tem um predecessor no uso de letras para grandezas desconhecidas que é Johannes Buteo, *Logística, quae et Arithmetica vulgo dicitur*, 1559 (cf.Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, III², 34 e 136), e em Bonasoni. (Nota 251, página 275).

[171] *Isagoge*, Capítulo III, 1: 'Se uma grandeza é adicionada a outra, a anterior é homogênea com a última'. 'Se uma grandeza é subtraída de outra, então as duas grandezas são homogêneas'. 'Se uma grandeza é multiplicada por outra, então o produto é heterogêneo às duas grandezas'. 'Se uma grandeza é dividida por uma grandeza, então a última grandeza é heterogênea com a anterior'. Não ter atentado para essas coisas foi à causa de muitas confusões e deficiências dos analistas antigos. (Nota 252, página 275).

[172] Theon (Hiller) p. 73, 18 f.: Adrastus disse que é impossível saber qual relação não homogênea [magnitudes] tem um ao outro. (Nota 253, página 276).

magnitudes de tipos similares no que diz respeito ao tamanho'. Certamente, não é usual para os matemáticos antigos 'comparar', por exemplo, razão de *comprimentos* com razão de *planos*, bem como trazê-lo para a mesma '*proporção.*'[173] A lei de homogeneidade de Vieta está preocupada com fatos fundamentais da 'calculação', pois, em última instância depende de bases unitárias de 'contagem', *pressupondo* um campo de *mônadas homogêneas*. A exigência da 'Logística' Diophantina é cumprida naturalmente, porque já opera com tais campos de mônadas 'puras' – as 'grandezas' conhecidas e desconhecidas que são unidas numa equação, representam '*arithmos* de mônadas.'[174] A pressuposição fundamental da 'Logística especiosa' necessita especialmente ser salientada; por isso, a ênfase que Vieta, ao contrário dos 'analistas antigos', expõe a 'lei da homogeneidade' como fundamental para 'arte analítica' (cf., também o final do capítulo I e o capítulo V, 4). A universalidade do conceito de espécie para Vieta, parece irrevogavelmente dependente do conceito de '*arithmos.*' Ele *preserva o caráter de* '*arithmos*' como '*número de*...' *transformando-o de maneira peculiar*. Enquanto cada *arithmo pretende imediatamente coisas ou unidades em si* cujo número o representa, a sua letra ou signo pretende *diretamente o caráter geral do ser do número* que pertence a cada número possível, ou seja, pretende o 'número em geral' imediatamente, porém as coisas ou unidades que estão à mão, tem, indiretamente, somente um número. Na linguagem acadêmica, a letra ou o signo designa intencionalmente o objeto de 'segunda intenção,' isto é, um conceito que diz respeito a outro *conceito* e não o *ser* diretamente. Isto é a verdadeira e decisiva mudança – esse caráter geral do número ou, o que equivale a mesma coisa, seu 'número geral' em suas indeterminações, isto é, com possibilidades de determinação. Nessa forma é atribuída certa independência que o permite ser objeto das operações de 'calculações.' Isto é alcançado por aproximação dos 'graus' denominados, cuja

---

[173] Indiretamente 'a lei da homogeneidade' de Vieta é idêntica com a declaração de Adrastus na medida em que cada *proporção*, cujas razões são razões no sentido da definição III do livro V de Euclides, puder ser convertida em uma equação que cumpre as exigências de Vieta. Isto pode ter sido exatamente o que fez a mente de Vieta recorrer à Adrastus; em outras palavras, ele considerou a teoria das razões e proporções, desde o início, à luz da 'teoria das equações' compreendida como uma 'teoria de calculação' conforme o conceito de 'analogismo'. (Nota 254, página 276).

[174] O próprio Vieta disse no capítulo VIII, 17: 'no caso de números, os elementos homogêneos das equações, são as unidades'. (Nota 255, página276).

interconexão está em conformidade com regras precisas indicando um campo de homogeneidade particular subjacente a cada equação que é construída.[175] Os 'graus' designados, que são considerados independentes correspondem ao *eidos* Diophantino, *que transforma o objeto da* segunda intenção, ou seja, 'número geral' pretendida pela letra/signo *num objeto* de '*primeira intenção,*' isto é, de um 'ser' que é diretamente apreensível e cuja correspondência no reino da calculação é, por exemplo, 'duas mônadas', 'três mônadas.' Porém, isso significa que o 'ser' da espécie em Vieta, isto é, o ser do objeto da 'analítica geral,' não é para ser compreendido nem como independente no sentido pitagórico e platônico nem como 'atingido' por abstração, isto é, como uma redução no sentido Aristotélico, mas sim como *simbólico*. *As espécies são em si formações simbólicas – a saber formações cuja objetividade potencial meramente é compreendida como uma objetividade real*. Portanto, eles são compreensíveis somente com a linguagem do *formalismo simbólico*[176] que é completamente enunciada primeiro em Vieta como capaz de representar a '*descoberta da descoberta*', ou seja, a zetética. Com isso, a mais importante ferramenta da Ciência natural Matemática, 'a *fórmula*', torna-se pela primeira vez possível.[177] Então, uma nova maneira de 'compreensão' surgiu, fato que foi inacessível a *episteme* antiga.

Quando olhamos o conceito de *eidos* de um *arithmos* dos platônicos e pitagóricos como aqueles que primeiro fizeram a unificação do ser de cada número possível e comparando-o com o conceito de espécie desenvolvido acima, podemos dizer que a independência *ontológica* do conceito de *eidos* tomou um desvio por meio do uso *instrumental* feito por Diophantus, que aqui finalmente atinge a realização *simbólica*. Isso anuncia uma transformação conceitual geral que estende sobre toda a Ciência moderna. Diz respeito em primeiro lugar ao

---

[175] O 'grau' deste campo é determinado *pelo mais* alto 'grau' da grandeza 'escalar' (isto é, pelo expoente mais alto ou o grau da equação), que é chamado de '*potestas*' (potência). Os menores 'graus' são chamados de graus que passaram da ascensão à potência – capítulo II, 5. O maior grau da grandeza 'escalar' corresponde ao gênero da grandeza conhecida que aparece como um membro independente da equação e representa, nesse sentido, a 'unidade' do campo homogêneo particular, a 'comparação homogênea' (elementos homogêneos de uma equação – capítulo VIII, 16). (Nota 256, página276).

[176] O termo '*symbolum*', usado por letras/signos bem como signos conectivos teve origem em Vieta (cf. Capítulo V, 5). (Nota 257, página 276).

[177] O significado da expressão 'fórmula' usada atualmente apareceu somente muito depois; Adrianus Metius, por exemplo, em *Aritmética e Geometria prática* (1611) pp. 64 ff., ainda compreende 'fórmulas operações' como um algoritmo apresentado sem texto explicatório. (Nota 258, página 276).

conceito de *arithmos* em si. O conceito de número moderno nasce quando o 'número geral' diz respeito, e, é representado no meio do conceito de espécie como um objeto 'em si', isto é, simbolicamente. Usualmente seu desenvolvimento é explicado por referência cada vez mais pela 'abstração.' Mas, essa maneira de falar conduz facilmente a mal entendidos, pois deixa sua estrutura que já é complicada, completamente no escuro. O conceito moderno de 'número,' como subjacente ao cálculo simbólico, é em si, similar àquilo que se pretende com o que é *simbólico na Natureza – é idêntico com o conceito de espécie em Vieta*. Isto aparece mais claramente nas espécies do primeiro grau, onde a designação do 'grau' não está anexada a letra/signo e, portanto, pode ser dito que coincide com ele. Mas, é impossível ver 'números' 'A' ou 'B' isolados de letras/signos, exceto por meio de regras sintáticas que Vieta declara no quarto capítulo do *Isagoge*, contrastando-os, com as regras operacionais da 'Logística numerosa.' Portanto, essas regras representam os primeiros *axiomas do sistema* moderno; eles criaram o contexto sistemático que originalmente 'define' o objeto para o qual eles serão aplicados. E ainda – aqui reside a semente das dificuldades futuras – essas regras derivadas diretamente a partir das 'calculações' com números de mônadas. Isto significa que uma espécie, em último caso, pode manter características numéricas mesmo em seu modo de transformar e consequentemente é capaz de tornar um 'número,' ou seja, um objeto de operações 'calculacionais,' somente *porque os 'números semelhantes de mônadas' antigo são em si interpretados como 'números*', o que significa que eles são concebidos a partir do ponto de vista de suas representações simbólicas. Até hoje, esta reinterpretação permanece como fundamento de nossa compreensão da 'Aritmética' e 'Logística' antiga.[178]

Isto é porque depois de Vieta e sob sua influência imediata (como, aliás, já antes dele) os 'números algébricos' são postulados juntos com 'números

[178] Foi apoiado pelo sistema posicional de códigos dos 'Árabes' que tinha sido disseminado no Ocidente desde o século XII, cujo caráter do 'signo' é muito mais pronunciado do que a notação grega ou Romana. Mas, seria um erro tentar compreender a origem da linguagem do formalismo simbólico como consequência final da introdução da linguagem de signo dos Árabes. O reconhecimento dessa linguagem de signo no Ocidente *em si pressupõe uma mudança gradual na compreensão do conceito de número*, cujas últimas raízes são muito profundas para discussão neste estudo. (Nota 259, página277).

simples'.[179] Iremos investigar isso depois, especialmente em Stevin. A esse respeito a posição de Bachet de Méziriac, o primeiro editor de Diophantus é característico: O comentador *maximus* de Planudes em seu comentário sobre a 'definição' III-VIII da Aritmética de Diophantus ataca a opinião de Xylander e seu modelo. De acordo com Bachet (edição de 1621, p. 6), Diophantus não fala de 'números absolutos e frações,' que estão completamente além de seu projeto,' mas somente de espécies como tal ou de 'frações' algébricas. A 'definição VI', em particular, de acordo com o qual um *eidos* permanece o mesmo *eido* quando multiplicado por um, desde que multiplicado pela unidade, *deixa cada número e consequentemente* seu *eido inalterado.* O efeito disso é interpretado por Bachet de que a espécie de cada caso não muda no decorrer da multiplicação com *unidades arbitrárias*, isto é, com números ordinários. Ele acrescenta uma elucidação apoiada nas precauções do próprio Diophantus: exatamente como a multiplicação de números ordinários por um, produz esse mesmo número, então a multiplicação de uma espécie com unidades arbitrárias, isto é, com um número ordinário, produz exatamente a mesma espécie[180] (*1.x=x – elemento neutro da multiplicação, que futuramente são propriedades da álgebra abstrata. Minha inserção*). Está claro que Bachet está lidando com *dois* reinos de 'números', pois ele atribui o papel da unidade no reino de 'números' ordinários a 'números' ordinários no reino algébrico. Mas, isso significa que para Bachet a unidade em si não é um componente tão elementar de qualquer número como um 'coeficiente numérico.'[181] Não é menos significante, pois essa nova concepção de 'número' e

---

[179] Quanto ao uso dos matemáticos *antes* de Vieta, Chuquet (*Bulletino Boncompagni*, XIII [1880], p.737) disse que 'número' que é aqui considerado [*Tripartite*] num sentido amplo; por 'números' que agora são compreendidos não apenas como um inteiro e todas as frações (números quebrados), mas também por aquelas magnitudes marcados por uma 'denominação' (ou seja, um expoente inteiro), que Chuquete substitui por números 'cossic' – relativo à Álgebra (onde é suficientemente notável que os *números* ordinários recebem a denominação de série de magnitudes e cossic é estendida para o infinito). Veja Gosselin, *De Arte magna* ... prefácio p. A iiij: valeu a pena exibir os números que eles chamam cossic: no outro lado, capítulo V, p. 4: nesta Arte cada quantidade é chamada de um número que, sendo composto de mônadas, compreendemos como se *fosse além de qualquer número* [tais como 'raiz' ou 'quadrado']. 'Frações' e 'números irracionais' também estão sob os 'números' assim definidos. (Nota 260, página 277).

[180] Diophantus parece atribuir como causa das unidades absolutas aquelas que têm pegado algo da unidade natural em si. Portanto, exatamente quando uma unidade é multiplicada com qualquer que seja o número, produz o mesmo número, então quando unidades são multiplicadas com qualquer espécie que quiser, surge a mesma espécie – p. 7 na edição de Bachet da Aritmética de Diophantus. (Nota 261, página 277).

[181] O termo 'coeficiente' originou como é bem conhecido, com Vieta, que falou de 'grandezas coeficientes', isto é, um 'gênero' de grandezas definidas que conjugadas com uma grandeza

'unidade' é a maneira com que Bachet declara o signo $\mathring{M}$ para números conhecidos supérfluo: 'quando ouvimos, número 6, não é evidente *pensar* imediatamente em 6 unidades? *Por que então é necessário dizer '6 unidades', quando é suficiente dizer 6*?[182] Esta distinção entre o 'dizer' (*dicere*) e o pensar (*cogitare*), que os antigos conhecem suficientemente bem na prática, mas nunca como princípio.[183] É expresso na notação *simbólica*, e, ambos asseguram a linguagem formal da álgebra para representação dos números em si. Agora, os 'números semelhantes' são concebidos como 'números ordinários' e, para compreensão do cotidiano que o efeito determina a formação dos conceitos, portanto, isso faz coincidir o 'número' como signo, especialmente no processo de cálculo das operações.

O novo conceito de 'número' já se fazia presente, embora não explicitamente, nas expressões algébricas e investigações de Stifel, Cardano, Trataglia, etc.[184] Esse conceito também era usado para justificar o tratamento de 'frações' como 'números racionais não-inteiros' e de 'números irracionais', etc.[185] Finalmente seu conceito de 'número' é capaz de obliterar a distinção tão fundamental da antiguidade, entre magnitudes geométricas 'contínua' e números divisíveis em unidades 'discretas'; isso permite, pela primeira vez, uma compreensão 'científica' do método de aproximação manuseado tão

---

'escalar' de grau inferior a grandeza desconhecida, isto é, os menores 'graus' são chamados de graus que passaram da ascensão a potência e transforma as grandezas em *espécies homogêneas* (isto é, surge a dimensão da '*potestas*' – *Isagoge*, Capítulo III, 6). (Nota 262, página 277).

[182] Tannery segue o exemplo de Bachet; cf., sua edição de Diophantus, Volume, I, p. 7, nota: 'não devemos usar o signo da unidade na tradução'. (Nota 263, página 278).

[183] Cf. Nota 36 e 81; também parte II, Pp. 130 f. (Nota 264, página278).

[184] Cf. P. 147; Nota 260; também nota 247. (Nota 265, página 278).

[185] Em *Universalium Inspectionum ad Canonem Mathematicum liber singularis*, Vieta chama frações impróprias como 'mônadas impuras' (por exemplo, pl.5); depois, as frações são chamadas por ele simplesmente de 'frações numéricas' (por exemplo, *De numerosa potestatum ad Exegesin resolutione* [1600], p. 7=ed. van Schooten, p. 173). Os números irracionais, ele chama – dependendo do lugar da terminologia antiga – 'números assimétricos,' em contraste com 'números simétricos'. Com números irracionais em mente ele introduz na Canon, pl. 14, sob o título de 'A proporção mais geral de números irracionais', seguindo designações relevantes de um procedimento de aproximações: por falta e por excesso, e aí há necessidade de acrescentar quantidades negativas ou positivas dependendo da situação; cf. Aristóteles, *Methaphysics* Δ 15, 1021 a 7. Porém, como Diophantus, Vieta não conhece números negativos, portanto, não pode ser representado na 'exegética' geométrica, e, que o paralelismo entre a Análise Geométrica e Aritmética deve sempre ser preservado. (Nota 266, página 278).

magistralmente por Vieta.[186] Nas últimas seções trataremos das consequências do conceito simbólico de número.

3 – A reinterpretação do tratamento geral como estudo universal no sentido da Arte Analítica

A espécie concebida como 'número algébrico' forma o objeto da 'Logística especiosa' que a 'zetética' utiliza. Um espécime de 'Logística especiosa' é oferecido no *Zeteticorum libri quinque* (*Os cinco livors sobre Zetética, 1593*); Vieta contrasta-os diretamente com a *Aritmética* Diophantina. Como vimos, em sua opinião permanece apenas no interior dos limites da 'Logística numerosa'. Para enfatizar o paralelismo nos dois trabalhos que Vieta concluiu no livro V de sua *Zetética* com o mesmo problema que forma a conclusão do livro V da *Aritmética* de Diophantus, Vieta disse: 'Diophantus apresentou seu último problema do livro V, então vamos deixar para o último problema de nossa Zetética, também o livro V'. Em outra parte do livro, ele considera uma série de problemas a partir do trabalho de Diophantus, e, nas soluções do IV, 1-3, ele recorre explicitamente a 'Análise Diophantina'. Porém, não podemos esquecer de que a Análise zetética inclui a 'arte analítica geral' que transcende a oposição 'Aritmética'/'Geometria', e, portanto é superior a categoria da *Aritmética* Diophantina. Não devemos esquecer de que a espécie serve como objeto de sua analítica 'geral', ou seja, *em seu caráter numérico*. Isto é precisamente o que constitui a diferença crucial entre a concepção de Vieta de uma Matemática 'geral' como disciplina e a ideia antiga de *katholou pragmateia* – um 'tratamento geral'. O caráter 'numérico' de espécie preserva ao mesmo tempo a posição de sua *pragmateia* com o sistema de 'Ciência', conferindo-o completamente um novo sentido.

No contexto da Ciência antiga, nas proposições 'gerais' – os axiomas por um lado e as proposições da teoria geral das proporções por outro – há uma

[186] Acima de tudo, no trabalho *De numerosa protestatum da Exegesin resolutione* (cf. Ritter, *Revue occidentale philosophique* ... X, pp. 383 ff.; Cantor, II², 640 f.). No capítulo 18 de *Variorum de rebus mathematicis responsorum, líber VIII*, Vieta em sua computação de π deu o primeiro exemplo de uma série de fatores infinitos (e convergente) (cf. Cantor, II², 594 f.; *Revue occidentale philosophique* ... X, pp. 410 f.). (Nota 267, página 278).

conexão possível e bem próxima com a disciplina ‘maior’, ou seja, está caracterizada com a ‘dialética’ platônica ou com a ‘primeira Filosofia de Aristóteles’. Para Aristóteles, eles formam não somente exemplos de ações de maneira em que a ‘primeira Filosofia’ trata do tema peculiar, mas forma uma parte do mesmo tema. Ele apresenta e responde afirmativamente, a questão do exame do ‘ser’ e do exame dos axiomas matemáticos devem se referir a uma simples Ciência, ou seja, a ‘primeira Filosofia’: ‘Devemos dizer se diz respeito ao tão chamado axiomas da Matemática [cf. *Posterior Analytics* a 10, 76 b 14 f.] e com o ‘ser’ que pertence a uma ou diferentes Ciências. *Está claro que o exame dessas coisas pertence a uma [Ciência], que é a mesma dos filósofos*’: ‘estes são, o estudo daqueles que querem conhecer o ‘ser’, na medida em que é o ‘ser’’ – *Methaphysics* Γ 3, 1005 – 19-22. Visto que os matemáticos utilizam proposições ‘gerais’ com referência a objetos que ocorre antes das proposições iniciais e os ‘filósofos’ considera-os como primários, ou seja, não como eles podem ser derivados de linhas, ângulos ou números, mas como eles são comuns a todos que são contáveis ou medidos *em geral*, e, consequentemente como eles determinam o caráter geral da contagem, medida ou pesos de coisas desde que sejam *seres quantitativos*: ‘Uma vez que, mesmo com as noções comuns sendo utilizadas pelos matemáticos de maneira especial, devem pertencer a primeira Filosofia investigar suas noções comuns’ (*Methaphysics* K 4, 1061 b 17 ff.). Isso pode ser ilustrado pelo axioma: ‘Se de quantidades iguais são subtraídas partes iguais, o que permanece são iguais’; o que representa esta parte da ‘noção comum é aplicável a tudo que é quantitativo,’ (cf. *Posterior Analytics* A 10 76 b 20 f. A 11, 77-30 f. noção comum 3 de Euclides I). Similarmente, Proclus refere a esta doutrina aristotélica e enfatiza a teoria geral de proporções perguntando quem seria o homem, ao contrário, de um ‘geômetra’ e um ‘aritmeticista’, a ser capaz de demonstrar, por exemplo, a proposição ‘que a alternância [dos membros do meio] novamente produz uma proporção’ usando magnitudes geométrica *ou* números (em Euclides 9, 2-8), isto é, qual homem pode estudar alternância e similares em ‘geral’ e ‘em si’: ‘que em seguida, passa a conhecer a alternância, seja em magnitudes, seja em números, em seu próprio interesse...?’. Sua resposta é que esta maneira de pesquisar pertence a uma Ciência independente, e, que é muito *superior* em categoria a Geometria e Aritmética: ‘o conhecimento

destas coisas pertence a uma Ciência que está além da Geometria e da Aritmética' e a 'ascensão a partir da compreensão do mais parcial ao mais universal', isto é, pelo qual subimos até a Ciência do 'ser' na medida em que é o 'ser'' (cf. República 534 E). Nos séculos XVI e XVII, estas palavras de Proclus adquiriram significado extraordinário, visto que, vieram a ser amplamente conhecido, primeiro por meio da edição de Grynaeus do comentário de Euclides (1533), e, principalmente através da tradução de Barocius de 1560, eles foram normalmente compreendido como *Mathesis Universalis*. Proclus refere precisamente a esta Ciência superior quando menciona 'teoremas comuns, que são gerais e surge a partir de uma Ciência que compreende todo conhecimento matemático, juntos num só'. Barocius acrescenta, como em outros lugares, uma nota na margem dizendo '*Divina Ciência,*' claramente baseando na passagem de Proclus: 'se revela nos próprios raciocínios, *a verdade sobre os deuses* e a visão das coisas que são'.[187] É significante que já em 1577, Gosselin (*De Arte magn*a, p. 3) tinha chamado *álgebra*, 'rainha das Ciências' e '*arte divina*'.[188] Mesmo Descartes, que perseguindo essas reflexões o levou a reconhecer em Pappus e Diophantus traços de uma 'verdadeira Ciência' lembrando do pensamento de Proclus nos comentários de Euclides. No Regulae (IV, Ad.-Tannery, X, 377 f), ele investiga 'precisamente o que é que todos compreendem pelo nome de '*Mathesis*' e porque não somente exatamente aquelas mencionadas [Aritmética e Geometria], mas também astronomia, música, óptica, Mecânica e muitas outras

[187] O próprio Proclus, com certeza, é da opinião de que um todo e a Matemática tratam somente do estudo das primeiras coisas. A Matemática representa (o vínculo comum dos objetos da aprendizagem), que é de que fala Epinomis (991 E f.) e que inclui não somente, como Eratosthenes pensa, a teoria geral das proporções, mas precisamente todas as premissas Matemáticas 'gerais', isto é, todos os 'axiomas' da Matemática. A 'Dialética' como base fundamental) de toda Ciência (cf. Platão, *Republic* 534 E) diz-se realizar uma classificação ainda maior; a maior categoria, finalmente, pertence ao intelecto em si. Deve-se mencionar aqui que a própria tradição antiga preserva a memória de uma conexão original entre a teoria geral de proporção e a Aritmética (ou Logística). Portanto, Eutocius, em seu comentário sobre as *cônicas* de Apollonius, observa no Bk. I Prop. XI (J.L. Heiberg, *Apollinii Pergai quae graece exstant cum commentariis* [Leipzig, 1891-1893], II, 220): 'não deixe de incomodar aqueles que produzem a notícia de que isto é demonstrado através dos números; pois os antigos, sendo matemáticos, usaram tais demonstrações [no sentido de envolver uma teoria *geral*] do que [especialmente] como aritmético, *por causa das proporções* e porque a coisa procurada é [realmente] aritmético. *Para razões, tamanhos de razões e multiplicações, primeiramente existe e com números* e por meio destes com grandezas, como ele disse [a saber Archytus; cf. Nicomachus 7, 1 f., Hoche e Diels, I ³, 331, 7 f.]; 'para esses objetos parece ser cognato'. (Nota 268, página 279).

[188] Petrus Ramus usou Proclus-Barocius extensivamente, mas com grande falta de compreensão para compor o livro III de seu *Scholae mathematicae; cf. Scholarum mathematicarum libri unus et trigunta*, pp. 76 ff. (Nota 269, página 279).

Ciências [cf. a enumeração em Proclus, 38 11 f.] que são *partes* da Matemática'. Claramente, ele continua, atacando Proclus ou Barocius: 'Certamente, aqui não é suficiente *olhar a origem da palavra*' (cf. o título de Barocius sobre Proclus 44, 25 ff. Capítulo XV. '*De onde o nome Matemática surge*'). Pois, desde que o nome '*Mathesis*' não significa mais do que *disciplina* [científica], pode de fato, com mérito como a própria Geometria, ser chamada de Matemática'; cf. Barocius: 'Quando os pitagóricos viram que tudo que é chamado de *Mathesis, isto é, disciplina* é reminiscência...' (Proclus 45, 5-7). Contudo, ninguém mesmo com menor escolaridade pode facilmente distinguir aspectos matemáticos de qualquer problema em relação a outras Ciências, e, depois de um estudo atento torna-se claro que todas aquelas coisas e apenas aquelas coisas em que 'ordem e medida' podem ser, a partir do objeto da *Mathesis*, mas isso não tem importância se lidam com números, figuras, corpos celestes, tons, etc. Como Descartes disse: 'torna-se claro que deveria haver *alguma Ciência geral* que explicaria tudo que poderia ser investigado em relação a ordem e medida quando estes não são atribuídas qualquer material especial, e, que essa Ciência foi nomeada de – *usando uma palavra antiga, mas que é apropriada e de uso aceito recentemente – Matemática Universal*, pois nela estava contida tudo em razão da qual outras Ciências são chamadas partes da Matemática' (cf. A tradução da página 181 de Barocius de Proclus 7, 18 f.).[189] 'Alguns homens de dons notáveis, disse Descartes, já tentou trazer para a vida', esta 'disciplina geral', não outra, senão a 'verdadeira Ciência' dos quais os vestígios podem ser traçados em Pappus e Diophantus: 'pois a arte era vista como nada mais do que aquilo que é chamado pelos bárbaros pelo nome de *álgebra*'. Descartes está, sem dúvida, pensando em Cardano, Tartaglia, Bomblelli, além do mais em Clavius (cuja *álgebra* [1608], provavelmente[190] torna-se familiar para Descartes no seu tempo de escola), e, possivelmente também

[189] Cf. Regra XVI (X, 455 f.): 'devemos notar que nessas circunstâncias não abstraímos menos a partir de números em si em relação a figuras ou qualquer outra coisa'. A teoria da reminiscência mencionada por Proclus parece ecoar nas palavras de Descartes: as primeiras sementes, por assim dizer, da verdade estão localizadas na mente do homem por natureza (X, p. 376); mas estas palavras fazem alusão às noções inatas do estoicismo. Uma fonte adicional pode ser visto em Vanini, *De admirandis naturae reginae deaeque mortalium arcanis libri IV* (*livro IV sobre o maravilhoso mistério da Natureza, a rainha e a deusa dos mortais*) [1616], p. 407 (cf. A. Espinas, 'Descartes de 16 até 29 anos', *Séances et travaux de l'académie des sciences morales et politques, Compte rendu* [1907], pp. 114 f.), bem como em Ficino e Pico della Mirandolla (cf. M. Meier, Descartes *und die Renaissance* [1914], pp. 26 ff. (Nota 270, página279).

[190] Cf. Descartes, Ouvres, Ad.-Tann. XII, 23 e X, nota 156. (Nota 271, página 280).

Ghetaldi,[191] Cataldi,[192] e Stevin.[193] Sobre o seu relacionamento e a intensa controvérsia com Vieta desencadeada durante a vida de Descartes.[194] Isso, pelo

[191] Cf. O final da Nota 275. (Nota 272, página 280).

[192] As seguintes palavras de Ghetaldi são relevantes aqui: *Trattato dell' - Algebra proportionale, etc. (1610); Algebra discorsiva numerale, et lineale,* etc. (1618); *Regola della quantità, o cosa di cosa (1618); Nuova Algebra proportionale,* etc. (1619). O próprio Cataldi foi influenciado por Bombelli. (Nota 273, página 280).

[193] Sobre o relacionamento entre Stevin e Descartes veja a nota 306. O mestre calculista alemão Faulhaber de Ulm (cf. Final da Nota 306; também as notas 313 e 319) e Peter Roth de Nuremberg (cf. Descartes, *Ouvres*, Ad.-Tann. X, 242) deveria também ser mencionado nesta conexão. (Nota 274, página 280).

[194] Cf. Especialmente *Ouvres* de Descartes, Ad.-Tann., I, 245, 479 f. II, 82, 193, 524; IV, 228; V, 503 ff. Veja também Ch. Adam, *Vie et oeuvres de Descartes* (Vol. XII de Ad.-Tann. ed., pp. 211 ff.) que não faz justiça a Vieta e G. Milhaud, *Descartes savant* (Paris, 1921), pp. 244 ff. A disputa no que diz respeito a relação de Descartes e Harriot (cf. Ad.-Tann., II, 456 e 4567 ff.) é inútil na medida que o próprio Harriot é, em tudo, essencialmente sobre esse tema, dependente de Vieta, embora, isso possa não ter sido conhecido pelos contemporâneos de Descartes. Walter Warner, que publicou o trabalho *Manuseio Prático da Arte Analítica para Resolver Equações Algébricas por um novo e conveniente método geral* de Harriot em 1631 corretamente enfatiza a importância de Vieta em fundamentar a Arte 'analítica'. Enquanto Vieta trabalhou seriamente na restauração da Análise antiga que ele tinha estabelecido como sua própria tarefa e transmitiu a nós a Arte, tanto que acrescentou e adornou com descobertas, especialmente àqueles pertencentes a sua própria e nova Arte. Mas, ao mesmo tempo, ele concede a Harriot importância bem maior na elaboração dessa disciplina do que ele realmente merece. Harriot que assumiu a terminologia de Vieta em sua *totalidade* distinguiu (p. 2, Def. 6-7; também p. 3, Def. 11) logicamente, somente duas partes da 'analítica': 'zetética' (*como análise – ou resolução – lógica ou discursiva*) e 'exegética' (*como análise – ou resolução – operatica*). Sobre Porística ele fornece uma complicada explicação, que está baseado na definição correspondente de Vieta que objetivava, de qualquer maneira, excluir a 'porística' da estrutura da 'analítica' – pois não há necessidade devido a distinção entre 'teorema' e 'problema'. A 'exegética' em si é para Harriot, assim como para Vieta duplo, exceto de que a compreensão antiga dos dois tipos possíveis de solução, o 'aritmético' e o 'geométrico' estejam na base dos dois tipos da 'Logística', ou seja, 'numerosa e a especiosa'. Assim, ele estabelece as bases para posteriormente recorrer a incompreensão de Vieta em conformidade com sua espécie que significam supostamente formações 'geométricas'. Harriot está muito longe de atribuir o que Vieta propõe sobre a 'Logística especiosa', e, portanto a 'analítica' em geral, que fundamenta a posição de uma disciplina 'geral' compreendendo Aritmética e Geometria. Além do mais, Harriot parece desconhecer a origem Diophantina do termo 'espécie' em Vieta, que ele pensa deve ser derivado de uso legal (Def. I, p. 1), embora devamos lembrar que a origem de certas partes do texto *Artis Analyticae Praxis* pode ser do editor, Warner. Wallis, a propósito concorda com a opinião de Harriot, cf. sua *Algebra, Opera*, II (1693) p. 70. Portanto, para Harriot, a 'Exegética especiosa' permanece confinado a equações lineares e quadráticas. Ele mesmo tratou somente da 'Exegética numerosa' (p. 3, Def. 10): a Arte dessa exegética [numérica] é um caso especial equipado com suas próprias regras e preceitos para a prática, que são repassadas no tratado presente, *que é a totalidade da exegéitca*. Desta 'exegética numérica' (que estritamente falando, corresponde a '*rhetic*' de Vieta Warner disse no seu prefácio que Harriot deu uma nova forma ao que Vieta criou, como se fosse uma nova analítica, pois nessa 'invenção da exegética', Harriot 'melhorou a exegética' produzindo algo como um 'novo Vieta,' ou seja, com relação a certeza e conveniente prática de sua Arte. De fato, simplificando a notação, Harriot tinha transformado a 'exegética numérica', *antes* de Descartes, num 'instrumento de calculação' útil (como uma 'Arte servindo como ferramenta para toda Matemática', como Warner disse), que realmente nunca foi feito por Vieta. Mas, o preço desse avanço é a omissão de assuntos fundamentais; a técnica simbólica de calculação já era'natural' para Harriot. A simplificação requerida na exegética é, acima de tudo, uma mudança na 'Logística especiosa', ou seja, abandonando as desajeitadas designações da espécie em favor de um simbolismo empregando letras exclusivamente (notação somente com letras), como Warner disse. Mas, com a introdução desse conveniente simbolismo, Harriot desistiu da notação que fundamenta Vieta, ou seja, 'leis homogêneas'. A partir desse ponto

menos, está claro: Mesmo se Descartes, conscientemente ou não continua o trabalho de Vieta, ainda a 'álgebra geral' que ele tem em mente[195] é precisamente aquela 'nova' álgebra 'pura' *que Vieta estabeleceu primeiro como* '*arte analítica'.* Portanto, o caráter universal da Análise de Vieta foi enfatizado por van Schooten em suas notas do *Isagoge* (cf. sua edição de 1646 de Vieta, pp. 545 f.). Ele compreende-o como 'doutrina das quantidades' gerais como '*Mathesis Universal*' no sentido de Descartes: 'tudo que está no âmbito da '*mathesis*' desfruta do nome *quantidade* e é precisamente aquilo que torna aparente somente por meio de *equações e proporções.* Portanto, a Análise de Vieta deve vir sob este nome como sendo a maior universalidade possível.[196] Tanto a Ciência universal de Vieta, como aquelas de seus contemporâneos indicam realização completa da *pragmateia kathoulou* ('teoria geral das proporções' – tratamento geral) da antiguidade, e, tem, como vimos, características inerentemente numéricas. Contudo, seu objeto, sua generalidade são determinados 'aritmeticamente'. Como Platão tentou uma vez capturar a 'maior' Ciência 'aritmologicamente', e, com isso ultrapassou os limites estabelecidos para o *logos,* isto é, a interpretação 'Aritmética' da magnitude geral conduz a um tipo especial – algébrico – modo de cognição ou mais exatamente, a concepção de uma Matemática simbólica. Embora o sucesso na fixação do quadro de referência em estabelecer a plenitude interna que está em falta, mesmo com a chegada da '*Mathesis Universalis*' de Descartes. Pois, este também vê, a '*Mathesis Universalis*', como primeira e última

---

de vista a técnica simbólica torna-se, tomadas por si só, opaca; posteriormente, Descartes em sua Análise 'geométrica', em particular, compartilha com essa opacidade. O trabalho de Harriot foi antecipado em 1630 no quinto livro *De resolutione et compositione mathematica* de Marino Ghetaldi, que, a propósito, também apareceu como 'obra póstuma,' embora já tivesse sido anunciado em V*ariorum problematum collectio* de 1607 – Ghetaldi morreu em 1627; esses livros assemelham aos de Harriot e são dependentes da 'analítica' de Vieta, sem compartilhar suas pressuposições e princípios fundamentais. Para Ghetaldi, assim como para Harriot, a 'lei homogênea' não é mais um fator de controle. É para ser notado que Ghetaldi produz a distinção entre Análise 'teórica' e 'problemática', como definido por Pappus, mais corretamente do que Vieta. Mas, ele também não fez uso real dessa distinção. Para ele, assim como para Descartes, o ponto essencial é apenas aquelas em que a calculação algébrica indica a *maneira* pelo qual a solução (ou prova) é encontrada em cada caso: para resolução procedemos por meio de *espécies imutáveis* e não por meio de números que são *passíveis de mudança* por qualquer operação a que eles são submetidos, isso, em si, deixa vestígios claros de que o retorno a síntese não é difícil. (Nota 275, página 280).

[195] Cf. As observações de seu amigo Beekman que é da mesma data do *Regulae* (Ad.-Tann. X, 33): Descartes disse que descobriu a *Álgebra geral*. (Nota 276, página 283).

[196] Nessa conexão van Schooten naturalmente refere ao *Discurso do método* de Descartes (Ad.-Tann., VI, 551): 'observei que aquelas Ciências Matemáticas especiais, embora elas lidam com vários objetos, todas coincidem com isto, ou seja, são considerados nada mais do que determinadas *relações e proporções* que foram encontradas nelas. (Nota 277, página 283).

'arte da descoberta', e, acima de tudo, como uma 'arte *prática*.'[197] No entanto, ele atribuiu uma *independência* interna e externa que a 'analítica' de Vieta ainda não possuía. Mas, acima de tudo – é isso que fornece a ele o extraordinário papel na história da origem da Ciência moderna – ele foi o primeiro a atribuir à 'álgebra', em sua '*ars magna*', *um lugar fundamental no sistema de conhecimento em geral*.[198] De agora em diante, a *ontologia*, que é fundamental na Ciência dos antigos é substituída por uma disciplina simbólica cujas pressuposições ontológicas são deixadas sem esclarecimento. Esta Ciência, que visa primeiramente, a compreensão da totalidade do mundo, amplia lentamente seus

[197] Veja a carta de Descartes para Mersene de março de 1637 (Ad.-Tann. I, 349): 'Eu não escrevi um 'Tratado sobre o Método', mas um 'Discurso sobre o Método', que o mesmo do '*Preface or Announcement concerning Method*', para mostrar que não foi o meu plano ensiná-lo, mas somente discursar sobre. Pois, como se pode ver, a partir do que tenho dito, [o Método] *consiste mais de uma prática do que de uma teoria* (cf. Ad.-Tann. I, 370). (Nota 278, página 283).

[198] Isso pode ser visto com o máximo de claridade no *Regulae*, cujo período é de cerca de 1628. Nos últimos escritos de Descartes, a base de seu sistema inteiro torna-se cada vez mais velada. Na Regra IV (Ad.-Tann., X, 374), Descartes disse em referência a 'outras disciplinas' que seja substituída por '*Mathematica vulgaris*', ou seja, '*Mathesis Universalis*': '*Estou persuadido que isto é mais poderoso do que todos os outros conhecimentos repassados para nós pela atividade humana, na medida em que ela é a fonte de todas as outras*'. Na regra XIV (p. 439.), lemos: em todo raciocínio, sabemos a verdade *somente por comparação*. Por exemplo: todo A é B e todo B é C, então, todo A é C. Aqui, o que é *procurado* e o que é dado são comparados um com outro, ou seja, A e C são comparados em relação ao B, etc. Mas, porque, como temos frequentemente advertido, as formas dos silogismos não nos ajuda perceber a verdade das coisas, isto é, o leitor poderá rejeitá-lo totalmente e conceber que *todo conhecimento* que não é obtido por uma intuição pura e simples de uma única coisa separada inteiramente *como sendo obtido por comparação de duas ou mais coisas com um outro. De fato, toda a tarefa da razão humana consiste em preparar esta operação*. Pois, se a verdade não é vista 'imediatamente', então o 'auxílio de uma Arte' é necessário para obter a verdade. Esta Arte consiste essencialmente na transformação de 'relações e proporções' (relações e proporções, Regra XVIII, 462 II. Regra VI, 385, I, f.) em conformidade com a 'natureza comum' de cada caso 'do que é procurado' e 'do que é dado' que se distribui ao longo do que é procurado e do que é dado, 'dessa forma uma igualdade entre o que é procurado e o que é dado aparece claramente.' Cf. 447: Desejamos simplesmente reduzir proporções, porém do que estão envolvidos, num ponto em que, o que é desconhecido é encontrado, pois é igual a algo conhecido. *Isso detém todas as questões e investigações possíveis*. Cf. Regra VI, 384 f. Também o início da Regra XVII; além do mais a designação de sua Arte como 'Álgebra geral', transmitida por Beekman (X, 33), por meio do qual Descartes atingiu uma Ciência geométrica perfeita, pois, com isso é possível atingir todo conhecimento humano (X, 331-332); cf. o título planejado para o *Discurso do método.* Descartes forneceu em uma carta a Mersene em março de 1636 (1, 339): o projeto de uma Ciência universal que é capaz de aumentar nosso conhecimento da Natureza em seu grau maior de perfeição. Para além da *Dioptrics (estudo da refração da luz), The Meteors (os meteoros) e a Geometria*, onde o mais intrigante assunto da Ciência universal que o autor quiser propor e mostrar pode ser explicado de tal maneira que todos aqueles que nunca estudaram possam compreendê-los. Em relação ao tipo de representação simbólica, no *Regulae* de Descartes, ainda não está claro qual será usado. Com a passagem citada de *Regulae*, Nicolaus de Cusa em *De docta ignorantia (sobre a ignorância da aprendizagem)*, no capítulo I, comparamos: de fato, todos que conduzem investigações, julgam que é incerto investigar por comparação, pois as suposições são determinadas na forma de proporção. Portanto, cada pesquisa é comparativa e usa proporção [isto é o que significa analogia]. (Nota 279, página 283).

sistemas da Física Matemática. Com esta disciplina, as coisas do mundo não são mais compreendidas como coisas contáveis, nem o mundo em si é compreendido como uma *taxa* determinada pela ordem dos números; mas, a *estrutura* do mundo é capturada por meios de cálculos simbólicos e compreendido num *percurso* '*legitimamente*' ordenado *de 'eventos'.* A mesma Natureza do mundo que é compreendida pelo homem é doravante guiada pelo conceito de 'número' simbólico, um conceito que determina a moderna ideia de Ciência em geral.

O conceito simbólico de 'número' aparece pela primeira vez, na forma de espécie, na 'analítica geral' de Vieta. Ele está na origem dessa rota que leva, *via* características universais de Leibniz[199] diretamente para a teoria da 'Logística' moderna (isto é, aquele ramo da Matemática que lida com os fundamentos da Matemática). A condição de todo esse desenvolvimento é a transformação do antigo conceito de *arithmos* e sua transferência para uma nova dimensão conceitual. A modificação profunda que isto envolve e os meios e objetivos são mais bem caracterizados por uma frase, previamente citada, no final do *Isagoge* que expressa o último problema, ou seja, *o* problema adequado à sua 'arte analítica': 'A arte analítica apropria para si, por direito, a honra de tratar dos *problemas dos problemas*, que é: NÃO DEIXAR NENHUM PROBLEMA NÃO RESOLVIDO.

G. Tradução do conceito de número em Stevin

Ao contrário de Vieta, que é a princípio conservador, Simon Stevin (1548-1620)[200] decididamente prefere novas abordagens e teses não usuais. Enquanto Vieta mantém o vínculo com o tradicional e o seu estilo de jurista está envolvido em todos os seus escritos matemáticos e astronômicos, ou seja, o seu trabalho preserva o espírito recentemente ressuscitado do mundo antigo, publicando seus

[199] Cf. Ad. Trendelenburg, '*Über Leibniziens Entwurf einer allgemeinen Characteristik,' Abhandlungen der Wissenschaften zu Berlin, 1856=Historische Beiträge zur Philosophie (1867),* III, pp. 1-47. (Nota 280, página 285).

[200] Uma Análise abrangente de sua vida e seu trabalho são dados por H. Bosmans no artigo 'Stevin' *of the Belgian Biographie Nationale*, Vol. XXIII (1924), pp. 884-938. (Nota 281, página 285).

trabalhos em Latim, Stevin conscientemente estabelece uma ruptura com a forma tradicional de Ciência e introduz sua 'prática' comercial, financeira e da experiência[201] com engenharia a serviço de suas preocupações 'teóricas' – inversamente, ou seja, sua 'teoria' é colocada para ser usada em suas 'atividades práticas' – e como um Fleming (Holandês antigo), publica seu trabalho primeiro em Flamengo e, logo a seguir, parte de seu trabalho é traduzido por ele mesmo para o Francês.[202] Este contraste na maneira pessoal, no estilo de suas atividades é atribuído a sua avaliação do modelo antigo, embora Stevin também esteja possuído pela ideia de 'renovação'. Ele lançou uma imagem especial de uma 'época da sabedoria', ou seja, 'século da sabedoria', que já existiu e que deve ser trazido de volta. No primeiro livro de *Geographie*,[203] Def. VI (ed. Girard, 1634, II, pp. 106-128), Stevin trata longamente da segunda 'época da sabedoria'. Ele define: 'chamamos época da sabedoria, a época em que os homens tinham um conhecimento maravilhoso da Ciência, que reconhecemos sem deixar nos enganar por certos signos, embora sabendo quem fossem, ou em que lugar ou quando' (p. 106, coluna 2). Nas observações que seguem Stevin esboça no

[201] Stevin foi fortemente influenciado pela *Algebra* de Bombelli, além disso, era especialmente *expert* em técnicas hidráulicas e realizou serviços apropriados a interesses de Maurice de Orange. Além disso, ele foi oficial do exército Holandês e controlador das finanças (cf. Bosmans, p. 888). (Nota 282, página 285).

[202] Uma exceção surge na maior parte da *Arithmetique* escrito em Francês (1585), e, em particular, também no *Apêndice sobre Álgebra* de 1594, que contém uma regra geral da solução de equações numéricas de qualquer grau (ed. Girard, I, pp. 88 f.). O *Apêndice de Álgebra* foi traduzido posteriormente em Flamengo por Stevin (cf. Bosmans, pp. 900 ff.). Os escritos de Stevin continha na edição francesa, seu trabalho completo, publicado em 1634 por Girard, que pôde, textualmente falando, ser dividido em três grupos: (1) aqueles escritos ou traduzidos para o Francês pelo próprio Stevin ao qual pertence, acima de tudo, *a Arithmetique*; (2) aqueles traduzidos por Jean Tuning sob a supervisão de Stevin, ou seja, uma parte das *Memoires Mathematiques*, projetado para Maurice de Orange. (Estes apareceram pela primeira vez em Flamengo, Francês e uma versão em Latim em 1608, mas a impressão já tinha começado em 1605. Da versão em Latim, a maior parte foi feita por Willebrord Snel e a menor parte por Hugo Grotius); (3) os trabalhos traduzidos pelo editor, Girard, especialmente *l'art Ponderaire* (*A Arte da Pesagem*, isto é, Estática), além disso, a *Geographie* e a *Astronomie*. As traduções de Girard são bastante confiáveis; suas próprias adições são indicadas como tal; o pensamento de Stevin é, em qualquer caso, apresentado exatamente, embora Girard tenha se permitido a resumir parte do trabalho (cf. Bosmans, pp. 889; 914 ff.; 924 ff.). Citamos a *Arithmética* de acordo com a primeira edição de 1585 (*L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges, Leyden*), agora outros trabalhos já estão de acordo com a edição de Girard de 1634. [Uma tradução em Inglês: *O Principal Trabalho de Simon Stevin*, Vol. I Introdução Geral em Mecânica; Vol. II A, B, *Mathematics*; Vol. III, Astronomia e Navegação – editado por E. Crone, E. J. Dijksterhuis, R. j. Forbes, M. G. J. Minnaert, A. Pannekoek; Amsterdam, 1955-1961]. (Nota 283, página 285).

[203] A segunda parte da *Geographie* é formada pela *Cosmographie*, cuja primeira parte (trigonometria) contém a *Doutrina dos Triângulos* e cuja terceira parte trata da *Astronomia*. O terceiro livro de *Astronomia* é dedicado a uma apresentação do sistema Copérnico. (Nota 284, página 286).

horizonte, dentro do qual a Ciência do século XVII desenvolve e estabelece pressuposições que forma a base da Ciência moderna em geral: '... Tornou-se uma questão de uso comum chamar a idade bárbara, o tempo que se estende desde cerca de 900 ou mil anos até cerca de 150 anos atrás, visto que os homens foram submetidos nesses 700 ou 800 anos na condição de ignorância sem a prática da leitura e da Ciência – condição que teve sua origem na queima de livros por meio de problemas, guerras e destruições; depois esses assuntos, com trabalho enorme, poderiam ser restaurados ou quase restaurados no sentido de recuperar o seu estado anterior; embora o que precede tudo isso que foi mencionado poderia se chamar como uma época da sabedoria, todavia não consentimos essa tal definição como época da sabedoria*, visto que ambas em conjunto são nada mais do que a era dos bárbaros* em comparação àqueles momentos em que declaramos que [isto é, a época da sabedoria] existiu, sem dúvida nenhuma'. Portanto, a 'era dos bárbaros,' se estende 'desde a época dos gregos até o presente' (p. 108, coluna 2). Para Stevin, os 'sinais' que indicam em épocas anteriores que uma 'era de ouro' (*aurea aetas*) da Ciência realmente existiu sãos as seguintes:

1. Os traços de um conhecimento astronômico perfeito encontrado em Hipparchus e Ptolomy, cujos escritos ele compreendeu como mero 'vestígios' de conhecimento primitivo que permanece como estavam antes (p. 107, coluna 1). Pois, no seu tempo 'grandes experiências e entendimento do percurso dos corpos celestes aproximaram-se da extinção' (p. 106, coluna 2). Em 'determinados escritos na língua *árabe*' (p. 106, coluna 2), que Stevin considera ter sido corrente já *antes* de Ptolomy, indica essa direção.[204] Sobre a teoria heliocêntrica se diz ter tido origem na antiguidade; mesmo Aristarchus de Samos, ele pensa, dificilmente compreendeu mais do que isso.

2. A *Álgebra*, que se familiarizou por meio de textos arábicos e que representa um dos estranhos 'vestígios' da 'época da sabedoria.' Nenhum traço disso pode ser encontrado nos escritos de Chaldaeans, nos Hebrews, nos Romanos e mesmo nos gregos, pois, como Stevin disse '*Diophantus é moderno*' (p. 108, coluna 1). Stevin tem uma opinião e definição própria acerca das razões

[204] Sobre este ponto, como em muitos outros Stevin refere às comunicações de Joseph Scaliger. (Nota 285, página 286).

da falta da álgebra, especialmente entre os gregos, que será tratada mais de perto posteriormente.

3. A evidência da origem *estrangeira* da Geometria Grega. Nesse ramo tradicional de estudo é, de acordo com Stevin, realmente mais confiável. Os livros de Euclides nos passam 'algo admirável, e, é extremamente necessário ver e ler, ou seja, *a ordem do método de escrever sobre Matemática* é o que se refere ao que foi mencionado sobre época da sabedoria' (p. 109, coluna 2).

4. As informações sobre altura das nuvens**,** que aparece em um trabalho *Árabe* que Stevin não hesita em remontar a Ciência da 'época da sabedoria'.[205]

5. A 'alquimia', que foi desconhecida pelos gregos e para Stevin, o representante mais *expert* foi Hermes Trismegistos![206] [207]

Sobre as pressuposições de que a habilidade humana para conhecer não tenha sido mudada desde aquele tempo, Stevin projeta um plano geral para recuperação gradual do conhecimento da 'época da sabedoria'. Seu plano é composto de 4 artigos e representa o primeiro projeto de 'pesquisa organizada' (II, p. 110 ff.), veja quais são:

1. Muitas *observações* (especialmente em astronomia, 'química' e medicina) devem ser feitas, e isso deve se fazer por muitas pessoas vivendo em muitos pontos diferentes da terra e pertencendo a nações tão diferentes quanto possíveis (cf. Bacon, *The Great Instauration*, Parte 3, início do *Preparative toward a Natural and Experimental History*).

---

[205] Cf. No início do terceiro livro de *Geographie*, II, p. 137, colina I. Stevin diz que o assunto desse livro se deve a um trabalho de Petrus Nonius, ou seja, *De crepusculis líber unus* (1542) que, por sua vez, representa uma ampliação do trabalho correspondente de Alhazen (isto é, Ibn al-Haitham, *De crepusculis et nubium ascensionnibus liber unus* [Um livro sobre o amanhecer, entardecer e dos levantes das nuvens] *em Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem*, nunc primi editi ... a Federico Risnero [Basel, 1572], pp. 283-288). (Nota 286, página 286).

[206] Apesar do fato de que é instável saber de qual nação ele era e em que época viveu, porém era considerado muito antigo (p. 109, coluna 2). Com referência a Arte de fazer ouro atribuído aos alquimistas, Stevin disse: 'tal abuso deve ser colocado na porta dos violadores daquela inesgotável Ciência [isso é, química], não na porta da química'. O ponto de vista de Stevin desta Ciência – que realmente significa química – estava destinado a assumir o lugar da física escolástica tradicional. (Nota 287, página 286).

[207] Ninguém menos do que Hugo Grotius, que conheceu Stevin pessoalmente, compartilhou seu ponto de vista sobre 'época da sabedoria'. Stevin solicitou para ele um tipo de memorando sobre o testemunho em favor da existência de tal era. Está impresso na edição de Girard, II, p. 110. Cf., também Bacon, O novo *organon*, I, *Aphorism* 122. (Nota 288, página 187).

2. O último é possível somente se a comunicação e a exploração (primeiramente matemático) das observações que existem não serem em Latim, pois é uma língua acessível a poucos, exceto é lógico a sua própria língua mãe – algo que não ocorreu desde os tempos dos gregos.

3. Contudo, nem todas as linguagens são adequadas para esta proposta.[208] Portanto, devemos primeiro de tudo determinar em que consiste a virtude de uma linguagem. A linguagem grega foi muito apropriada para a Ciência Matemática, que é o porquê, mesmo agora, muitos termos matemáticos que estão em uso são de origem grega.[209] A razão disto é que as palavras gregas são muito fáceis de serem *compostas*. Portanto, a esse respeito a língua grega é superada pelo Flamengo, visto que o número de palavras que contém uma sílaba e, em consequência disso, são especialmente adequados, pois fazer composições torna-se muito melhor nessa língua; Stevin se compromete a fornecer prova estatística dessa afirmação.[210]

4. Em todas as apresentações científicas bem como em todas as atividades de ensino, a ordem correta deve ser preservada. Aqui o procedimento da disciplina Matemática é exemplar: 'não tenho notado algo melhor [ordem] para os assuntos da Matemática do que a da época da sabedoria' (p. 110, coluna 2). Para Stevin, a ordem correta é expressa no modo apresentação dos elementos de Euclides que ele chama de '*ordre naturel*' (p. 125, coluna 2).

Stevin, por um lado, empurra levemente para os lados a Ciência escolástica, e tem pouco respeito, até mesmo com a autoridade dos gregos e, por outro lado está sempre recorrendo à sua experiência prática; nesse sentido, ele é justamente o homem certo que vê na noção da época da sabedoria, a necessidade de investigar fatos tradicionais que agora podem ser reestabelecidos por meio de princípios básicos do ponto de vista das causas das verdades *primitivas* que podem estar contido neles, e com isso, também testar *conceitos* no que diz respeito a confiabilidade e utilidade. Agora, é sua característica, sempre

---

[208] Isto é um ponto que dificilmente me deixa esperançoso de que em algum dia ainda podemos alcançar essa época da sabedoria (p. 112, coluna I). (Nota 289, página 287).
[209] Visto que o Grego é uma língua de tal modo que aquele que aprende Matemática por meio dela, considera-se ter uma boa linguagem (p. 113, coluna 2). (Nota 290, página 287).
[210] Por essa razão Stevin ensina Matemática em sua própria língua em Leyden, onde ele mantém o título de 'Professor Holandês de Matemática', (Nota 291, página 287).

esboçar comparações desagradáveis entre as Ciências dos gregos e dos árabes. A razão básica disso é o *sistema digital e posicional* Árabe, que ele tende a ver como patrimônio da 'época da sabedoria'.[211] Visto que para ele é imensamente superior a notação grega. Na base do sistema digital Árabe, ele empreende uma crítica fundamental do conceito tradicional de '*numbered assemblage*' (números para contagem – *arithmos*), começando com o conceito de fato crucial, do 'um', da 'mônada' e das 'unidades'.

A definição I de sua Aritmética diz: 'a Aritmética é a Ciência dos números'. A definição II diz: 'número é aquilo pelo qual a *quantidade* de uma coisa é revelada'. Esta definição é seguida de uma explicação precisa no qual o caráter simbólico do conceito do novo 'número' aparece totalmente. A principal tese de Stevin é: 'que a unidade é um número'.[212] Ele declara (p. 2) que tem lido tudo que os 'antigos e novos filósofos' pronunciam sobre essa questão, bem como tem conversado com muitos estudiosos, não porque ele tem alguma dúvida a respeito dessa afirmação – definitivamente não, pois, estou tão certo disso, ou seja, é como se a Natureza tivesse-me dito com a própria boca – mas para estar armado contra todas as objeções. É geralmente declarado que a unidade não é 'número', mas somente seu 'princípio e começo'. Isso é completamente falso, pois, como Stevin argumenta: a parte é do 'mesmo material' do todo; a unidade é uma parte de uma multiplicidade de unidades; consequentemente a unidade é 'do mesmo material' da multiplicidade de unidades; 'mas o 'material' de uma multiplicidade de unidades é um 'número'; portanto, o 'material' da unidade, e então, a unidade é um 'número'. Aquele que nega este último passo pode ser comparado com alguém que nega 'que um *pedaço* de pão é pão'.

---

[211] Seu *Disme* (*A Arte dos Décimos*), no qual ele expõe cálculos com frações decimais, e, exige que, além disso, o sistema decimal seja usado por todas as ações de medidas, repousa, em última instância na noção de aplicabilidade universal da 'progressão décupla', ou seja, a progressão decimal que forma a base do sistema posicional Árabe, e, que Stevin sempre enfatiza (cf. II, p. 108, coluna 2; *Arithmetique*, p. 139). A propósito Vieta também (seguindo Regiomontanus que, por sua vez, depende de Peurbach) usou frações decimais em sua *Canon Mathematicus* (cf. Ritter, *Revue occidentale philosophique*..., X, PP. 251; 361; veja também Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, I³, 172-177). Mas, foi devido a Stevin que cálculos com frações decimais tornaram-se de uso em geral. (Nota 292, página 287).

[212] No final de sua *Aritmética*, pp. 202 f., Stevin resume as afirmações feitas em seu trabalho que não podem ser reconciliadas com a visão usual sob o título de 'teses Matemáticas'. A tese I é o que foi mencionado no texto. As teses foram precisamente mais demonstradas num trabalho especial – cf. *Arithmetique*, pp. 203 e 5. (Nota 293, página 287).

O que está acontecendo com este silogismo? Como os conceitos devem ser usados e interpretados e de que tipo eles são, se o argumento é coerente? A premissa decisiva é aquela em que o 'material da multiplicidade de unidades' é equivalente a um 'número'. Nesse ponto, Stevin simplesmente aceita a definição clássica de *números* como 'uma multiplicidade composta de unidades', mas, ele entende sua determinação conceitual em si, como o 'material' da coisa para ser definida[213] no mesmo sentido quando se fala do material de água ou de pão. [Pois, exatamente como aquilo que é a 'coisa' (material, substância) do pão é entendida por Stevin como idêntico com 'o que é', ou seja, pão, então o objeto pretendido por um conceito é compreendido por ele como um 'pedaço' do conteúdo conceitual considerado como uma 'coisa', um material, que é, por sua vez idêntico com o conceito em si, ou seja, com 'o que o objeto é']. Isso é relevante, pois, somente na base de tal interpretação está a primeira premissa do silogismo, segundo a qual a 'parte' é do mesmo material do 'todo'. Isso *não* significa que Stevin comete um paralogismo (raciocínio falso). A pressuposição fundamental que subjaz sua compreensão - embora ele dificilmente reconheça como tal – é precisamente a identificação do modo de ser do *objeto* com o modo de ser do *conceito* relacionado ao objeto. Isso significa que há uma imensa dificuldade com a ontologia antiga, ou seja, determinar a relação entre o 'ser' do objeto em si e o 'ser' do objeto no pensamento, é aqui (e noutros lugares) reconhecido como uma 'questão de percurso', cuja solução pressupõe extensão do significado, são simplesmentes ignorados na discussão. A *consequência* dessa solução é a compreensão *simbólica* do objeto pretendido, ou seja, uma compreensão em que sua objetividade real é posta como idêntica com o modo de ser de um 'objeto geral' ou em outras palavras, em que o objeto de '*segunda intenção*', ou seja, o conceito como tal é transformado num objeto de '*primeira intenção*'. Tal compreensão simbólica de *números e quantidades* é precisamente o que é *pressuposto* neste silogismo. De novo, o próprio Stevin confirma isso no primeiro livro de sua *Geographie* (II, p. 108).

[213] Portanto, não pode ter nada a ver com o conceito de *hyle* em Domninus. (Nota 294, página 287).

A verdadeira razão da afirmação de que a unidade não é um ‘número’, mas o *princípio*, a origem (*arche*) do ‘número’[214] – a afirmação dessa opinião é profundamente falsa e fatal em suas consequências – foi a ausência de uma *notação simbólica* real entre os gregos, a ‘ausência do equipamento necessário, ou seja, de códigos, que explica imediatamente o porquê os gregos não são aritméticos. Interpretaram erroneamente um sinal *chamado* ‘ponto’ (‘.’) que eles tinham herdado da ‘época da sabedoria’ e que foi idêntico com o sinal atual ‘0’, isso significa que eles tinham compreendido ‘ponto’ como – ‘unidades’, e consequentemente representaram o último com ajuda de tais pontos.[215] Agora como o ponto *geométrico* é de fato o *princípio* da linha e não a ‘linha’ em si, eles foram induzidos a falsa interpretação do *sinal (*‘.’) da *Aritmética* (o ponto arábico), indicando o ‘um’ como o princípio do *número* e não o número em s*i*, desse modo a marca de não aritmético, torna-se característica de toda ‘era dos bárbaros’. Na verdade o nada, isto é o zero é o *princípio* do ‘*número*’ e não o um – a unidade não é análogo ao ponto geométrico. O sinal ‘0,’ usado atualmente para o *nada* (em lugar do sinal ‘.’ (ponto) Arábico primitivo), foi, ele disse, escolhido somente para evitar confusão com o sinal que indica o final de uma sentença. Mas, para manter pelo menos uma nomenclatura consonante com a ‘época da sabedoria’, Stevin chama o nada (zero) como ‘*ponto de número*’ (em analogia e em distinção com o ‘ponto geométrico’).[216]

---

[214] *Arithmetique* p. 3: Infeliz hora em que a definição do começo do número foi definida! A causa da dificuldade e obscuridade de que é fácil e claro na natureza! (Nota 295, página 287).

[215] Stevin deve estar aqui pensando não somente na antiga definição de mônadas como ponto sem posição (cf, por exemplo, Aristóteles, *Metaphysics* M 8, 1084 b 25-27), mas também na representação de números figurados (triângulo – 3 pontos, quadrado – 4 pontos, pentágono – 5 pontos), etc. Mas, caracteristicamente, ele disse em relação a este modo Grego de representação: ‘estes pontos foram usados [pelos Gregos], assim como outros códigos (p. 108, coluna 2). Agora no que diz respeito ao sinal ‘.’ para indicar o ‘0’ é, na verdade encontrado entre os *Árabes*, mas comprovadamente somente a partir do século IX no tão chamado Livro de Cálculo do indiano Bakhshali, que também foi datado muito tempo depois (após o século VII, ou talvez posteriormente ao século XII). O sinal ‘0’ que ocorre na ‘Tabela de Cordas’ em Ptlomy é provavelmente somente uma abreviação do nada; cf. Tropke, *Geschichte der Elementarmathematik*, I³, 29; 40 f.; 22 f.; 18;25. Para uma discussão geral da questão da origem do zero, cf. Neugebauer, *Vorlesungen über die Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Vol. I, *Vorgriechische Mathematik* (Berlin, 1934), p. 42; também p. 5. (Nota 296, página 288).

[216] Na *Aritimetique* (Def. III, p. 5; cf. também p. 3) Stevin difere da terminologia tradicional, chamando zero de ‘começo do número’, mas diz explicitamente em sua *Geographie*: visto que o ‘0’ foi chamado de *ponto* na época da sabedoria, daremos o nome de *ponto de número*, distinguindo de *ponto geométrico*, com isso vamos deixar de fora o nome ‘início’ usado anteriormente até o momento (p. 108, coluna 2). Agora, Peurbach, no começo de seu *Algorismo*, isto é, esquemas de cálculos, *para todos os números do mestre George Peurbach*, disse, ainda

Para Stevin, a unidade dever ser ‘número’, e, isso é tão essencial, pois, ele transfere o papel da origem (*arche*), que tinha sido até agora, atribuído à unidade para o *zero*: ‘o zero é o verdadeiro e *natural* começo’ (*Arithmetique*, p. 4). O que ele quer fazer com isto é considerar *os signos de notação* completamente idêntica, ou seja, o zero (*nada)* com o sinal ‘0’ cujo significado pode ser concebido totalmente, *somente com um sistema de signo como um todo*. Contudo, isto, não mantém somente para o zero, mas para todas as ‘quantidades’ representadas por ‘códigos’.[217] Como ‘Aritmético’ Stevin não lida com números de unidades que são determinados em cada caso, mas com *possibilidades ilimitadas de combinação de códigos* de acordo com as ‘regras de calculação’. Mas, isso significa que ele concebe as ‘quantidades’ com que ele lida de maneira simbólica; ele não o trata como ‘números de unidades’, mas apenas ‘números’ diretamente expressado em códigos.

Agora, a compreensão simbólica faz com que o ‘número’, como temos visto, aparecer como um ‘material’ comparável ao material do pão ou água. Na concepção tradicional pelo qual Stevin é guiado, tal ‘material’ é caracterizado por uma divisibilidade contínua. Isso conduz imediatamente a uma completa assimilação de ‘números’ relacionados a formações geométricas que nunca foi possível no ‘conjunto de números’ e ‘magnitudes’ da antiguidade: ‘a similaridade de magnitudes e números é tão universal que sempre se assemelha a identidade’ (*Aritmética*, p. 3)[218]. Um dos suportes de Stevin para a tese de que não a unidade, mas o *zero* é o princípio do ‘número’ é a característica do seguinte argumento: exatamente como a linha não é alongada pela adição de um ponto, então, também o ‘número’, por exemplo 6, não é aumentado pela adição de zero, pois 6+0=6, portanto, nem uma quantidade infinita de pontos, ‘juntos’, podem ser considerados’ uma linha, nem uma quantidade infinita de zeros, ‘juntos’, podem

---

explicitamente: a unidade não é um número, mas o começo do número. Por isso, há uma relação entre o número na Aritmética com o que o ponto tem com magnitude na Geometria – cf. Cantor, II², 180 f.). Joh Butero, *Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur* (1559), p. 8, disse: portanto, a mônada não é um número, porém em todos os contextos caculacionais adquire força igual a dos números. (Nota 297, página 288).

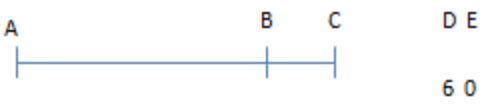
[217] Isto é também a razão para a bem conhecida mudança de sentido do significado da palavra ‘cifra’ ou ‘*chiffre*’, que foi emprestada dos Árabes: significando primeiramente somente o zero, e gradualmente torna-se comum a designação de todos os dez ‘códigos’ (cf. Tropfke, *Geshichte der Elementarmathematik*, I³, 9 ff.; 14 ff.). (Nota 298, página 289).

[218] As reinterpretações das formações geométricas são realizadas aqui; porém, torna-se claramente visível somente em Descartes. (Nota 299, página 289).

ser considerado um ‘número’, enquanto duas unidades já podem ser considerados números. Portanto, se admitirmos que uma linha AB pode ser continuamente alongada pela adição de um ponto C de maneira tal que resulta em uma nova linha AC, então pela mesma razão, pode-se dizer *que o número 6*, *pela adição de zero, aumentado continuamente resulta no número 60*![219] Aqui, então, a extensão contínua de uma linha é comparada com uma fila arbitrariamente continuável de códigos que produz novos ‘números’. Isso significa que os números são estruturas contínuas e não ‘discreta’, como a ‘era dos bárbaros afirmava’. Stevin formula sua tese explicitamente: ‘*De que o número não é quantidade totalmente descontínua*’ (*Aritmética*, p. 4). A visão de número ‘discreto’ da antiguidade era baseada na compreensão da não divisibilidade da ‘unidade’. De acordo com Stevin, a unidade é divisível naturalmente, que ele, a propósito, recorre a autoridade de Diophantus, o ‘príncipe dos aritméticos’, que executava divisões da unidade em determinados problemas contidos em seu trabalho (*Aritmética,* p. 3). A unidade é tanto ‘parte’ de um ‘número’, e, portanto, o número em si como uma linha menor é parte de uma maior e, é certamente a ‘linha’ em si, agora, nem o zero e nem os pontos são ‘partes’ de um ‘número’ ou uma linha respectivamente. As ‘partes’ da unidade são, por sua vez, também

[219] Aritmetique, p. 3. Como a linha AB não pode ser aumentada pela adição de um ponto C, então o número D 6 não pode ser aumentado pela adição de E=0, pois se juntar o 6 e o zero, continua sendo apenas o 6.

Mas, se admitirmos que AB possa ser prolongado pelo ponto C, de modo que AC seja uma linha contínua, então AB é aumentada por meio do ponto C. Similarmente, se admitirmos que D 6 pode ser prolongada através do número E 0, então DE 60 é um número contínuo, formando 60, de forma que D 6 é aumentado por meio do nada (zero).



Pode- se ver que os códigos como tal tomaram o lugar dos comprimentos de medidas tradicionais. Este argumento é eficaz se somente se por 6 e 60 compreendermos frações decimais 0,6 e 0,60, que na notação de Stevin é da forma 6^{1} e $60^{1\ 2}$. (Nota 300, página 289).

'números', ou seja, 'números fracionários'[220] que decrescem infinitamente. Dessa forma, surge uma correspondência completa entre magnitudes geométricas e 'números': 'Como um corpo contínuo de água corresponde a um contínuo *molhado*, então uma *magnitude* contínua corresponde a um *número* contínuo. Do mesmo modo que o contínuo molhado de um corpo inteiro de água está sujeito a mesma divisão e separação como a água. Portanto, o contínuo numérico está sujeito a mesma divisão e separação como a sua magnitude de tal maneira que *estas duas quantidades não podem ser distinguidas pela continuidade e descontinuidade*' (*Aritmética*, p. 5). As 'unidades' de um 'número' não são 'discretas', mas 'contínuas'.

Stevin, baseado no novo conceito de 'número', ataca as designações tradicionais de '*absurd'*, '*surd*' ou números irracionais, (isto é, inexprimível) que é um modo de falar que resultou a partir da cisma entre a compreensão real de 'número' e o conceito tradicional de 'número' que é, no entanto, mantido. Sua tese é de 'que não existem números irracionais, irregulares ou inexprimíveis*'* (Aritmética, p. 33 e 202, tese IV).[221] 'A incomensurabilidade não produz termos que são irracionais incomensuráveis', que é imediatamente óbvio no caso de linhas e planos incomensuráveis. Por exemplo, raiz quadrada de 8 é uma 'raiz'. 'Toda' raiz é um número.[222] Portanto, ele rejeita os termos Diophantino 'lado',

---

[220] Def. VII: um número inteiro é uma unidade ou uma multiplicidade composta de unidades. Def. X: um número fracional é uma parte ou partes de um número inteiro. Cf. Euclides VII, Defs. 3 e 4. (Nota 301, página 290).

[221] Cf. a opinião de Peletier, *De occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, Libri duo* (1560), Bk. II Capítulo II, intitulado 'Se números irracionais são números ou não e de que tipo eles são'. O que eles realmente representam, ele diz: 'estes, devem estar escondidos, por assim dizer, em permanente escuridão'. Eles são em qualquer caso, 'algo', e, é certo que *seu uso é necessário*, especialmente no estabelecimento de 'magnitudes contínuas'. Eles são como números 'absolutos' e genuínos, sujeito a 'regras'. Suas relações com os números 'absolutos' podem ser comparadas com a dos animais ao homem. Então, os números irracionais têm certa comunicação muda e obscura com números absolutos, não de maneira diferente dos animais irracionais, pois estes, que além de ter impressões sensoriais, estabelece à sua maneira, relações com os homens. Em suma, são inexplicáveis e tem somente uma espécie de sombra de existência. Eles não devem ser contados entre os números, mas o seu ser deve ser antes de tudo compreendido, como totalmente contido em sua 'designação'. (Nota 302, página 290).

[222] Prova: 'A parte é do mesmo material do todo; a raiz de 8 é parte de um quadrado de área 8; portanto, a raiz quadrada de 8 é do mesmo material do 8. Mas, o material do 8 é um número; então o material da raiz quadrada de 8 é um número: e consequentemente raiz quadrada de 8 é um número (p. 31). Albert Girard, aluno de Stevin, foi ainda mais longe. Em sua *Invention nouvelle em l'algèbre* (1629), ele disse (pp. 13 f.): note que chamamos de número, todos os radicais

'quadrado' e 'cubo' etc., mas ainda mantém a distinção entre números 'aritméticos' e 'geométricos'; a definição IV declara: 'Um número aritmético é o que é expresso sem o adjetivo 'lado'. Ao contrário, 'raízes', números 'quadráticos', números 'cúbicos', etc., são chamados números geométricos, embora devam ser acrescentados '*qualquer que seja o número* aritmético, quadrado ou cubo, etc.' Mas, na medida em que o seu absoluto, isto é, o valor numérico não é conhecido, então os 'números geométricos' entram nas computações algébricas como 'quantidades' indeterminadas e são designadas da seguinte maneira: ① ② ③ ④ etc., (correspondendo aos nossos símbolos x, x^2, x^3, x^4 etc.). Agora, exatamente o zero é o 'começo' dos números 'aritméticos', de modo que qualquer número 'aritmético' é o 'início' das 'quantidades' algébricas – Def. XIV: 'O começo de uma quantidade é o mesmo número algébrico ou qualquer que seja o *radical*'. Portanto, é designado pelo símbolo ⓪ na medida em que o seu valor 'absoluto' não é conhecido (p. 15).[223] Stevin também foi o primeiro matemático que compreendeu a subtração de um 'número' como adição de um 'número negativo' (cf. Bosmans, p. 899). Em cada uma dessas teses, Stevin está meramente assimilando o *conceito* de 'número' que já por muito tempo foi estabelecido para *operar* com 'números.' Ele, portanto, de uma vez por todas fixa um entendimento comum da natureza do número, para os quais as 'contagens' tornam-se equivalentes a saber como lidar com 'códigos'.[224] É uma questão em aberto,

---

simples, como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5071}$, os polinômios $2+\sqrt{5}$, $7-\sqrt{48}$, $\sqrt{26}-5$, $4+\sqrt{2}-\sqrt{17}$ e outros; *pelo que se une por sinais '+' ou ('–') não pode deixar de ser um número*. Contudo, Stevin, já tinha declarado, na Def. XXVI de sua *Aritmética*: 'Um polinômio algébrico é um número composto de muitas quantidades diferentes. (Nota 303, página 290).

[223] Este modo de designação que representa uma modificação daquilo que fez Bombelli e que pode talvez voltar a Chuquet é usado extensivamente por Stevin em sua liberdade de tradução dos 4 primeiros livros de Diophantus (Aritmética, pp. 431 -642). (Nota 304, página 291).

[224] Já em 1484, Chuquet disse no início de seu *Tripartite* (*Bulletino Boncompagni*, XIII [1880], p. 593): 'contar significa representar artificialmente por meio de signos comuns ou expressar perceptivelmente por palavras o número concebido no entendimento'. No trabalho de R. Gemma Frisus (de quem Stevin, a propósito, menciona explicitamente em outra conexão, cf. Cantor, II², 614) *chamado Arithmeticae practicae methodus facilis*, que primeiro apareceu em 1540, e posteriormente teve numerosas republicações (por Peleiter, entre outros), e que foi traduzido em Francês por Forcadel em 1582, lemos no começo da 'primeira parte': 'número é para expressar o valor de qualquer número sugerido, e, portanto, *referir a qualquer número dado por meio de seu próprio signo'. Gosselin (De* Arte magna .... p. 2 f.) em 1577 formula a mesma coisa da seguinte maneira: 'número é para representar qualquer qualidade de um número por alguma espécie de signo ou figura'. Entre os Gregos, isto foi feito por pontos e traços, mas pode-se também, como entre os Hebreus e os Romanos serem feitos por meio de letras. Somente o 'pensamento Árabe inventou signos mais convenientes e maneiras mais fáceis de contar'. Gosselin forneceu a

assim como muitas particularidades da relação de Descartes com Stevin.[225] Em qualquer caso, a concepção de Descartes de 'números' está muito mais 'preso' a tradição do que a de Stevin, embora, por outro lado, ele veja sua estrutura conceitual com muito mais clareza. Na secção seguinte, vamos tentar confrontar a concepção de 'números' de Descartes, usando, como guia o início do *Regulae ad directionem ingenii* (*Rules for the Direction of the Mind,* ca. 1628), porque aparentemente é nesse texto que as intenções originais de Descartes e as

---

seguinte classificação dos 'números' (p. 4): os números inteiros e absolutos, por exemplo, 5, 8 e 9; parte de números, por exemplo, um meio e um terço; lado de um número, por exemplo, lado 9 equivale a 3, isto é raízes racionais e números irracionais, por exemplo, raiz quadrada de 7, de 5 ou de um meio. Clavius também, no *Epitome Arithmeticae practicae* (1584), disse (p. 6): 'a numeração é a descrição e expressão de qualquer número sugerido por meio de figuras e sinais próprios'. (Nota 305, página 291).

[225] As poucas observações sobre Stevin que são encontradas nos escritos do próprio Descartes diz respeito a Estática (Cf. 283): Ad.-Tann. II, 247, também 252; IV, 696. Além disso, a destreza de Stevin nas questões de harmônica é impugnada (I, 331). Porém, Descartes acrescenta explicitamente que para Stevin não faltou habilidades em outros assuntos. Por outro lado, é possível ou mesmo provável, que Descartes viu Stevin nos últimos anos de sua vida e pôde até ter sido instruído por ele; pois foi durante aqueles anos de 1618 a 1619 que Descartes conhecia poucos títulos (I, 24, 15). Nessa época Descartes serviu sob o comando de Maurice de Orange que tinha seus oficiais instruídos na construção de fortificações, desenhos, etc., por professores entre os quais Stevin certamente deve ser numerado. Portanto, Descartes em uma carta a Beeckman de janeiro de 1619 (X, 152, 2, f.), disse explicitamente que no momento ele está se ocupando 'com desenhos, arquitetura militar e acima de tudo com a linguagem Flamengo'; aqui devemos recordar o importante papel atribuído a Stevin no que diz respeito à língua Flamengo para o avanço das Ciências (veja Pp. 189 f.; cf. G. Cohen, *Ecrivains français em Hollande dans La premiére du XVII siécle* [Paris, 1920] pp. 372 f. e 381). Stevin provavelmente ensinou em Flamengo, pois teve uma cadeira de 'Professor de Matemática na Holanda' em Leyden (ibid. p. 381). Mas, é incorreto conjecturarmos um possível encontro entre Descartes e Stevin, contudo, não há dúvida de que Descartes deve ter deparado com traços de Stevin em toda parte da Holanda: Stevin foi equivalente a Scaliger e Grotius que foi o mais famoso acadêmico da Holanda. Constatin Huygens, bem como com Golius, com quem Descartes se correspondia, estava em comunicação com Girard, o mais importante aluno e editor de Stevin, que publicou o seu próprio trabalho algébrico em 1629 (*Invention nouvelle em l'algèbre*, cf. Cantor, II², 787 ff.; o título, a propósito continua: 'para solução de equações, bem como para descobrir o número de soluções que lhes permite, juntos, com muitas coisas que são necessárias para a perfeição da *divina Ciência*'. Girard, como Descartes estava interessado em problemas de Mecânica, óptica e teoria da música. Snell recomendou Stevin a Beeckman, amigo de Descartes, provavelmente antes de 1611 (cf. Ad.- Tann. X, 29); em 1618, esse mesmo Beeckman endereçou a Descartes uma questão baseado na Estática de Stevin (cf. Ad.-Tann. X, 228; veja P. Duhem, *Les Orígenes de La statique* [Paris, 1905], I, pp. 280-282, e Milhaud, Descartes savant [1921] pp. 35 f.). Portanto, podemos assumir que Descartes 'sabia' da *Arithmética* de Stevin no sentido de que Descartes estava acostumado a conhecer e usar livros. *Aqui ele pode encontrar, acima de tudo, uma completa e efetiva assimilação do reino 'numérico' e 'geométrico*'. Assim sua compreensão de 'potências' (cf. Regra XVI, Ad.-Tann. X, 546 f.) coincide em maior grau com o que Stevin, que é, pode estar certo, por sua vez dependente de Bombelli; porém com Clavius, *Algebra* (1618) capítulo II, pp. 9-10, cuja apresentação especialmente até o uso de conceito de 'expoentes' e 'exponere' diz respeito e depende do ponto de vista de Stifel (cf. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, II³, 151). Podemos mencionar em acrescentar que o mestre calculador Faulhaber que Descartes encontrou em Ulm em 1619-1620, cita como sua origem em seu *Neuer arithmetischer Wegweiser* (1617), além de alguns mais ou menos significantes German e o mestre Swiss, apenas Gemma Frisius e Stevin. (Nota 306, página 292).

características específicas de seu modelo conceitual tornam-se clara e expressiva.

H. Tradução do conceito de número em Descartes

O pensamento de Descartes, como ele mesmo aponta no *Regulae*, pressupõe o fato da calculação simbólica, ou seja, na forma da 'álgebra' contemporânea.[226] Como temos visto, ele compreende sua 'nova' disciplina não como 'algum tipo de Aritmética' (Regra IV, 373, 16), mas como uma simples 'A*rte' geral*, uma Arte que ele encontra indicações em Proclus (isto é Barocius) e que tinha, embora, sem seu conhecimento, já sido realizado por Vieta. Agora, a grande ideia de Descartes consiste na identificação por meios de considerações 'metodológicas' no objeto 'geral' de sua M*athesis Universalis* – que pode ser representado e concebido somente *simbolicamente* – com a 'substância' do mundo, com a corporeidade como 'extensão'.[227] Só em virtude dessa identificação é que a Matemática simbólica ganha posição fundamental no sistema de conhecimento, visto que nunca teve desde então, embora Descartes pode ter falhado, posteriormente, na completa elaboração de sua concepção original. Em qualquer caso, foi baseado neste começo que Descartes escolheu um simbolismo de *figuras* para o *Regulae*, que ele reescreveu somente depois (cf. *Discours*. Ad.-

[226] Além disso, o início da Regra VII. Cf. toda esta secção e acima de tudo, L. Liard, *Descartes* (1882) capítulo 1, '*La mathématique universelle*', especialmente PP. 44 ff. Na secção seguinte, o *Regulae* é citado de acordo com a edição de Adam-Tannery, Vol, X. (Nota 307, página 293).

[227] A primeira indicação de sua concepção é a carta de 26 de março de 1619 para Beeckman, onde 'uma Ciência completamente nova' é mencionada, pelo qual todos os problemas possam ser propostos em termos de qualquer tipo de quantidade, seja contínua ou discreta que pode ser geralmente resolvida; Beeckman acrescentou uma nota na margem: 'a busca de uma Arte universal para solução de todos os problemas (X, 156 f.). Cf. também a seguinte observação de Beeckman (X, 52): 'Descartes disse ... que ele nunca encontrou um homem [ou ninguém], exceto ele mesmo que emprega esse modo de estudar em que une *nitidamente a Física com a Matemática*. Não tenho falado deste tipo de estudo, com ninguém. Como se fosse a '*scientia mirabilis*', a 'Ciência maravilhosa', cujos fundamentos Descartes declara ter descoberto em 10 novembro de 1619 (X, 179 e 216), que é precisamente a *Mathesis Universalis agora concebida como aplicada a Física*. (Sobre o '*inventum mirabile*', a 'descoberta maravilhosa' de 11 de novembro de 1620, *Descartes savant* [1921], capitulo IV, pp. 89 ff). Este foi o assunto que obrigou Descartes a desenvolver sua metafísica, uma metafísica em que, pode ter certeza, é o ponto real de partida de seu 'sistema' que passou a ser cada vez mais relegado ao esquecimento. (Nota 308, página 294).

Tann., VI, 20) para linhas.[228] A concepção de Descartes de simbolismo por meio de figura conecta dois diferentes tipos de pensamento: (1) a concepção de álgebra como uma teoria 'geral' das proporções, cujo objeto é compreensível somente simbolicamente adquirindo características específicas a partir do reino *numérico* e (2) a identificação do objeto 'simbólico' matemático com a '*verdadeira Física*'. A conexão dessas duas linhas de pensamento torna-se possível por meio de conceitos 'metodológicos' de 'determinados conhecimentos evidentes.'[229] O Conceito cartesiano de conhecimento é inegavelmente de origem estoica: corresponde a 'apreensão', isto é, o consentimento dado por uma *imagem apreensível*.[230] Para Descartes, seu conceito é tão essencial porque o permitiu atribuir papel fundamental ao *imaginatio* (=fantasia). Portanto, o *imaginário* está no *Regulae* sempre no primeiro plano.

Na regra XIV (444 ff.), enquanto ele está tratando do papel da imaginação, Descartes inclui uma discussão equivocada de determinados conceitos. Em referência a afirmação de que 'extensão não é corpo', ele declara que *neste caso* 'não corresponde a ideia especial da palavra extensão na imaginação', pois, 'toda essa afirmação é efetuada pelo *intelecto puro* que sozinho tem a habilidade de separar e abstrair coisas dessa Natureza'. Isso vale também para afirmação de que 'número não é coisa enumerada'[231] e 'uma unidade não é uma quantidade'. 'Todas essas proposições similares devem estar separadas da imaginação para

---

[228] Na representação do *Regulae* por linhas retas e pontos foi somente um caso especial; cf. O final da Regra XIV; Regra XV e XVIII; além disso, Pp. 203 ff.; cf. conforme a nota de Beeckman: um exemplo da Álgebra de Descartes – Ad.-Tann. (X, 333-335); *Milhaud*, *Descartes savant*, p. 70. Sobre o *Regulae* em geral veja, ibid., capítulo III, I. (Nota 309, página 294).

[229] No 'método' geral de Descartes, cresce o desejo para justificar o *lugar* que ele atribui a Álgebra. O ponto de vista da cognição 'metodológica' é, portanto, secundário para a identificação *original* do objeto matemático geral como extensão, tendo figura. Mas, uma vez que tudo depende da *justificação* e de sua identificação, o 'método' adquire cada vez mais significado central, *enquanto suas regras são emprestadas à Mathesis Universalis em si*; portanto, o caminho da 'invenção', que a '*Mathesis Universalis*' compreende como 'Álgebra geral', é a descoberta que torna o modo da cognição que é geralmente mais apropriado para compreensão humana. Neste sentido as 'Regras para direção da mente' são de fato idênticas tanto com as 'regras' da '*Mathesis Universalis*' como aquelas do 'método' como tal (cf. Milhaud, *Descartes savant*, p. 69; cf. também *Cogitationes privatae*, X, 217: os pronunciamentos do sábio podem ser reduzidos a poucas regras gerais.). (Nota 310, página 294).

[230] Cf. J. Von Arnim, *Stoicorum veterum fragmenta* (Leipzig, 1921), I, frs. 59 e 60; II, frag. 56. Sobre isto, veja A. F. Bonhöffer, *Epictet und die Stoa*, *Untersucgungen zur stoischen Philosophie* (Stuttgart, 1890), pp.161, 163 f., também pp. 184 ff.; além disso, O. Rieth, 'Grundbegriffe der stoischen Ethik', *Problemata*, fasc. 9, 1933, p. 114 e M. Meier, *Descartes und die Renaissance* (1914, p. 63). (Nota 311, página 294).

[231] Cf. *Principia philosophiae*, II, 8, também I, 55. (Nota 313, página 295).

ser *verdadeiro*'. Se alguém tentar representá-lo para si, mesmo por meio da imaginação, iria necessariamente chegar a contradições – pois, na imaginação a 'ideia' de extensão não poderia ser separado da 'ideia' de corpo nem a 'ideia' de número estaria separado da 'ideia' de coisa enumerada, nem a 'ideia' de unidade estaria separado da 'ideia' de quantidade. Portanto, existe proposições em que a palavra mencionada é usada com o mesmo significado e da mesma maneira (ou seja, se referindo a estruturas que tem sido 'abstraído' pelo intelecto despido das 'ideias' acessíveis a imaginação), porém não são explicitamente separados do conteúdo real dessas 'ideias' – pois, é este mesmo conteúdo que, em conformidade com a coisa real (isto é, a coisa como aparece na 'imaginação'), é pretendido por ele. Tais proposições são permitidas, e, até mesmo necessária para chamar ajuda da imaginação: 'devemos cuidadosamente notar que em outras proposições em que estes termos – embora eles mantêm o mesmo significado, e são declaradas da mesma maneira como quando abstraído de seus assuntos – não exclui [explicitamente] ou nega algo de que eles não são realmente distintos, e, que ambos podem e *devem chamar ajuda da nossa imaginação*'. Quando falamos de '*números*', por exemplo, teremos que 'representar' a nós mesmos um objeto que pode ser medido por 'uma multiplicidade de unidades'. Mesmo se o intelecto 'despido' pretenda a 'simples multiplicidade', ou seja, a multiplicidade como tal, não devemos ainda cometer o erro de acreditar que o conceito de *número* (para o qual corresponde a 'ideia' de *número* na imaginação) exclui a *res numerata*, a 'coisa enumerada' em si. Pois, se alguém faz isto, eventualmente, começa a atribuir profundo segredo para os 'números', e, vai caçar fantasma depois.[232] Até mesmo, os defensores da genuína

[232] Descartes está pensando no trabalho dos contemporâneos como daqueles do 'Rosicrucians', por exemplo: Joh. Faulhaber, *Ansa inauditae et mirabilis novae artis*, etc. (*Guia para uma nova e maravilhosa Arte*), 1618, German version, 1613; *Numerus figuratus, sive Arithmetica analytica* Arte *mirabili inaudita nova constans*, etc. (*Números figurados ou aritmética analítica, derivado por uma maravilhosa e inacreditável nova Arte*), 1614; *Mysterium Aritmeticum*, 1615, anônimos; *Miracula Arithmética*, 1622, em German (outra 'continuação' do *Arithmetischer Wegweiser* [*Arithmetic guide*] que apareceu primeiro em 1615), etc.; os textos escritos em Latim de Faulhaber foi provavelmente devido a Joh. Remmelin, cf. A.G.Kästner, *Geschichte der Mathematik* (Göttingen, 1799), III, PP. 29-34, 111-152, além do mais Ad.-Tann., X, 252-255. Porém, ele deve estar pensando em algo mais antigo '*Arithmologies*' de Joach. Camerarius the Younger e Johannes Lauterbach (cf. Christianus Primkius, *Arithmolgia Sacro-Profana* [Liegnitz, 1659]), bem como o trabalho *Numerorum Mysteria* (primeira edição de 1584 sob o título de *Mysticae numerorum significationis líber*) por Petrus Bungus (Pietro Bongo), que circulou em muitas edições, o último foi em 1618. (Nota 313, página 295).

arte Aritmética de calculação comumente se apegam erroneamente nesse ponto de vista: 'quais mestres do cálculo não pensam que os números com que eles calculam são separados [abstraídos] não somente pelo intelecto [nu] de qualquer assunto, mas que pode também ser realmente distinguido na imaginação? Mas, isso é exatamente o que não é, e de fato, não pode ser na opinião de Descartes.[233] Portanto, nessas formulações, Descartes postula – talvez com uma explicitude original na história das Ciências – um novo modelo de 'abstração' e uma nova possibilidade de 'compreensão'. O 'ser abstrato' de que ele fala aqui são os produtos da 'nudez' ou 'intelecto puro' apenas, na medida em que a 'força cognitiva' que o representa está livre de toda mistura de 'imagens' ou 'representações', está 'divorciado da ajuda de qualquer imagem física' e dos 'atos isolados' (sola agit – Regra XII, 416, 4 e 419,10). Pois, sob estas circunstâncias o *intelecto* ou a 'mente' (dos homens) está lidando somente consigo mesmo e apenas neste caso pode-se falar de um '*intelecto*' e '*compreensão*', 'em que a mente, quando pensa, se transforma' (cf. *Meditations* VI, Ad.-Ad. Tann., VII, 73, 15 ff. veja também os *Passions de l'âme* I, art. XX) logo após 'perceber que algumas ideias estão dentro de si mesmas'. Estas ideias são: 'coisas simples puramente intelectual' (Regra XII, 419, 8 ff), tais como: 'conhecimento', dívida', 'ignorância', 'vontade', etc., (cf. Regra III, 368, 21 ff.), além disso, as 'coisas simples' que pertence ao 'espiritual' bem como ao reino 'físico', e, portanto, devem ser chamados de 'comuns', tais como 'existência', '*unidades*', 'tempo', etc. (De acordo com Descartes, as 'noções comuns' ou – tal como, por exemplo, a afirmação de que 'duas grandezas que são iguais a uma terceira são iguais entre si', noção comum I em Euclides I, também são dessa Natureza).[234] Agora, esse

[233] Cf. *Commentarii collegii conimbricensis* (1592) usado por Descartes em *La Flèche*, ou seja, *Physisc* I, I, 4 (citado depois por É. Gilson, *Index scolastico-cartésien* [Paris, 1912], p. 167): '... As coisas da Matemática são separadas pelo pensamento ou do material sensível somente ou *também de seu material inteligível*. Se eles vierem na primeira maneira, trata-se da Geometria, e da segunda maneira, *aritmética*'. Enquanto, os antigos e a tradição medieval atribuíram, também, uma 'matéria inteligível' para os objetos da aritmética, ou seja, as 'unidades puras' como tal, aqui um nível especial de 'abstração,' em que até mesmo o *res numerata* (coisas enumeradas), isto é, as mônadas contáveis, as unidades podem ser desconsideradas, mas, é atribuída à aritmética; isto está claramente no espírito do novo conceito de 'número' e de acordo com a auto-interpretação dos 'calculadores' contemporâneos (especialmente os 'algebristas') mencionado por Descartes. Somente Descartes, como podemos ver, se esforça para fixar o exato significado de tal 'abstração' – embora, isso é mantido somente em seu pensamento no *Regulae*. (Nota 314, página 295).

[234] A *ação do intelecto* que consiste em 'capturar' uma *coisa tão simples* é chamada por Descartes de *intuitus*, literalmente, um insight: uma captura inabalável da mente clara e atenta (Regra III,

intelecto ‘puro’, se refere somente a si mesmo sendo capaz de transformar (ou ‘aplicar’) em si as ‘ideias’ que a *imaginação* oferece, podendo até mesmo ‘separar’ componentes individuais dessas ideias. Nessa volta à imaginação, o intelecto tem rigorosamente falando, cessado da ‘pureza’, mas, mantém a habilidade própria para isto – e, para a imaginação – a qual realiza esse tipo de ‘separação’ de operação. Quando, por exemplo, o ‘nu’ ou o intelecto ‘puro’ separa-se de uma multiplicidade de unidades ‘representado’ na imaginação (um número de unidades, isto é), sua ‘multitude’ como tal, ou seja, a ‘simples multiplicidade’, o ‘nu’, da multiplicidade indeterminada para o qual simplesmente nada é ‘verdadeiro’, nada verdadeiramente é o ‘ser’, e, portanto, não corresponde a ‘verdadeira ideia’ de um ser, deve-se empregar a imaginação para ser capaz de se apossar da coisa separada. Assim, a força da *imaginação*, que ordinariamente nos permite encarar, por exemplo, ‘cinco unidades’ (talvez como ‘pontos’), e aqui entra o serviço da faculdade dirigida precisamente em direção de algo que não está ‘perceptivelmente claro’, ou seja, o ‘intelecto puro’, que *sendo nu de qualquer referência do mundo*, compreende ‘cinco’ como ‘algo separado’ de ‘cinco’ pontos contados ou outros objetos arbitrários – como simples ‘multiplicidade em geral’, como multiplicidade ‘nua’. *Portanto*, *a força imaginativa torna possível como representação simbólica de determinados conteúdos que tem sido ‘separado’ do intelecto ‘nu’* – isto é o que Descartes enfatizou. Podemos chamar a ‘abstração’ pretendida aqui de ‘abstração-generalização-simbolização’ (a abstração que produz o símbolo). Isso sozinho origina a possibilidade de contrastar ‘intuição’ e ‘concepção’, e postular ‘intuição’ como uma fonte *separada* da cognição juntamente com a razão. O modo antigo de separação aparece a partir deste ponto de vista como uma abstração ‘direta’ ou ‘imaginativa’: os insights dos matemáticos antigos ‘pertencem mais aos olhos e a imaginação do que do intelecto’ (Regra IV, 375, 18 f.); isto é exatamente o porquê que a concepção antiga de número pudesse ser descrita como tendo caráter ‘intuitivo’ (‘Anschaulichkeit,’ cf. Pp. 62 f.). Aqui a pressuposição constante é que *o intelecto ‘puro’ em si não tem relação em tudo com o ser do mundo e das coisas do mundo*. O que o carateriza não é, portanto, muito a questão ‘incorpórea’ como

---

368, 18). Nessa ocasião ele expressamente apontou que o *intuitus,* pode e deve estender também a assuntos ‘discursivos’, isto é às relações e proporções (ibid., 369). (Nota 315, página 296).

simplesmente sua não relacionatividade. *Mas, isto implica imediatamente que a separação entre o intelecto puro e o 'corpóreo' é em si concebida completamente em analogia com a separação corpórea*. Os exemplos de Descartes são caraterísticos disso. 'Devemos compreender', ele disse, 'que a força por meio do qual nós propriamente sabemos das coisas é puramente espiritual e não menos distinto [separado] de todo o corpo *como o sangue do osso e a mão dos olhos*' (Regra XII, 415, 13 ff.). O intelecto 'puro', para ser capaz de vir a entrar em 'contato' com os objetos do mundo corpóreo '*que são estranho para nós*' (Regra VIII, 398, 13) – isto é, para entrar em contato com o 'mundo' em geral – necessita da mediação de uma faculdade especial, ou seja, precisamente da imaginação: 'se o intelecto puro coloca alguma coisa diante de si para ser examinado, tal como pode se referir para um corpo, sua ideia deve ser formado tão distintivamente quanto possível na imaginação' (Regra XII, 416 f.). Além do mais: 'Nem, em geral, reconhecemos aqueles seres dos filósofos que realmente não pode vir antes da imaginação' (Regra XIV, 442, 26-28.). Como esta mediação, isto é a relação entre 'corpo' e 'espírito', é para ser entendido? Aqui está o conhecido problema insolúvel da doutrina Cartesiana.[235]

---

[235] Quanto à relação entre *imaginação* e *intelecto puro* em Descartes é considerada em termos tradicionais, sua imaginação deve ser atribuído ao papel de Aristóteles sobre intelecto passivo e destrutivo em contraste ao intelecto ativo, o último sendo apenas descrito por Aristóteles como eterno, ou seja, com separáveis e impassíveis de mistura (*On The Soul* Γ 5); ainda por outro lado, a imaginação de Descartes deriva também, somente indiretamente da *fantasia* de Aristóteles, visto que é essencialmente uma versão do conceito Estoico de fantasia que depende de Aristóteles (*On The So*ul Γ 3 e On Memory), cf. J. Freudental, *Über den Begriff dês Wortes Φ ANTΣAIA bei Aristoteles* (Göttingen, 1863), especialmente pp. 29 f. Sobre a influência de Stoa em Descartes, cf. Brochard, 'Descartes stoicien', *Revue philosophique*, IX (1880) e, acima de tudo, Dithey, *Gesammelte Schriften* (Berlin-Leipzig, 1914), II, 294-296; sobre o significado geral do Stoa nos séculos XVI e XVII, veja ibid. pp. 93, 153 ff., 174 ff., 181, 255 ff., 261 ff., 279 ff., 285 ff., 441 ff., 486 ff. No que diz respeito ao *Regulae*, eles estão, naturalmente, diretamente ligado ao 'Estudo da boa mente' (Ad.-Tann., X !91-204) – seu tema geral é precisamente 'mentes de bons juízos', também chamado por Descartes '*sapientia universalis*' (cf. Regra I, 360, 19 f.), um conceito que Descartes aparentemente emprestou de Justus Lipsius, o maior mediador das ideias Estoicas que, por sua vez, provavelmente devido a Seneca. Sobre esta questão veja em É. Gilson, *Éstudes sur la role de la pensée médiévale dans formation Du système cartésian* (Paris, 1930) pp. 265 f.; cf. também F. A. *Trendelenburg*, *Historische Beiträge zur Philosophie* (Berlin, 1867) III, p. 396. O conceito de uma 'boa mente' está a propósito intimamente relacionado, não idêntico com a 'justa razão'; por exemplo, Epictetus, *Dissertationes* IV, 8, 12, disse: qual é o fim do filósofo? ... possuir a justa razão (Cf. II, 8, 2, onde o ser Deus é caracterizado como *nous* (bom senso), *episteme* e *logos orthos* (justa razão); por outro lado o conceito de 'justa razão' serve como sinal característico da 'A*rte*'; Assim lemos em Thomas Aquinas, *Summa Theologica* II, quaest. 57, art. 3, que: 'Arte é nada mais do que um julgamento sobre qualquer obra'. A partir do ponto de vista tradicional, a dificuldade central de Descartes é caracterizada da seguinte forma: na realidade, ele compreende o *intelecto puro* no sentido Estoico (faculdade de lidar ou guiar) – e assim 'somaticamente', mas *ao mesmo tempo* ele interpreta no sentido Thomistic-Peripatetic como intelecto ativo – e, portanto

A dificuldade do próprio Descartes não é um ponto crucial somente porque ele *encontra sua originalidade no reino da Matemática*, ou seja, no momento quando torna-se importante reconciliar a determinação tradicional de *números*, que Descartes ao contrário de Stevin, perfeitamente aprecia, com a indeterminação de novas quantidades 'algébricas.'[236]

---

como uma faculdade 'extra-mundo'. Sobre o primeiro, veja especialmente a Regra XII, 415 f., onde a potência cognitiva de acordo com isso 'aplica-se em si mesmo' a diferentes faculdades, realizando diferentes 'funções' correspondentemente chamadas por diferentes nomes, ou seja, 'intelecto puro', 'imaginação', 'memória', 'senso'; veja também Sextus, *Againts the Mathematicians* VII, 307: ... a mesma faculdade é em um aspecto do intelecto em outro sensação, citado por Bonhöffer, *Epictet und die Stoa* (1890), p. 99 (uma referência geral para este trabalho deve ser feita neste contexto); além disso, veja Bonhöffer, 'Zur stoischen Psychologie', *Philololologus*, LIV (1895), p. 416; pois, a concepção de 'ajuda' – ou melhor, de 'servir' – é a capacidade de diferentes 'partes do espírito' contrastado com o *intelecto puro* como a faculdade principal e dominante (início da Regra XII), compare também com Stobaeus, *Eclogue* I, 41, 25 (Meineke, 252, 1-3): '... Os estoicos supõe que a faculdade principal tem o lugar, como se fosse, de um soberano e outras partes eles atribuem a ordem de um servo'. Cf. também Platão, *Philebus* 27 A. Sobre o intelecto como uma faculdade soberana, cf., por exemplo, Gilson, *Index scolastico-cartésien*, p. 95, número 60. Este tipo de entrelaçamento de Aristóteles e Platão com a doutrina estoica já ocorre em alguns dos próprios estoicos, por exemplo, em Marcus Aurelius (cf. Bonhöffer, *Epictet und die Stoa*, pp. 41 e 32) e também em Galen, que Descartes certamente usou, seja diretamente ou indiretamente por meio de Telesio. Sobre todo este assunto veja, Dilthey, *Gesammete Schriften*, II, pp. 290 ff.; portanto, em particular, afirmações como as que a origem dos nervos reside no cérebro ou que a transferência de 'impressões' do *sensus externo* ao *sensu comum ou fantasia* – e, portanto, também a sequência inversa! – ocorre em 'um momento' (Regra XII, 413 f.; veja também *Dioptrics*, capítulo IV, 5, Ad.-Tann., VI, 598; Texto Francês, ibid., III) volta a Galen, por exemplo, *On the Teachings of Hippocrates and Plato*, foram, especialmente pp. 208 f., 644 f., 656 (ed. I. Mueller [1874]); quando Descartes escreveu o *Regulae*, aparentemente ainda não conhecia Vesalius, visto que ele mesmo dedicou ao estudo de anatomia somente a partir de 1629 (veja Ad.-Tann., I, 102, 18 e II, 525); além do mais, conforme Galileu, em o início do Segundo dia, *Dialogue on the Two Great Systems of the World* (Edizione nazionale, VII, 133 f.). Esta conexão é de grande importância, visto que no *Regulae*, Descartes chama a *potência cognitiva* – que é ao mesmo tempo *mentes boas* – 'genialidade': mas é propriamente chamado de 'capacidade' (Regra XII, 416, 8); conforme também o título do trabalho *'Regulae ad directionem ingenii*'. Pois, o seu nome pode significar que é ele próprio o *gerador* das 'ideias' na 'imaginação' ou inversamente, ou seja, impregnado pelas 'ideias' já presente na imaginação, ou seja, aquelas trazidas pelo sentido: quando se quer *formar* novas ideias na imaginação ou *expressar* aquelas já formadas. Portanto, a interação do intelecto e imaginação é aqui realmente interpretada no modelo da *physis* (Natureza) aristotélica sendo que o ponto crucial que é atribuído ao intelecto o papel não apenas do *eido* (forma), mas também do *hyle* (material): as vezes ela é afetada, e em algum momento atua (415, 23 f.). Em outras palavras, o 'mundo externo' *do intelecto não determina o seu modo de ser* – o *intelecto*, a res cogitans (coisa pensante – conhecimento de algo/coisa), 'é' em outro sentido do que o 'corpo', a 'res extensa' (coisa extensa). O que caracteriza ambos da mesma maneira é seu aspecto não relacionável. Porque, isto é, por um lado impossível de compreender como eles podem 'vir juntos', enquanto por outro, *são* para Descartes agora e sempre juntos, no nível da 'corporeidade'. (Nota 316, página 296).

[236] Conforme Baillet, *La vie de Monsieur Descartes* (1691) II, 486-487 (Ad.-Tann. X, 202 f.): M. Descartes chama o exercício da 'imaginação', da meditação e aqueles do entendimento 'contemplativo'. Se, é nesta distinção que ele se refere a todas as Ciências, mas principalmente aquelas que chamaram de 'cardinal' ou 'ordinal', tal como a verdadeira Filosofia, que depende do entendimento, e, a verdadeira Matemática, que depende da imaginação. (Nota 317, página 298).

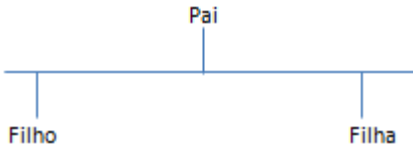
Esta reconciliação é alcançada por meio da representação simbólica *figural*. Tudo depende da compreensão de que 'figuras' com que a '*Mathesis Universalis*' lida, ou seja, 'planos retilíneos e retangulares', bem como 'retas' tratam do modo de ser das 'figuras' que tinha até então sido a 'Geometria' ordinária: 'Nós concluímos facilmente: aqui as proposições devem ser *abstraída ao máximo daquelas mesmas figuras com o que a Geometria lida*, se as pesquisas envolvem estas, e, a partir de qualquer outro assunto; para esta proposta ninguém precisa estar retido além de superfícies retilíneas, retangulares, planas ou retas, que chamamos de figuras, pois, por meio delas podemos imaginar um tema que é na verdade estendida [ou seja em três 'dimensões']237 tão bem como por meios de uma superfície plana (Regra XIV, 452, 14 ff.). Com 'grandezas *contínuas* e indivisíveis', linhas e planos nos permitem estabelecer proporções (e, portanto equações) somente na medida em que suas 'medidas comuns', ou seja, por meio de uma unidade particular estabelecida em cada caso. Se essa condição for atendida, então essas grandezas contínuas podem, por sua vez, serem imediatamente entendidas como 'números': 'devemos também entender que grandezas contínuas podem, com a ajuda da unidade que foi assumida, algumas vezes ser reduzido inteiramente à multiplicidade' (Regra XIV, 451 f.). Aqui a 'multiplicidade' significa um daqueles números com o que a 'álgebra' lida estabelecendo proporções entre 'A', 'B' e 'C' (cf. início da Regra VII); estas proporções não precisam mais se referir a 'medidas comuns', pois, a medida não é mais nossa preocupação, agora o foco é somente a 'combinação' (ordem). Na regra XIV, Descartes disse: 'Devemos entender que somos capazes de *arranjar a multiplicidade de unidades em uma ordem tal*, que a dificuldade de antes em resolver um problema de medida, agora depende somente em observar uma ordem, e que o auxílio que nossa arte nos oferece nesse processo é muito importante.' Portanto, uma 'figura' plana ou linear representa não menos e não *diferentemente* uma 'multiplicidade ou número' de uma 'grandeza contínua'. É a tarefa primária e a função verdadeiramente adequada que tais 'figuras' fornecerem à imagem da 'verdadeira' ideia de número. Confrontado com uma multiplicidade indeterminada, isto é, com qualquer quantidade algébrica, que nós,

237 Por extensão entendemos tudo aquilo que tem comprimento, largura e profundidade. (Nota 318, página 299).

de certa forma enganamos o intelecto puro, queremos entender como uma ‘simples multiplicidade’, isto é, como uma estrutura separada de todas as ‘coisas enumeráveis’ (*res numerata*), devemos, a fim de não cometer erros, de fato ‘representar’ para nós mesmos ‘alguns assuntos mensuráveis por muitas unidades’ – devemos manter diante de nossos olhos uma *imagem* do ‘mensurável *em geral*’. Portanto, cada ‘figura’ não é uma representação de *um número determinado* de unidades de medida (como são as linhas retas do livro de Arithmética de Euclides), mas o *símbolo* de uma *multiplicidade determinada* obtido pela ‘abstração, e, com isso a geração simbólica’; em outras palavras, é exatamente o mesmo com a letra (juntos com a designação do seu grau) que ocorre na ‘álgebra,’ especialmente na analítica de Vieta.[238] Este caráter ‘simbólico’ de figuras Cartesiana possibilitou correspondência mútua de ‘linhas’ com letras ou ‘códigos’ na Matemática de Descartes (cf. Discours, Ad.-Tann., VI, 20). O próprio Descartes disse explicitamente: ‘deve ser notado... que nós ... abstraímos não menos de números em si do que fizemos um pouco antes de figuras geométricas ou de qualquer outra coisa que você goste’ (Regra XVI, 455 f.). A abstração-

---

[238] Aqui é importante que as ‘figuras’ apareçam como ‘números’ somente por meio de ‘*unidades mediadoras*’ e que a *unidade* em si é compreendida como ‘unidade de medida’. A ‘medida’ é aqui, pode ter certeza, aplicada somente às formações simbólicas; mas, isso não muda o fato de que Descartes basicamente mantém aspectos tradicionais – Peripatético – entendimento do ontem. Ele falha ao perseguir suas noções originais e diferentes, pois, a unidade é *uma coisa comum e simples* e, portanto, *coisas intelectuais simples*; conforme a *Physics* ∆ 14, 223 em 21-29. Descartes, a propósito, desde o início, distingue ‘dois tipos de figuras’, ou seja, aquelas que representam uma ‘multiplicidade’, por exemplo, número triangulares da forma:



Isto representa uma árvore que expõe relações de alguma família, e por outro lado, aquelas que representam uma grandeza, como por exemplo, triângulos, quadrados, etc., (Regra XIV, 450 f.). Em ambos os casos ele tem em mente formações completamente tradicionais *não simbólicas*. A ‘figura’ simbólica que forma o objeto da *mathesis universalis,* é o que é *comum* a tais figuras, isto é, a ‘figuralidade’ em si ou em outras palavras, a ‘segunda intenção’ da figura, entendida como ‘primeira intenção’. Portanto, na passagem do *Regulae* citada aqui aparece mais uma vez a conexão entre grandezas algébricas e ‘números figurados’, isto é, o *eide* pitagórico de número. É possível que a esse respeito, Descartes é dependente de Adrianus Metrius, pois ele participou de sua palestra em 1629 em Franeker (cf. Cohen, Écrivains français ..., pp. 436f.). Por outro lado, ele pode ter sido guiado pela reminiscência dos escritos de Faulhaber que começa com o surgimento de sua (*Arithmestischer cubiccossischer Lustgarten*) *Arithmetic Pleasure Garden of the Cubic Unknown* em 1604, interligando os estudos de ‘números poligonais e piramidais’ com a ‘*art cossic*’ (relativo à Álgebra); cf. O tratado de Descartes intitulado *De solidorum elementis* (sobre os elementos sólidos) (Ad.-Tann. X, 265-276); também ibid., 252 f., no qual vemos *Milhaude*, *Descartes savant*, pp. 84-87; finalmente também Ad.-Tann. I, 277 f.). (Nota 319, página 299).

generalização-simbolização que conduz dos números ordinários para as 'letras-signos' ou 'termos gerais' (457,20), também chamado 'puro e nu' (455, 21),[239] necessitam da imaginação exatamente da mesma forma quando lida com figuras. Portanto, no caso anterior é a habilidade retentiva da imaginação e da 'memória' que é o objetivo do ser (cf. Regra XII, 414, 23 f e 416, I f.)[240] e, isto é, o porque o lugar de 'todas as figuras' são tomadas por 'sinais tão curta quanto possível' (Regra XVI, 454, 10 ff.).[241] O modo de ser dessas 'figuras', repetindo, é ninguém menos do que 'números algébricos' – a 'espécie' de Vieta. Precisamente a mesma reinterpretação que a concepção tradicional de *arithmos* passou nas mãos de Vieta, Stevin e outros contemporâneos algebristas foi realizada por Descartes – e, isso é seu reconhecimento original – no reino da *Geometria* tradicional. A diferença essencial entre Descartes e Vieta é, no mínimo que Descartes une 'Aritmética' e 'Geometria' em uma Ciência única, enquanto Vieta mantém sua separação. Como temos visto, ambos tem em mente uma Ciência *universal*: a '*Mathesis Universalis'* de Descartes corresponde completamente a 'zetética' de Vieta por meio do qual é realizada com a ajuda da 'Logística especiosa', a 'nova' e 'pura' álgebra que é interpretada como arte 'analítica geral'. Enquanto Vieta vê a parte mais importante na '*rhetic*' ou 'exegética' em que a computação numérica e as construções numéricas de fato representam duas possibilidades diferentes de aplicação (então, a concepção tradicional de Geometria como tal é aqui preservada), agora Descartes *começa* entendendo as 'figuras' geométricas como estrutura cujo 'ser' é determinado exclusivamente pelo seu caráter 'simbólico'. A verdade é que Descartes não, como é frequentemente dito impensadamente, identifica 'Aritmética' e 'Geometria' – ao contrário, ele

---

[239] No Regulae, Descartes usa letras minúsculas a, b, c..., para grandezas conhecidas e letras maiúsculas A, B, C..., para desconhecidas (Regra XVI, 455, 10 ff.). (Nota 320, página 300).

[240] Sobre isto veja Gilson, *Index*, pp. 138 f., número 226; cf. também P. Boutrox, 'L'imagination et les mathématiques selon Descartes' (1900), *Université de Paris, Bibliothèque de la Fcaulté de lettres*, X, pp. 16 f. (Nota 321, página 300).

[241] Conforme Oughtred, *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius Mathematicae, quasi clavis est*, 1631 na carta dedicatória: '... portanto, eu deveria ver as coisas em si mais claramente, eu despi o revestimento das palavras, a partir das proposições e demonstrações [dos grandes geômetras antigos] e, eu o signifiquei por breves símbolos e sinais apenas, de modo que pudessem ser percebidas num relance dos olhos apenas ...' Oughtred é dependente acima de tudo de Vieta e provavelmente também de Stevin. (Nota 322, página 300).

identifica a ‘álgebra’ entendida como Logística simbólica com a Geometria que é *interpretada por ele pela primeira vez como Ciência simbólica*.[242]

---

[242] Além da representação eidética pitagórica tradicional antiga, e, a ‘amplitude das formas’ por Nicholas Orême (metade do século XIV), indubitavelmente forma uma fonte original do simbolismo figural de Descartes. Veja o início do trabalho anônimo *De latitudinibus formarum secundum doctrinam magistri Nicolai Horem*, que é em parte, tratamento de uma parte do extensivo trabalho de Orême, *De uniformitati intensionum (On the uniformity and monuniformity of intensities)*, sobre o qual veja P. Duhem, *Études sur Léonard de Vinci* (Paris, 1913), III, pp. 376 ff. e 399 f.; além disso, Wieleitner, ‘Der Tractatus de latitudinibus formarum’ dês Oresme’, Bibliotheca Mathematica, 3d series, Vol. XIII (1912-1913), pp. 115-145; do mesmo autor, Über den Funktionsbegriff und die graphiscge Darstellung bei Oresme’, *Bibl. Math*., sd series, Vol. XIV (1913-1914), pp.193-243; e, mais recentemente, E. Borchert, ‘Die Lehre Von der Bewegung bei Nicolaus Oresme’ *Beiträge zur Geschichte der Philosophie und Theologie des Mittelalters*, Vol. XXXI, fascículo 3 (1934), p. 19 f. e 92-100; [também A. Maier, *An der Grenze von Scholastike und Naturwissenschaft* (Roma, 1952), Pt. III]. O autor do presente trabalho foi capaz de usar a edição de 1488 (Padua) e de 1515 (Vienna), o último pertencia a Thcho Brahe: ‘Porque a amplitude das formas varia em múltiplas maneiras, sua multiplicidade de variedades é distinguida com dificuldades muito maiores, ao menos que estejam de alguma forma se referindo a *figuras geométricas*. Portanto, quando tiver previsto pela primeira vez, determinadas classes de amplitudes, e ter fornecido suas definições, *eu devo conectar as infinitas espécies de amplitudes com as infinitas espécies dessas mesmas figuras*, em que o que foi estabelecido será claramente mais evidente – traduzidas depois por C.G, Wallis, *An Abstract of Nicholas Orêsme’s Treatise on the Breadth of Forms* [St. John’s Bookstore, Annapolis:1941]. Comparando isto com a Regra XII (413, II f.): portanto, qual seria a desvantagem resultante, se concebecessemos a diversidade que existe entre branco, azul, vermelho, etc., exatamente como o que existe entre as *figuras* similares [aqui Descartes fornece um esboço], etc.? O mesmo pode ser dito de *todos* os casos, visto que *é certo de que a multiplicidade infinita de figuras é suficiente para todas as diferenças de coisas sensíveis*. A propósito Orême, movimentos, mudanças, temperatura, etc., também menciona explicitamente cores. Além do mais, conforme o início do *treatise De uniformitate et difformitate intensionum*, citado aqui em conformidade com o texto dado por Borchert, *Beiträge zur Geschichte der Philosophie und Theologie*, XXXI, facs. 3, pp. 92-93: todas as coisas mensuráveis, exceto números são retratadas na forma de quantidades contínuas. Portanto, *para medir é necessário imaginar pontos, linhas e superfícies ou suas propriedades*, no qual, como filósofos [Aristóteles] afirma, medidas e proporções devem ser encontradas primeiramente. Porém, em outros objetos, eles são compreendidos por analogia, visto que eles se referem ao anterior por meio do intelecto. A uniformidade de um e a não uniformidade de outra qualidade são entendidas mais rapidamente, facilmente e claramente quando alguma coisa similar é indicada, e que possa ser capturado prontamente pela imaginação. Dessa forma, são representadas por meio de uma figura sensível e, portanto expresso em um exemplo visível *por pictorização, e isso, torna de grande ajuda para o entendimento das coisas*. Que Descartes num sentido ‘conhecia’ a representação ‘quantitativa’ de qualidade’ como desenvolvida por Orême e que tinha sido usado repetidamente (cf. Duhem, Études, III, 399-405; 481 ff.; especialmente em 502-504) está provado pelo seu tratamento da questão relativa à queda livre de corpos no vácuo, colocado para ele no final de 1618 por Beeckman (Ad.-Tann. X, 75-78; cf. 219-221). Ele concebe a intensidade (rapidez) do movimento em cada caso como uma linha reta que é perpendicular a outra linha reta, que por sua vez corresponde a distância total (não o tempo) percorrido pela queda do corpo. *Assim, o movimento como tal é representado por uma ‘figura*’, ou seja, aqui por um triângulo reto retângulo (isósceles). É fácil ver que Descartes não está muito convencido das implicações dessa questão (cf. Duhem, Études, III, 566-574; Wieleitner, ‘*Das Geset vom freien Falle in der Scholastik, bei Descartes und Galilei*,’ *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrcht*, XLV (1914), pp. 216-223; *Milhaud, Descartes savant*, pp. 26-34); enquanto Beeckman está procurando a relação da *distância* percorrida na queda livre em relação ao *tempo* necessário para percorrê-lo, o argumento de Descartes resulta na *velocidade* que está relacionada a *distância* percorrida. Mas, se no diagrama de Descartes, a linha distância é considerada como uma linha do tempo, que é o que Beeckam realmente faz em sua resposta a interpretação de Descartes sem perceber que ele

está, portanto, corrigindo-o (cf. Ad.-Tann, X, 58-61) e, disso, resulta a solução certa do problema. Descartes continua sem perceber esse fato (veja especialmente Ad.-Tann., I, 71-75 e 394 f.; *Milhaud, Descartes savant*, pp. 30-32; Wieleitner, *Zeitschrift* ..., XLV, p. 222 [A. Koyré 'La de La chute des corps, Descartes et Galilée', *Études Galiléennes*, (Paris, 1939), II, pp. 102-119]); então, em 1604 Galileu também (*Ed. naz*., X, 115 f. e VII, 373 f.; cf. também VII, 203 e 208 ff.; além do mais, VII, 248 ff) confunde o tempo com a distância percorrida de forma muito similar (cf. Duhem, *Études*, III, 562-566; Wieleitner *Zeitschrift* ..., XLV, 223-228). Para compreender essa situação deve-se ter em mente que nem Descartes nem Galileu estão muito interessados imediatamente com a captura do 'movimento' com a ajuda de um sistema de linhas ('coordenadas'), onde a escolha das 'variáveis' seria evidentemente crucial, como a *possibilidade geral de representar movimentos por figuras*. Cf. Ad.Tann. X, 220 5-9: para que eu possa estabelecer os fundamentos dessa Ciência, o movimento uniforme poderia sempre ser representado por uma linha, plano retangular, paralelogramos ou paralelepípedos; o que é acrescentado por um motivo, por um triângulo, por dois, por uma pirâmide ... por três ou por outras figuras. Sobre isto, conforme Wieleitner, *Zeitschr. F. math*. ..., XVL, pp. 221-222; além do mais Duhem, *Études*, III, 386-388 e, também 517-519. Descartes deveria ter notado que isso se refere precisamente ao contexto de sua '*Álgebra geométrica*' (X, 78, 23), no sentido de apresentá-lo acompanhado de uma afirmação de maior universalidade e, isso é do que se trata o *Regulae* posteriormente. Também para Orême a 'geometrização' do 'conceito' de 'intensio formae' = excessus gradualis = latitudo gradualis (intensidade de forma=aumento do grau=amplitude do grau – De uniformitate et difformitate ..., Parte II, capítulo II, suposição III; cf. suposição 9) serve exclusivamente para representar 'qualidades' ou 'intensidade' *em figuras* (cf. Parte II, capítulo III) – um fato que contradiz a interpretação de Orême, e, deveria ser enfatizado, como Wieleitner fez no artigo da *Bibliotheca Mathematicae* citado anteriormente. Estas qualidades ou intensidade podem ser ou 'formas permanentes', tais como cores, temperaturas, isso é calor, etc., ou 'formas sucessivas', tais como mudanças e movimentos locais, cf., Parte II, capítulo III, suposição 13 e as observações conclusivas do capítulo III. A suposição 9 (Parte II, capítulo II) declara: 'a extensão da forma é para ser retratada por meio de uma linha reta – *mas a intensidade por meio de uma figura plana erguida sobre a linha reta*'; conforme a suposição 12: 'toda a intensidade dada da forma [isto é, o 'integrante'] corresponde a superfície plana localizada sobre a linha reta; porém, Orême também sabia sobre representação por meios de figuras sólidas (Wieleitner, *Bibl. Math*. , 3d séries, Vol. XIV, pp. 204 e 214-216; Duhem, *Études*, III, 386-388); note também o título tradicional de seu trabalho *De figuratione potentiarum et mensurarum difformitatum (On the rendition by figures of the monuniform powers and measures)* e *De configuracionibus qualitatum (On the configurations of qualities)*. Esta 'figura representativa' muda de acordo com o *tipo de mudança da intensidade* envolvida. No caso de uma mudança de intensidade que é por toda parte a mesma com ele mesmo, ou seja, uma 'variação uniforme da amplitude' resulta naquilo que é representado por um triângulo reto retângulo. Isto é verdade em particular em *movimentos* não uniformes (cf. Duhem, *Études*, III, 338 ff.; Wieleitner, *Bibl. Math*. 3d series, Vol. XIV, pp. 222 ff.). Que este movimento é efetivado no caso especial de movimentos uniformemente acelerados de corpos em queda livre foi um fato geralmente conhecido dos acadêmicos nominalistas desde Albert de Saxony (cf. Duhem, *Études*, III, 309-314 [M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (Madison, 1959), pp. 565-569; C. Wilson, Willian Heytesbury, *Medieval Logic and the Rise of Mathematical Physics* (Madison, 1960), capítulo 4]). Mas, este fato não foi conectado com a representação gráfica de Orême até muito tempo depois (veja Duhem, *Études*, III, 556 ff.). De qualquer maneira, Galileu, Beeckman e Descartes tinham estabelecido, mesmo neste ponto, uma tradição útil. Além disso, Orême concebe algo como 'quantum', isto é, algo 'quantitativo' ou como 'magnitude', quando está sujeito a 'mais e menos' e tendo 'capacidade de exceder e faltar uma pequena parte', exatamente como fez Descartes (Regra XIV, 440): 'o que está susceptível de mais e de menos'; comparando com Orême, Parte II, capítulo II, suposição 2 que diz: tudo que excede outro por uma diferença de grau ou é excedido por outro é para ser retratado na forma de quantidade. Isto significa que tudo que é submetido à razão, e, portanto também a proporção (Orême, II, II, suposição 1): todas as coisas que são relacionadas a um outro em qualquer *razão* compartilha da natureza quantidade. Aqui uma quantidade é entendida existindo 'verdadeiramente' ou 'figurativamente'. A concepção de Descartes de 'dimensão' no *Regulae* (447-449; sobre isso, também conforme notas X, 334 de Beeckman e, além disso, II, 542) aparece de qualquer forma estar conectado com a doutrina de Orême (II, II, suposições 5, 6, 7 e 8). O próprio Orême, especialmente em sua predileção pelo conceito de razão (=proporção) pertence à tradição pelo qual o trabalho de Bradwardine, o '*doctor*

Agora, somos capazes, usando as afirmações de Descartes como fundamento e considerando a literatura contemporânea fixar ainda mais precisamente de que o caráter conceitual do simbolismo algébrico que já foi delineado de forma diversa. Vimos que Descartes designa a '*sola multitudo*' (multiplicidade única) que o intelecto 'separa' da 'ideia' de número o que se encontra disponível na imaginação com um 'ser abstrato', também chamado de *ens rationi* (a razão) na linguagem dos acadêmicos. Na *Summa* de Eustachius em Santo Paulo, IV, 17-19 (citado posteriormente por Gilson, *Index*, p. 107) há três tipos de '*entia rationis*' (entes racionais – ser da razão) a saber: 'Ser da razão é negativos, privados ou de *segunda intenção.*' 'Os dois primeiros tipos se referem a coisas em seu próprio modo antes de qualquer operação do intelecto'; somente o terceiro tipo tem no seu 'ser', a operação apenas do intelecto. 'Mas, o terceiro tipo não pertence a coisas, *ao menos que, uma determinada operação do intelecto é pressuposta*, portanto dizemos que essas coisas da razão dependem

---

profundus', é definitivo [veja Thomas de Bradwardine, Tractatus de Proportionibus, edição e tradução de H.Lamar Crosby, Jr., (Madison, 1961)]. Portanto, por exemplo, a distinção entre 'formas permanentes' e 'formas sucessivas' volta a Bradwardine (cf. Cantor, II², 113 ff.; além do mais em Duhem, III, 294 ff.; seleções de textos pertinentes de Max Curtze, 'Über die Handschrift R. 4. 2, *Problematum Euclidis explicatio*, der Königlichen Gymnasialbibliothek zu Thorn', suplemento de *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XIII (1868), secção II: 'Geometria Bradwardini' e 9: '*Algorismus proportionum magistri* Nicolay Orem', pp. 81-84; 65-79 e 101-104. O que é peculiar na representação do movimento de Descartes em contraste com a tradição é o fato de que ele vê uma conexão direta entre sua representação figural e números figurados. Por exemplo, a premissa de Beeckman, que diz: 'no vácuo, o que está em movimento permanece sempre em movimento' ou coisas que estão em movimento nunca volta ao repouso ao menos que seja provocado (cf., Ad.-Tann. X, 60, 78 e 219), levando-o a afirmar que o movimento (mais exatamente, a força motriz) sempre representa um 'número triangular' e é precisamente por esta razão que deve ser processada por uma 'figura triangular' (X, 76, 2-4). Aqui Descartes parece voltar a se aproximar perigosamente da opinião de Leonardo da Vinci (Duhem, III, 512 f. e Tannery, *Mém. scient*., VI, 482) e de Baliani (Cantor, II², 698 f.), de acordo com o movimento uniformemente acelerado, a distância percorrida em sucessivos momentos de tempo são uns para os outros como os membros de uma série de números naturais, 1, 2, 3, 4, ... Descartes consegue fazer algo que é inteiramente novo e contra os procedimentos de Orême, ou seja, transmite com a ajuda dos 'indivisíveis' (cf, Duhem, II, 1909, pp. 7 ff.) diretamente para as séries ½, 3/2, 5/2, 7/2, ..., que ele deve ter antes que ele possa usar, em tudo, a 'figura' triangular. Finalmente, até a utilização da *Geometria* de Descartes posteriormente, está em causa o fato de que não há conexão com a 'Geometria qualitativa' de Orême, ao contrário, depende diretamente dos procedimentos correspondentes de Apollonius, que é bem conhecida, bem como no caso de Fermat. Portanto, operações com 'coordenadas' têm fundamentos muito mais profundos em Descartes do que em Fermat, ou seja, na ideia de uma Álgebra geral (e, portanto indiretamente na doutrina de Orêsme) discutida anteriormente. Isto é o porque Descartes fornece um relato muito melhor do significado de 'generalização' para o qual ele e Fermat submete aos procedimentos de Apollonius; cf. observações de Fermat sobre sua 'generalização' em seu Isagoge ad locos planos et sólidos, Ouvres, ed. Tannery-Henry, I, pp. 91, 93 e 99. (Nota 323, página 300).

do intelecto para sua existência e conexão. Isto é o porquê o 'ser da razão' num sentido estrito e próprio é para ser considerado somente do terceiro tipo. Assim, a 'simples multitude', a multiplicidade como tal, que tem seu 'ser' graças ao 'intelecto puro' é verdadeiramente um *ser abstrato* ou *ser racional* no sentido de uma segunda intenção. Agora, Eustachius tenta definir e estabelecer o uso da 'segunda intenção' mais rigorosamente como um *ser racional* 'que é concebido como pertencente a coisas conhecidas pela virtude do ser conhecido, e, que não pode existir, exceto *como algo presente no intelecto*, visto que é concebido [não originalmente, mas] *secundariamente por reflexão operativa na mente*. O processo de 'separação' que ocorre no âmbito do 'intelecto puro' se aventura no 'reino estranho' da 'imaginação' e pode, portanto, ser descrito mais exatamente como segue: o intelecto, quando recebe a 'ideia' de um número como 'multiplicidade de unidades' por meio da imaginação, transforma, como sua natureza requer, num conceito. Consequentemente vê-se a multiplicidade de unidades não mais 'diretamente', não mais no 'ato praticado', mas 'indiretamente', 'secundariamente' ou em termos de outra expressão escolástica (no 'ato significado' [isto é, um ato cuja a intenção do objeto já é um conceito expresso com significado, como oposto ao objeto da primeira intenção que é um ser sobre o qual o *ato praticado* é imediatamente exercido]). Seu 'objeto' imediato agora é a sua própria concepção de que a 'multiplicidade de unidades', isto é, o conceito de número como tal; contudo, sua multiplicidade em si aparece como 'algo', ou seja, como *um*, e, portanto um 'ser'. Isto é precisamente o que é a abstração no que diz respeito ao que o intelecto se constitui. Transforma a multiplicidade de um número em um ser aparentemente 'independente' em um '*ens*', ou seja, num '*ser racional.*' Agora, isso é de importância crucial – o *ser racional* como uma 'segunda intenção'[243] é capturada *com a ajuda da imaginação*, de uma maneira tal que o intelecto pode, por sua vez, tomá-lo como objeto no modo de uma 'primeira intenção', e, nesse caso lidamos com um *símbolo* ou com uma letra-signo

[243] Rigorosamente: como o objeto pretendido de uma *segunda intenção*, cf. Eustachius um Sancto Paulo (Gilson, *Index,* p.107): '... O que é uma segunda intenção. A resposta é que uma segunda intenção, se você olhar o significado do nome, *é aquela mesma operação da mente* pelo qual sua secundaridade [isto é, um ato refletivo] pretende uma coisa já concebida antes, na medida em que foi compreendida'. Segue-se a definição de acordo com o 'uso' previamente citado no texto, no qual o objeto pretendido em si é entendido pelo termo. (Nota 324, página 306).

algébrico ou com uma figura geométrica como compreendida por Descartes. Este é o sentido no qual falamos anteriormente de 'abstração-generalização-simbolização'.

Mas, como é a imaginação uma ponte para o mundo dos 'corpos' para Descartes? Como pode a *Mathesis Universalis* transformar, também, em verdades físicas? No que se refere ao intelecto, a imaginação é definida por meio do 'serviço' funcional que assegura a possibilidade do conhecimento simbólico, e, em particular, da *Mathesis Universalis* como uma teoria geral de proporções e equações. Somente esse tipo de coisa pode ser objeto de proporções e equações. Sobre isso, Descartes agumenta na Regra XIV, 'que aceita mais ou menos, isto é, todas essas coisas e nada mais do que essas coisas possam ser chamadas como 'magnitudes' (cf., o conceito de magnitude de Euclides, V). Nesse sentido, a *Mathesis Universalis* lida somente com 'magnitudes *gerais*', que podemos agregar, e, isso é concebido pelo intelecto como '*entidade abstrato*'. No entanto, precisamos, como já sabemos, da 'ajuda' da imaginação, pois, teremos de lidar com magnitudes 'especiais', que pode, pelo menos, se assim o desejarem, que eles sejam tão facilmente manuseados quanto possíveis. Essa exigência é realizada pela '*extensão' real* dos corpos, isto é, por meio da *corporeidade como tal*, que ignoramos, exceto sua 'figuralidade'. *Porém, essa mesma natureza corporal pertence, de acordo com Descartes, à imaginação (fantasia) com o qual todas as ideias 'se' apresentam*: 'Então, mesmo para *imaginar* algo [isto é, no tratamento de magnitudes gerais], de modo a não utilizar o intelecto puro, mas com a ajuda de uma forma específica [particular] retratado num órgão que produz a imagem, devemos notar finalmente que nada pode ser dito sobre magnitudes em geral que não possa também ser atribuída a alguma ou outra forma específica. A partir disso, concluímos facilmente que não haverá proveito em transferir *aquilo que o intelecto nos permite dizer sobre magnitudes em geral* para àquela forma específica de magnitudes que é retratada mais facilmente e distintamente de tudo em nossa imaginação; ou seja, de fato a *extensão real de um corpo* abstraído de tudo, exceto aquilo que a *figura tem,* e, seguindo a partir do que foi dito sobre isso na Regra XII, onde concebemos o *órgão produtor da imagem em si*, com as ideias existente nele, como sendo nada mais do que *um verdadeiro corpo, realmente estendido e tendo uma figura*'

(Regra XIV, 440 f.).[244] Tudo que recebemos do 'mundo' com a ajuda do 'sentido externo' é transferido por meio do *sentido com*um a imaginação por uma série de 'impressões', e, isso ocorre de tal maneira que o corpo afetado por essas 'impressões', *incluindo a imaginação*, toma forma de 'figura', que pertence à parte do mundo que é produtor da impressão (cf. Regra XII, 412 ff.). 'Isso não deve ser pensado para ser dito metaforicamente', como Descartes explicitamente enfatizou. Exatamente como acontece na impressão, o contorno da parte do mundo em questão são 'impressos' 'realmente' na parte receptiva do corpo, *incluindo a imaginação*. Aqui a 'parte do mundo' deve ser entendida como *tudo* que vem e toca imediatamente os 'órgãos' do nosso corpo por meio da locomoção, '*modus localis*'[245]. Portanto, o 'trabalho' processado na imaginação

[244] Conforme a Regra XII, 414: '...este órgão imaginativo deve ser concebido como *uma verdadeira parte do corpo* de maneira tal a permitir *tamanhos* de diferentes *porções* para assumir muitas *figuras* distintas, uma da outra'. Além disso, na Regra XIV: '... Absolutamente nada é mais facilmente percebido pela nossa imaginação do que a extensão'. (Nota 325, página 306).

[245] Com este pensamento complexo é possível fazer uma distinção precisa entre a parte tradicional, que é, portanto, especialmente 'novo' no próprio Descartes. (Dilthey, *Gesammelte Schriften*, II, p. 295, parece ter esquecido completamente disso). A doutrina da 'impressão', especialmente em relação a imaginação, é, para começar, inquestionavelmente Stóico: imaginação é, portanto, de acordo com os Stóicos, *uma impressão feita no espírito* (cf. Sextus, *Againts the Mathematicinas* VII, 228, também VII, 372 e VIII, 400=Arnim, Soic. *vet. Fragmenta*, I, fr. 484, além disso, *ibid*. VII, 236=Arnim, I, fr. 58.). Antes disso, ele volta a Platão e Arsitóteles (On Memory, I, 450, 30-32): pois, como este movimento ocorre, faz-se uma marca, *como uma impressão* no objeto do sentido, exatamente como quando pessoas fazem impressões com carimbo de aneis (cf. *On the Soul* B 12, 424, 17 ff.). Sobre este movimento veja *ibid*., Γ 3, 429, I f; imaginação deve ser um *movimento* ocorrendo sob o exercício real do sentido da percepção. Conforme Platão, *Theaetetus* 191 C ff., *Philebus* 33 D ff., 39 A ff. Contudo, na filosofa antiga 'impressões' (*typosis*) é sempre compreendido de maneira tal que a 'impressão' no espírito não é tomada literalmente, mas é simplesmente considerada para cada caso como uma espécie de contrapartida para os 'olhares' da coisa que é *precisamente como se apresenta para o nosso sentido ('externo')*. Mesmo em Cleanthes, que considera *typosis* completamente literal, ou seja, como gravado e impresso, exatamente como a impressão feita em cera por carimbo de anéis (Arnim, I, fr. 484), de forma que a impressão do *eido* da coisa particular refere-se ao que é pretendido. Outros estoicos estão em conformidade com Chrysippos e Zeno (e seguramente também com Aristóteles) em compreender inteiramente, o termo *typosis* como uma simples metáfora, uma posição que Descartes explicitamente se opõe (cf. *Dioptrics*, capitulo IV, 6-7; Ad.-Tann, VI, 599 f.; texto Francês, *ibid*., pp. 112 ff.; além disso, *Principia Philosophiae* IV, 197-198). Mas, acima de tudo, a concepção Cartesiana desse processo é completamente original em reduzir *tudo* que é perceptível pelo sentido (externo), isto é, além das 'coisas' em si também sua cor, calor, frieza, dureza, rugosidade, doçura, etc., às 'figuras', que se supõe representar à *verdadeira* 'natureza' da 'coisa', da 'força' ou de 'propriedades em questão, ou seja, precisamente aquilo da Natureza que é inacessível ao sentido externo: o inconveniente resultaria se tivéssemos que abstrair tudo que não seja a natureza figurada que a cor [que é considerada aqui como um exemplo] tem'?' (Regra, XII, Ad.-Tann., X, 413.). As variedades dessas 'coisas', 'forças' ou propriedades, é, então mostrado para estar enraizado na variedade das muitas infinidades de 'figuras' possíveis, para qual Descartes apresenta algumas em um esboço (*ibid*.). É precisamente esta *verdadeira* natureza da parte do mundo que o intelecto 'vê' quando volta-se às impressões 'no' ou sobre a parte do cérebro que é a 'fantasia ou imaginação'. Esta concepção do processo de percepção que Descartes introduz aqui apenas como suposição, passa por um número de

depende do ‘real’, e isso não é ‘metafórico’, e, sim processado no mundo corpóreo; a imaginação sempre representa precisamente aquilo que *realmente* o mundo corpóreo constitui, que é a sua natureza, sua ‘substância’, sua ‘corporeidade’ – ou seja, extensão da ‘figura’ como tal (contudo, aqui o intelecto, na verdade usa somente a extensão plana e linear).[246] Isso e nada mais, explica o porque a imaginação pode garantir a habilidade da *Mathesis Universalis* no sentido de capturar a estrutura do ‘mundo verdadeiro’, e, portanto, provar para si mesmo uma ‘Ciência maravilhosa’ de fato.

Portanto, a extensão tem caráter duplo para Descartes: é ‘simbólico’ – como objeto da ‘álgebra geral’ e, é ‘real’ – como a ‘substância’ do mundo corpóreo. O pensamento de Descartes, mais exatamente, a dignidade de representar o ‘ser’ substancial do mundo corpóreo acumula a extensão precisamente pela razão de sua objetividade *simbólica* com a estrutura da *Mathesis Universalis*. Somente neste ponto há o fundamento da física ‘clássica’, que desde então, foi criado e tem sido chamado de ‘espaço Euclidiano.’ Isto é o fundamento no qual Newton estabeleceu a estrutura de sua Ciência Matemática da Natureza.[247]

---

mudanças além do desenvolvimento de seu pensamento, especialmente através de uma ênfase mais forte sobre o ‘movimento’ das ‘figuras’ que é finalmente convertido em ‘movimento’ com a glândula pineal (localiza espírito humano) (cf. a propósito, Aristóteles On The soul Γ 3, 428 b 10 ff.) e por meio da doutrina do ‘espírito vital’, que na verdade volta-se a antiguidade, especialmente em Galen. Porém, estas suposições originais, especialmente aquelas que subjaz ao entendimento de *extensão*, permanecem não apenas no fundamento dos escritos posteriores de Descartes, mas são, de fato – reconhecidamente ou não – pressuposto de toda a psicologia e fisiologia da psicologia moderna e até nos dias atuais (cf., entre outros, as férteis formulações de Euler, *Lettres à une princesse d’Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, II [Leipzig, 1770], Cartas 94 e 96, pp. 63 ff; 72 ff.). O fato de ter tornado obscuro posteriormente a diferença entre ‘fantasia’ e ‘senso comum’, para Descartes não é importante, cf. *Meditations* VI, Ad.-Tann., VII, 86, 16 ff., e também, *The World, Treatise on Man*, Ad.-Tann., XI, 174 ff; cf. Arsistóteles, *On Memory* I, 450, 10 f: a imagem que aparece é uma reflexão do senso comum; além disso, a doutrina aristotélica está em conformidade com o senso comum, e, está essencialmente relacionado a tudo ‘*koina*’ que existe: *kinesis* (movimento), *stasis* (repouso), *schema* (figura), *megethos* (magnitude), *arithmos* (number), *hen* (um) – *On the Soul* Γ I, 425, 14 ff; e B 6, 418, 16-19. Nesse ponto, Descartes está em conformidade com a psicologia contemporânea (cf. Gilson, *Index*, p. 267), compreendendo obviamente ambos, a ‘fantasia’ e o ‘senso comum’ como sendo duas faculdades do *senso interno* que são distinguidos do *senso externo*, porém apenas uma dessas instâncias realizam não na natureza ou espécie. (Nota, 326, página 306).

[246] Conforme *Cogitationes privatae*, X, 217, 12 ‘... A imaginação usa figuras para conceber corpos...’ A continuação dessa passagem mostra todo o significado que Descartes, pelo menos em seu período inicial, atribui a faculdade da imaginação. (Nota 327, página 308).

[247] Conforme *Principia philosophiae*, II, 64. O desenvolvimento de Descartes leva-o a encontrar garantias de certezas ‘claras e distintas’, isto é, acima de tudo, cognição Matemática – e consequentemente também a garantia da possibilidade de uma ‘Física verdadeira’ – através de

um desvio na metafísica, e em última instância em Deus. Com o resultado dessa posição, a importância da *imaginação* no sistema Cartesiano declina cada vez mais, especialmente no que diz respeito ao conceito de *extensão*, tornando, portanto muito mais questionável. Contudo, o caráter de extensão em si permanece essencialmente intocável nesse desenvolvimento. (Nota 328, página 308).