

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO  
LINHA DE PESQUISA: CULTURA, MEMÓRIA E TEORIAS EM  
EDUCAÇÃO**

**JACQUELINE BORGES DE PAULA**

**O TERMO 'AXIOMA' NO TEMPO, CONSIDERANDO A  
RELAÇÃO ENTRE A FILOSOFIA E A MATEMÁTICA  
ALICERÇADA NO PENSAMENTO SOBRE  
COMPLEMENTARIDADE 'OTTEANO'**

**CUIABÁ**

**2014**



**JACQUELINE BORGES DE PAULA**

**O TERMO ‘AXIOMA’ NO TEMPO, CONSIDERANDO A  
RELAÇÃO ENTRE A FILOSOFIA E A MATEMÁTICA  
ALICERÇADA NO PENSAMENTO SOBRE  
COMPLEMENTARIDADE ‘OTTEANO’**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação, do Instituto de Educação da Universidade Federal de Mato Grosso, como parte dos requisitos para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO** (Linha de Pesquisa: Cultura, Memória e Teorias em Educação; Grupo de Pesquisa em Educação Matemática) sob a orientação do Professor Dr. **MICHAEL FRIEDRICH OTTE**.

**CUIABÁ**

**2014**

### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

P324t Paula, Jacqueline Borges de.  
O TERMO 'AXIOMA' NO TEMPO, CONSIDERANDO A RELAÇÃO ENTRE  
A FILOSOFIA E A MATEMÁTICA ALICERÇADA NO PENSAMENTO SOBRE  
COMPLEMENTARIDADE 'OTTEANO' / Jacqueline Borges de Paula. -- 2014  
539 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Michael Friedrich Otte.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação,  
Programa de Pós-Graduação em Educação, Cuiabá, 2014.  
Inclui bibliografia.

1. Filosofia. 2. Linguagem. 3. Matemática. 4. Axioma. 5. Pensamento sobre  
Complementaridade Otteano. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
Avenida Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - Cep: 78060900 - CUIABA/MT  
Tel : 3615-8431/3615-8429 - Email : secppge@ufmt.br

## FOLHA DE APROVAÇÃO

**TÍTULO: "O termo 'axioma' no tempo, considerando a relação entre a Filosofia e a Matemática alicerçada no pensamento sobre complementaridade 'otteano'"**

AUTORA: Doutoranda Jacqueline Borges de Paula

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 28 de novembro de 2014.

Composição da Banca Examinadora:

---

Presidente Banca / Orientador	Doutor	Michael Friedrich Otte
Instituição:	UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO	
Examinadora Interna	Doutora	Marta Maria Pontin Darsie
Instituição:	UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO	
Examinadora Interna	Doutora	Gladys Denise Wielewski
Instituição:	UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO	
Examinadora Externa	Doutora	Sandra Maria Pinto Magina
Instituição:	UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ	
Examinador Externo	Doutor	Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Instituição:	UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO	
Examinador Suplente	Doutor	Sergio Antonio Wielewski
Instituição:	UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO	
Examinador Suplente	Doutor	Marcos Francisco Borges
Instituição:	UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO	

CUIABÁ, 28/11/2014.



O que nos sustenta e nos coloca em movimento é o amor! *Amor* para mim é uma palavra plural. Dedico todo este trabalho aos meus familiares, em especial ao meu lindo Filho (Zeh) e meu Esposo amado (Deni Gueno) presenças constantes, indispensáveis e vitais nos últimos quatros anos, e, a meu Vô Amâncio (uma lembrança constante) ... “Bença V^”





## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e meu anjo da guarda que em seus planos secretos cuidam de mim e me proporcionam etapas tão lindas, frutíferas e emocionantes em minha vida. Por selecionarem para estarem do meu lado na caminhada sempre pessoas tão especiais.

Jamais pensei que pudesse compartilhar de uma amizade tão especialíssima como a do meu orientador o Professor Michael F. Otte. Serei eternamente grata à ele por me selecionar neste processo de doutoramento. Este encontro surpreendentemente me apresentou um alemão bem humorado, com um coração acolhedor, extremamente generoso, e sempre com uma delicada preocupação com meu aprendizado. Tinha medo que ele viesse a desistir de mim. Mas, ele definitivamente não é do tipo que desiste de qualquer coisa. Para mim é um privilégio conhecer e estar convivendo com esse homem brilhante, genial, um intelectual no sentido mais nobre dessa palavra. Já o admirava antes, achava-o enigmático, misterioso, e, ele é também tudo isso mesmo! O professor tem me ensinado muito sobre a Matemática, mas, muito, muito mais sobre como “olhar” para o mundo, sobre as múltiplas perspectivas, e, em especial para não deixar passar despercebido os detalhes.

Não posso deixar de agradecer ao meu amigo e parceiro de doutoramento Evilásio José de Arruda, sempre quando me sentia insegura e com medo, lá estava ele com sua energia, carinho e ânimo indestrutível, dizendo: *Vamo que vamo Jacqueline!*

Também, aos Professores Doutores: Gladys D. Wielevisk, Marta M. P. Darsie, Sandra Maria Pinto Magina, Luiz Gonzaga Xavier de Barros, Sergio Wielevisk, Marcos Borges. Professores dedicados que estiveram envolvidos na construção e formalização desta pesquisa e tese, participando da leitura crítico-reflexiva desde a etapa da qualificação, em cujas observações foram fundamentais ao realinhamento teórico e metodológico.

Obrigada de Coração!

Bjim (Jac)



## RESUMO

PAULA, Jacqueline Borges de. *O termo 'Axioma' no tempo, considerando a relação entre a Filosofia e a Matemática, alicerçada no pensamento sobre Complementaridade 'Otteano'*. 2014. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Instituto de Educação – Universidade Federal de Mato Grosso, 2014.

Esta pesquisa teve como questão norteadora inicial saber, em relação ao Conhecimento Matemático e sua constituição: o que significa o fato de o termo 'axioma' até o século XIX ser tomado como antônimo de hipótese e, nos dias atuais, ser considerado como sinônimo? Desta forma, nosso objetivo neste estudo foi destacar através de abordagem histórica, filosófica e de uma perspectiva semiótica, os significados assumidos pelo termo 'axioma' que aparecem nas obras de filósofos e matemáticos, desde a época de Platão até a Modernidade, evidenciando oscilações que aconteceram nessa significação e refletir e interpretar sobre o relacionamento entre a Filosofia e a Matemática partindo do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática. Deste modo, evidenciando os fatores/aspectos promotores e/ou implicantes em tais oscilações, de forma a conjecturar sobre esse movimento entre 'significado do um termo/conceito' e a 'relação entre a Linguagem e a Matemática'. Assim, especificamente, intencionamos notabilizar a transformação conceitual que aconteceu na Matemática, realçada na análise do termo 'axioma', ao destacá-lo, por assumir especial *status* na conceituação em Matemática. Empreendemos desenvolver uma pesquisa reflexivo-interpretativa de caráter teórico-bibliográfico, à qual agregamos, como pressuposto teórico e metodológico, uma visão no sentido da Complementaridade do pensamento de Michael F. Otte (o Pensamento sobre Complementaridade 'Otteano') entre aspectos que, tradicionalmente, são tratados de forma dicotômica quando relacionados ao Conhecimento Matemático (intensão e extensão, pensamento descritivo/contemplativo e pensamento operativo/instrumental, quantidade/qualidade). Identificamos, como nosso objeto de estudo para compreender sobre o relacionamento entre Filosofia e Matemática, a relação entre a Linguagem e a Matemática, que intencionamos observar, interpretar e destacar na e pela análise de oscilações de significados atribuídos ao termo 'axioma'. Nossa tese compreende que a mudança do significado desse termo, evidenciada na relação entre a Linguagem e a Matemática, tenha se deslocado dos aspectos descritivo-contemplativos para os aspectos

operativo-instrumentais, de modo que a objetividade da Matemática passa a revelar-se na atividade e nas aplicações futuras e não mais em termos de fundamentos *a priori* (OTTE, 2011). Isto implica que o sentido do termo ‘axioma’ se encontra agora nas deduções formais e na teoria desenvolvida como uma entidade em si e seu significado nas aplicações dessa teoria. De modo que, dentre os resultados da Filosofia da Matemática, destaca-se a descoberta de precisarmos reconhecer que uma análise semântica de seus conceitos, como é de costume nas Ciências Humanas, não é suficiente na Matemática e que devemos levar em conta os aspectos pragmáticos das representações. Este estudo observou que quanto mais a Linguagem e a Matemática se aproximam uma da outra mais o termo *axioma* tende a ser interpretado como sinônimo de hipótese, e que, tal aproximação se desencadeou sempre que o pensamento Filosófico se aproximou do pensamento Matemático. A base teórica que sustenta a análise reflexivo-interpretativa é o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ (1993, 2001, 2003, 2008, 2012), fundamentado na filosofia de Kant (1987, 2000, 2001) e na semiótica de Charles Sanders Peirce (1970, 1990, 1997, 2003). Entendemos que este estudo, ao mesmo tempo em que oportuniza aos Educadores em Matemática ampliarem suas reflexões sobre a gênese e historicidade do Conhecimento Matemático apresenta a possibilidade de uma nova forma de abordagem didático: o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

**PALAVRAS-CHAVE:** Filosofia. Linguagem. Matemática. Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Axioma.

## ABSTRACT

PAULA, Jacqueline Borges de. *The term 'Axiom' through time, considering the connection between Philosophy and Mathematics, based on the reasoning over Ottean Complementarity*. 2014. Thesis (PhD) – Postgraduation Program in Education, Education Institute – Federal University of Mato Grosso (UFMT), 2014.

This research aimed to find out, regarding Mathematics Knowledge and its constitution, what means the fact that the term 'axiom' until the XIX century was understood as the antonym to hypothesis and, nowadays, to be considered its synonym. Thus, our goal with it was to highlight by means of a historical, philosophical approach as well as of a semiotics perspective, the meaning taken by the term 'axiom' that appear in the writings of philosophers and mathematicians since Plato's time up to the modern times, revealing oscillations that occurred to such meaning and both reflect upon and interpret the relationship created between Philosophy and Mathematics starting from the point of view that focuses on the relationship between Language and Mathematics. Then, showing the factors/aspects that promote and/or imply such oscillations, in a way to conjecture over such movement between 'meaning of the term/concept' and the 'relationship between Language and Mathematics'. Therefore, more specifically, we intended to highlight the conceptual transformation that happened in the Mathematics field, enhanced in the very analysis of the term 'axiom', when treating it in isolation, for its special *status* in the concepts of Mathematics. We got engaged in developing a reflexive-interpretative research following theoretical-bibliographical characteristics, to which we added, as a theoretical and methodological assumption, a vision in the sense of Complementarity of Michael F. Otte's reasoning (or reasoning over Ottean Complementarity) among aspects that, traditionally, are treated in a dichotomic way when related to Mathematics Knowledge (intension and extension, descriptive/contemplative thought and operating/instrumental thought, quantity/quality). We identified the relationship between Language and Mathematics as our object of study to comprehend the relationship between Philosophy and Mathematics, which we aimed to observe, interpret and highlight in and through the analysis of oscillations of the meanings attributed to the term 'axiom'. Our thesis shows that the change in the meaning of such term, evidenced in the relationship between Language and Mathematics, may have been moved from descriptive-contemplative aspects to

operational-instrumental ones, in such a way that the objectivity of Mathematics starts to reveal itself in activity and future uses and not in terms *a priori* foundations anymore (OTTE, 2011). This presupposes that the meaning of the term ‘axiom’ can be found now in formal deductions and theory developed as an entity in itself, and its meaningful applications for such theory. Thus, among the results of Mathematics Philosophy, comes in evidence the discovery that we need to recognize that a semantics analysis of its concepts, as customary in Humanities, is not enough in Mathematics and we should take into account pragmatic aspects of the representations. This research observed that the more Language and Mathematics get close to each other the more the term *axiom* tend to be interpreted as a synonym to hypothesis, and that such proximity has evolved every time the philosophical thought got close to the mathematical one. The theoretical basis that supports the reflexive-interpretative analysis is the reasoning over the Ottean Complementarity (1993, 2001, 2003, 2008, 2012), based on Kant’s philosophy (1987, 2000, 2001) and Charles Sanders Peirce’s semiotics (1970, 1990, 1997, 2003). We got to the conclusion that this study offers its reflections over the genesis and historicity of Mathematics Knowledge to Mathematics teachers/educators as well as presents the possibility of a new way of didactics approach: reasoning over the Ottean Complementarity.

**KEYWORDS:** Philosophy. Language. Mathematics. Reasoning over Ottean Complementarity. Axiom.

## QUADRO ILUSTRATIVO DE FILÓSOFOS E MATEMÁTICOS

Nome	Tempo em que viveu	Período histórico (**)	
Platão ( ~427 – ~347 a.C.)*	<b>Antiguidade</b>	<b>Antiguidade</b>	
Aristóteles ( ~384 - ~322 a. C.)*			
Euclides ( ~325 - ~265 a.C.)*			
	<b>Sec XV</b>	<b>Idade Média</b>	<b>Invenção da Imprensa/RE</b>
Vietá (1540 – 1603)	<b>Sec XVI</b>	<b>Idade Média</b>	<b>Renascimento</b>
Stevin (1548 – 1620)	<b>Sec XVI e XVII</b>	<b>Idade Média</b>	<b>Renascimento/RC</b>
Galileu ( 1564 – 1642)	<b>Sec. XVI e XVII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Renascimento/RC</b>
Descartes (1596 – 1650)	<b>Sec. XVII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>RC/Barroco</b>
John Locke ( 1632 – 1704)*	<b>Sec. XVII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>RC/Barroco</b>
Newton ( 1646 – 1716)	<b>Sec. XVII e XVIII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>RC/Barroco</b>
Espinosa (1632 – 1777)	<b>Sec. XVII e XVIII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>RC</b>
Leibniz ( 1646 – 1716)*	<b>Sec. XVII e XVIII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>RC</b>
Rousseau (1712 – (1778)*	<b>Sec. XVIII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Iluminismo/RC/ RI</b>
Condillac ( 1715 – 1780)*	<b>Sec. XVIII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Iluminismo/RC/ RI</b>
Immanuel Kant ( 1724 – 1804)*	<b>Sec. XVIII</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Iluminismo/Romantismo/ RC/ RI</b>
Lagrange ( 1736 – 1813)	<b>Sec. XVIII e XIX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Romantismo/ RI/RC</b>
Gauss ( 1777 – 1855)	<b>Sec. XVIII e XIX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade/ Romantismo/ RI/RC</b>
Hermann G. Grassmann ( 1809 – 1877)	<b>Sec. XIX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade/ Romantismo/ RI/RC</b>
Dedekind ( 1831 – 1916)*	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade /Romantismo/RC</b>
Cantor ( 1845 – 1918)	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade/RC</b>
Frege ( 1848 – 1925)	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade</b>
Émile Durkheim (1858 – 1917)*	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade</b>
Peano (1858 – 1932)*	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade</b>
David Hilbert ( 1862 – 1943)*	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade</b>
Ernest Cassirer ( 1874 – 1945)*	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade</b>
Zermelo ( 1871 – 1953)	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade</b>
Russell ( 1872 – 1970)*	<b>Sec. XIX e XX</b>	<b>Modernidade</b>	<b>Modernidade</b>
Claude Lévi-Strauss (1908-2009)*	<b>Sec. XX e XXI</b>	<b>Modernidade</b>	
Michael F. Otte ( 1938)*	<b>Sec. XX e XXI</b>	<b>(pós?)Modernidade</b>	

(\*) Filósofos e Matemáticos aos quais empreendemos aprofundamentos reflexivos e interpretativo neste estudo.

(\*\*) O **colorido** tenta destacar à existência de um movimento dinâmico nessa temporalidade relacionados a aspectos imbricados e inter-relacionados nessa classificação. De modo geral entendemos que o fim da

antiguidade é marcado com a queda do império Romano (Séc V), dando início à Idade Média (do Séc. V ao Séc. XV), e, que o movimento que culminará no Modernismo tem início em nossa reflexões com a Invenção da Imprensa.

- Invenção da imprensa - século XV

- RC – Revolução Científica (do século XVI prolongando-se até século XVIII)

- RI – Revolução Industrial (entre 1760 a 1820 – século XVIII e Século XIX)



## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>21</b>
<b><i>CAPÍTULO I: Palavras no Tempo: um estudo interpretativo de abordagem histórica, filosófica e semiótica do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre a relevância da Filosofia e da Matemática no desenvolvimento do Conhecimento Matemático</i></b> .....	<b>37</b>
<b><i>CAPÍTULO II: O Pensamento ‘Otteano’: o fenômeno da Complementaridade na/para interpretação do desenvolvimento do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos</i></b> .....	<b>67</b>
<b>2.1 O Princípio da Complementaridade</b> .....	<b>77</b>
<b>2.2 O fenômeno da Complementaridade no pensamento ‘Otteano’</b> .....	<b>84</b>
<b><i>CAPÍTULO III: Semiótica como enfoque interpretativo ao processo cognitivo e ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático e tomada como pressuposto teórico ao estabelecimento do Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’</i></b> .....	<b>117</b>
<b>3.1 O pensamento de Charles Sanders Peirce</b> .....	<b>126</b>
<b>3.2 A perspectiva semiótica Peirciana e o Conhecimento Matemático</b> .....	<b>131</b>
<b>3.3 Reflexões sobre nossa opção de uma abordagem semiótica e perspectiva Peirceana na interpretação do termo <i>axioma</i> e alicerçada pelo pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’</b> .....	<b>151</b>
<b><i>CAPÍTULO IV: Apontamentos sobre o desenvolvimento do pensamento conceitual: o conceito de conceito.</i></b> .....	<b>169</b>
<b><i>CAPÍTULO V: Uma Reflexão sobre a Relação entre a Linguagem, o Conhecimento e a Matemática: pensamentos que conduziram à introdução de uma abordagem semiótica ao processo cognitivo e à Teoria Estruturalista da Metáfora</i></b> .....	<b>199</b>
<b>5.1 Da inserção do pensamento metafórico no processo cognitivo: da certeza intuitiva à contingência do pensamento metafórico</b> .....	<b>199</b>
5.1.1 Pensamentos filosóficos em que destacamos (o sentido de) um distanciamento da Linguagem ao processo cognitivo .....	206
5.1.2 Pensamentos filosóficos em que destacamos (o sentido de) uma aproximação da Linguagem ao processo cognitivo .....	213
<b>5.2 Uma nova perspectiva interpretativa sobre a relação entre a Linguagem, o Conhecimento e a Matemática: da negação do pensamento metafórico ao processo cognitivo à Teoria Estruturalista da Metáfora</b> .....	<b>225</b>

5.2.1 Sobre o objeto da Matemática quando a Linguagem ganha destaque no processo cognitivo: a mudança destacada por uma abordagem semiótica que agrega o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’ e a dimensão metafórica .....	226
5.2.2 A(s) Teoria(s) Estruturalista da Metáfora e o pensamento Matemático .....	243

***CAPÍTULO VI: Apresentando os Significados do Termo Axioma: interpretação fundamentada em uma abordagem de cunho histórico, filosófico, semiótico e alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ .....*** 249

<b>6.1 Conjecturas sobre o significado de Axioma anteriores a Platão (~429 – 347 a.C.)..</b>	<b>253</b>
<b>6.2 Axioma em Platão (~ 429 – 347 a. C.).....</b>	<b>256</b>
6.2.1 O olhar de Platão para a Matemática – o pensamento analítico: uma reflexão fundamentada no <i>Diálogo em Mênon</i> .....	262
6.2.2 A Matemática e a Dialética em Platão .....	266
6.2.3 Reflexão sobre o significado de <i>axioma</i> em Platão .....	269
<b>6.3 Axioma em Aristóteles (~384 – 322 a.C.).....</b>	<b>276</b>
6.3.1 A produção de conhecimento e sua relação com os <i>axiomas</i> em Aristóteles .....	281
6.3.2 Os <i>axiomas</i> para Aristóteles: o processo de abstração lógica .....	288
6.3.3 Reflexões sobre o significado de <i>axiomas</i> em Aristóteles .....	295
<b>6.4 Axiomas em Euclides (~325 – 265 a.C).....</b>	<b>301</b>
6.4.1 A apresentação dos <i>axiomas</i> por Euclides em <i>Os Elementos</i> : instituindo o método <i>axiomático</i> às Ciências .....	302
6.4.2 Reflexões sobre o significado de <i>axioma</i> em Euclides .....	309
<b>6.5 Axiomas em John Locke (1632-1704).....</b>	<b>315</b>
6.5.1 Locke e o papel da Linguagem no uso que nosso entendimento faz das <i>ideias</i> .....	322
6.5.2 Os <i>axiomas</i> em John Locke .....	330
6.5.3 Reflexões sobre o significado de <i>axioma</i> em Locke .....	338
<b>6.6 Axiomas em Leibniz (1646-1716) .....</b>	<b>341</b>
6.6.1 O conhecimento e os <i>axiomas</i> em Leibniz.....	348
6.6.2 Reflexões sobre o significado de <i>axioma</i> em Leibniz.....	353
<b>6.7 Axiomas em Kant (1724-1804) .....</b>	<b>361</b>
6.7.1 A teoria do Conhecimento de Kant.....	364
6.7.2 Os juízos <i>a priori</i> para Kant: o que (e de que tipo) são?.....	367
6.7.3 Juízos sintéticos <i>a priori</i> e os <i>axiomas</i> para Kant: como são possíveis? Como chegamos a eles? .....	372
6.7.4 Os ‘axiomas da intuição’ na teoria do conhecimento em Kant: princípio da possibilidade de todos os <i>axiomas</i> .....	389
6.7.5 Reflexões sobre o significado de <i>axioma</i> em Kant .....	392
<b>6.8 Axiomas em J. W. R. Dedekind (1831 – 1916).....</b>	<b>400</b>
6.8.1 Reflexões sobre o significado de <i>axioma</i> em Dedekind .....	406
<b>6.9 Axiomas em G. Peano (1858-1932).....</b>	<b>407</b>
6.9.1 Reflexões sobre <i>axioma</i> em Peano .....	418
<b>6.10 Axiomas em David Hilbert (1862-1943).....</b>	<b>420</b>
6.10.1 Reflexões sobre o significado de <i>axiomas</i> em Hilbert .....	432

<b><i>CAPÍTULO VII: O que nos revelam as oscilações de significado do termo Axioma do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre o relacionamento entre a Filosofia e a Matemática?.....</i></b>	<b><i>437</i></b>
<b><i>6.1 Observações e reflexões de Otte sobre a mudança de significado do termo Axioma: três pontos a destacar .....</i></b>	<b><i>488</i></b>
<b><i>6.2 O ponto ao qual convergem os movimentos tensionais a uma mudança interpretativa do termo <i>axioma</i> e que impulsionará a mudança e rompimento do sentido de ‘verdade’ ao sentido de ‘hipótese’ .....</i></b>	<b><i>497</i></b>
<b><i>CONSIDERAÇÕES FINAIS: Afinal, o que é um Axioma?.....</i></b>	<b><i>501</i></b>
<b><i>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</i></b>	<b><i>529</i></b>



## INTRODUÇÃO

Esta tese de doutoramento trata de um estudo que ambiciona ampliar espaço reflexivo sobre o caráter do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos. Partimos do entendimento de que uma característica principal de nossa razão é a de poder exercer sua atividade por meio de conceitos; por exemplo, na Matemática, o conceito de número, ou de função. Uma vez que expressamos, fixamos e comunicamos o conhecimento pelo emprego da Linguagem, deduzimos de imediato a importância da Linguagem para a atividade racional. Também, de outro modo, quando nos deparamos com a configuração atual do Conhecimento Matemático e, em especial, o método *axiomático*, ao nível de abstração atingida, torna-se especialmente relevante a influência da Linguagem em seu desenvolvimento, inclusive tendo visto que muitos chegam ao ponto de confundir e minimizar a Matemática tomando-a exclusivamente como uma Linguagem. Em sala de aula, um reflexo dessa confusão exclui aos alunos a possibilidade de desenvolverem uma postura pró-ativa e criativa diante das situações problemas em matemática.

Dado o caráter conceitual do conhecimento científico e, em especial, para nós, no Conhecimento Matemático a relação imbricada que envolve tanto o processo linguístico/comunicativo, como o processo representacional/descoberta e o desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático, é que tomamos como nosso objeto de estudo a relação entre a Linguagem e a Matemática buscando compreender inicialmente sobre esta relação que entendemos estar intimamente ligada e podendo ser discutida à partir do relacionamento entre a Filosofia e a Matemática. E, neste trabalho, elegemos o termo *axioma* para investigar como se processa essa relação.

Destacamos, neste estudo, três dimensões, sejam elas: histórica, filosófica e semiótica, especialmente por agregamos e assumimos como pressuposto teórico o Pensamento Sobre Complementaridade ‘Otteano’. À primeira vista, este trabalho pode parecer obra de historiador. Decididamente, não é este o caso, uma vez que não temos a intenção de traçar o percurso histórico deste termo. Sobretudo, entendemos que privilegiamos uma destacada dimensão histórica a qual poderá ser ratificada durante a leitura pela abordagem metodológica, construída e empreendida ao objeto que nos propomos investigar.

O aspecto histórico comparece, pois buscaremos apresentar evidências dispersas, de forma que possam exibir, mais claramente, uma distinção ou movimento de

oscilações na significação do termo *axioma* de verdade à hipótese, de modo a delinear o processo que conduziu, gradativamente, à mudança de sentido no significado, sempre tomando, como base de análise, a relação entre a Linguagem e a Matemática.

Nós entendemos de suma importância um recurso à História, mesmo em sala de aula, percebemos que esta tem um papel decisivo na organização do conteúdo matemático que se deseja trabalhar, de modo a reestruturá-lo com base no modo de um raciocinar próprio a um conhecimento que se deseja construir. Assim, nossa compreensão de um recurso à História supera o sentido de mero acessório à pesquisa ou didático, mas assume-se como um verdadeiro e potencial definidor de estratégias ao investigador e educador matemático.

E organizar e estruturar o conteúdo de Matemática a ser trabalhado em sala de aula, à luz de sua evolução histórica, torna-se mais significativo por atender ao ‘Princípio da Metamorfose’ que caracteriza a imagem do conhecimento como uma rede conceitual. Machado (1993, p.145) explica que: “o Princípio da Metamorfose explicita a ideia, suficientemente vivenciada por todos os que lidam diariamente com informações, de que a rede de significações que constitui o conhecimento está em permanente transformação” e de acordo com nossa abordagem ‘Oteana’ e em permanente complementaridade.

É assim, portanto, que optamos por investigar os significados atribuídos ao termo *axioma* desde os tempos de Platão até a Modernidade, à luz de uma evolução e sentido histórico. Obedecemos a uma linha que buscou avançar sempre do passado para o presente. A nossa escolha pelos filósofos e matemáticos abordados justifica-se por serem referenciais e figurarem elementares e indispensáveis, do nosso ponto de vista, à compreensão do desenvolvimento e sobre a constituição do próprio Conhecimento Matemático. Deste modo, buscamos compor um quadro que nos proporcionasse retrato razoável em sua abrangência e limite, sobre as oscilações significativas que o termo *axioma* possa ter apresentado.

Entendemos que a leitura referendada por diferentes pontos de vistas, contextos e épocas, ao nos proporcionar uma percepção sobre os diversos modos de compreensão sobre a natureza da Matemática, seu objeto e método, permite-nos identificar e destacar traços relacionados ao termo *axioma* que possam ser convergentes ou divergentes diante das especificações e usos feitos por esses filósofos e matemáticos. De modo que buscaremos interpretar tais forças potenciais e de inferências na significação desse

termo que sinalizem sobre a influência e/ou implicações determinantes e determinadas pela/na relação entre a Linguagem e a Matemática neste processo de significação.

Também, entendemos que estamos empreendendo uma pesquisa de perspectiva interpretativo-reflexiva, que nos remete a um contexto de abordagem filosófica da nossa temática. Assumimos que muitos dos problemas relacionados aos processos de ensino-aprendizagem em Matemática, vinculados a questões sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático, sua gênese e historicidade, podem ser decorrentes de legítimos problemas filosóficos que se relacionam à própria Matemática, ou, de outro modo, sobre a natureza da própria Matemática.

Quando nos debruçamos sobre a questão, em relação ao Conhecimento Matemático e sua constituição, por exemplo, tentando compreender o significado do termo *axioma*, encontramos, em Otte (2011)<sup>1</sup>, o fato de que a palavra *axioma* foi tomada com antônimo de ‘hipótese’ até a Modernidade e, hoje em dia, *axioma* é considerada como sinônimo de ‘hipótese’. Observamos que à esta questão problemática perpassa, primeiramente, uma dimensão de fundo filosófico. Inclusive ainda hoje podemos encontrar livros didáticos onde um *axioma* é definido como proposições verdadeiras e indemonstráveis.

Já para Popper, por exemplo, um *axioma* é “apenas o pressuposto mais elegante dentre outros possíveis, isto é, que resolve o maior número de problemas do modo mais interessante”. Popper, além de retirar dos *axiomas* sua pretensão de obviedade e veracidade (SILVA, 2007, p. 19-20), coloca-os no sentido aproximativo ao de hipóteses.

No entanto desde a antiguidade quanto em Popper, sobretudo, constatamos somente respostas filosóficas ao entendimento sobre o que seja um *axioma*. E, não conseguimos encontrar na Matemática sequer um teorema que nos diga o que é um *axioma* matemático. Assim, necessitamos investigar a própria atividade Matemática se quisermos obter uma resposta ao que seja um *axioma*. Segundo Otte (2011)<sup>2</sup>, a Matemática se revela na atividade. Isso implica que o sentido de *axioma* se encontra no seu uso. Esse fato nos mostra que uma análise semântica<sup>3</sup> de seus conceitos, como é de

---

<sup>1</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

<sup>2</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

<sup>3</sup> Na linguística a Semântica é o estudo das maneiras como as pessoas se comunicam em termos linguísticos, ela trata de uma relação de signo para signo. Já na teoria do conhecimento, na ciência a semântica trata da relação entre os signos e os objeto – da referência, ou seja, a teoria da referência. Por exemplo para Peirce a semântica é uma teoria da referência para Saussure é uma teoria da Comunicação.

costume nas Ciências Humanas, não é suficiente na Matemática e devemos levar em conta os aspectos pragmáticos<sup>4</sup> das representações.

Desta maneira, observamos que, embora algumas questões e problemas sejam especificamente da Matemática, não há como tratá-los sem uma abordagem filosófica. Em nossa interpretação, sobretudo, é fundamental que se estabeleça um diálogo entre a Matemática e a Filosofia para compreendermos sobre as possíveis oscilações no significado do termo *axioma*.

No entanto, este estudo parte do princípio de que a Filosofia em questão deve ser bem nutrida de Conhecimento Matemático e não ignora, de forma alguma, a própria História da Matemática. Para Imre Lakatos (*apud* SILVA, 2007, p.21), parafraseando Kant, dizia, coberto de razão, que “a Filosofia da Matemática sem História da Matemática é vazia, e esta sem aquela é cega”.

Somadas a essas perspectivas histórica e filosófica, também destacamos o caráter linguístico deste estudo, isto é, semiótico. Essencialmente porque a atividade racional se expressa por meio da Linguagem, de modo que, nosso entendimento é o de que contextos racionais tratam de contextos linguísticos. Entretanto, nosso trabalho não abordará a atividade racional propriamente e em si mesma, mas, em seu ‘produto’ – o Conhecimento Matemático -, aqui compreendendo o desenvolvimento e interpretação do significado do termo *axioma*, tomado como resultado do exercício da nossa razão.

Neste sentido, para este estudo, propomo-nos a empreender uma abordagem e análise que entendemos ser eminentemente de cunho semiótico<sup>5</sup>. Mas, não utilizaremos o expediente de técnicas formais à análise semiótica, mas procuraremos identificar a continuidade e/ou descontinuidade entre sentido e referência do termo *axioma*, através da análise do significado, oscilações de significado, e, do uso do termo em estruturas e contextos linguísticos (que também são contextos matemáticos), principalmente, ao se tentar esclarecer o sentido real desse termo enquanto signo, um símbolo.

Sobretudo, o pilar interpretativo que orienta esta investigação e compreende o caráter linguístico tem o sentido de Filosofia da Linguagem, haja vista que: primeiro a nossa reflexão toma a Linguagem como objeto formal, como também, mais precisamente, busca interpretar etapas desta Linguagem na constituição de uma teoria

---

<sup>4</sup> A pragmática se relaciona aos “contextos de desenvolvimento” do conhecimento; aos modos de usos que empreendemos e fazemos desse conhecimento.

<sup>5</sup> A Semiótica trata basicamente do assunto como os signos de todo tipo se referem aos seus objetos. A perspectiva semiótica assumida neste estudo tem seus pressupostos no pensamento de Charles Sanders Peirce (1839-1914) (ao lado de Ferdinand de Saussure foi um dos fundadores da Semiótica).



da significação, do ponto de vista do Conhecimento Matemático; segundo, ambicionamos interrogar-nos sobre as condições de possibilidades dessa significação, de maneira que se faz presente a intenção de uma reflexão situada e crítica.

A ênfase à perspectiva semiótica dentro de uma Filosofia da Linguagem à Matemática baseia-se em concebermos que não há pensamento sem representação e tampouco representação sem pensamento. Neste sentido, acompanha-nos e fundamenta nosso estudo o pensamento de Charles Sanders Peirce, especialmente, por ele ter feito suas reflexões, baseadas no seu Conhecimento Matemático e ainda por considerar a Lógica como sendo baseada na Semiótica.

Ademais, compreendemos todo raciocínio matemático (principalmente na configuração atual) como constituindo o tipo de pensamento diagramático que prima pelo pensamento relacional-estruturalista, que envolve, elementarmente signos básicos: ícones, índice e símbolos.

Agregamos, às dimensões anteriores deste estudo, o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Este funciona como pressuposto teórico, fio condutor da construção metodológica, como também um dínamo à nossa análise reflexivo-interpretativa que se configura como sendo de caráter teórico-bibliográfico. O Pensamento ‘Otteano’ nos direciona a entender que não há uma distinção nítida e/ou dicotômica que se possa estabelecer entre pensamento e representação no processo de desenvolvimento cognitivo humano, e especificamente o pensamento matemático se configura e formaliza-se ‘na’ e ‘através da’ simbolização. A Matemática constitui-se, essencialmente, numa atividade intelectual que envolve a construção de representações diagramáticas e no desenvolvimento de experimentos com diagramas de qualquer espécie em nível abstrativo.

Assumimos que nosso conhecimento é fruto de uma relação essencial entre mente e mundo, mediada por signos e representações. Sobretudo, qualquer representação não pode ser reduzida ao objeto representado, como também nenhum conceito pode ser diminuído à sua extensão, ou um conjunto não pode ser reduzido aos seus elementos. Também compreendemos que uma perspectiva genética ou evolutiva ao conhecimento e à verdade torna-se inevitável, caso contrário (OTTE, 2014) nenhuma das questões fundamentais da epistemologia da Matemática pode ser proveitosamente discutida.

É neste sentido que este estudo empreenderá uma abordagem interpretativa alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Entendemos a Complementaridade em termos de noções duais que envolvem a constituição desse conhecimento como as noções de extensão e de intensão de significados dos símbolos matemáticos, como também de quantidade e de qualidade e do discreto e do contínuo.

Por exemplo, é histórica e factual a tensão sempre presente entre o discreto e o contínuo no desenvolvimento do pensamento matemático, principalmente, em sala de aula, onde observamos, muitas vezes, ser priorizado um aspecto em detrimento do outro. Uma abordagem didática que envolva uma perspectiva no sentido interpretativo da Complementaridade do pensamento ‘Otteano’ busca ‘resolver’ essa tensão, ao apropriar-se dela em sala de aula e através da administração dessa tensão conceitual entre esses aspectos. Trata-se, deste modo, de caminhar dentro dessa dupla perspectiva, com a ideia do discreto e do contínuo, na construção de conceitos matemáticos, explorando essa interação no ensino uma vez que muito desses conceitos têm sua origem a partir dessa interação.

Entendemos que considerar aspectos duais em jogo de um ponto de vista Complementar é singularmente potencial, auxiliando-nos na percepção sobre como se processa o desenvolvimento cognitivo e epistemológico, ao mesmo tempo em que nos fornece uma base estrutural para compreendermos, histórica e culturalmente, o próprio desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

A perspectiva sobre Complementaridade ‘Otteana’ parte de pressupostos teóricos sobre a constituição do saber, fundamentados numa concepção Materialista Filosófica. E Materialista (PATO, 2012), minimamente, por conceber que repousa na matéria a origem de nossas sensações e que o mundo não se resume a puras representações. Mas entendemos que, envolvendo a relação entre matéria e pensamento, a posição interpretativa do pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ amplia a perspectiva, pois toma um posicionamento Materialista Filosófico e Dialético; pois, a dialética implica em que a cognoscibilidade do mundo e a prática, nossa atividade neste mundo, sejam entendidas como fazendo parte de um processo dinâmico e dialético.

Também, compreendemos e defendemos, que nesse movimento processual existe a possibilidade de uma realidade objetiva, de acordo com Lênine (1982) e esta tratando dos conteúdos das representações humanas que não dependem do sujeito. E, neste sentido, designamos a Complementaridade como uma concepção Materialista

Filosófico Dialético, pois esse pensamento concebe as sensações como fonte do nosso conhecimento e a realidade objetiva como fonte das nossas sensações.

Sobretudo, não devemos confundir ‘verdade objetiva’ com a questão do ‘critério’ da ‘verdade objetiva’, nem com a questão de saber se a verdade objetiva pode ser expressa integralmente ou apenas de forma aproximada.

Para Lênine (1982), o problema da verdade é uma das questões filosóficas mais importantes. O pensamento materialista filosófico, ao reconhecer a verdade objetiva, coloca-a como sendo o conteúdo para as representações humanas. Já as representações figuram um somatório de verdades que, no entanto, são relativas, mas é indiscutível que sempre nos aproximamos dessa verdade objetiva. Só que pensar dessa maneira, principalmente, não nos conduz a uma espécie de relativismo antes de tudo pelo fato de que, ao reconhecermos a verdade objetiva, implica reconhecermos a existência de uma ‘verdade absoluta’.

Para nós, a questão de saber se o nosso pensamento humano seria capaz de exprimir essa ‘verdade objetiva’ de forma absoluta ou relativa (PATO, 2012), só é solucionada dialeticamente e partindo da prática como o ‘critério’ que nos permite distinguir as ilusões da ‘verdade objetiva’. Dentro de pressupostos materialistas, o mundo é matéria em movimento e o movimento das nossas representações corresponde ao movimento da realidade objetiva, da matéria e também ao nosso próprio movimento, enquanto sujeito cognoscente. Neste sentido, entendemos que o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteana’ é inovador ao interpretar sobre essas questões e sobre o desenvolvimento do pensamento Matemático em sua gênese e em sua historicidade. Especialmente situando o ‘critério’ da verdade objetiva na ‘atividade’ que permeia a relação entre sujeito e objeto do conhecimento e, quando assumimos uma perspectiva genética ou evolucionista.

Todos esses aspectos estão em jogo quando nos propomos à uma abordagem teórico-metodológica na perspectiva do pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ à representação, ao desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático. Neste estudo empreende a busca por uma ou várias respostas que sejam satisfatórias sobre o que podemos evidenciar na/pela oscilação do significado do termo *axioma* do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática e a dinâmica operacional entre a Filosofia e a Matemática. De todo modo, consideramos que este trabalho se configura como sendo mais um olhar interpretativo sobre essa relação, não mais que

isso. Ambicionamos que, em certa medida, possamos estar oportunizando a ampliação do espaço às reflexões e ao diálogo com os educadores em Matemática sobre questões relacionadas aos fundamentos do Conhecimento Matemático e que, conseqüentemente, essas possam vir a gerar o sentido de contribuições efetivas a serem empreendidas ao tratamento didático desse conhecimento em sala de aula.

Um *axioma* básico e elementar do Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ trata de que o pensamento não ocorre na cabeça, mas, numa perspectiva semiótica ocorre a nível das representação, nos signos, nos símbolos. Se isso é verdade, estudar as mudanças, de significados das palavras vai nos dar informações sobre uma mudanças na maneira como um povo pensa. De maneira que esta pesquisa se justifica pela possibilidade de se configurar como uma contribuição ao desenvolvimento da discussão sobre a gênese e a historicidade do Conhecimento Matemático e, principalmente, sobre implicações do empreendimento de uma abordagem semiótica à Matemática, numa perspectiva que exercite agregar o pensamento de complementaridade ‘Otteano’.

A questão norteadora deste estudo pretende investigar, em relação ao Conhecimento Matemático e sua constituição, *o que significa, de acordo com Otte (2011)<sup>6</sup>, o fato de que a palavra axioma ter sido tomada com antônimo de hipótese até o século XIX e, hoje em dia, axioma ser considerada como sinônimo de hipótese?*

Nossa tese alude que a mudança de significado do termo *axioma*, destacada na relação entre Linguagem e Matemática, deslocou-se, partir do século XIX, dos aspectos descritivos para os aspectos operativo/instrumental. Tal fato sugere uma transformação do Conhecimento Matemático de uma visão de caráter descritivo e contemplativo a um caráter instrumental/operativo. Isso corresponde ao fato de que a objetividade da Matemática passa a se revelar na atividade e nas aplicações futuras e não mais em termos de fundamentos *a priori* (OTTE, 2011). De forma que o sentido do termo *axioma* se encontra nas deduções formais e na teoria desenvolvida como uma entidade em si e o significado nas aplicações dessa teoria. Isto insinua que, dentre os resultados da filosofia da Matemática, destaca-se a descoberta de precisarmos reconhecer que uma análise semântica de seus conceitos, como é de costume nas Ciências Humanas, não é suficiente na Matemática e devemos levar em conta os aspectos pragmáticos das representações.

---

<sup>6</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

É assim que, neste estudo, queremos destacar a uma transformação conceitual ocorrida na Matemática e também agregar a visão interpretativa sobre Complementaridade ‘Otteana’ entre aspectos que, relacionados ao Conhecimento Matemático, eram tradicionalmente tratados de forma dicotômica.

Para este estudo, estabelecemos como nossos objetivos principais: (i) *Interpretar, de um ponto de vista histórico, filosófico e semiótico o significado do termo axioma em alguns filósofos e matemáticos, desde a época de Platão até a Modernidade, evidenciando oscilações que aconteceram nessas significações.* (ii) *Refletir, de um ponto de vista da relação entre Linguagem e Matemática, alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteana’, sobre fatores/aspectos intervenientes na promoção de tais oscilações e conjecturar sobre o relacionamento entre a Filosofia e a Matemática.* (iii) *E, assim, destacar a transformação do Conhecimento Matemático de uma visão de caráter descritivo/contemplativo a um caráter instrumental/operativo.*

Nesta tarefa, traçamos como objetivos específicos: (i) pesquisar em dicionários de Língua Portuguesa, de Filosofia, de Ciências Naturais e de Matemática, os significados atribuídos ao termo *axioma*. (ii) Através desse levantamento inicial, eleger os filósofos e matemáticos sobre os quais aprofundaríamos a abordagem e a interpretação dos significados do termo *axioma*; (iii) Refletir e tecer alguns apontamentos sobre o desenvolvimento sócio-histórico do pensamento conceitual e do pensamento conceitual na Matemática; (iv) Discorrer e apresentar aspectos do Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’; (v) Estudar e destacar os fundamentos elementares da Semiótica de Charles S. Peirce à interpretação sobre o desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático; (vi) Conjecturar sobre como se processou, historicamente, a relação entre Linguagem, Conhecimento e Matemática; (vii) Refletir, sobre como se deu a inserção da Linguagem numa interpretação do processo cognitivo e suas consequências no desenvolvimento do Conhecimento Matemático; (viii) Apresentar o significado, oscilações neste significado e aplicação do termo *axioma* pelos filósofos e matemáticos escolhidos; e (ix) Reflexionar e discorrer sobre o que pode(m) nos revelar a(s) oscilação(ões) no significado do termo *axioma* do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre a dinâmica entre a Filosofia e a Matemática.

O referencial teórico que tem sustentado nossas reflexões contempla: Aristóteles (2004; 2007), Barros & Otte (2012), Beth (2007), Boyer (1996), Bunt e outros (1996),

Cattanei (2005), Cassin (1997), Cassirer (1910; 1977; 1997), Condillac (1973; 1974; 1979), Corrêa (2008), Deely (1995), Descartes (2007), Durkheim (1996), Durozoi & Roussel (1993), Euclides (2009), Favari (2001), Fish (1977; 1980), Foucault (1995), Gay (2009), Heródoto (1988), Hobbes (1996), Israel (2009), Jahnke (2010), James (1965), Joseph (1916), Kant (1987; 2000; 2001), Kuhn (2007), Laudan (2000), Leite & Otte (2010), Lenhard & Otte (2010), Lévi-Strauss (1978; 1996), Leibniz (1974), Locke (1999), Losee (2001), Man (1992), Marie (1966), Moravcsik (2006), Otte (1993; 2001; 2003; 2008; 2012), Peirce (1970; 1990; 2003), Pellegrin (2010), Peneireiro (2008), Pessanha (2010), Platão (1965; 2012), Roque (2007), Rousseau (1998), Sant'Anna (2003), Santaella (2003, 2012), Silva (2007), Silveira (2002), Stirn (2011), Tavares (2008), Tiles (2002), Thom (1973) e Williams (2007).

Esta tese está organizada em sete capítulos que figuram como resultados das reflexões e estudos envolvidos em nossa caminhada, no sentido de cumprir com nossos objetivos específicos. Evidentemente, nossa itinerância não teve uma linearidade como a que se espelha na organização expositiva nesta tese, mesmo porque, a nossa aproximação com o nosso objeto de pesquisa (a relação entre a Linguagem e a Matemática), como com os pressupostos metodológicos e a metodologia empreendida, operou-se num movimento dinâmico, no qual os encontros e desencontros davam o sentido da nossa organização e (re)direcionamento. Assim, tanto objeto quanto a própria metodologia ia se constituindo e construindo-se concomitantemente, o que entendemos enquadrar-se perfeitamente na perspectiva da Complementaridade do pensamento ‘Otteano’.

Desse modo, entendemos não haver a necessidade de uma leitura linear desta tese. A ordem de apresentação dos capítulos pode ser bem flexível.

No primeiro capítulo: *Palavras no tempo: um estudo interpretativo de abordagem histórica, filosófica e semiótica do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre a relevância da Filosofia e da Matemática no desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático*, ancorados no pensamento de Raymond Williams e Michael F. Otte, iniciamos trazendo uma reflexão de cunho histórico-filosófico, destacando as mudanças que ocorreram no significado de algumas palavras, ou, conceitos no tempo. Esse capítulo pretender destacar a relevância de um estudo desta envergadura, como, deixar explícita nossa propositura de uma abordagem complementar, nele personificada entre as dimensões histórica e filosófica, como

também da dimensão semiótica já assumindo à dimensão pragmática em nossa análise interpretativa.

Dedicamos um carinho e atenção especialíssimos ao segundo capítulo deste trabalho: *O pensamento Otteano: o fenômeno da complementaridade na/para interpretação do desenvolvimento do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos*. Particularmente, considero o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’ como o grande, inédito, singular e inovador traço deste estudo.

O professor Otte possui Mestrado em Matemática pela Universidade de Erlangen (1963), Doutorado em Matemática pela Universidade de Goettingen (1967) e Doutorado em Matemática pela Universidade Munster (*Westfaelische-Wilhelms*) (1972). Atuou como diretor e pesquisador no IDM (*Institut für Didaktik der Mathematik*) onde foi o precursor para o desenvolvimento completamente novo e ao crescimento científico da Didática da Matemática na Alemanha. Nesse instituto, trabalhou de modo interdisciplinar, proporcionando experiências bastante modernas em relação à organização de pesquisas e pela busca de soluções a problemas de como inovações científicas podem ser implementadas na sociedade e, em especial, nas escolas.

Atualmente, o professor Otte é docente do Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIBAN- Universidade Bandeirantes - São Paulo). Possui ampla experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando, principalmente, nos seguintes temas: cognição, epistemologia da Matemática, história da Matemática, e Educação Matemática. Este professor, matemático, filósofo e pesquisador, por mais de quarenta anos, tem estudado e desenvolvido a teoria, que denominamos de ‘O Pensamento sobre Complementaridade Otteano’. Esta proposição compreende um viés que, além de situá-la (e ser assumida por nós neste estudo e pesquisa) como uma estratégia metodológica para abordagem investigativa às pesquisas científicas em Educação Matemática, funciona também como estratégia didática potencializadora às aprendizagens Matemáticas.

Neste estudo e pesquisa, a partir deste ‘novo olhar’, procuramos compreender e buscar respostas às questões que consideramos nebulosas sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático, os quais nem o Nominalismo, nem o Platonismo ou o Construtivismo têm conseguido responder. O pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ se constitui em nosso entendimento como pressuposto teórico-metodológico nesta investigação sobre o significado do termo *axioma*.

Otte sempre observava uma questão confusa e problemática nas teorias sobre o desenvolvimento do nosso conhecimento relacionado ao Conhecimento Matemático, que também sempre imperava em sala de aula, especialmente, sobre a relação entre o lado objetivo – do conteúdo da Matemática - e o lado psicológico – o social – do Conhecimento Matemático.

Comumente, as teorias até então conduzem a duas visões da Matemática: a Matemática como uma Linguagem e a Matemática como atividade. E essa divisão advém exatamente de dois contextos específicos: o contexto sócio-comunicativo e o contexto da filosofia da natureza. Para compreender essa relação, Otte empreende uma caminhada de estudos e pesquisas direcionadas à Semiótica. Através da Semiótica, ele descobre a grande vantagem que nos permite lidar e ligar as duas coisas, ou seja, os dois contextos: o objetivo e o social, porque o signo em si mesmo já tem esse papel e função, uma vez que representa alguma coisa para alguém. Otte (2014)<sup>7</sup> nos diz que “essa é a maior vantagem da semiótica. A semiótica sempre tem as características próprias da Linguagem. E em nosso sistema de símbolos e da nossa linguagem já temos esses dois lados, que são tão difíceis de lidar na Educação”. Entendemos e defendemos que essa dificuldade pode ser superada pelo pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ que se fundamenta em uma perspectiva semiótica.

Mas, antecipadamente, já destacamos que, no entendimento Otteano, a Matemática não pode ser confundida com uma Linguagem e, sobretudo, ele reconhece que, sem a Linguagem, a Matemática não é “quase nada”. Este capítulo busca apresentar e situar o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ ao abordar sobre aspectos desta teoria em desenvolvimento, trazendo à reflexão para além do aspecto sintático do Conhecimento Matemático e questões envolvendo a dimensão semântica, mas acrescenta e destaca a dimensão pragmática da Linguagem na Matemática. Entendemos que em sua essência a Matemática não se refere ao mundo empírico, mas sim a nossas atividades neste mundo empírico. Ela é uma metaciência das Ciências, de si mesma e da tecnologia.

O capítulo terceiro, intitulado *Semiótica como enfoque interpretativo ao processo cognitivo e ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático, e tomada como pressuposto teórico ao pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’*, está ancorado na abordagem semiótica de Charles S. Peirce e, acima de tudo, consideramos nossa

---

<sup>7</sup> Fala de Otte em Orientação na data de 24 de abril de 2014.



reflexão e apresentação de caráter elementar e introdutório à Filosofia e ao pensamento peirceano. Nosso objetivo está em destacar aspectos essenciais para que o leitor consiga estabelecer um diálogo frutífero com o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Peirce é entendido por nós como sendo responsável por operar uma reformulação do pensamento de Kant e sobre Complementaridade, em termos semióticos. Dessa forma, ele não se preocupa somente com o sujeito e com a epistemologia, mas, em especial, com a Lógica e ele a toma como que baseada na Semiótica. Peirce defende que a Matemática se configura no raciocínio diagramático, destacando, como signos basilares: ícones, índices e símbolos. E ainda avança, pois, ninguém antes dele havia visto a importância dos índices enquanto modos de significação indispensáveis ao Conhecimento Matemático. Para nós, entender esses aspectos do pensamento de Peirce é indispensável à compreensão do pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ e sobre a relação com a Linguagem e a Matemática. Encerramos esse capítulo com uma reflexão que quase soa como justificativa explicativa sobre a inferência da abordagem semiótica ao pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

O quarto capítulo: *Apontamentos sobre o desenvolvimento do pensamento conceitual: o conceito de conceito* discorre sobre a evolução do nosso entendimento sobre um conceito e sobre o desenvolvimento cognitivo do pensamento conceitual. Como nossa problemática trata de investigar o significado do termo *axioma*, havemos observado que, a partir do século XIX, esse termo assume *status* diferenciado na constituição de um *conceito*, mais propriamente apresentando-se como proposições lógico-dedutivas cujo conjunto pode representar ou apresentar um conceito. Desta forma, uma primeira questão filosófica que se nos apresentou foi entender o que é um *conceito*, como se caracteriza, como se forma e se estrutura, ou seja, que fatores operam em sua constituição (ou construção)? Seleccionamos, para embasar nossa reflexão, o pensamento de Ernest Cassirer que, em seu trabalho *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910) (Substância e Função), desenvolve seu pensamento, destacando uma mudança que ocorre no entendimento sobre o *conceito*, o qual este filósofo infere e destaca consubstanciado no Conhecimento Matemático. Complementamos nosso estudo com os pensamentos de Émile Durkheim e Lévi-Strauss, destacando as características imbricadas no desenvolvimento do pensamento conceitual humano. Em nossa interpretação, esses pontos de vistas e teorias justificam e explicam uma mudança que

ocorreu no sentido do nosso pensamento conceitual e, especificamente, neste trabalho, com destaque de que essas análises são tecidas, permeadas pela relação entre a Linguagem e a Matemática.

O quinto capítulo figura, de forma complementar às reflexões tecidas nos capítulos anteriores, em especialmente, opera um aprofundamento no sentido de maior entendimento sobre a inserção e destaque dado à Linguagem no processo cognitivo, operacionalizada por um destaque à Linguagem dentro do próprio pensamento filosófico, e que, produz reflexos na relação entre a Linguagem e a Matemática, e no desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Alargamos essa interpretação reflexiva ao promover e desenhar o caminho que conduziu a aproximação da abordagem semiótica ao processo cognitivo. Com o título: *Uma reflexão sobre a relação entre Linguagem, Conhecimento e Matemática: pensamentos que conduzem da introdução de uma abordagem semiótica no processo cognitivo à Teoria Estruturalista da Metáfora*, esse capítulo procura apontar para momentos históricos em cuja abordagem de filósofos e matemáticos podemos observar distanciamentos e aproximações que permearam a relação entre Linguagem, Conhecimento e Matemática. Traçamos uma linha de raciocínio que pudesse apresentar como chegamos à introdução de uma abordagem semiótica ao processo cognitivo, focando no Conhecimento Matemático. Ao final, expomos destaque sobre o papel assumido pela metáfora e sobre sua relevância ao processo cognitivo.

O sexto capítulo: *Apresentando os significados do termo axioma: interpretação fundamentada em uma abordagem histórica, filosófica e semiótica, alicerçada no Pensamento sobre Complementaridade 'Otteano' sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático*, traz os filósofos e matemáticos que elegemos como fonte para a análise e interpretação do significado do termo *axioma*. Dessa forma, ao mesmo tempo em que apresentamos o entendimento sobre esse termo, nos referidos contextos e significados assumidos, discorremos sobre o uso e aplicação que eles faziam desses *axiomas*. Num primeiro momento desse capítulo, mostramos como se deu a seleção dos filósofos e matemáticos, explicitamos sobre nossa aproximação com essa problemática, sobre as fases que compreenderam este estudo, bem como sobre os aspectos envolvidos no processo metodológico até a abordagem reflexiva interpretativa. Concluímos com a apresentação do significado de *axioma* em: Platão, Aristóteles, Euclides, Locke, Leibniz, Kant, Dedekind, Peano e Hilbert.

No sétimo capítulo trazemos nossa síntese interpretativa reflexiva sobre o que nos aponta este estudo do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre a relação entre a Filosofia e a Matemática quando olhamos para o significado e oscilações de significado do termo *axioma*. Buscamos tecer um texto que situasse o pensamento dos filósofos e matemáticos selecionados à nossa investigação relacionando-os à determinados aspectos sócio, históricos que entendemos relevantes no processo do desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático. Finalmente em seguida apresentamos nossas considerações finais.

Foram quatro anos dedicados ao estudo desta problemática, dois anos mais intensamente na elaboração deste texto que aqui se apresenta (o qual, ainda, consideramos em processo de elaboração). Foi um procedimento intenso de busca por amadurecimento intelectual, principalmente, relacionado à desenvoltura do pensamento filosófico. Na verdade, um processo em que foi se constituindo tanto objeto de pesquisa e o próprio pesquisador, como também objeto e metodologia à investigação interpretativa. Fica difícil, em nossa opinião, delinear o caminho desses aspectos separadamente, definir em que medida um vem antes e o outro depois. Tentamos prestar atenção a esse movimento, pois, em determinados momentos, percebemos que a complexidade desse estudo estava embutida no nosso próprio processo individual de desenvolvimento. E, foram nesses instantes, na superação de dificuldades e limites que me apaixonei, decididamente, por esta pesquisa.

Esperamos que a leitura inicial deste estudo possa ser agradável e instigante. E que, como nós, os leitores consigam visualizar o quanto grandioso tem sido mergulhar nos livros, textos e como é encantador aprender sobre a Matemática, sobre como nos relacionamos com o mundo e com os outros através do nosso conhecimento acumulado! Foi gratificante a realização deste estudo e, como o professor Otte (2013)<sup>8</sup> tão entusiasmadamente nos disse: “A Matemática é fantástica! Em termos de entender sobre o Conhecimento, a Epistemologia, a Filosofia do mundo, não há coisa melhor! Porque é a luta do homem diante do mundo que se cristaliza na Matemática!”

---

<sup>8</sup> Comentário de Otte em momento de orientação.



## **CAPÍTULO I: Palavras no Tempo: um estudo interpretativo de abordagem histórica, filosófica e semiótica do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre a relevância da Filosofia e da Matemática no desenvolvimento do Conhecimento Matemático**

Com este capítulo intencionamos apresentar nossa problemática, apresentando inicialmente o termo *axioma* e destacando a mudança do seu significado que encontramos em dicionários pesquisados, e, prosseguimos apresentando outras palavras e algumas mudanças em seu seu significado. Buscamos seduzir nosso leitor tanto quanto fomos seduzidos quando descobrimos o quanto potencial é desenvolver um trabalho dessa envergadura.

Esta pesquisa direciona-se, especialmente, ao desenvolvimento e evolução do termo *axioma* no tempo e, em particular, a investigar, analisar e interpretar o significado e oscilação de significado, do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática, a fim de compreender aspectos fundamentais no processo de desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático, sua gênese e historicidade delineados por um movimento que se estabelece entre o exercício do pensamento filosófico e o exercício do pensamento matemático. Deste modo, ambicionamos evidenciar, de acordo com nosso entendimento, o que é a Matemática, qual é o objeto desta Ciência, sobre o caráter e critério de ‘verdade’, sobretudo, focados na relação entre a Filosofia e a Matemática e alicerçados no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

Nesta tarefa, levamos em conta filósofos e matemáticos em seus tempos e contextos específicos, para refletir e apontar possíveis oscilações que possam ter ocorrido na significação desse termo. Este propósito se justifica pois entendemos que uma relação entre a Linguagem e a Matemática esteja fortemente permeada e imbricada de uma relação entre Filosofia e Matemática no processo como um todo de nosso desenvolvimento cognitivo.

Ao efetuarmos uma breve busca em alguns dicionários de Língua Portuguesa sobre o significado de *axioma*, por exemplo, encontramos:

[a] *Axioma*. S.m. (l. *axioma*). 1. **Princípio evidente**, que não precisa ser demonstrado. 2. Máxima, sentença. 3. **Norma** admitida como princípio (SILVA, 1986, p.431).

[b] *Axioma*. S.m. **Princípio evidente** que não precisa de demonstração. **Proposição clara por si mesma**. Gr. *Axioma*, atos, dignidade (BUENO, 1968, p.455).

[c] *Axioma*. (x = cs), s. m. Gr. *Axioma*, pelo lat. *Axioma*. **Princípio evidente**, que não precisa ser demonstrado. 2. Sentença moral, máxima, adágio. 3. **Norma** admitida como princípio: “um dos *axiomas* de proceder do prudente prelado consistia em não desprezar nenhum ensejo de adquirir informações acerca da história passada de todos os indivíduos com quem estava em contacto” (Herculano FREIRE, 1954, p.919).

[d] *Axioma* (ci) m. **Proposição evidente por si mesma**, e que por isso, não é susceptível de nenhuma demonstração. *Ext.* Proposição ou máxima geralmente **tida como verdadeira numa ciência, filosofia**, etc. **Princípio geral** que serve de base a qualquer ciência. Máxima, sentença. A palavra provém do grego *aksioma*, de *aksioô*, pôr no começo. *Filos.* A determinação do número e qualidade dos axiomas foi sempre uma questão discutida pelos filósofos. Para Aristóteles, todos os chamados axiomas podiam reduzir-se a este único: *uma coisa, não pode, ao mesmo tempo ser e não ser*, (o princípio da contradição). Leibniz institui dois princípios supremos: *o princípio da contradição e identidade*, como Aristóteles, para toda operação intelectual, e *o princípio da razão suficiente* sobre que assenta o fundamento das ciências físicas ou experimentais. Condillac e Stuart Mill renovaram o pensamento do estagirista. Kant admite três espécies de Axiomas (conforme a divisão dos juízos): *axiomas analíticos* (ex. *o todo é maior que a sua parte*); *axiomas sintéticos a priori* (ex.: *toda mudança tem sua causa*); *axiomas sintéticos a posteriori* (ex.: *a neve é branca*) (MAGALHÃES, 1951, P.194).

[e] *Axioma*. (cs ou ss) s.m. 1. FIL. **Premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira**, fundamento de uma demonstração, **porém ela mesma indemonstrável**, originada segunda a tradição racionalista de princípios inatos da consciência ou, segundo os empiristas, de generalizações da observação empírica. [o princípio Aristotélico da contradição (“nada pode ser e não ser simultaneamente”) foi considerado desde a Antiguidade um axioma fundamental da filosofia]. 2. P. ext. máxima, provérbio, sentença. 3. GRAM. GENER símbolo de partida das regras sintagmáticas. 4. GRAM. GENER num sistema e teoria linguística, fórmula que se presume correta, embora não suscetível de demonstração (HOUAISS, 2001, p.360) [grifo nosso].

Pelo destaque, observamos que o significado de *axioma*, tomando o sentido de premissas verdadeiras, é o que prevalece embora falte a visão Moderna em contraste com a visão clássica do conceito *axioma*, ou seja, o entendimento de *axiomas*, em termos de hipótese ou postulado. Na Ciência Moderna da atualidade, geralmente, um *axioma* trata de uma proposição, alguma coisa que é assumida e que através dela, e por meio dela, tiramos as consequências, até chegarmos a uma conclusão que poderia ou confirmar ou desvalorizar a premissa inicial.

De modo que, na Matemática hoje, um *axioma* trata de uma hipótese inicial da qual todos os enunciados são logicamente derivados. Tal aspecto já existia na dialética de Platão, e, esse uso era como que uma manobra na discussão e retórica, na

Matemática de Hilbert, Peano ou Dedekind, observamos que esse aspecto é prevalecte.

Também destacamos, nessas definições, que existe certa oscilação entre o entendimento de *axiomas*. Essa referindo-se a que, ora eles são tidos como ‘princípio geral’, ‘princípio evidente’, ‘proposição clara por si mesma que não precisa ser demonstrada’, ou, ‘norma’. Agora, o que é um *axioma*, uma norma, um princípio ou uma proposição? Sem dúvida que, em qualquer que seja a forma de apresentação, o sentido do significado de *axioma* é usualmente destacado como antônimo ao de hipótese.

Em dicionários de Matemática e Lógica, encontramos:

[f] *Axioma*. – Do Grego ἄξιωμα, o que parece ou se estima como justo. **Proposição tão clara e evidente, que não necessita de demonstração.** Os geometras gregos da Antiguidade, que foram os primeiros a utilizar essa palavra, estabeleciam uma diferença entre *axioma* e *postulado*.

**Axiomas eram verdades, evidentes por si mesmas; indemonstráveis.** Os postulados traduziam verdades indemonstráveis, mas são evidentes por si mesmas; eram de caráter experimental. Nos *Elementos de Euclides*, entre outros, encontram-se os seguintes axiomas:

- 1) Duas coisas que são iguais a uma terceira, são iguais entre si;
- 2) Um todo é maior que qualquer de suas partes;
- 3) Somas de coisas iguais são iguais.

De acordo com a lógica clássica, o *axioma* é uma *proposição analítica*, ao passo que o *postulado* é uma *proposição sintética*. O primeiro se impõe, prescindindo de qualquer exposição doutrinária, enquanto o segundo surge em consequência de uma investigação, apresentando-se como verdade indemonstrável, porém, revestido de características tais, que uma teoria dedutiva não se poderia desenvolver sem sua aceitação. **Atualmente, consideram-se sinônimos os termos axioma e postulado** (do latim, *postulatu*; *postulare* significa pedir).

Em toda teoria dedutiva, figuram:

- a) Noções não definidas, conceitos ou ideias primitivas;
- b) **Proposições não demonstráveis, que são os axiomas ou postulados.** Os postulados (ou axiomas) estabelecem relações entre as ideias primitivas. Podemos dizer que os postulados constituem uma *definição implícita das ideias primitivas* ou noções não definidas.

Dentre os diversos postulados de que se serve a Matemática, destaca-se aquele que passou à História com o nome de “Postulado de Euclides”: *se uma reta cortar duas outras, formando ângulos internos do mesmo lado cuja soma seja menor que dois ângulos retos, as duas últimas se cortam do lado em que a soma dos dois ângulos é inferior a dois retos.*

Este é o enunciado existente no 1º livro dos *Elementos*, e nele aparece com o número 5.

Este postulado foi considerado, na Antiguidade, como uma proposição suscetível de demonstração.

Foram célebres as tentativas feitas com o objetivo de demonstrar a proposição nº 5 do 1º livro dos *Elementos*. Entre os gregos encontram-se tentativas de Ptolomeu (século II) e Proclo (século V).

Na idade Média vários geometras árabes e ocidentais tentaram a demonstração. Em 1603 Wallis, admitindo a existência de um triângulo, semelhante a um triângulo dado, com área tão grande quanto se quisesse

(admitindo, portanto, um postulado equivalente ao de Euclides), julgou ter resolvido a questão, não percebendo que sua demonstração encerrava uma *petição de princípio*. Os trabalhos de Saccheri (Século XVIII) foram notáveis, assim como os dos geômetras Lambert, D'Alembert, Laplace e Legendre. O primeiro a aceitar a independência do “Postulado de Euclides” parece ter sido Gauss (cujos trabalhos, anteriores a 1816, dão conta da possibilidade de construção lógica de uma Geometria, não aceitando o “Postulado das paralelas”, a que chamou de Geometria não-euclidiana).

Foram notáveis as conseqüências dessas tentativas sobre o desenvolvimento da geometria. A impossibilidade da demonstração dessa proposição, que só foi estabelecida, de modo indubitável, no século XIX, conduziu à descoberta das Geometrias não-euclidianas, tão importantes atualmente na Física e na Astronomia. Assim, somente depois de 2.000 anos fez-se justiça a Euclides, por ter ele considerado como postulado a proposição nº 5 do 1º livro dos *Elementos*. Baseando-se no seu 5º postulado, Euclides demonstrou que: por um ponto podemos traçar uma única paralela a uma reta dada.

Esta é a forma com que é, geralmente, enunciado o “Postulado de Euclides”. Por essa razão, é conhecido, também, como “Postulado das paralelas” (LEÃO, G. M. de S.; MATTOS, J. A., 1972, p. 346).

[g] *Axioma*. Nos livros da Antiguidade Clássica, era habitual distinguir axioma e postulados. **Axiomas seriam “verdades gerais”, independentes do tema em foco, aplicáveis em quaisquer casos. De outra parte, postulados seriam “verdades temáticas”, ou seja, verdades específicas, aplicáveis em circunstâncias determinadas e limitadas.** Era usual, p. ex. admitir, sem contestação que “O todo é maior que suas partes”. Uma tal “verdade”, aceitável em qualquer campo, seria, justamente um axioma. A “verdade” declarada na sentença “Dois pontos determinam uma reta” seria, em oposição, aplicável apenas no campo da geometria. Por isso, um postulado.

**Em termos modernos, mostrou-se que muitas “verdades” julgadas incontestáveis eram, surpreendentemente, inaplicáveis em certos domínios. O citado axioma do todo e suas partes, p.ex., mostra-se falso quando se consideram conjuntos infinitos.** Diante disso, deixa de haver diferença plausível entre axiomas e postulados, de modo que os dois termos passam a ser utilizados indiferentemente, quase na condição de sinônimos. (Dizemos “quase” porque ainda há quem procure estabelecer sutis distinções) (HEGENBERG, 1995, p.18) [Grifo nosso].

Nota-se que já os dicionários mais específicos apontam para uma oscilação no significado de *axioma*, destacando uma oscilação que pode ser verificada em ‘termos modernos’. No entanto, ainda há uma tendência em se considerar o *axioma* na perspectiva clássica (da Antiguidade), afirmando que assumem a condição de ‘quase’ sinônimos de *postulado*. Otte (2011)<sup>9</sup> infere que esse posicionamento é muito forte entre os educadores em Matemática. Relata uma experiência que teve com seus alunos de Pós-Graduação em que, em um de seus seminários, perguntou aos então professores e mestrandos o que significava *axioma* e praticamente todos que se posicionaram afirmaram que *axiomas* tratavam de verdades incontestáveis. Para ele, esta é uma questão muito importante e certamente apresenta implicações didáticas relacionadas ao

<sup>9</sup> Relato dado pelo professor em aula apresentada em seminário temático, no mês de março de 2011.



Conhecimento Matemático. Afinal, destaca Otte, desde o século XIX, sabemos que *axiomas* não são verdades, o sentido que assumem é o de sinônimo de hipóteses.

O destaque a uma mudança e distinção no significado de *axioma* acontece, mais explicitamente, em dicionários de Filosofia:

*Axioma*. Originalmente a palavra significa dignidade ou valor e foi empregada pelos Estóicos para indicar o enunciado declarativo que Aristóteles chamava apofânico (DIÓG. L., VII, 65). Os matemáticos usaram-na para designar os princípios indemonstráveis, mais evidentes da sua ciência. Aristóteles deu a primeira análise dessa noção, entendendo por Axioma “as proposições primeiras de que parte a demonstração” (os chamados Axiomas comuns) e em todo caso os “princípios que devem ser necessariamente possuídos por quem queira aprender o que quer que seja” (*An. Post.*, I, 10, 76 b 14; I, 2, 72 a 15). **Como tal o Axioma é completamente diferente da hipótese e do postulado.** O princípio de contradição é ele próprio um Axioma, aliás, “o princípio de todos os Axiomas” (*Met.*, IV, 3, 1105 a 20 segs.). Esse significado da palavra como princípio que aparece imediatamente evidente pelos seus próprios termos manteve-se constante através da antiguidade e da idade moderna. “Os princípios imediatos, diz S. Tomás (*In I Post. Liç. 5*), não são conhecidos mediante algum termo médio, mas através do conhecimento dos seus próprios termos. Dado que se saiba o que é o todo e o que é a parte, reconhece-se que “o todo é maior do que a parte”, já que em todas as proposições dessa espécie o predicado está compreendido na noção de sujeito”. A verdade do Axioma é, em outros termos, manifestada pela simples intuição dos termos que entram a compô-lo. Verdadeiramente o exemplo escolhido por S. Tomás se presta em especial a revelar o caráter fictício da evidência intuitiva a que estaria confiada a validade do axioma. A pouca distância cronológica de S. Tomás, Ockham verificava que o princípio “a parte não é maior que o todo” não vale quando se trata de todos que compreendem infinitas partes e que não se pode dizer que no universo inteiro haja mais partes do que em uma fava, se em uma fava há infinitas partes. **Após as pesquisas de Cantor e de Dedekind sabemos hoje que esse pretense Axioma é simplesmente a definição dos conjuntos finitos.** Por muitos séculos procurou-se justificar de um modo ou de outro a validade absoluta dos Axiomas; **mas essa validade não foi posta em dúvida.** [...] **No mundo contemporâneo a noção de Axioma sofreu a sua transformação mais radical. A característica que o definia, a imediatidade da sua verdade, a certeza, a evidência, lhe foi negada. Esse resultado deve-se ao desenvolvimento do formalismo matemático e lógico, isto é, à obra de Peano, Russell, Frege e Hilbert.** Segundo o ponto de vista formalista, que é agora quase universalmente aceito, os **Axiomas da matemática não são nem verdadeiros nem falsos, mas são assumidos convencionalmente**, na base de motivos de oportunidade, como fundamento ou premissas do discurso matemático (HILBERT, “axiomatischens Denken”, in *Math. Annalen*, 1918). **Desse modo, os Axiomas não se distinguem mais dos postulados e as duas palavras são hoje usadas indiferentemente** [...] (BOSI, 1970, p.96-7) [grifo nosso].

É-nos apresentada e indicada a mudança, mas não são esclarecidos os fatores e condicionantes operativos à mudança. E, muito embora haja o destaque ao ponto de vista formalista ao Conhecimento Matemático e Lógico, entendemos que, relacionadas

aos fundamentos do conhecimento e do Conhecimento Matemático, as mudanças que se processam até chegarmos ao formalismo são profundas e significativas, merecendo e carecendo serem melhores compreendidas. Como chegamos ao desenvolvimento desse formalismo na Matemática? Que ligação pode haver entre esse processo de formalismo e instrumentalização na Matemática e o fato de que, somente, há dois mil anos após a *axiomatização* da Geometria chegamos à *axiomatização* da Aritmética?

Por exemplo, Otte(2014) destaca a que essa mudança pode ser muito bem destaca nos desenvolvimento de Hermann G. Grassmann (1809-1877) de modo incrivelmente explícito. Grassmann em 1844 escreve na introdução de *Die Lineare Aüsdehnvnyslche* que a aritmética não possui *axiomas*, mas, em 1850 ele muda de ideia e apresenta uma axiomatização para a aritmética. Isso ocorre pois muda o sentido interpretativo de *axiomas* de verdades para o de hipóteses.

Grassmann entendia que havia uma divisão suprema entre todas as Ciências: Ciências Formais (Lógica, Filosofia, Aritmética) e Ciências Reais (Geometria, Mecânica e Física). Segundo este filósofo e matemático o pensamento só seria possível em relação a um ser que se coloca em oposição a este pensamento e que é representado por ele. Mas, para ele, este ser é nas Ciências Reais um ser independente fora do pensamento, enquanto que nas Ciências Formais este ser é estabelecido pelo próprio pensamento, e que num segundo passo enfrenta o Ser.

Neste sentido, uma prova nas Ciências Formais não vai além do cosmo do pensamento e não entra em outra esfera, mas permanece na combinação dos atos diferentes do pensamento. Por isso Grassmann entende em 1844 que as Ciências Formais não podem partir de *axiomas* como as Ciências Reais, mas de definições. Ele nesta época está tomando os *axiomas* no sentido de verdades. Ele ainda diz que se nas Ciências Formais, por exemplo, se fala de *axiomas*, isso trataria de um uso inapropriado, que só se explica em termos de analogia com a geometria.

Assim, Otte (2014) nos afirma que somente quando ele passa a entender o termo *axioma* com o sentido interpretativo de hipótese é que ele irá apresentar uma axiomatização para aritmética. De modo que, essa mudança, deve ter ocorrido entre 1844 e 1850.

O nosso interesse, neste estudo, sobretudo não está em pontuar especificadamente a data em que ocorreu esta mudança. Mostrada que a mudança se processa, estamos interessados em buscar identificar do ponto de vista da relação entre a

Linguagem e a Matemática, de uma análise permeada pelo relacionamento entre a Filosofia e a Matemática os fatores imperativos que conduziram à mudança.

Por que mudou o significado de *axioma* de antônimo de hipóteses para sinônimo? Que fator foi decisivo na aproximação entre a Linguagem e a Matemática e que pôde ter implicações na e para essa mudança? Consideramos que estas questões são profundamente esclarecedoras sobre a gênese e historicidade do desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático, e que, para os educadores em Matemática sejam fundamentais ao tratamento didático em sala de aula.

Foram as questões anteriores que ‘dançavam’ descompassadas ao redor de nossa problemática inicial. Este capítulo, objetiva de modo introdutório uma reflexão mais amplificada sobre aspectos sócio, culturais e políticos que estão imbricados na busca por respostas às questões anteriores. Esperamos que, através deste estudo, possamos situar nossas reflexões de forma adequada e, sobretudo, clarificar nosso entendimento sobre os fundamentos, sobre aspectos relacionados à gênese e historicidade do Conhecimento Matemático e, assim, sobre o nosso modo de compreender o mundo e de nele interagir.

Achamos oportuno destacar que, nesta interpretação do significado e oscilações no significado de *axioma*, partimos do pressuposto fundamental de que todo pensamento é uma atividade semiótica, de modo que a perspectiva filosófica toma o sentido em um empreendimento investigativo reflexivo na direção de uma Filosofia da Linguagem. Entendemos que construímos sistemas de signos para desenvolver o nosso pensamento e para aumentar nosso conhecimento. E, de acordo com Otte (2012, p.10), adotamos “uma perspectiva dinâmica e genética<sup>10</sup>, evitando o positivismo, pois sabemos que o conhecimento humano é sempre incompleto e está em desenvolvimento”.

Quando nos propomos olhar e interpretar o caminho no tempo delineado pelo termo *axioma*, do ponto de vista do Conhecimento Matemático e da relação delineada entre a Linguagem e a Matemática na constituição dos fundamentos desse conhecimento, destacamos que assumimos, como pressuposto basilar, o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’, assim evidenciamos que esta investigação se

---

<sup>10</sup> Uma perspectiva genética e evolutiva considera o desenvolvimento dos mecanismos e processos mediante os quais se passa dos estados de “menor complexidade” para “maior complexidade” num contexto sócio-histórico evolutivo da coisa à qual a teoria se refere. Aqui neste estudo refere-se a um processo que permeia a relação entre a Linguagem e a Matemática

caracteriza, eminentemente, como um estudo de abordagens: histórica, filosófica e semiótica.

Neste estudo, compreendemos imbricadas de modo especial duas dimensões, que se entremearam constantemente neste estudo: uma direcionada à História da Ciência e outra à Filosofia da Ciência, tratando especificamente e correlacionando-se à História da Matemática e à Filosofia da Matemática<sup>11</sup>. Observamos entre ambas uma relação que pode ser tomada como de interdependência, uma vez que elas pactuam com uma preocupação comum: a história das teorias do método matemático/científico. Assim, neste estudo em particular, o sentido do desenvolvimento teórico da Matemática, enquanto método científico, situa-se imbricado de uma postura e perspectiva interpretativa de cunho semiótica.

Laudam (2000, p. 13) afirma que as teorias do método científico referem-se às opiniões metacientíficas<sup>12</sup> explícitas que um cientista adota ao examinar a lógica de inferência científica. Desta maneira, ele infere que a história das teorias do método científico trataria, necessariamente, da história das ideias e dos conceitos. Este ponto de vista está em sintonia com nossos pressupostos, em nosso entendimento, tornando-se, inclusive, um indicativo embrionário de nossa problemática. Ao olharmos para o Conhecimento Matemático, percebemos que avanços e recuos permeados nos modos de relacionamento entre a Linguagem e a Matemática tenham consequências significativas

---

<sup>11</sup> Este estudo nos indica que uma Filosofia da Matemática historicamente começa a se processar a partir do pensamento kantiano. Até Kant não se fazia uma Filosofia da Matemática, ao contrário a matemática era tomada como exemplar (propedêutica) à filosofia e se filosofava à partir da matemática. Também entendemos relevante destacar a distinção que Russell indica entre Filosofia e Matemática, assim ele nos diz que: “A matemática é um assunto cujo estudo, quando iniciado nas suas partes mais familiares, pode ser conduzido em dois sentidos opostos. O mais comum é construtivo, no sentido da complexidade gradualmente crescente: dos inteiros para os fraccionários, os números reais, os números complexos; da adição e multiplicação para a diferenciação e integração e daí para a matemática superior. O outro sentido, menos familiar, avança, pela análise, para a abstracção e a simplicidade lógica sempre maiores; em vez de indagar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admite no começo, indaga-se que mais ideias e princípios gerais podem ser encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido. É o facto de seguir este sentido oposto que caracteriza a filosofia matemática, em contraste com a matemática comum. Mas deve ser entendido que a diferença de sentido da pesquisa não está no assunto mas sim no estado de espírito. Os géometras gregos antigos, ao passarem das regras de agrimensura empíricas egípcias para as proposições gerais pelas quais se constatou estarem aquelas regras justificadas, e daí para os axiomas e postulados de Euclides, estavam praticando a filosofia matemática, segundo a definição acima; porém, uma vez atingidos os axiomas e postulados, o seu emprego dedutivo, como encontramos em Euclides, pertencia à matemática no sentido comum. A distinção entre matemática e filosofia matemática depende do interesse que inspira a pesquisa e da etapa por esta atingida, e não das proposições que ocupam a investigação” (RUSSELL, 2006, p.13). Neste sentido entendemos que foi o processo de uma convergência entre Lógica e Matemática que torna possível uma Filosofia da Matemática.

<sup>12</sup> Por *metacientífico* compreendemos os princípios gerais que definem a natureza da ciência.

nos modos de configuração do nosso Conhecimento Matemático, de seus conceitos e termos.

Por isso nossa opção por pesquisar sobre o significado do termo *axioma* e suas possíveis oscilações de significado, de modo a verificar o que tais alternâncias podem revelar sobre a relação entre a Linguagem e a Matemática. Entendemos que tal problemática está diretamente condicionada de questões que permeiam tanto a história das teorias do método científico-matemático (abordagem histórica), como também, concomitantemente, os fundamentos do próprio Conhecimento Matemático (abordagem filosófica, epistemológica e semiótica). De modo que este trabalho aponta para a possibilidade de aprofundamento, em primeiro plano, sobre o conhecimento, a partir dessas perspectivas e, em segundo plano, para reflexões posteriores sobre as implicações da relação entre a Linguagem e a Matemática no processo didático em sala de aula.

Mesmo nosso trabalho possibilitando e apontando para o destaque à compreensão ‘do’ ‘e’ sobre método, de modo algum, pode parecer que somos conduzidos a compactuar com a existência de uma polaridade na relação entre método e objeto. Muito pelo contrário, nosso pressuposto fundamenta-se na ideia de que, segundo Otte (1993, p. 224), não há dualidade entre método e objeto, pois nenhum dos dois pode ser determinado sem o outro. Apesar de eles desempenharem, num determinado momento, um ato epistemológico individual, existe um papel Complementar simétrico entre ambos. Ainda em Otte (1993, p. 224), encontramos que os métodos do conhecimento são, de fato, para serem diferenciados dos objetos do conhecimento, mas não para serem definidos sem o seu concurso.

Nosso propósito central, ao analisar e interpretar o significado que assume o termo *axioma*, tem a intenção de mostrar a mudança significativa que se inicia a partir de meados do século XVIII e efetivando-se no início do século XIX (1800), na relação entre a Matemática e a Linguagem, evidenciando a tendência de transformação que ocorre em nosso pensamento, relacionada, especificamente, ao pensamento Matemático, em sua estrutura e formalização, conduzindo a níveis de abstração cada vez mais e mais elevados. Isto é, uma transformação que vai do discurso mental para o discurso explícito (OTTE)<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação em 08/04/2013.

Assim, este capítulo tem o objetivo de tecer uma reflexão que se estreita à perspectiva histórica nesta investigação, destacando as inferências sociais, culturais e políticas imbricadas na relação entre a Linguagem e o desenvolvimento de nosso Conhecimento.

Sobretudo, no final do século XVIII, quando as relações sociais começam a ganhar peso em todos os campos da reflexão filosófica, assistimos ocorrer a mudança paradigmática, na qual observamos que a cognição começa a ser concebida “de um ponto de vista semiótico, e, ao prelúdio do reconhecimento do aspecto metafórico ao conhecimento humano e sua indissociável relação com a linguagem figurada” (OTTE; LEITE, 2012, p.26).

Essa mudança é impulsionada pelo fato de que, nesse momento para o pensamento filosófico, a Linguagem começa se tornar uma das principais preocupações na constituição do edifício da Ciência e do Conhecimento. Uma mudança gradual nesse período na direção de nova compreensão da natureza da Linguagem e da constituição social do homem começa a tomar forma, com reflexos na constituição dos fundamentos do conhecimento e, conseqüentemente, do Conhecimento Matemático. De maneira que identificamos isso como uma forma de estreitamento na relação entre a Linguagem e a Matemática. Como podemos observar, por exemplo, a Linguagem figurada, antes relegada à poesia, passa a proceder à cognição e à comunicação, sendo esta última baseada em convenções que se estabelecem no contexto da vida social.

A Linguagem figurada começa a ganhar uma abordagem “radicalmente diferente, de modo que, no processo de representação e comunicação de ideias, a certeza matemática cartesiana cedeu lugar à contingência da linguagem metafórica” (OTTE; LEITE, 2012, p.39). Buscaremos, neste estudo, analisar e interpretar essa transformação e mudança, ao apontar, destacar e refletir sobre oscilações de significados do termo *axioma* e sua relação com os fundamentos da Matemática.

Nesta tarefa, nossa problemática motivadora inicial esteve centrada em compreender porque, até o início do século XIX, de acordo com alguns filósofos e matemáticos, o significado de *axioma* tinha o sentido de ‘verdade’, mas, a partir de determinado momento, ele passa ser tomado como sinônimo de ‘hipótese’. Em nossa compreensão, essa mudança foi impulsionada por profundas alterações na vida

sociocultural e intelectual iniciadas pela Revolução Industrial<sup>14</sup> e por seus desdobramentos em todos os níveis e, em nosso entendimento, conseqüentemente também, com desdobramentos na Matemática enquanto área de conhecimento e, sobretudo, na relação entre Matemática e Linguagem.

Para nossa análise interpretativa dos significados e oscilações atribuídos ao termo *axioma*, assumimos que os conceitos são historicamente construídos, não sendo imutáveis ou anistóricos e é desse mesmo modo que situamos nossa compreensão sobre todo corpo constituído do Conhecimento Matemático.

Neste sentido, nossos pressupostos teóricos na abordagem interpretativa do significado de termos e conceitos matemáticos têm, como um dos seus primeiros fundamentos, a perspectiva e análise reflexiva, fundamentadas no pensamento de Raymond Williams. Este autor, em seu trabalho, edifica um estudo sobre o significado de algumas palavras e termos, destacando ‘cultura’ e ‘sociedade’ em sua investigação. Ele denomina seus estudos como tratando de ensaios dentro de uma vertente da “*semântica histórica*: uma vertente que pode ser definida, de modo mais preciso quando se acrescenta que a ênfase não recai apenas nas origens e nos desenvolvimentos históricos, mas também no presente – significados, implicações e relações presentes – como história” (WILLIAMS, 2007, p.41).

Apoiamo-nos neste ponto de vista, ao optarmos, em nossa análise reflexivo-interpretativa do termo *axioma* e adotamos o que também denominamos perspectiva inicial investigativa social e histórica. Sobretudo, entendemos que a Matemática, em sua essência, revela-se na atividade (OTTE, 2011) e isso implica que o sentido dos seus conceitos, como o das Ciências Exatas, encontra-se no uso deles; precisamos, então, reconhecer que, para a Matemática, devemos empreender uma análise que tome conta também dos aspectos pragmáticos das suas representações.

Assim, ao interpretarmos sobre os significados e oscilações de significação que possam ocorrer no termo *axioma* da Matemática, procuraremos notar a aplicabilidade deles nas situações e relações reais, observando-os tanto dentro das estruturas de ordem social como na estrutura formalizadora do próprio Conhecimento Matemático, numa

---

<sup>14</sup> Movimento que teve seu início do Reino Unido em meado do Século XVIII e que se expandiu pelo mundo a partir do Século XIX. A invenção da máquina a vapor constitui marco inicial desse movimento em que a máquina passa a superar o trabalho humano, impondo-se uma nova relação entre capital e trabalho, novas relações entre as nações se estabelecem e há o surgimento da cultura de massa, entre outros eventos intelectuais.

análise focada na relação entre a Matemática e a Linguagem, numa perspectiva semiótica que agrega o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

Williams (2007, p.16) tentou mostrar que as formações sociais e as formas culturais são interconstitutivas, isto é, tratam “de expressões diferentes da mesma maneira historicamente específica de fazer sentido da experiência do vivido”. De modo que, em nosso entendimento, os conceitos e termos matemáticos refletem o contexto sociocultural, sendo também carregados de valores e intenções. Como diz Williams (2007, P.14), cada conceito “é funcional para o tipo de sociedade que o adota: a esfera do valor fica preservada dos conflitos, como se os significados e as avaliações fossem neutros e desinteressados”.

Observamos que, de modo singular, o ponto de vista de Williams (que configura uma revisitação ao Marxismo) defende que os signos, ao tomarem e veicularem formas de relações sociais em mudança, além de se constituírem fonte de estudo dessas relações, podem passar a constituir também espaço de intervenção. Sua abordagem

Contempla o fato de que a linguagem tanto é veículo das determinações da vida social que nos constituem, como querem os partidários do giro linguístico, quanto é o espaço que articula as mudanças que ocorrem na sociedade ao longo da história, deixando, assim, aberta a alternativa para a ação propositiva de sujeitos atuantes (WILLIAMS, 2007, p.19).

Constatamos na ação propositiva de que trata Williams (2007, p.16) haver o desencadeamento do esforço de juntar o que o modo de pensar capitalista insiste em separar, e mostrar as conexões e o que elas ensinam a ver, além do que a hegemonia trabalha para ocultar. Em seu estudo, particularmente, Williams faz uma reflexão sobre como aspectos como a dicotomia e polarização, iniciados na Revolução Industrial que culmina na Sociedade Moderna (e no modo de produção capitalista, como elementos fundamentais) foram relevantes na direção de mudanças de significações de algumas palavras/conceitos que ele analisou e estudou. Exercitando este mesmo olhar, podemos inferir que não é diferentemente com os conceitos matemáticos, pois estes também terão reflexos fundacionais e fundamentais em sua configuração e significação, como reflexos no próprio modo de organização do Conhecimento Matemático.

De modo que nos atrevemos a inferir que o ‘esforço de juntar’ de Williams tem similaridade com o pensamento sobre Complementaridade de Otte, que empreendemos no sentido de interpretação da relação que envolve a Linguagem e a Matemática. E, neste sentido, nossa posição é de que a Matemática não pode ser reduzida a uma



Linguagem, mas, de outro modo, sem uma Linguagem não fazemos muita Matemática. Assim, é que buscamos analisar, interpretar e deixar mais evidente esse aspecto relacional que envolve o pensamento matemático e sua formalização (Linguagem) ‘pela’ e ‘na’ trajetória interpretativa dos significados do termo *axioma* e verificar sobre possíveis mudanças que possam ocorrer nesta relação (Linguagem e Matemática).

Entendemos ser inicialmente importante se efetuar, em nossa análise reflexiva para este estudo, uma leitura histórica de acontecimentos que produziram marcas profundas no pensamento da sociedade e foram promotoras de novos direcionamentos. Um destaque importantíssimo foi a invenção da imprensa (1455), fomentada Revolução Científica do século XVI e XVII, e pelas exigências técnicas do comércio e da navegação, vimos surgir um movimento de especialização do conhecimento e uma tendência de matematização do mundo e das coisas, entretanto, por um lado (fomentado pelo contexto educativo), começa a existir uma tendência a se reduzir a Matemática a uma Linguagem.

A invenção da imprensa, em primeiro lugar, contribuiu com a invenção de novos símbolos e de novas maneiras de escrever já a própria Aritmética. De acordo com Otte (2014)<sup>15</sup>, podemos mesmo afirmar que uma ‘nova’ Matemática foi provocada em grande parte pelas oportunidades oferecidas pelo sistema de escrita e, mais ainda, pela imprensa (EISENSTEIN, 1979, *apud* OTTE, 2014)<sup>16</sup>.

A proliferação de textos tornada possível graças a imprensa estendeu não só o conhecimento, mas todo o processo de conhecimento tornou-se mais objetivo, dinâmico e profundo. Pode-se comparar impressões idênticas, detectar contradições, adicionar suplementos, aviso prévio e correlações gravadas. Diferentes leitores poderiam falar sobre um argumento precisamente citável. Erros podem ser eliminados e melhorias de conhecimento se tornaram possíveis (OTTE, 2014)<sup>17</sup>.

Soma-se a esse processo o desencadear de uma necessidade educativa em Matemática, que tende a fomentar buscas no sentido de determinação de uma Linguagem Matemática, uma língua perfeita, pelo menos para os cientistas e matemáticos.

---

<sup>15</sup> Manuscrito de Michael F. Otte, datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

<sup>16</sup> Manuscrito de Michael F. Otte, datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

<sup>17</sup> Manuscrito de Michael F. Otte, datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

Até então, não se encontrava na sociedade tão intensificada necessidade educativa, relacionada ao saber matemático (que era somente coisa de especialistas), de forma que esse movimento provocou e veio reforçar a ideia de a Matemática ser tratada como uma Linguagem. Na Europa, até então, a formação científica do cidadão era deixada em segundo plano, o que importava era o discurso. A relação entre Ciência e Educação era, de certa forma, descomprometida uma vez que se dava prioridade à política em detrimento de formação com vistas à produção de Conhecimentos Matemáticos.

Havia a subvalorização das Ciências e, principalmente, da Matemática na Educação, tornando a relação entre a Linguagem e a Matemática ainda mais distante. Assim, o movimento e visão que chegaram à Idade Moderna e que, aparentemente, poderiam designar a aproximação na relação entre Linguagem e Matemática, interposta pela necessidade comunicativa do Conhecimento Matemático e no tratamento didático do pensamento matemático, ao reforçar à Matemática e, à sua natureza, seus predicativos de precisão, clareza e objetividade, conduz a que ela principalmente seja tomada como uma Linguagem, o que entendemos, sobretudo, num sentido de reforçar o distanciamento entre ambas.

Com isso, como Carl Boyer escreveu (na sua *History of Analytic Geometry*, Princeton 1956, p. 54): “a era moderna abriu com ênfase a uma nova direção – na direção da álgebra”. Otte (2012) aponta sobre a importância desse fato, considerando que o formalismo do qual os educadores tanto reclamam é fruto da aplicação da Matemática em sala de aula, sendo que a Álgebra e a Aritmética figuraram e compareceram como fornecedoras dessa língua formal.

Até aqui, optamos por, sumariamente, inferir que os primeiros esforços do ensino matemático dos séculos XVI e XVII foram resultados da invenção da imprensa e das exigências técnicas do comércio e da navegação (OTTE, 2013)<sup>18</sup>. Sobretudo, de acordo com Otte, vemos nascer nesse tempo uma didática da Matemática, considerada como uma técnica ou engenharia. Já com a *Revolução Industrial*, essa didática passa a ser assumida como Ciência da qual podemos destacar duas fontes: a Lógica e a Epistemológica. E essa transformação advém das transformações históricas que se processam a partir da *Revolução Industrial* do século XIX.

---

<sup>18</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

Sobre esses aspectos decorrentes da Revolução Industrial, Raymond Williams (2007), analisando o termo ‘Estético’, aponta-nos, por exemplo, que, antes do processo sociocultural iniciado em 1800, essa palavra tinha um sentido amplo de percepção sensorial, mas passou a designar apenas apreensão da Arte e a aparência visual, no sentido de construção de uma categoria do que é bom e belo, como também passa a postular

[...] uma separação entre “sociedade” e “arte” ao pôr a atividade de criação, circulação e confirmação dos sentidos fora do campo da avaliação e do uso sociais (sic), como se ela se desse em um domínio apartado das outras atividades de produção e reprodução da vida. O tipo de valorização que esse modo de vida confere a essa estética dissociada da experiência do vivido expressa “uma dimensão humana que a versão dominante de sociedade parece excluir” ou, dizendo a mesma coisa de outro modo, é um dos planos no qual se encerra o desejo por outro tipo de vida que é negado pela organização social vigente (WILLIAMS, 2007, p. 11).

Ao conjecturar um impulso fragmentador e restritivo de um tipo de modo de vida que se instala e corresponde a formas de pensamento (e de ação) que uma nova forma de organização social começa a promover, observa, como consequência, uma especialização do sentido desse termo, mostrando que esse impulso pode se manifestar não só na prática, mas também no campo das concepções teóricas e em nosso entendimento e no modo de organização de nosso conhecimento.

Ancorados na perspectiva de Williams, reforçamos nossa compreensão de que o início do século XIX, especialmente o ano de 1800, figura como um marco na história ocidental. É nesse período que se consolida o movimento da Revolução Industrial, iniciada no século XVIII e considerada como o berço da Sociedade Moderna. Destacadamente, esse momento e todo o movimento por ele gerado passam a figurar como promotores de grandes, importantes e relevantes mudanças que começavam a se processar em todos os níveis da sociedade. Não diferentemente, o conhecimento científico como o próprio Conhecimento Matemático, como reflexos de manifestações humanas, também foram afetados em suas relações. Na Matemática, essas mudanças podem ser destacadas em sua relação com a Linguagem.

Um evento relevante às mudanças relacionadas ao conhecimento científico e, conseqüentemente, ao conhecimento Matemático, ligado ao movimento da Revolução Industrial, pode ser destacado do pensamento em B. Hessem (TAVARES, 2008). Segundo este autor, foi no solo fértil da Revolução Industrial que a máquina a vapor, nascida na indústria da mineração, ganhou importância acentuada. Abriu-se espaço para

a invenção de um instrumento de execução que teve, como consequência, a divisão do trabalho desenvolvida na manufatura e o aumento da produtividade. A máquina a vapor encontra, desse modo, na Revolução Industrial, um campo fértil e preparado para sua aplicação como motor. Este fato vem contribuir de forma decisiva para a mudança radical que se processa na relação homem-trabalho e para modular, direcionar comportamentos, interesses e ações, marcadamente da Sociedade Moderna.

Transformando-se a máquina a vapor em importante elemento de produção para a indústria, passa a figurar com uma preocupação central torná-la mais econômica, reduzindo-se os gastos com vapor e, conseqüentemente, com água. Tal fato veio influenciar, sobremaneira, ações ligadas à pesquisa, conseqüentemente, às Ciências. Tornou-se imprescindível à sociedade dedicar-se a estudos mais detalhados sobre os processos físicos da máquina para melhorá-la, aperfeiçoar e potencializar seu uso e operacionalização.

Mas também, como o aumento da produtividade não ocorria de forma uniforme em todos os setores da produção, gerou-se a necessidade e quase obrigatoriedade de se procurarem outras melhorias tecnológicas também em outras áreas. Contemporaneamente a este movimento, temos as ideias de Newton, apresentando e destacando a visão mecânica de mundo e ressaltando ser a Epistemologia ou a Metodologia e não a Ontologia, que determina o sucesso da Ciência.

Para Newton, o ser humano devia seguir o exemplo de Deus, o maior artífice do mundo e, assim, construir máquinas para servir aos nossos interesses, não perdendo tempo em descobrir causas e objetivos da própria natureza. A tecnologia e o método servem como um primeiro e indispensável ritmo à orientação científica e cognitiva. Somados esses aspectos e os condicionantes imperativos à sociedade daquela época, tal postura ganhou força e conduziu ao instrumentalismo na Ciência.

Assim, nesse período, outra mudança radical começa a se processar também na base do nosso conhecimento, o qual revela ser fundamentado na e pela atividade humana. A Ciência, como também a Matemática, passa a ser conectada com a ideia de funcionalidade e funcionalismo de modo que as ideias de Newton, adicionadas ao desenvolvimento da tecnologia da máquina a vapor, foram fatores muito importantes à promoção da Ciência no início do mundo moderno.

A base do conhecimento e do Conhecimento Matemático, desde Platão até o século XVIII, estava voltada à compreensão do mundo, à busca da essência e da causa e

à preocupação que girava em torno de questões mais profundas na relação homem-mundo-conhecimento. A Matemática tinha seus objetos bem definidos no mundo. Mesmo Aristóteles não apresentava essa ideia instrumentalista da Matemática que surgiu anteriormente e se consolidaria com os modernos. Para ele, o interesse estava em procurar as leis que regem o mundo. Procuravam-se os ‘porquês’, enquanto os modernos procuravam o ‘como’ se processam as coisas.

O sistema social capitalista que emerge na Modernidade promove transformações profundas à ação humana em vários campos e, especialmente, a Ciência começa a se caracterizar cada vez mais pela especialização. Esse mesmo movimento agencia a transformação de sentido na própria significação do termo *ciência*, segundo Williams (2007, p.78-82), também como reflexo da história social significativa que se instaura a partir de então e em processo de mudança. Embora este termo possa hoje parecer uma palavra muito simples, não o era antes do século XIX quando seu uso era muito geral. Dessa forma, podia designar desde algo que se conhece ‘teoricamente’, ou ter um uso mais geral como conhecimento ou aprendizado, ou até mesmo ser intercambiável com *arte*, para descrever um corpo específico de conhecimentos ou habilidades. Para Williams (2007, p.61),

Até o século 18, maioria das ciências eram artes; a distinção moderna entre *ciência* e *arte*, como áreas opostas de habilidades e de esforços humanos, com métodos e finalidades fundamentalmente diferentes, remonta a meados do século 19, embora os próprios termos se tenham contraposto muito antes, no sentido de “teoria” e “prática”.

Esse conjunto complexo de distinções históricas entre diversos tipos de habilidades humana e os propósitos básicos variáveis no uso dessas habilidades estão obviamente relacionados tanto com as mudanças na divisão prática do trabalho quanto com as mudanças fundamentais nas definições práticas do propósito do exercício da habilidade. É possível relacioná-lo principalmente com as mudanças inerentes à produção capitalista de mercadorias, com sua especialização e redução de valores de uso a valores de troca.

Esse autor nos faz observar que, no princípio do século XIX, fixa-se a ideia de distinção no uso e significação do termo *ciência*. Um significado que continha elementos tanto de método como de demonstração em um nível teórico. A Ciência passa a ser tomada como tipo de conhecimento ou argumento, mais do que um tipo de assunto. Outro fato definidor de um novo sentido no significado de *ciência* ligava esta ao caráter *objetivo*, concreto, do material e do método, como o de determinadas áreas como a Matemática, Física, a Química e a Biologia.

Esta mesma perspectiva teve seu início no pensamento de Descartes (1596 – 1650). Ele enfatizava e destacava para o papel fundamental da certeza ao dizer que “os objetos com os quais devemos nos ocupar são aqueles que nossos espíritos parecem ser suficientes para conhecer de uma maneira certa e indubitável (...) rejeitamos todos os conhecimentos que são apenas prováveis” (DESCARTES, 2007, p.5).

Observamos que, no século XIX, começa a ganhar importância, nas teorias, o caráter do método na produção de conhecimento científico. Surge, então, a visão de *Ciência* como estudo teórico e metódico da natureza. Identificamos e destacamos o fato de que o nascimento da Ciência Moderna coincide com a busca da certeza intuitiva e da convicção individual, que se fixa entre princípio e meados do século XIX. E vemos, nesse tempo, a Matemática passando a assumir o papel epistemológico no desenvolvimento da Ciência e em oposição à casuística e ao probabilismo que, até então, reinava em assuntos, tais como razão, pensamento e conhecimento.

Esse movimento que procurava impor à Ciência um caráter de objetividade e precisão toma a Linguagem, principalmente, a Linguagem figurada, como um obstáculo epistemológico. A busca da certeza faz com que se instaure (fruto da Revolução Científica - séculos XVI e XVII) uma tendência ao reducionismo na Matemática que tenta explicar o mais elevado em termos do elementar e, nesse sentido, explicar a Matemática avançada em termos de conceitos algébricos e geométricos elementares (OTTE; LEITE, 2012, p.27). Newton já dizia que, se você quer entender o mundo de um golpe só, isso é impossível. Para Newton, nós temos que reduzir a complexidade, precisamos dividir o mundo em pedaços para compreendê-lo.

Na Ciência, essa visão reducionista conduz à especialização cada vez maior do conhecimento. De repente, de acordo com Otte (2012), o ponto de vista do conhecimento toma a direção da atividade, esta podendo ser do engenheiro, do geômetra, do médico e, nesse sentido, a Matemática não tem mais objetos, mas possui objetividade. É o movimento da Revolução Industrial e o fenômeno da especialização passando a caracterizar a Ciência e, como consequência, o instrumentalismo do pensamento matemático.

E esse tipo de instrumentalismo, afirma Otte (2012), fez-se refletir na algebrização da Matemática. E, “justamente por essa razão, a matemática tornou-se o modelo epistemológico padrão a ser considerado, sendo ela mesma tida como exemplo de objetividade e precisão” (OTTE; LEITE, 2012, p.29). Um direcionamento e condição

primeira à Ciência, em se adquirir conhecimento verdadeiro, seguro e certo sobre as coisas e o mundo, é reforçado pelo pensamento de alguns filósofos àquela época, contribuindo para que se inicie um processo de matematização do mundo.

Descartes (2008, p.57) dizia sobre o método da Matemática:

[...] praticando-o, meu espírito se acostumava aos poucos a conceber mais claramente e mais distintamente seus objetos, e me prometia, não tendo submetido a nenhuma matéria particular, aplicá-lo de maneira igualmente útil às dificuldades das outras ciências.

Tal pensamento reforça a ideia da Matemática ser identificada como o modelo epistemológico de método científico para se atingir o conhecimento seguro e verdadeiro e a intenção de generalizá-la às demais Ciências.

De modo que vimos a Matemática passando a ser tomada como uma Linguagem analítica e o centro de gravidade do conhecimento sendo deslocado para Ciências empíricas. Isso inicia uma dicotomia entre Empirismo e a Lógica que notamos dominando, até hoje, tanto na Filosofia quanto na Educação Matemática (OTTE; LEITE, 2012, p.28).

Podemos observar, segundo Otte e Barros (2012, p.1-2), que

Na geometria dois triângulos  $A$  e  $B$  antes do ano 1800 foram considerados iguais  $A = B$  quando foram congruentes, ou seja, eles foram considerados como manifestações de uma forma em comum, bem no sentido Platônico. Desde o século 19 os matemáticos começam com a distinção considerando dois triângulos como iguais somente quando são idênticos, ou seja, compostos dos mesmos pontos (axioma da extensionalidade de Cantor). Percebe-se que neste assunto da igualdade se encontra toda gênese da matemática moderna, e sua transformação de uma ciência de conceitos numa ciência de objetos (conjuntos).

Tomar um triângulo, não como uma figura, mas como um conjunto de pontos, revela a transformação profunda no pensamento matemático. Para os gregos, era a Geometria que nos fornecia os instrumentos das construções possíveis, não a Aritmética. Vemos que, nesse sentido, o instrumentalismo dos números surge quando concebemos considerar um triângulo como conjunto de pontos. Passam-se a adotar os números como possibilidades de construções, coincidindo com uma tendência na Ciência, no sentido de matematização do mundo.

Neste exemplo, podemos observar que a Geometria e a Lógica Objetiva começam a ceder lugar à Álgebra e Aritmética. O *status* de verdade da Geometria,

centrado no fato de que seus objetos eram mais claros e distintos, parece ceder lugar a outro modo de se conceber a verdade, que passa a situar-se agora na coerência das proposições, das construções teóricas. Fica evidente a mudança que se processa na relação entre a Linguagem e a Matemática, pois, percebemos que os signos e símbolos começam a desempenhar papel mais significativo na/para produção do conhecimento. Mas, no início, essa relação entre a Linguagem e a Matemática, destacando a participação dos signos e símbolos, conduziu a um contraponto que, mesmo apontando para uma aproximação, o que mais se priorizava era a dimensão representacional da linguagem(da descoberta) e não a comunicativa.

Observamos que, em Descartes, podia ser evidenciado um distanciamento entre a Linguagem e a Matemática. Para Descartes, tanto a comunicação como a apresentação do conhecimento deveria seguir o mesmo método, ou seja, através da pesquisa e exploração da realidade. Ele toma com desconfiança a linguagem cotidiana e ordinária na comunicação do pensamento e, somente estando livre de sedutoras induções da eloquência e da persuasão emotiva, o método matemático deveria ser assumido como modelo para se alcançar e expressar o verdadeiro conhecimento.

Já outro influente filósofo à época, Thomas Hobbes (1588-1679), diferentemente de Descartes, concebia que a Linguagem diretamente ligada à faculdade do pensamento, o que apontava para o entendimento de certa confluência entre Linguagem e Matemática. No entanto, sua perspectiva, ao argumentar em favor de uma objetividade no discurso, de certo modo ‘matematizado’, relegava à Linguagem uma função secundária.

Enquanto Descartes esteve focado no progresso da Ciência, o interesse de Hobbes estava na divulgação e justificação desta. Neste sentido, a obra de Euclides foi-lhe de grande influência e importância, tomando-a como explicação modelo para possibilidade do pensamento. Sua ‘matematização’ deve-se ao fato de ter seguido a direção de Euclides, ilustrando sua concepção de Linguagem com analogia à Geometria, na qual “os homens começam por estabelecer as significações de suas palavras e a esse estabelecimento de significações chamam *definições* e colocam-nas no início do seu cálculo” (HOBBS, 1996, p.46).

Observamos que Hobbes (1996, p.46) reconhece, na unidade da palavra, o elemento fundamental para o raciocínio, mas, em sua concepção objetivante, defende a necessidade de que cada uma delas deva possuir um único e exato significado, uma vez



que “a verdade consiste na adequada ordenação de nomes em nossas afirmações, um homem que procurar a verdade rigorosa deve lembrar-se que coisa substitui cada palavra de que se serve, e colocá-la de acordo com isso”. De forma que a Linguagem figurada ou a utilização de termos inconsistentes devessem ser evitadas na constituição do conhecimento. Assim, ele também (só que de outra perspectiva na relação Linguagem e Matemática) assume, como modelo de precisão e objetividade, o cálculo Matemático.

Interpretamos que esses contextos e reflexões do pensamento filosófico contribuíram no sentido de que a Matemática começasse a ser considerada como e ‘apenas’ uma Linguagem (a linguagem com que se escrevia o mundo e os fenômenos), pois, até então, não era assim que se entendia a Matemática. Se olharmos para o pensamento de Kant (por exemplo), a Matemática fazia parte tão somente da intuição, não era considerada uma Linguagem.

Sobretudo, podemos inferir que a *Revolução Industrial se* inicia embalada por uma concepção que, relacionada ao conhecimento científico, distanciava a Linguagem da Matemática, principalmente espelhada pela condição se se tomar a matemática como uma linguagem.

Entretanto, as profundas mudanças e influências nas relações sociais promovidas pela Revolução Industrial e na produção e especialização do Conhecimento, de outro modo, começam a operar no sentido de uma efetiva reaproximação entre a Linguagem e a Matemática, ou seja, começam a promover uma ‘viragem à linguística’. Vemos iniciar-se um tratamento à Linguagem, posicionando-a favoravelmente na constituição do Conhecimento Matemático. E começa a ganhar destaque a dimensão comunicativa no processo de desenvolvimento da Matemática.

Essa ‘virada à linguística’ terá o sentido de que a Linguagem deixa de ser entendida como exercendo somente uma função secundária na comunicação de ideias, ou mesmo no sentido de sufocar ou invalidar o Conhecimento Matemático, minimizando-o no sentido de compreendê-lo apenas como uma Linguagem. Por um movimento e processo de convergência entre a Lógica e a Matemática, a Linguagem passa, de outro modo, a ter função constitutiva do Conhecimento Matemático e na sua formação.

O aspecto que veio contribuir para essa mudança de direção na relação entre a Linguagem e o Conhecimento ou, em nosso caso, da Linguagem com a Matemática,

trata-se de que, até o século XIX, áreas designadas como conhecimento científico eram, basicamente, as Ciências Exatas, essencialmente, a Geometria, a Álgebra, a Física, a Mecânica de Newton; entretanto, para se construir e aprimorar a máquina a vapor, dinamizar e potencializar seu uso, foi necessário desenvolver teorias de campos de objetos muito mais abstratos como, por exemplo, a Termodinâmica e a Eletricidade. Surge a necessidade de novas e variadas pesquisas, em novas áreas de interesse.

Tal aspecto começa a impor uma mudança que se relaciona, também, à estrutura conceitual do pensamento, ou seja, começa a ser promovida uma mudança na forma da própria argumentação científica. O contexto educativo começa a introduzir o pensamento filosófico à Matemática. Este, por sua vez, somada à especialização do conhecimento que passa a ser exigida em novos campos de conhecimento, irá influenciar tanto a Ciência como o pensamento matemático, como na formalização desse conhecimento. Nossa hipótese é que muitos conceitos e também conceitos fundamentais à Matemática, neste sentido, sofreram mudanças em sua significação, inclusive o termo *axioma*.

Contribui para essa mudança, o fato de que como reação à modernidade capitalista, surge como contraponto o movimento do Romantismo, uma crítica *moderna* da Modernidade, ou seja, uma autocrítica da Modernidade – feita por alguém ‘de dentro’ e não de fora dela. Ou seja, a relação do Romantismo com o passado é sempre idealizada, sem pretender abandonar as conquistas da Modernidade. O passado que inspira os românticos é mitológico ou legendário. Nos casos em que a inspiração era de um passado real, ele era sempre visto de forma idealizada e utópica, como fonte daquilo que a Modernidade tinha perdido em seus valores humanos.

Esse movimento pretendia, resumidamente, combater: o desencantamento de mundo, ou seja, a sua visão, exclusivamente, racional/científica; a quantificação do mundo que reduzia tudo a valores quantificáveis, o romantismo exacerbava o qualitativo, as relações humanas não mercantilizadas; a mecanização do mundo, que passava a ser dominado pela máquina, pelo artificial, pelo construído; a abstração racionalista, que está na base da organização da produção capitalista; e a dissolução dos vínculos sociais.

O Romantismo não figurou apenas como uma forma de negação da Modernidade capitalista, mas ele trouxe e promoveu importantes contribuições a essa Modernidade, seja um hiperdesenvolvimento da subjetividade individual, como

também, no polo oposto-complementar, da totalidade ou unidade – tanto da comunidade humana como dela com a natureza. De acordo com Otte (2013)<sup>19</sup>, a própria visão de que os matemáticos trabalham com hipóteses veio a ganhar força com os românticos, pois eles foram os primeiros que encontraram novos campos de matematização.

Dessa forma, entendemos que os pensadores, filósofos e cientistas que comungavam desse pensamento romântico, decisivamente, influenciaram no sentido de uma aproximação entre a Linguagem e a Matemática no processo do desenvolvimento do conhecimento como no sentido de mudança no pensamento conceitual a níveis mais altos de abstração.

Isso permitiu, inclusive, que a Linguagem figurada emergisse como aspecto a influenciar de modo significativo o conhecimento científico. Observamos que a maior parte dos conceitos nessas novas áreas passa a se desenvolver com base em metáforas. Tal aspecto abriu uma nova perspectiva para/na relação entre a Linguagem e a produção de Conhecimento, imprimindo, conseqüentemente, um novo sentido à relação entre a Linguagem e a Matemática. Principia por impor novas reflexões sobre o papel da Linguagem para a Ciência e para/no processo do entendimento humano. Até então, a Linguagem era tida como empecilho ou, como adiantamos, um obstáculo epistemológico ao conhecimento e ao entendimento humano.

Entendemos que o pensamento dos filósofos Étienne Bonnot de Condillac (1715-1780) e Jean-Jacques Rousseau (1712 – 1778) foram ideias precursoras a essa mudança paradigmática. Foi, desse modo, dado o ‘ponta pé inicial’ a uma aproximação na relação entre a Linguagem e o processo cognitivo.

Condillac, em momento que antecede à Revolução Industrial, pode ser considerado como um dos primeiros a ter dado início a uma nova concepção de Linguagem e ao modo sobre como compreender sua relação com o conhecimento. No seu *Essai sur l'origine des connoissances humaines*, 1746, ele apresentou uma explicação empirista do conhecimento, mas numa perspectiva inovadora para aquela época.

Condillac era genuinamente entusiasta da Filosofia empirista inglesa (impulsionada por Newton, o fundador da Física moderna e, por Locke, considerado como criador da moderna Filosofia ‘científica’), pelos menos, em seu início. E em seu *Traité des systèmes* (Haia, 1749), ele complementava as ‘ideias inatas’ e ‘sistemas

---

<sup>19</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

abstratos' que, entre outros filósofos, especialmente Locke e Le Clerk, haviam começado. Ao mesmo tempo em que defende Locke, ele o transcende, revelando um pensamento com implicações potencialmente radicais até então. No pensamento de Condillac, as ideias não nos permitem conhecer as coisas como elas são, mas, simplesmente, como as percebemos por meio de impressões sensoriais relativas a nós mesmos (ISRAEL, 2009, p.565).

No seu *Traité des sensations* (1754), ele elimina a dicotomia entre 'sensação' e 'reflexão', afirmando que a reflexão e a análise mental advêm de forma direta das impressões sensoriais. Condillac, ao tempo em que promove uma fusão entre corpo e alma, reduzindo a mente à pura percepção sensorial, contribuiu, de forma poderosa, na formação da ideologia materialista de um grupo de pensadores que fomentavam e promoviam o pensamento Iluminista.

Sobre sua teoria de Linguagem e suas consequências relacionadas com o desenvolvimento da mente, ele resumiu do seguinte modo, ao escrever em uma carta ao matemático suíço Gabriel Cramer (1704- 1752):

Isto é o que resume todo o meu sistema sobre este assunto. O relacionamento social origina ocasião (1) para transformar as expressões naturais em signos; (2) para inventar outro signo o qual nós chamamos arbitrário; e estes signos (o natural e o arbitrário) são os primeiros princípios do desenvolvimento e do progresso das operações mentais (CONDILLAC, *apud* OTTE, 2008, p.67).

De acordo com Otte (2008), enquanto concepções anteriores e predominantes de Linguagem lhe atribuíam uma função meramente secundária na comunicação de ideias, que poderiam existir independentes dela, Condillac insistiu em que a função da Linguagem era constitutiva na formação do conhecimento, de modo que a base do conhecimento devia ser signos e linguagens, ao invés de puras intuições.

Condillac não via a expressividade da Linguagem com desconfiança. Ele percebe que o papel dos signos é essencial para uma epistemologia evolucionária e ao desenvolvimento do pensamento e estabelece, a partir desse pensamento, uma visão genética da Linguagem, apontando para a abordagem semiótica da cognição e da epistemologia.

Ao reconhecer, pela primeira vez, a Complementaridade entre as funções conotativas ou expressivas da Linguagem e suas propriedades denotativa ou representacional, seu pensamento abriu espaço para que a metáfora fosse reconhecida

como tendo papel epistemológico importante, não só para a retórica e poesia, mas também para todo o raciocínio humano (OTTE & LEITE, 2012, p.36).

De acordo com Otte e Leite (2012, p.37), o Filósofo suíço Rousseau também reconhecia a importância da Linguagem figurada à cognição e ao pensamento e, provavelmente, ele tenha sido influenciado pela obra de Condillac, segundo Faveri (2001). Sobretudo, Rousseau assegura o papel originário da Linguagem figurada não só para o desenvolvimento da própria Linguagem, mas do pensamento. Ele afirmava que

Como os primeiros motivos que fizeram o homem a falar foram paixões, suas primeiras expressões foram tropos. A primeira a nascer foi a linguagem figurada e o sentido próprio foi encontrado por último. Só chamaram as coisas pelos verdadeiros nomes quando foram vistas sob sua forma verdadeira (ROUSSEAU, 1978, p.164).

Rousseau identificou a origem de palavras novas e expressões como sendo translações de sentidos, a partir de palavras e expressões já conhecidas, configurando-se, desse modo, como sendo originalmente palavras e expressões metafóricas.

O que Rousseau analisava e enfatizava ao modo de desenvolvimento do pensamento humano e sua relação com a Linguagem podia-se evidenciar no início do século XIX e que aconteceu promovido pelas mudanças que se processavam com a Revolução Industrial. Buscavam-se agora, nas novas áreas do conhecimento, conceitos em termos de conceitos que já se conheciam (e de outras áreas). Assim, vemos ser atribuído um sentido inédito à metáfora e este, sendo direcionado à construção de teorias, em áreas onde os objetos não eram reais, ou pelo menos não possíveis de serem palpáveis (OTTE, 2012)<sup>20</sup>.

Nessas novas áreas de interesse, todos os objetos são modelos ou metáforas. Tratando-se de metáforas estruturais que ultrapassam, sobremaneira, um contexto reducionista que, na visão aristotélica, antes lhes era atribuído para adentrarem no contexto da pesquisa. “Nesta perspectiva, ideias matemáticas novas estariam originalmente baseadas em palavras novas na língua como translação de sentidos, isto é, como sentido figurado, e, dependeriam basicamente da formulação de novas e inéditas expressões da língua” (OTTE & LEITE, 2012, p.38).

Otte (2012) aponta-nos que, nesse momento do início do século XIX, surge uma nova teoria da metáfora: uma teoria estruturalista da metáfora. Esta foi importante, pois

---

<sup>20</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

todo o conhecimento abstrato (dos novos campos e áreas que estavam surgindo) passou a depender muito das metáforas.

De acordo com a teoria estruturalista da metáfora e, diferentemente da concepção aristotélica, a metáfora passa a ser tomada como instrumento de descoberta. Em Aristóteles, esse entendimento compactuava com o de símile, ou semelhança, em que se identifica uma coisa através de outra coisa diferente. Mas, agora, o novo sentido empreendido não somente pelos românticos, mas também pelos poetas, cientistas e filósofos, no início do século XIX, destaca à metáfora o papel de criação e de descoberta.

Os estudos de Williams (2007, p. 117) também apontam para a relevância do pensamento metafórico como condicionante e influência na mudança de significado de alguns termos e palavras. Neste sentido, o destaque à metáfora surge quando esta é requerida e se manifesta, principalmente, diante da necessidade de estabelecer e compreender novas articulações e relações sociais e intelectuais.

Como exemplo desse condicionante e influência, Williams discorre que o conceito de *cultura*, na língua inglesa, passa a ser usado para referir-se a conceitos importantes em diversas disciplinas intelectuais distintas e em diversos sistemas de pensamentos distintos e até incompatíveis. Anteriormente ao século XIX, o sentido primordial de *cultura*, em todos os primeiros usos, era de um substantivo que se referia a um processo natural ou o cuidado com algo, basicamente, com as colheitas ou animais. Mas o conceito também assume, por metaforização, o significado de ‘cuidado humano’, ampliando-se e incluindo, nesta perspectiva, o processo de desenvolvimento humano.

Entretanto, no final do século XVIII e meados do Século XIX, o substantivo independente **cultura** passa a ter um importante significado, designando um ‘processo abstrato ou produto de tal processo’. De acordo com Williams (2007, p.118), no desenvolvimento deste conceito, ocorreram duas mudanças cruciais:

Em primeiro lugar, certo grau de adaptação à metáfora, que tornou direto o sentido de cuidado humano; em segundo lugar, uma extensão dos processos específicos ao processo geral, que a palavra poderia carregar de modo abstrato. Naturalmente, é a partir deste último desenvolvimento que o substantivo independente *cultura* iniciou sua complicada história moderna [...].

Pelas análises e reflexões de Williams, podemos interpretar que ele aponta para uma mudança cultural que começa a se operar nesse período e que se processa no sentido de que os signos (e conceitos) se tornam signos, primeiramente, no contexto da vida social e atribuindo-se aos fatores sociais maior relevância na produção do conhecimento. Foi nesse mesmo sentido, que interpretamos se destacar o pensamento de Condillac e Rousseau. Estes filósofos, a partir do século XVIII, apontam para um novo viés, entendendo o pensamento teórico e conceitual, passando a ser considerado um produto da cultura e da sociedade, não somente como algo inerente ao homem.

No contexto social, as classificações e os conceitos passam a se basear e depender de convenções, sendo que convenções humanas refletem necessidades e problemas objetivos a serem resolvidos coletivamente (OTTE, 2008).

Nossa exposição e reflexão, neste capítulo, procurou evidenciar que esta investigação sobre uma possível mudança de significado no termo *axioma*, principalmente, pautada no Conhecimento Matemático empreenderá uma análise pautada na história, filosofia (epistemologia) e semiótica (das palavras/termos/conceitos enquanto signos), e que, relacionado ao pensamento conceitual, assumimos postura e perspectiva genética e evolutiva.

Contempla devido a uma relação íntima entre a Lógica e a Matemática um sentido linguístico. Considerarmos, deste modo que, o Conhecimento Matemático resulta como produto de um processo dinâmico e também complementar entre Lógica (Semiótica-Linguagem) e Filosofia (História-Epistemologia). Resulta que em nossa compreensão tanto a Semiótica como a Epistemologia figuram como sendo Ciências basilares a qualquer didática da Matemática (OTTE, 2013)<sup>21</sup>.

E, fundamentados inicialmente nos pressupostos discutidos anteriormente, entendemos que tanto as palavras, enquanto signos como também o próprio conhecimento metafórico são importantes na produção do conhecimento. Segundo Otte (2008), podemos até mesmo afirmar que a Ciência se desenvolveu quando as pessoas aprenderam a usar metáforas de forma mais disciplinada e percebemos isso ao observar que as ‘revoluções científicas’ produzem novas metáforas em abundância.

Compactuamos a que uma análise do pensamento metafórico se torna útil em nosso entendimento para ampliarmos nossa compreensão sobre o pensamento conceitual em Matemática, especificamente, devido ao caráter estritamente diferencial e

---

<sup>21</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

particular de um conceito matemático. A Matemática parece lidar muito com metáforas, a ponto de a estrutura do seu conhecimento poder ser tomada como uma grande metáfora. Reiteramos essa interpretação, pois o significado de um conceito poderia ser imensamente variável e complexo e não conseguiria ser descrito definitivamente ou determinado (isso foi o erro fatal da reforma da Matemática Moderna segundo Otte (2013)<sup>22</sup>. Assim, um conceito teórico na Matemática é, essencialmente, um processo, dinamizado pela Complementaridade de intensionalidade (sentido<sup>23</sup>) e extensionalidade (referência<sup>24</sup>) dos signos.

Entendemos (OTTE, 2011) que o sentido dos conceitos matemáticos, como o das Ciências Sociais se encontram no uso deles, ou seja, compreendemos que, dentre os resultados da filosofia da Matemática, destaca-se a descoberta de precisarmos reconhecer que uma análise semântica<sup>25</sup> de seus conceitos, como é de costume nas Ciências Humanas, não é suficiente (quando se trata da Matemática). Assim, temos de tomar conta dos aspectos pragmáticos<sup>26</sup> das representações. Para contemplarmos e justificarmos este sentido de abordagem interpretativa neste estudo fomos adotar e ancorar nossa análise interpretativa na perspectiva semiótica à partir de pensamento de Charles Sanders Peirce e alicerçada no pensamento de Complementaridade Otteano.

Dentre os reflexos das mudanças relacionadas à Matemática, no final do século XVIII e início do século XIX, podemos destacar, principalmente, dois pontos fundamentais como consequência de um estreitamento na relação, por exemplo, entre a Lógica e a Matemática: uma mudança marcante na relação entre a Matemática e a Linguagem promovida pelo contexto sócio-político-cultural emergente da Revolução Industrial e Científica; e, conseqüentemente um direcionamento à generalização e a cálculos cada vez mais abstratos (instrumentalização da Matemática).

---

<sup>22</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

<sup>23</sup> O *sentido* trata dos elementos do conceito. No contexto formal como a Álgebra e a Matemática, são as regras de como usar esses elementos. O sentido é só maneira de usar os índices. O sentido estabelece-se numa estrutura, a sintaxe da aritmética por exemplo.

<sup>24</sup> A *referência* trata do que podem ser suas possíveis aplicações. Também podemos dizer *significado*.

<sup>25</sup> A *Semântica* pode ser entendida como uma teoria da Comunicação ( como é para Saussure), assim ela trata da relação entre signos e signos. Como também a *semântica* pode ser entendida como o estudo das relações entre os signos ou símbolos e o que eles representam. Nesse sentido a *Semântica* tem a ver com o lado referencial do conhecimento. Diferentemente de na Linguística, aqui, a *Semântica* estuda a relação entre a Linguagem e o mundo. Nossa pesquisa parte de uma estudo da relação manifesta entre a Linguagem e a Matemática. De forma que, nossa interpretação dos signos e dos símbolos, ou seja, nossa interpretação da Semiótica, parte do contexto e pressupostos da Epistemologia e Filosofia da Ciência e não da Linguística..

<sup>26</sup> A *pragmática* trata do uso que fazemos dos signos e símbolos.



De todo, a partir do Século XIX, observamos à um desenvolvimento da Matemática com base em dois paradigmas intimamente interligados à Lógica (que entendemos dentro de perspectiva Semiótica - Linguagem) e à Epistemologia (relacionada especialmente à Filosofia). De modo que, compreendemos que foi através de um processo de integração da Filosofia com a Matemática, foi que tivemos inaugurada a aritmetização de toda a Matemática tradicional, como a tentativa de fundar o conceito de número numa teoria de conjuntos infinitos, enquanto que, conjuntamente aportada na Epistemologia, a Matemática funda a *axiomática* moderna.

Compreendemos que “o conhecimento está inevitavelmente ligado às representações simbólicas, e os sistemas de signos ou de símbolos aparecem como indicadores visíveis dos tipos ou aspectos do conhecimento” (OTTE, 2012. p.9). E admitimos que, dentro de uma perspectiva dinâmica, interessada no crescimento da Ciência e do Conhecimento, devemos perceber que a maneira de representar qualquer conhecimento importa-nos tanto quanto a coisa em si.

Daí nosso destaque ao termo *axioma* na Matemática, sobre seus significados e oscilações de significação, de modo que possamos perceber pelas relações envolvidas nessa significação e na construção de conhecimento e, em especial, do Conhecimento Matemático e sua relação com a Linguagem, como se operacionaliza o relacionamento entre a Filosofia e a Matemática. Neste sentido, uma Filosofia da Linguagem contribui efetivamente em nosso trabalho, pois, tomamos a Linguagem como objeto formal e essencial na constituição de uma teoria da significação.

E, é assim, mesmo fundamentando nossa análise dos dados, destacando o que chamamos inicialmente de perspectiva sócio-histórica, buscaremos abranger, concomitantemente e indispensavelmente, uma reflexão de cunho filosófica.

Nos dois capítulos que se seguem, apresentamos a os pressupostos teóricos-metodológicos fundamentais que empreenderemos em nosso análise interpretativa.



## **CAPÍTULO II: O Pensamento ‘Otteano’: o fenômeno da Complementaridade na/para interpretação do desenvolvimento do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos<sup>27</sup>**

Este estudo investigativo e interpretativo do significado e possíveis oscilações de significado do termo *axioma*, de Platão à Modernidade, ambiciona empreender uma metodologia, alicerçada no Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Para nós, o pensamento de Otte sobre a Complementaridade, além de ser tomado como pressuposto de análise interpretativa ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos, constitui-se numa propositura metodológica de postura investigativa. Decorre deste último aspecto que o sentido de Complementaridade é entendido como operacionalizado na relação que se processou, também, entre objeto de pesquisa e pesquisador.

O Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ potencializa um viés e postura crítica reflexiva e dialética à investigação uma vez que a contradição (ou um sentido de contradição eminente a aspectos duais ao fenômeno no processo cognitivo) é assumida como força potente e dinamizadora da e na cognição, ou seja, ao desenvolvimento e constituição do nosso conhecimento.

Compreendemos e defendemos que uma pesquisa primando por uma abordagem desta envergadura figure inovadora uma vez que amplia as ‘lentes’ interpretativas sobre como se processa especificamente o desenvolvimento do pensamento matemático, oferecendo respostas a questões sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático que nem o nominalismo<sup>28</sup> nem o platonismo<sup>29</sup> como o construtivismo<sup>30</sup> têm conseguido responder.

---

<sup>27</sup> Este capítulo foi elaborado a partir de uma série de explicações dadas pessoalmente a Evilásio José de Arruda e a Jacqueline Borges de Paula sobre o conceito de Complementaridade por Michael Otte, durante encontros para orientação, como também fundamentado em manuscritos e textos de autoria de M. F. Otte não publicados até o momento.

<sup>28</sup> Nominalismo - Uma das principais tendências filosóficas da Idade Média, o nominalismo, contrário ao realismo e ao conceitualismo, rejeitou o pensamento alcançado por abstrações e abriu caminho para o espírito de observação e a vulgarização da pesquisa indutiva. O nominalismo é uma doutrina segundo a qual as ideias gerais, como gêneros ou espécies, não passam de simples nomes, sem realidade fora do espírito ou da mente. A única realidade são os indivíduos e os objetos individualmente considerados. Desse modo, o universal não existe por si: é mero nome, vocábulo com significado geral, mas sem conteúdo concreto, que só reside no individual e no particular. Em seu retrospecto histórico da doutrina nominalista, Leibniz afirmava que, para os partidários do nominalismo, só existem, além das substâncias singulares, os nomes puros e, desse modo, a realidade das coisas abstratas e universais é eliminada. Na filosofia moderna, são declaradamente nominalistas Thomas Hobbes, no século XVII e, no século XVIII, Étienne Bonnot de Condillac, defensor da teoria sensualista do conhecimento. Segundo Otte, podemos dizer que Kant em certo modo foi um nominalista. O nominalismo é o oposto do realismo ideal. Já no século XX, Nelson Goodman e Willard Van Orman Quine são defensores do que chamam "nominalismo

Para além dos aspectos que antecipamos, entendemos que, do ponto de vista educativo, o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ engloba e se manifesta como uma dimensão metodológica que pode ser empreendida ao processo ensino-aprendizagem da Matemática, ou seja, no tratamento didático ao Conhecimento Matemático para sala de aula.

Este capítulo objetiva apresentar o fenômeno da Complementaridade que o professor Otte tem estudado e investigado por mais de quarenta anos, através de suas pesquisas relacionadas aos fundamentos do Conhecimento Matemático e, a partir daí,

---

construtivo". O primeiro não nega as entidades abstratas, mas somente as admite consideradas como indivíduos, pois o mundo é um mundo de indivíduos. Nega, assim, qualquer possibilidade de classes, nas quais se incluem indivíduos diversos. Quine generaliza um argumento já proposto por Bertrand Russell sobre as chamadas descrições singulares. Ao estudar os possíveis usos ontológicos da linguagem, inclina-se para o nominalismo e contra o platonismo. Procura construir uma linguagem capaz de reduzir qualquer enunciado sobre entidades abstratas a um enunciado sobre entidades concretas. Só será possível admitir variáveis individuais, isto é, as que se referem a objetos concretos espaço-temporais ou, pelo menos, temporais. São de resto nominalistas, ou apresentam afinidades com essa posição, nos tempos atuais, os neo-espinosistas, os neokantianos, os neopositivistas, os idealistas e pragmatistas.

<sup>29</sup> Segundo Otte (manuscrito não publicado, 29, abril, 2014, s.p.), “o Platonismo é a crença de que a matemática reflete a natureza íntima do universo em termos de verdades absolutas e imutáveis. O mundo é, e sempre foi, violento, sujo e em permanente mudança. Em contraste: Os seres humanos estão à procura de clareza, estabilidade, orientação e autoidentidade. O Platonismo foi uma primeira reação a essas situações contrastantes. O Platonismo ensina que a diversidade, a mudança e movimento não são reais, são apenas aparências. O Paradoxo de Zenão sobre a corrida entre Aquiles e a tartaruga demonstra este ponto de vista. O conhecimento é, para Platão, o conhecimento de algo. Esse algo não é um estado de coisas, nem uma descrição de qualquer coisa, mas um objeto. E, como o conhecimento e a verdade têm que ser eternos e universais, as coisas sobre as quais eles são, tem que ser universal e eterna. Platão, considerando tudo o que é obrigado a existir no tempo e no espaço para ser relativo, sustenta que apenas o que é eternamente verdadeiro pode ser adequadamente dito para ser conhecido. Por isso, deve haver formas ou ideias inteligíveis, que formam os objetos de conhecimento verdadeiro”.

<sup>30</sup> Construtivismo - Construtivismo é uma das correntes teóricas empenhadas em explicar como a inteligência humana se desenvolve, partindo do princípio de que o desenvolvimento da inteligência é determinado pelas ações mútuas entre o indivíduo e o meio. A ideia é que o homem não nasce inteligente, mas também não é passivo sob a influência do meio, isto é, ele responde aos estímulos externos agindo sobre eles para construir e organizar o seu próprio conhecimento, de forma cada vez mais elaborada. A filosofia do construtivismo pode ser reduzida a uma frase: "tudo o que é dito é dito por um observador" (Maturana, 1998, p.25). Por mais comum que esta afirmação possa parecer, quanto mais pensarmos nela, mais profunda ela se revela. Os construtivistas lidam com as concretizações de concepções da realidade. Maturana e outros construtivistas defendem que existe uma realidade externa, mas negam que este mundo externo possa ser percebido da maneira que ele realmente é. (Pörksen, 2001, p.12). O construtivismo (ou psicologia genética) procura explicar o desenvolvimento do pensamento (inteligência) como um processo contínuo de adaptação do organismo ao meio, marcado por várias fases (estádios): Cada uma delas representa um estágio de equilíbrio, cada vez mais estável, entre o organismo e o meio, onde ocorrem determinados mecanismos de interação, como a assimilação e a acomodação. Para Otte (2014), Nominalismo e Construtivismo são a mesma coisa. Em ambos, os universais saem da mente do sujeito, tratariam de criações mentais ou construções. Segundo Otte (2013), por exemplo, Piaget “concorda” com Platão quando ele diz que os objetos matemáticos são pré-formados. Contudo, para aprender Matemática, o aprendiz tem que atualizar essas formas em termos de suas próprias atividades. Não podemos simplesmente contemplar e sim realizar construtivamente. “Mais ou menos” a diferença entre Kant e Platão, pois Kant sempre fala que, para entender a generalidade do triângulo, temos que construir os conceitos na intuição.

está construindo sua teoria – nomeadamente neste estudo e trabalho - como “O Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’”.

Inicialmente, entendemos a necessidade de pontuar e deixar mais visível nosso entendimento sobre alguns pontos essencialmente, importantes que direcionam o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’, daí a ideia de escrever este capítulo.

Este nosso estudo investigativo caracterizou-se como teórico-bibliográfico, tomou como foco a relação complexa que se espelha entre a Linguagem e a Matemática no desenvolvimento do Conhecimento Matemático. De modo que, à primeira vista, pareceu-nos uma tarefa ‘complicada’ ou, até mesmo, ‘ingênua’ pesquisar e compreender sobre o desenvolvimento do nosso pensar matematicamente, através de inferências que tomam como ponto de partida apenas o ‘produto’ – o termo *axioma* - ou seja, o Conhecimento Matemático em sua materialidade sobre uma relação que envolve mente e mundo.

De modo que, a princípio, uma dúvida reinava, indagando-nos constantemente sobre nossas limitações ou, até mesmo, se este seria o caminho adequado. Mas, ao mergulharmos nos livros, aos reunirmos todo o material bibliográfico recheado de elementos sócio-históricos e culturais, vimos nascer a convicção de que esta é, sobretudo, um tarefa frutífera, evidentemente, porque essa relação deixa pistas e observamos que podemos conjecturar sobre ela e entre o funcionamento da nossa mente e sua materialidade exterior, espelhada no e pelo Conhecimento Matemático de modo a compreender sobre como se processa essa relação. Este foi o nosso empreendimento neste trabalho e estudo investigativo de cunho reflexivo-interpretativo.

Em especial, o contato com o pensamento filosófico do Professor Otte, acolhendo-nos e possibilitando-nos participar da elaboração e construção de uma teoria tão peculiar e rica, foi, certamente, o que nos seduziu sempre e, a cada dia mais, diante de tantas e novas descobertas sobre a gênese e historicidade do Conhecimento Matemático.

E, assim, propusemo-nos a olhar para o Conhecimento Matemático sócio-historicamente construído na materialidade do termo *axioma* e seus significados assumidos e a buscar compreender (ao tempo em que empreendemos a uma nova perspectiva interpretativa) sobre como desenvolve nosso pensamento matemático, como se dilata a nossa cognição, como aprendemos sobre o mundo, sobre como construímos conhecimento e Conhecimento Matemático.

Ao nos referirmos à Linguagem, nosso destaque está em uma gama, incrivelmente, intrincada, de formas sociais de comunicação e de significação que inclui a linguagem verbal articulada, mas também absorve, inclusive, a linguagem dos surdos, o sistema codificado da moda, da culinária, da Matemática (no sentido de que o pensamento matemático requer e produz uma Linguagem própria) e tantas outras formas de Linguagem. Desse modo, ela trata de todos os sistemas de produção de sentido, os quais o desenvolvimento dos meios de reprodução de Linguagem propicia hoje uma enorme difusão (SANTAELLA, 2012, p.16). Em suma, ao nos referimos à ‘Linguagem’, tratamos do modo de pensamento humano, caracterizado, essencialmente, pela classificação, descrição e comunicação e, também, envolvendo e compreendendo as dimensões e os aspectos da Linguagem que se referem à sintaxe, semântica e pragmática.

Já a Matemática é, por nós, entendida, antes de tudo, como uma atividade humana (manifestação de nossa ação no mundo). Reconhecemos e atribuímos a ela *status* de Ciência do tipo observativa (ciência da ‘descoberta’ de acordo com Peirce), na medida em que monta construções na imaginação de acordo com preceitos abstratos, passando, então, a observar esses objetos imagináveis para neles encontrar relações entre partes que não estavam especificadas no preceito da construção.

Assim, a Matemática, enquanto Ciência, estuda ‘o que é’ e ‘o que não é’ logicamente possível, sem se fazer responsável pela existência atual desse possível. Nesse sentido, é a Ciência que fornece subsídios e encontra aplicação em todas as outras Ciências, inclusive, na Fenomenologia e na Lógica (SANTAELLA, 2012, p. 37). Além disso, e mais elementarmente quando nos referimos à ‘Matemática’, tratamos do modo de pensamento humano que se formaliza através do raciocínio diagramático, configurando-se, sobretudo, de caráter do pensamento relacional-estruturalista e que se constitui na e pela inter-relação e interação de nossa ordenação temporal e espacial com o mundo e com seus fenômenos (reais e possíveis).

A matemática enquanto atividade que se relaciona e que se aplica ao nosso pensamento matemático compreenderá também o que Freudenthal (1973, p.44) nomeia de ‘matematização’, referindo-se a uma atividade de ‘organização da realidade com significado matemático’. Freudenthal considera o processo de matematização como a característica mais importante da atividade matemática. Entendemos ampliar esse direcionamento a visão de Husserl (1970, p.33), para quem a matematização figura

como um processo de objetivação das formas e dos movimentos, obtida segundo a aplicação da Matemática “para todas as propriedades reais e todas as relações de causalidade reais do mundo da intuição”. Em todo os casos, entendemos que o processo de matematização envolve diversas características, como: a análise, a sistematização, a reflexão e o desenvolvimento de conceitos matemáticos. De acordo com esse raciocínio, torna-se evidente o quanto nesse processo e etapas, é relevante a inserção e importância imperativa da Linguagem ou, ainda mais alargamente, do processo linguístico, no desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Deste modo, aceitamos que o Conhecimento Matemático externalize a materialidade do nosso pensar matematicamente, ou seja, sendo fruto do nosso pensamento reflexivo-diagramático sobre fenômenos naturais e sociais.

Geralmente, quando nos referimos ao Conhecimento Matemático, temos em mente, em primeiro plano, duas grandes correntes de pensamento: uma delas, tratando diretamente do discreto, pois lida com a contagem, indução, recursão, combinatória e, em geral, com tudo o que se refere à aritmética dos números inteiros, um ponto de vista que se assume algorítmico; a outra corrente alude ao contínuo, lidando com a ideia de medir, de função, com a geometria, derivadas e integrais.

Mas, também compreendemos, para além dessas duas correntes quantitativas, existir a Matemática, com características qualitativas que podemos destacar na topologia, nas leis da Lógica, entre outros temas. Assim, a Matemática não se ocupa somente com grandezas quantitativas, expressa em números, variáveis algébricas ou elementos geométricos como o de comprimento e área, engloba outros tipos de representações sîgnias. E, principalmente, entendemos, inclusive, que quantificar se trata de um processo qualificativo, de modo geral.

Podemos destacar uma quarta corrente que surgiu na Modernidade pela qual o desenvolvimento da Matemática toma um caminho diferente do da Antiguidade, produzindo a idealização e formalização de seus objetos em meio a um campo no qual a abstração e o raciocínio lógico predominam, destituídos de vínculos com aplicações práticas e situações do mundo físico. De modo que, atualmente, a atividade Matemática, e, conseqüentemente, o Conhecimento Matemático, espelha-se também na axiomatização simbólica, regidos por símbolos e regras, pela abstração e a generalização. Esses aspectos têm se mostrado tão essenciais à Matemática pura, quanto

à construção de modelos que representam problemas ou fenômenos inerentes à natureza complexa do mundo físico.

Ressaltamos, sobretudo que, nosso entendimento de ‘Conhecimento Matemático’, relacionado às quatro correntes apresentadas, inclui uma interpretação que destaca a relação imbricada, de interdependência relativa entre aspectos dicotômicos, e que neste estudo evidenciará tal ‘Complementaridade’ consequentemente delineada especialmente na relação entre a Filosofia e a Matemática.

Segundo Otte (2014)<sup>31</sup>, para compreendermos a Complementaridade necessitamos empreender uma abordagem histórica, pois, para respondermos como determinados conceitos surgem e se desenvolvem, só se é possível responder em termos históricos. E, a abordagem histórica no Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ é impregnada de uma perspectiva interpretativa filosófica.

A base filosófica que sustenta o pensamento de Michael F. Otte sobre Complementaridade tem seus fundamentos iniciais no pensamento de Immanuel Kant. Elementarmente, e não menos, pelo fato de ele promover, com sua teoria, um novo direcionamento à epistemologia com sua Revolução Copernicana Kantiana. Esta teve consequências profundas no pensamento filosófico, vindo a configurar-se num fator decisivo da virada linguística para e na interpretação do nosso desenvolvimento cognitivo.

Otte interpreta que a ideia de Complementaridade já estava presente no pensamento kantiano, principalmente, relacionada à relevância que Kant atribui à atividade a qual se destaca como sendo a ponte entre o sujeito e o mundo. Para Kant, o Conhecimento Matemático está inserido num contexto de intuições puras, de maneira que, para isso, necessitamos de atividades. A partir desse ponto, Otte começou a perceber que a Complementaridade deveria ser encontrada na caracterização da atividade, na *práxis*.

Otte (2014, p. 7)<sup>32</sup> diz: “Eu acredito que seja uma característica geral de muitas das afirmações de Kant que, literalmente entendidas, elas são falsas, mas em um sentido mais amplo contêm verdades profundas”. Kant (1997, B 74-75) afirma que:

---

<sup>31</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014 [nossa tradução].

<sup>32</sup> Artigo intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável* de 2014, não publicado até o momento.



O nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objecto mediante estas representações (espontaneidade de conceitos); pela primeira é-nos *dado* um objecto; pela segunda é *pensado* em relação com aquela representação (como simples determinação do espírito). Intuição e conceitos constituem, pois, os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que nem conceitos sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceitos podem dar um conhecimento. Ambos os elementos são puros ou empíricos. *Empíricos*, quando a sensação (que pressupõe a presença real do objecto) está neles contida; *puros*, quando nenhuma sensação se mistura à representação. A sensação pode chamar-se matéria do conhecimento sensível. Daí que a intuição pura contenha unicamente a forma sob a qual algo é intuído e o conceito puro somente a forma do pensamento de um objecto em geral. Apenas as intuições ou os conceitos puros são possíveis *a priori*, os empíricos só *a posteriori*. Se chamarmos *sensibilidade à receptividade* do nosso espírito em receber representações na medida em que de algum modo é afectado, o *entendimento* é, em contrapartida, a capacidade de produzir representações ou a *espontaneidade* do conhecimento. Pelas condições de nossa natureza a intuição nunca pode ser senão *sensível*, isto é, contém apenas a maneira pela qual somos afectados pelos objetos, ao passo que o entendimento é a capacidade de *pensar* o objecto da intuição sensível. Nenhuma dessas qualidades tem primazia sobre a outra. Sem a sensibilidade, nenhum objecto nos seria dado; sem o entendimento, nenhum seria pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios; intuições sem conceitos são cegas.

Kant fala de duas fontes do nosso conhecimento: conceito e intuições. Uma trata da espontaneidade do espírito de ‘ver’ as ideias e a outra, da receptividade do nosso espírito. Ao Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ isto tem a ver com um ciclo que pode ser tomado como tendo vários sentidos: receptividade-espontaneidade, construção-observação, experimento-matemática.

As ideias da razão, para Kant, por exemplo, a alma, o mundo, a liberdade e Deus, são conceitos e enunciados que obtemos na experiência e orientados à completude. Esta orientação tem duas direcções opostas: a máxima unidade de um todo composto segundo leis necessárias e a máxima expansão na multiplicidade dos objetos. Interpretamos que neste ponto Kant já se direcciona à interpretação de um sentido de complementaridade entre o aspectos intencional e extensional do nosso conhecimento. E ainda, para Kant essa combinação, de dupla completude, a unidade e a expansão, se realiza pela e na experiência, uma completude que se opera entre sensibilidade e entendimento.

Para ele as ideias da nossa razão não teriam um sentido constitutivo, mas sim regulativo. Tais ideias não contribuem ao nosso conhecimento, mas são indispensáveis à autênticas compreensão das ciências. Uma vez que, as ciências buscam não só a

verdade, mas também a unidade sistemática e a maior multiplicidade possível do conhecimento.

Em sua tarefa, segundo Kant, as ciências pretendem reunir experiências particulares em teorias gerais e unitárias, em relações coerentes de fundamentação e explicação. E, para isso trabalham conforme a ideia da máxima unidade. Já por outro lado, os cientista fazem esforços para descobrir fenômenos sempre novos do mundo natural e social. Assim, eles atribuem valor não só a unidade sistemática, eles falam em simplicidade e elegância ao procurarem por suas teorias, mas também à grande multiplicidade e variedade dos objetos conhecidos. Tal esforço Kant reconhece inegavelmente no exercício das Ciências Matemáticas.

Para essas duas tendências da investigação científica é que Kant formulará seu genial princípio fundamental. A busca da unidade segue a lei transcendental da homogeneidade do múltiplo, a busca da máxima extensão possível segue a lei da especificação, da heterogeneidade. Com uma regra de teor: os princípios não devem ser multiplicados sem necessidade, e, a variedade do ser não deve ser limitada sem motivo. De modo que Kant, destaca que existem duas tendências de investigação opostas e, não obstante, em nossa interpretação, complementares. Sem dúvida entendemos que ele reconheça este aspecto à partir do empreendimento matemático, com seu raciocínio diagramático.

Ele ainda afirma na *Crítica* que, a investigação científica repousa nas representações da unidade, da pluralidade e, como terceiro princípio, o da continuidade do mundo natural e social. Para Kant, de acordo com HÖFFE (2005, p.178):

Apesar disso, as representações não provem da experiência [...]. Toda experiência, também toda soma de experiência, é limitada; mas nas ideias pensa-se uma completude absoluta e, portanto, ilimitado. Consequentemente, as ideias se devem a uma faculdade que transcende, o entendimento relacionado à experiência, a saber, a razão.

A tripla completude, a unidade, a pluralidade e a continuidade do conhecimento, é exigida pela razão, mas só pode ser realizada pela entendimento.[...] . As ideias da razão têm um sentido apelativo e heurístico; dão impulso ao entendimento para o progresso nas ciências: ‘Assim, todo conhecimento humano inicia com intuições, parte delas para conceitos e termina com ideias’ (KANT B 730).

Sobretudo, para Kant um ideal da razão da completude é um objetivo primordial da investigação, mas no entanto, inatingível. Realmente, as ideias da razão designam o que ele chama de ponto norteador permanente usado pelos cientista, no entanto, não

sendo nunca alcançado totalmente. De modo que a unidade sistemática do saber, não trata de uma unidade existente, mas uma unidade “projetada” (KANT B 675).

Kant destaca que esse aspecto cognitivo desempenha papel central na construção de conhecimento, para nós especialmente de Conhecimento Matemático, conduzindo Otte (1993) a entender o conceito de Complementaridade no sentido de que os objetos de estudo da Matemática, do ponto de vista das relações, também desempenham ‘papel ativo’ na produção de Conhecimento Matemático.

Para construção de conhecimento, neste sentido, necessitamos de atividades cognitivas. E, para compreender sobre as formas em que se processa a elaboração do conhecimento, são fundamentalmente relevantes os objetos e conceitos dos objetos do conhecimento. De acordo com o pensamento kantiano, o conceito de Complementaridade funda-se, exatamente, na relação que envolve as atividades, os métodos e objetos do conhecimento. O pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ entende que qualquer área de conhecimento, como também a Matemática, é influenciada por essa complementaridade de reação (receptividade das impressões) e a ação (espontaneidade dos conceitos), como indicado em Kant.

Otte sempre observava que à partir do pensamento de Kant, uma questão nebulosa e problemática nas teorias sobre o desenvolvimento do nosso conhecimento e, relacionando ao Conhecimento Matemático, e que também sempre impera em sala de aula, trata da relação entre o lado objetivo – do conteúdo da Matemática - e o lado psicológico – o social – do Conhecimento Matemático.

Comumente, as teorias, até então, têm conduzido a duas visões da Matemática: a Matemática como Linguagem e a Matemática como Atividade. E essa divisão advém, exatamente, de dois contextos específicos: o contexto sócio-comunicativo e o contexto da filosofia da natureza e da atividade. Para compreender essa relação, Otte empreende uma caminhada de estudos e pesquisas direcionada à Semiótica. Através da Semiótica, ele descobre a grande vantagem que nos permite lidar e ligar as duas coisas, ou seja, os dois contextos: o objetivo e o social, porque o signo, em si mesmo, já tem esse papel e função, uma vez que representa alguma coisa para alguém.

A Semiótica sempre tem as características próprias da Linguagem. Em nosso sistema de símbolos e da nossa linguagem, já existem esses dois lados (social e objetivo), que são tão difíceis de lidar na Educação. Entendemos e defendemos que essa dificuldade possa ser superada pelo Pensamento sobre Complementaridade

‘Otteano’ por se fundamentar numa perspectiva semiótica. Mas, antecipadamente, destacamos que, sobretudo, no entendimento Otteano, a Matemática não pode ser confundida com uma Linguagem, embora ele reconheça que sem a Linguagem a Matemática não é “quase nada”. Então, a questão toda se volta aos aspectos da semântica e da pragmática da Linguagem Matemática. A Matemática não se refere ao mundo empírico, mas, sim, a nossas atividades neste mundo empírico. Ela é uma metaciência das Ciências, de si mesma e da tecnologia.

A base elementar para estruturar sua teoria relacionada e fundamentada na Semiótica, Otte encontrou no pensamento e filosofia de Charles Sandre Peirce, pois, segundo Otte, Peirce assume uma atitude evolucionista em relação ao desenvolvimento humano de cognitivo e ainda porqu foi ele quem reformulou a epistemologia *kantiana* em termos semióticos. E, em especial, também porque, para Peirce, a Lógica é baseada na Semiótica.

Peirce, na realidade, consolida o sentido de uma ‘virada à linguística’, que, segundo Otte, foi possibilitada à partir e como uma reação à concepção de Kant e seu entendimento sobre conhecimento sintético *a priori*. De modo que, o objetivo passou a ser explicar o conhecimento *a priori*, sem se considerar as intuições puras e nem os sentidos, mas apenas por meio da Linguagem, substituindo-se a investigação epistemológica por uma concentração na Semiótica.

Otte fala que Peirce foi muito feliz na constatação de que a Matemática figura como resultado do nosso raciocínio diagramático. E (OTTE, 2014, s.p.)<sup>33</sup> acrescenta que “nós vivemos mais em um mundo de signos e possibilidades, do que em um universo de coisas determinadas. Isto significa que o processo de conhecimento é para ser descrito como o processo semiótico de interpretação e, portanto, é uma espécie de processo interativo entre objetos e ideias. Isto é o que queremos dizer com a noção de complementaridade (OTTE, 2003, 2006)”.

A seguir introduziremos como surge a ideia sobre o fenômeno da Complementaridade para Otte, mas dada a importância do pressuposto peirceano na constituição do Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ dedicaremos seguidamente no próximo capítulo atenção especial à reflexão sobre a Semiótica no pensamento de Charles Sanders Peirce.

---

<sup>33</sup> Artigo intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*, de 2014, não publicado até o momento.

## 2.1 O Princípio da Complementaridade

Um dos primeiros no meio acadêmico e científico a utilizar o termo ‘Complementaridade’ e relacioná-lo à perspectiva interpretativa e explicativa de um fenômeno foi Niels Henrik David Bohr (1885-1962), quando do início da edificação da teoria quântica. Ele apresentou, pela primeira vez, a sua interpretação do formalismo quântico no ano de 1927 no Congresso Volta, no Lago Como, na Itália. Esta seria mais tarde publicada em abril de 1928, na Revista *Nature*, sob o título *The Quantum Postulate and the Recent Development in Atomic Theory*.

Bohr desenvolveu a ideia do ‘Princípio da Complementaridade’. Tal princípio em Mecânica Quântica seria a transposição para a Física do mesmo princípio de Complementaridade que Hoffding, professor de Filosofia de Bohr, teria introduzido em Psicologia e Filosofia, porém não com esta mesma nomenclatura. O que nos chama a atenção no pensamento de Bohr sobre esse princípio repousa, primeiramente, no fato positivo de ele reconhecer a contradição e indicar sua existência não somente circunscrita à Física, porém comum a outras áreas de conhecimento, de modo que esse princípio possuísse um grau de generalidade elevado, funcionando como um tipo de princípio epistemológico.

Uma direção semelhante foi tomada por Hoffding, professor de Bohr. Citando Poincare, Hoffding afirma que existiria uma relação de Complementaridade entre as funções psicológicas de ver e de compreender. Estas seriam duas necessidades inconciliáveis do espírito humano, inultrapassáveis em tempo algum. Hoffding apoia-se em pressupostos kantianos, pois daí a se estabelecer a relação de Complementaridade entre as formas *a priori* da sensibilidade (espaço e tempo) e as formas *a priori* do entendimento de Kant, basta um único passo. Como Hoffding fez transpor as relações de Complementaridade da Psicologia para a Filosofia, do mesmo modo, por sua vez, Bohr a transpõe para a Física e a nomeou Princípio de Complementaridade.

Bohr realizou o seguinte experimento, tentando resolver o dilema ‘onda vs corpúsculo’ que se colocava para a Física. A experiência da dupla fenda, apesar de bem conhecida, é sumamente importante para os fundamentos conceituais da Mecânica Quântica, como também é boa para analisar a interpretação que Bohr desenvolve, pois a

forma como este lida com a contradição apresentava o seu próprio entendimento do Princípio de Complementaridade.

Ele considerou o arranjo experimental em que uma fonte S emitia uma partícula quântica de cada vez, ou seja, suponhamos ela emitir um elétron de cada vez. Esse elétron encontra-se com um ‘ecrã’ com duas fendas. Se colocado um detector imediatamente atrás de cada uma das fendas, o que poderia acontecer?

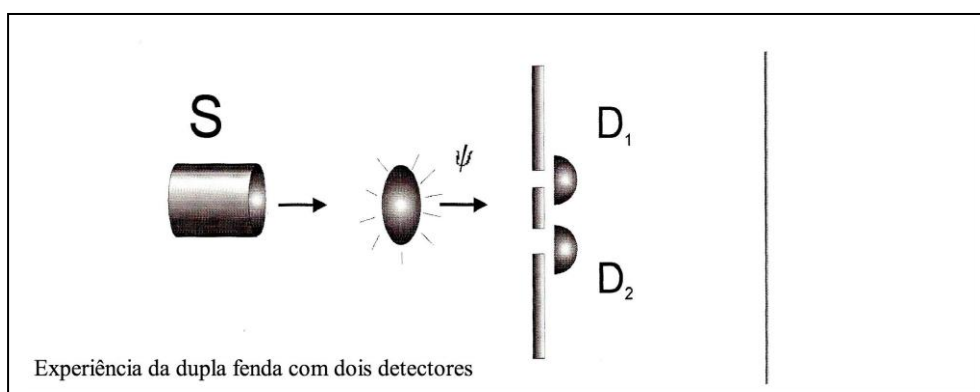


Figura 1: experiência da dupla fenda com dois detectores

O que realmente acontece é que, uma vez, é primeiro acionando um detector e depois acionando o outro detector (nunca os dois ao mesmo tempo, pois estamos lidando com um único elétron de cada vez), observou-se, no arranjo experimental, que esta condição é básica, pois uma detecção simultânea nos dois detectores significaria que a partícula se teria dividido e cada metade do elétron teria passado por uma fenda. Tal fato seria uma situação impossível, pois não se conhece meio elétron. De modo que, pela experiência, somos levados a concluir que o elétron passa por uma ou outra fenda.

Quando o experimento é modificado e os detectores são removidos da frente das fendas e colocamos apenas um detector ‘ecrã’ suficientemente longe, se supomos que o elétron passa por uma das duas fendas, seria de esperar uma contínua distribuição gaussiana dos impactos no detector. E essa distribuição seria o resultado da contribuição dos elétrons, que passam por uma fenda, mais a contribuição dos que passam pela outra fenda.

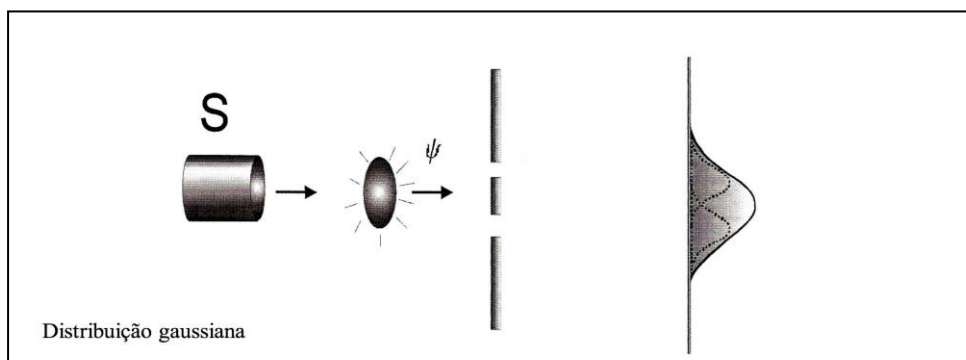


Figura 2: Distribuição gaussiana

No entanto, o experimento não mostra uma distribuição gaussiana contínua e, sim, um padrão inferencial.

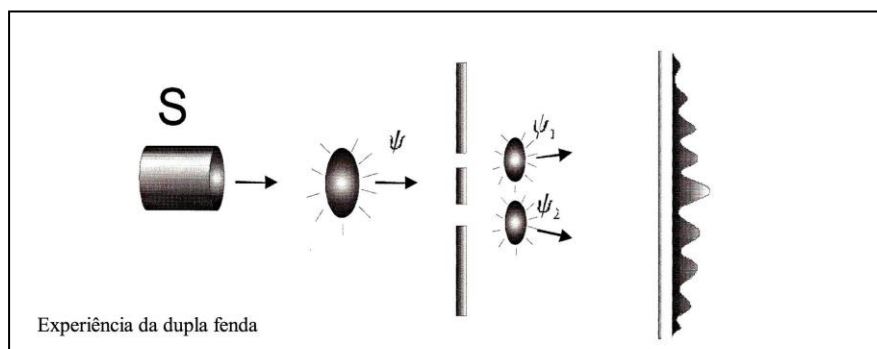


Figura 3: Experiência da dupla fenda

Segundo Bohr, para explicar o padrão de interferência observado, devemos assumir que a partícula quântica, o elétron, deve ter passado por ambas as fendas, pois um padrão inferencial é sempre resultado da sobreposição de mais do que uma onda. E isso significa que a entidade quântica tenha passado por ambas as fendas. Desse modo, somos levados a concluir que, sob essas condições, elétron é uma onda.

Deparamo-nos com um problema, uma vez que, na primeira experiência, temos o indicativo de o elétron ser (ou se comportar como) uma partícula, havendo passado por uma ou outra fenda; já a segunda nos conduz a interpretar que ele seja uma onda, porque passou por ambas as fendas, dando origem a um padrão de interferências.

Foi a título de enfrentar dilemas como este que Bohr desenvolveu o seu princípio de Complementaridade, estabelecendo que a partícula tem uma natureza dual, exibindo umas vezes o seu caráter corpuscular e, outras vezes, o seu caráter ondulatório, mas nunca simultaneamente.

Para Bohr, a Complementaridade se apresenta como um resultado necessário que emana diretamente dos dados da experiência. Fundamenta-a numa determinada consideração sobre a relação objeto e instrumento de medida. Ele afirma que defendeu “o ponto de vista convenientemente designado ‘complementaridade’, adequado para incluir os traços característicos da individualidade dos fenômenos quânticos e, ao mesmo tempo, para clarificar os aspectos peculiares do problema observacional neste campo da experiência” (BOHR, 1961, p.39).

A partir de sua experiência, Bohr conclui que há um limite absoluto na possibilidade de se falar de um comportamento dos objetos atômicos que seja independente dos meios de observação. E tal situação seria distinta daquela que se verificava na Física clássica, em que a escala de observação permite uma distinção entre o comportamento do objeto e do instrumento de medida, ou melhor, permite ignorar determinado nível, ou compensar essa interação entre objeto e instrumento de medida. Para Bohr, **a noção de Complementaridade “serve para simbolizar a limitação fundamental, que encontramos na física atômica, da existência objetiva do fenômeno independente dos meios da sua observação” (BOHR, 1961, p.7).**

Este ponto de vista sobre a Complementaridade, conforme apontamos de início, segundo o próprio Bohr, é bem geral, podendo ser identificado em outros domínios para além da Física. Conseguimos verificá-lo como uma faceta comum a todo o conhecimento humano, aqui, em especial, trazido à tona pelos fenômenos atômicos. No processo de construção do conhecimento, ao nível do pensamento, outras relações complementares como análise e síntese, observação e a definição, por exemplo, surgiram e podem ser interpretadas a partir de um ponto de vista da Complementaridade.

Bohr destaca que, na Física, até então, considerava-se possível discriminar entre o comportamento dos objetos e a sua observação. E a experiência apontada anteriormente seria o reflexo da impossibilidade atual, pois o ponto crítico que realçava é o reconhecimento de que qualquer tentativa de analisar, na forma habitual da Física clássica, a ‘individualidade’ dos processos atômicos seria frustrada, pois parece existir uma inevitável interação entre objetos atômicos em causa e os instrumentos de medição indispensáveis para este fim.

Mas, o princípio da Complementaridade de Bohr não toma em conta a totalidade que constitui o ente quântico, e os dados obtidos por esses arranjos não podem ser



combinados numa imagem consistente do comportamento do objeto, pois, ao serem combinados, fazem surgir contradições. Portanto, a Complementaridade de Bohr, apresentada na interpretação sobre o dualismo entre onda e corpúsculo, bem como outros pares complementares, toma uma perspectiva excludente entre esses aspectos, uma perspectiva não dialética. Dessa maneira, a teoria de Bohr nos conduz à negação de uma realidade objetiva ou da possibilidade de que as teorias científicas possam refleti-la.

Não acordamos, neste sentido, com Bohr. O pensamento ‘Otteano’ sobre a Complementaridade reconhece a existência de uma realidade objetiva e combate o estabelecimento de limites definidos para o conhecimento e o entendimento da Ciência (da Matemática) numa direção instrumentalista. Nosso ponto de vista compactua com as reflexões de Lênine (1982) sobre o materialismo dialético.

Neste sentido, trazemos, à interpretação da experiência anterior, uma proposta atual, inserida no programa de investigação de De Broglie (*apud* PATO, 2012), que comunga com o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Esta se assenta na análise de onduletas que não têm uma existência infinita (como na interpretação ortodoxa), mas são localizadas.

De Broglie parte da hipótese de que o ente quântico é constituído por uma parte ondulatória extensa e por uma parte corpuscular (uma singularidade designada de *ácron*), de forma que possui uma estrutura complexa. Com um modelo mais complexo de partícula quântica, podemos ter outra forma de explicação para a experiência da dupla fenda, seja:

- 1) a onda externa, sendo maior do que a distância entre as duas fendas, atravessa ambas as fendas ao mesmo tempo e dá origem a duas ondas coerentes e;
- 2) a singularidade passa por uma ou por outra fenda.

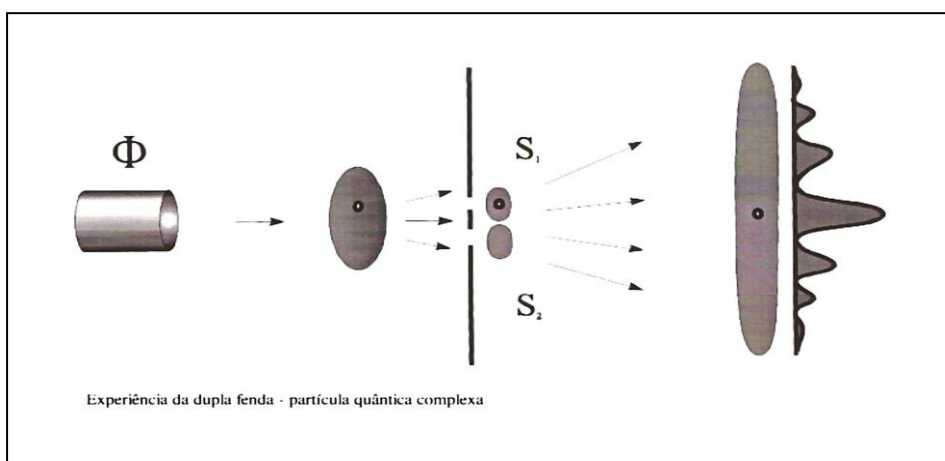


Figura 4: Experiência da dupla fenda – partícula quântica complexa

Nestas condições, também será acionado um dos dois detectores de cada vez e nunca ambos ao mesmo tempo. Como resultado da natureza da partícula, apenas a singularidade possui energia suficiente para originar o processo quadrático comum à detecção e as duas pequenas ondas que entram nos detectores ao mesmo tempo não têm energia suficiente para acioná-los. Se removermos os detectores da frente das fendas, então, as duas ondas progredirão, interferindo e dando origem a uma onda composta na região de detecção onde um *array* de detector está posicionado. A singularidade segue outra onda e, após um número suficiente de chegadas de partículas individuais, um padrão de interferência começa a aparecer nesse detector.

Na interpretação ortodoxa, a partícula quântica potencial, não tendo existência real, atravessaria potencialmente ambas as fendas e as duas ondas potenciais no seu caminho se misturariam e interfeririam também, potencialmente, na região de sobreposição. E, quando colocados dois detectores na frente de cada uma das fendas, então, uma das potenciais possibilidades ou probabilidades se materializaria num dos detectores, sendo as outras probabilidades reduzidas a zero.

Com o modelo de De Broglie de uma partícula complexa, a singularidade, sendo indivisível, passa por uma fenda **ou** por outra, enquanto a onda, por ser extensa, passa ao mesmo tempo por uma **e** pela outra fenda. Na interpretação de De Broglie, são tomadas em conta, simultaneamente, a unidade da realidade e a complexidade da matéria, tendo em conta a totalidade que constitui o ente quântico. E essa totalidade não exclui o que entendemos por Complementaridade, uma vez que não excluimos

características duais (onda vs partícula), mas a concebemos dentro de um movimento único, sem eliminar suas particularidades.

Para darmos conta dos fenômenos quânticos, observam Croca e Moreira (*apud* PATO, 2012), temos que desenvolver uma teoria não-linear. Tal não-linearidade expressa-se no fato de o todo ser diferente da soma das partes (revelando, para nós, o que entendemos como fenômeno da Complementaridade).

Quando paramos e observamos as teorias, a linearidade dos métodos Matemáticos da Física revelou-se adequada a uma determinada fase de investigação de certos domínios da natureza. Entretanto, começou a mostrar-se insuficiente. Por exemplo, de um ponto de vista investigativo e materialista dialético, sabemos da necessidade de delimitar o nosso objeto de pesquisa, de traçar limites relativos, de abstrair, de retirá-lo, ainda que provisoriamente, de uma totalidade mais ampla. De modo que o método cartesiano tem validade dentro de certos limites (relativos às formas de movimento que podem descrever históricos), do mesmo modo o mecanicismo e a forma de acumulação de dados nas Ciências Biológicas funcionam adequadamente em determinadas investigações. Todos esses métodos correspondem a momentos necessários de abstração, mas o avanço da Ciência tem revelado os limites desses métodos.

A propositura do desenvolvimento e aplicação dos métodos não-lineares ao domínio quântico, coisa não exigida pela linha interpretativo-investigativa não ortodoxa, reconhece que o ente quântico precisa ser entendido como uma totalidade que possui uma estrutura própria e leis de estrutura próprias e deve ser apreendido como tal, trazendo à tona o fenômeno que designamos como Complementaridade. Nós entendemos que, nessa direção interpretativa, o estudo do desenvolvimento do nosso pensamento matemático e sobre a configuração do Conhecimento Matemático desde Platão até a Modernidade pode revelar-se essencialmente exemplar e singular para compreendermos sobre a Complementaridade. Pois para compreendermos a Complementaridade diante numa perspectiva social e histórica de nosso desenvolvimento cognitivo em matemática, temos que assumir um ponto de vista genético ou evolutivo.

Enquanto Bohr absolutiza a diferença entre onda e corpúsculo, investigadores como De Broglie pretendem mostrar a onda e o corpúsculo em sua organização dinâmica, na sua dialética real operatória. Bohr, apesar de revelar a contradição, ele a

fixa e o nosso entendimento sobre o pensamento de Complementaridade privilegia uma interpretação dialética, dinâmica, no sentido de De Broglie, isto é, concebemos o caráter de complexidade que envolve a relação entre a Linguagem e a Matemática (entre Filosofia e Matemática) na constituição e desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático.

## **2.2 O fenômeno da Complementaridade no pensamento ‘Otteano’**

De acordo com Otte (2013)<sup>34</sup>, Niels Bohr acreditava que, pelo seu princípio de Complementaridade, ele estaria oferecendo uma interpretação consistente dos fundamentos da Física Atômica, recompondo, assim, a ruptura séria criada com a formulação de duas teorias formalmente equivalentes.

O interessante para nossa noção de Complementaridade (Otteana) trata do fato de que Bohr esteve motivado porque, quando se observam fenômenos atômicos, devemos concluir que uma realidade, independente no sentido físico comum, não pode ser atribuída nem aos fenômenos nem aos modos de observação. Bohr pretendia mostrar a “impossibilidade de qualquer separação nítida entre o comportamento dos objetos atômicos e a interação com os instrumentos de medida que servem para definir as condições em que os fenômenos aparecem” (BOHR, 1995, p. 51).

Bohr destaca, e isso é relevante ao pensamento ‘Otteano’, a importância que tem a atividade humana na elaboração do conhecimento. Assim, torna-se impossível também uma separação entre o sujeito e seu objeto de pesquisa. Os aspectos entre o sujeito, atividades e o objeto não devem ser considerados separadamente e sim como um todo, prevalecendo, dessa forma, o aspecto relacional. Segundo Otte (2014), essa característica do princípio físico da Complementaridade ocupa um papel central na questão cognitivo-epistemológica do conhecimento humano, tornando-se inevitável, portanto, estendê-lo aos fundamentos da Educação Matemática.

Para Otte a Complementaridade é antes de tudo uma ideia, que pode se encontrada em diferentes expressões, ou seja, em diferentes contextos.

---

<sup>34</sup> Manuscrito *Semiotics is All* de 2013 ainda não publicado.

Quando eu tentei apresentar um trabalho sobre “Complementaridade, Conjunto e Números” para Estudos Educacionais em Educação Matemática, o editor queria uma definição clara do termo “complementaridade”, ao invés de coisa mais ou menos circunscritas apresentando ideias que levaram a este conceito. Então eu forneci uma definição em termos de sentido e referência, ou seja, de intensões e extensões de representações simbólicas. Então, eu discuti a axiomática versus fundamentação teórica do conceito de número como um exemplo de apresentações complementares de aritmética (OTTE, 2014, s.p.)<sup>35</sup>.

A Complementaridade no pensamento ‘Otteano’ não toma os aspectos duais na forma de antíteses absolutamente irreconciliáveis. Nesse sentido, a posição relacionada ao fenômeno da Complementaridade de Otte comunga com o pensamento de Engels (1987 a, pp.131-13), ao afirmar que “o reconhecimento de que estes antagonismos e distinções, contudo encontrados na natureza, tem apenas uma validade relativa e que, por outro lado, a sua rigidez imaginada e validade absoluta foram introduzidos na natureza apenas pelas nossas mentes reflexivas [*reflexive minds*] – este reconhecimento é o cerne da concepção dialéctica da natureza”.

Enquanto no princípio de Complementaridade de Bohr, a contradição é fixada, em nossa concepção da Complementaridade, a contradição é relativizada. Mesmo porque seria descoberto mais tarde, no caso da experiência da dupla fenda, que as ondas apresentavam comportamento corpuscular e que os corpúsculos exibiam comportamento ondulatório, o que provocaria o desmoronar de linhas rígidas e fixas ao conhecimento.

Diferentemente de Bohr, que irá utilizar o sentido da Complementaridade tentando resolver tais contradições, em nosso entendimento sobre o fenômeno da Complementaridade e sobre a Complementaridade à Matemática, não há que se buscar por uma resolução significativa e final para a contradição, pois ela sempre existirá. Otte (2014)<sup>36</sup> nos explica que

A Complementaridade pode ser vista como um reconhecimento do paradoxo. Ela tem suas raízes na dualismo sujeito-objeto e no paradoxo básico do determinismo e livre-arbítrio. [...] “O princípio da complementaridade não promove resoluções das oposições binárias centrais da psicologia mente e do corpo, estrutura e processo, sujeito e objeto, determinismo e livre arbítrio, as leis e controles, etc, ao contrário, como vimos, o princípio da complementaridade exige a utilização simultânea de modos descritivos que são formalmente incompatíveis. Em vez de tentar

---

<sup>35</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014[nossa tradução].

<sup>36</sup> Texto intitulado *Activity theory and Complementarity*, s.p. de julho de 2014

resolver as contradições aparentes, a estratégia é a aceitá-los como um aspecto irreduzível da realidade "(PATTEE, p. 26 - 27).

O pensamento de Complementaridade 'Otteano', quando assume uma perspectiva dinâmica e dialética, coloca em primeiro plano o papel das contradições dialéticas como o motor de desenvolvimento do nosso pensamento, do pensamento matemático e da Ciência, do nosso conhecimento. As contradições internas à própria Ciência, como ao próprio corpo de conhecimentos, são fatores determinantes no desenvolvimento. Não tratam de contradições no seio da realidade objetiva, mas do domínio do próprio conhecimento e esta é uma expressão de seu caráter histórico. Tais contradições surgem, pois, num momento determinado e, muitas vezes, não podem ser resolvidas no quadro de teorias já existentes, de forma que não podemos entendê-las como erro ou até mesmo defeitos. Por estarem ligadas ao desenvolvimento do conhecimento, é o seu reconhecimento que figurará como o caminho ao entendimento e, talvez, a uma possível e perseguida resolução dessas contradições.

Entendemos que um novo conhecimento não se desenvolve em separação absoluta do velho, mas com base nele (não é *ex nihilo*). O novo conhecimento supera dialeticamente o velho, constituindo um exemplo de negação da negação e revelando a unidade dialética entre continuidade e descontinuidade no processo de construção do conhecimento. E é um processo, é um movimento inesgotável. Como diz Lênine (1989, p.178), apresentando o processo de conhecimento como um processo dialético:

O conhecimento é a eterna, infundável aproximação do pensar ao objecto. O *reflexo* da Natureza no pensar do homem deve ser compreendido não «de modo morto», não «abstractamente », *não sem movimento, não sem contradições*, mas de num *processo* eterno de movimento, de surgimento de contradições e de solução delas.

Assim, na Matemática, o sentido da Complementaridade engloba a própria noção de contradição que nunca é resolvida, mas, de outro modo, é a fonte geradora e operacionalizadora do desenvolvimento e processo cognitivo. O fenômeno de Complementaridade, para Otte, é dialético neste sentido, como é dialético o próprio processo do conhecimento.

Também a abordagem complementarista é induzida da impossibilidade de definir a realidade Matemática independentemente da própria atividade semiótica e centra-se, nesse ponto, o caráter de complexidade relacionado à relação entre a

Linguagem e a Matemática – que buscamos ressaltar em De Broglie. Decorre daí, em particular, que palavras ou sinais, por um lado e os objetos e metas, por outro lado, não são tão distintos e separados como se poderia supor.

O Discurso parece o conectivo essencial entre sujeito e objeto. Para fazer algo objeto de investigação, alguém tem de formar um conceito relacionado a ele. A essência de uma coisa não é senão a essência de uma certa representação de que algo é e é a partir de agora que deve ser aproveitada dentro da lógica do seu desenvolvimento racional e, assim, as possibilidades abrem-se.(OTTE, 2013)<sup>37</sup>.

A Linguagem que utilizamos, nesse sentido, resulta como produto tanto de aspectos relativos do objeto a que se dirige, quanto como produto da atividade/metabolismo envolvidas no processo. Na Matemática, nosso objeto adquire existência real a partir de sua representação e entendemos que a objetividade da relação entre objeto e representação repousa na e pela atividade. Segundo Otte (2014), a “matemática é essencialmente uma atividade que opera com símbolos e diagramas, a semiótica se torna um fundamental instrumento de pesquisa para entender a cognição e a epistemologia matemáticas”.

Quando olhamos detalhadamente a Matemática, observamos que as escolhas que fazemos no desenvolvimento de uma representação simbólica ou estrutural são direcionadas pela atividade envolvida. Desse modo, percebemos que uma diferenciação entre onde começa e onde termina objeto e representação é uma tarefa extremamente difícil e relativa. Nem por isso assumimos uma posição relativista em relação ao Conhecimento Matemático, tampouco negamos a existência de um modelo objetivo do qual sejam reflexos nossos conhecimentos. Segundo Otte, é o próprio fenômeno da Complementaridade que nos conduzirá a entender melhor também sobre esse aspecto.

Para nós, na Matemática, a Complementaridade simboliza um fenômeno emergente na eminente relação dinâmica entre as características do objeto, a atividade e sua representação e que, sobretudo, não exclui aspectos particulares nem a uma e nem a outra e entre ambas, mas as coloca de forma potencializada (a partir do inter-relacionamento) na constituição da representação, na ‘lógica oculta’ que tenta ser captada pelo pensamento relacional-estrutural diagramático da Matemática.

---

<sup>37</sup> Manuscrito *Semiotics is All* de 2013 ainda não publicado.

O professor Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros (2014)<sup>38</sup>, membro da equipe de Pesquisadores e amigo do Professor Otte, entende que o sentido de uma Complementaridade de características de acordo com pensamento ‘Otteano’ acontecer quando são satisfeitas três condições:

- 1) essas características são excludentes, às vezes, até opostas, embora elas interajam a todo momento,
- 2) existe a possibilidade de aplicação de cada uma delas separadamente em qualquer instante para uma caracterização naquele momento daquilo que se quer caracterizar. Entretanto
- 3) existe a necessidade de utilização dessas características conjuntamente para uma caracterização da totalidade dos casos que devem ser considerados.

Barros nesta reflexão faz uma adaptação da definição original dada por Niels Bohr sobre Complementaridade em Plotnitsky (2012, p.6):

Complementarity is defined by:

- (a) A mutual exclusivity of certain phenomena, entities, or conceptions; and yet
- (b) The possibility of applying each one of them separately at any given point; and
- (c) The necessity of using all of them at different moments for a comprehensive account of the totality of phenomena that we must consider.

Entendemos que os aspectos e característica em interação possam ser contraditórios. Foi por assumir a contradição, esta relação dialética que envolve a relação entre teoria e prática, método e objeto e entre representação e objeto na atividade Matemática; por compreender o processo de nosso desenvolvimento cognitivo como parte de um processo semiótico e, conseqüentemente, assumindo uma perspectiva genética ou evolutiva em relação a esse processo, que o professor e pesquisador Michael F. Otte tem estudado, pesquisado e está buscando desenvolver sua teoria numa perspectiva de Complementaridade à interpretação do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos – o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

---

<sup>38</sup> Comentário do Professor Dr. Luiz Gonzaga Xavier enviado por e-mail em 29 de novembro de 2014 após participação em Banca de defesa desta tese em 28 de novembro de 2014.



Assim é que Otte toma a Complementaridade com base, por exemplo, a dualidade entre ‘intensão e extensão’<sup>39</sup> de símbolos e as entende não como dualidade no sentido polarizante. Se pensarmos, estaticamente, há dualidade, de forma que é colocada a extensão de um lado e a intensão de outro. Para ele, a Complementaridade trata de uma interação complexa e dinâmica entre esses aspectos no processo da atividade cognitiva e nunca chega a uma síntese final e absoluta. De modo que, para Otte, não existe uma ligação estática e direta entre signos e a realidade. Nosso entendimento parte do ponto central (destacado em Kant) de que Teoria e realidade são tipos lógicos diferentes. E esse ‘abismo’ que parece existir só pode ser superado de um ponto de vista genético ou evolucionista.

Ainda, cabe destacar que Otte entende por objeto qualquer problema ou tipo de resistência da realidade ‘contra’ a atividade do sujeito e por método (meios) algo que seja apropriado para alcançar a mediação entre o sujeito e o objeto na cognição e, mesmo entre ambos, observamos a existência de uma dinâmica inter-relacional e/ou interativa.

De forma que, no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’, são as condições da atividade, ao invés dos objetos como tais e em si mesmos, que sugerem a

---

<sup>39</sup> “A *intensão* de um termo é definida por Lewis como “a conjunção de todos os outros termos cada um dos quais deve ser aplicável àquilo a que o termo é corretamente aplicável”. Desse modo a intensão (ou a conotação) é delimitada por toda definição correta do termo e representa a intenção de quem o emprega, por isso o significado primeiro de “significado”. A *extensão* (ou a denotação) de um termo é a classe das coisas reais às quais o termo se aplica (Lewis, 1950; *Analysis of Knowledge and Valuation*, 1950, pág. 39-41). As mesmas determinações são dadas por Quine: a intensão é o significado, a extensão é a classe das entidades às quais o termo pode ser atribuído com verdade.

Otte mostra que o princípio da complementaridade está relacionado a várias noções matemáticas. Ele aparece no estudo dos aspectos *intensional* e *extensional* dos conceitos matemáticos. Esses aspectos não devem ser vistos apenas como uma dualidade, mas, sim, como aspectos que se reajustam mutuamente e se integram para capturar os aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico desses conceitos.

A noção de intensão de termos matemáticos explicita as relações entre classes de objetos matemáticos, assim como suas relações estruturais. No entanto, tal noção não esgota a conceituação do objeto matemático em si, como por exemplo, sistemas axiomáticos no sentido de Peano e Hilbert ou uma abordagem axiomática dos números reais (corpo ordenado completo). A compreensão comum de uma abordagem axiomática expressa que a aritmética não trata de coisas que existem concretamente, mas sim de relações gerais ou objetos ideais. A noção de extensão de termos matemáticos concerne à interpretação dos objetos matemáticos, assim como às aplicações, caracterizando modelos da teoria.

Uma abordagem complementarista torna-se relevante em razão da impossibilidade de se definir a realidade matemática independentemente de suas possíveis representações e da própria atividade cognitiva. Esses comentários fundamentam a ideia de que a epistemologia e a cognição devem ser consideradas como as duas faces de uma mesma moeda nas pesquisas sobre os fundamentos da Educação Matemática. Otte ainda cita que conceitos complementares são conceitos opostos que se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno”. [Comentário enviado por e-mail em 29 de novembro de 2014 pelo Professor Luiz Gonzaga Xavier de Barros sobre a compreensão dos conceitos *intensão e extensão* de acordo com o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ após participação na Banca de Defesa desta tese em 28 de novembro de 2014]

objetividade da referência. Mente e mundo são mediados ou ligados pelo sistema de atividades (incluindo os seus meios e objetivos ), o que por si já justifica uma base interpretativa semiótica.

Otte (2014, s.p.)<sup>40</sup> encontrou, como já antecipamos, a primeira expressão filosófica da ideia de Complementaridade na epistemologia de Kant, especificamente quando da sua afirmação de que todo conhecimento humano viria de duas fontes fundamentais da mente; “ a primeira é a capacidade de receber representações... a segunda é o poder de conhecer um objeto por meio dessas representações [...]”. Pela primeira um objeto nos é dado e pela segunda ele é pensado em relação a dada representação. De forma que, para Kant são intuições e conceitos que constituem os elementos de todo nosso conhecimento.

A filosofia de Kant é, como sabemos, o resultado de uma ruminação completa e destilação de realizações científicas de Newton (ver, por exemplo: Piaget 1965; Calinger 1979; Hahn, 1988). Kant quis unir a necessidade e a objetividade do conhecimento e tomou ciência Newton como o ponto de partida uma análise epistemológica. Por exemplo, as observações de Newton sobre a origem da precisão objetiva da filosofia natural matemática (ver prefácio da primeira edição de seu livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*), levou Kant a entender que a fonte de conhecimento encontra-se na atividade construtiva do sujeito, o que implica, nomeadamente, que esta atividade é objetivamente limitada. Constrangida, não por aquilo que pensamos, ou acreditamos, mas pelas estruturas do espaço e do tempo, as leis que regem, vamos assim dizer, por exemplo, as possibilidades de um engenheiro de construções simbólicas. Newton tinha escrito em seu prefácio: "Os antigos consideram mecânica em um duplo aspecto, como racional, que procede de forma precisa através da demonstração e prática para mecânica prática as quais todas as artes manuais pertencem, a partir do qual a mecânica teve o seu nome. Mas como artífices não funcionam com precisão perfeita, ela vem mostrar porque a mecânica que é assim distinguida da geometria que o que é perfeitamente preciso é chamado geométrica, o que é menos, é chamado mecânica. No entanto, os erros não estão na arte, mas em artífices ". Agora, o artífice mais perfeito é Deus, e em nossas experiências de pensamento nós podemos imaginar, ou imitar sua perfeição, agindo sobre diagramas algébricos ou geométricos (*Crítica da Razão Pura*, 1787, p.74, *apud* OTTE, 2014, s.p)<sup>41</sup>.

Segundo Otte, tal esquema espelhado pelas construções simbólicas é estabelecido pela complementaridade de ícones e índices. E, apesar da iconicidade representar o caráter dominante de diagramas matemáticos, é a indexicalidade, o que, em particular, faz com que a abordagem semiótica seja inevitável, porque mostra que o

<sup>40</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014 [nossa tradução].

<sup>41</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014 [nossa tradução].

raciocínio matemático é contextual como todos os outros raciocínios. E, os contextos relevantes são contextos semióticos. Se concebermos a Complementaridade em termos de dupla noções, por exemplo, de extensão e intensão de termos matemáticos, a abordagem complementarista é induzida à impossibilidade de definir a realidade Matemática, independentemente da própria atividade semiótica. Decorre daí, em particular, que palavras ou sinais, por um lado e os objetos e metas, por outro lado, não são tão distintos e separados como se poderia supor.

Entendemos que, na Matemática, nosso objeto adquire existência real a partir de sua representação e a objetividade da relação entre objeto e representação repousa na e pela atividade. Dessa maneira, as escolhas que fazemos no desenvolvimento de uma representação simbólica ou estrutural são direcionadas pela atividade envolvida. Assim, reafirmamos que a diferenciação, entre onde começa e onde termina objeto e representação, é extremamente relativa.

Desse modo, não compactuamos com uma interpretação no sentido de exclusão ou de dicotomia absoluta de aspectos duais. E, diferentemente de Bohr, que irá utilizar o sentido da Complementaridade, tentando resolver tais contradições, já que em nosso entendimento sobre o fenômeno da Complementaridade na Matemática, não há que se buscar por uma resolução significativa e final para tal contradição, pois ela sempre existirá.

A posição do pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ amplia e avança nosso entendimento sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático, principalmente, ao agregar uma leitura no sentido da Semiótica ao desenvolvimento cognitivo.

Para Otte (2014)<sup>42</sup>, é a Semiótica a base explicativa sobre fundamentos e sobre desenvolvimento do conhecimento Matemático. “Sinais ou representações são o que tornam a realidade inteligível. [...] Portanto, o problema do conhecimento novo é para ser visto na questão de como particular e geral interagem, como objetos e sinais estão ligados. Esta questão só pode ser respondida a partir de um ponto de vista genético, explicando como surgem as leis ou representações e que significados envolvem (OTTE, 2014)<sup>43</sup>”.

Assim, a Semiótica nos fornece a base explicativa sobre a relação entre os aspectos duais, como o de extensão e de intensão. Otte aportará a sua reflexão semiótica

---

<sup>42</sup> Manuscrito orientativo não publicado, datado de 29/ abril/ 2014.

<sup>43</sup> Manuscrito orientativo não publicado, datado de 29 /abril /2014.

no pensamento de Charles S. Peirce, que especialmente pela sua noção do papel dos índices é considerado como uma nova e fecunda abordagem. De acordo com Seboek (*apud* OTTE, 2014, s.p.)<sup>44</sup> Peirce viu “como ninguém antes dele tinha visto que essa indicação (apontamento, ostensão, *dêixis*) é um modo de significação tão indispensável quanto é irreduzível”, especialmente à Matemática. Entendemos que as coisas não estão em nossa mente, só as representações estão. O objeto da Matemática, nesta perspectiva, é a representação, as generalizações.

Mas, segundo Otte, não é somente na Matemática (perspectiva fenomenológica do pensamento Otteano) que se aplica a Semiótica, mas em qualquer área de conhecimento. Para ele, todo o conhecimento, qualquer conhecimento é baseado na representação de alguma coisa para alguém. A Matemática, Otte<sup>45</sup> concorda em absoluto com Peirce, em especial se caracteriza pelo raciocínio diagramático (relacional-estrutural).

De acordo com Peirce, nosso pensamento é determinado e formulado através de três ingredientes básicos: ícones, índices e símbolos. Ele ainda aponta as três categorias básicas eminentes e determinantes do/no processo de nossa representação: primeiridade, secundidade e terceridade. Otte ressalta que essas categorias e seus elementos podem ser destacados não somente na Matemática e se aplicam, inclusive, à fenomenologia e que, ainda, podemos procurar em qualquer área que sempre encontraremos concretizações dessas relações. Desta maneira, conseguimos inferir que o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’ assume eminentemente uma dimensão interdisciplinar.

Admitida uma perspectiva semiótica, que nosso conhecimento advenha da relação basilar entre objetos e símbolos (representações) e todo pensamento esteja sempre vinculado a uma representação, observamos que os objetos, nesse sentido, apresentam uma existência bem determinada, mas não têm sentido enquanto os signos, conseqüentemente, os símbolos têm sentido, porém não têm uma existência própria. Mais especificamente, quando analisamos o Conhecimento Matemático, o problema se amplia, pois os próprios objetos da Matemática não têm existência real no sentido de nossas percepções sensoriais. São objetos de outro tipo, não têm existência objetiva,

---

<sup>44</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014[nossa tradução].

<sup>45</sup> Fala de Otte em momento de Orientação, em 24 de abril de 2014.

todavia, sobretudo, possuem objetividade. Eles passam a ter existência na e pela sua representação, diante de nossa atividade determinada por metas e objetivos.

Como entender essa complexa relação? Otte (2012), em seus estudos, tem observado e defendido que, para a concepção nominalista e construtivista da Matemática, os objetos da matemática são construções do sujeito ou criações mentais, e elas não têm conseguido responder sobre a questão da objetividade e fertilidade da Matemática, bem como não explicam como os matemáticos podem chegar a novos conhecimentos e nem sobre as ideias que direcionam e guiam essas construções.

O sentido de Complementaridade (OTTE, 2012) conduz-nos à compreensão de que ambos (objetos e símbolos) têm fundamental importância para nosso pensamento e no modo como adquirimos conhecimento; mas, principalmente, entendemos que não há relação de dependência fixa e determinada, ou mesmo independência polarizante entre estes dois tipos de elementos: objeto e símbolo, para e na constituição do pensamento e do nosso pensamento matemático em especial. Qualquer distinção que se faça é sempre relativa entre os aspectos de um e de outro.

Esta pesquisa, acima de tudo, intenciona destacar e evidenciar mudanças que ocorrem na relação entre a Linguagem e a Matemática, através de uma interpretação de oscilações no significado do termo *axioma* para a Matemática, cujos reflexos se materializam no modo de produção/formalização do próprio Conhecimento Matemático. Mas, também pretende compreender sobre como se estabelece essa relação entre símbolo e objeto na constituição do Conhecimento Matemático. O próprio Bohr, em seus estudos, aponta para a necessidade de empreendimento interpretativo no sentido da Complementaridade em processos linguísticos, afirmando que ele se apresentaria, por exemplo, no aspecto relativo à “relação mutuamente exclusiva que existiria sempre entre o uso prático de qualquer palavra e a tentativa de uma sua definição estrita” (BOHR, 1949, p.52).

Entendemos que tais oscilações na significação de termos matemáticos estão imbricadas nos modos de como, em determinados momentos, é encarada, compreendida e destacada essa relação entre objeto e símbolo no desenvolvimento do pensamento matemático. As mudanças no significado de determinados termos e mesmo no modo de apresentação do pensamento conceitual, ao tempo em que (em nossa tese) refletem uma mudança na relação entre a Linguagem e a Matemática, podem deixar mais evidente o próprio processo de desenvolvimento do pensamento matemático, ‘na’ e ‘pela’

compreensão dessa relação entre símbolo e objeto no desenvolvimento de nossa cognição.

Entretanto chegar a uma interpretação de cunho semiótico ao desenvolvimento do nosso conhecimento foi, historicamente, um caminho longo. Anteriormente ao século XIX, todos tentavam lidar com uma separação entre símbolos e objetos, e, a Linguagem era sempre tomada como um obstáculo ao conhecimento verdadeiro. De acordo com Otte (2012), tal separação foi o que resultou num afastamento entre Arte, Filosofia e Ciência e finalmente um dogma da Filosofia analítica, que diz: “há uma desunião fundamental entre as verdades que são *analíticas*, ou seja, baseadas em significados independentes dos fatos, e verdades que são *sintéticas*, ou baseados em fatos” (Quiné, 1979, p. 27).

Sobre o percurso da inserção da Linguagem dentro de uma nova perspectiva interpretativa epistemológica Otte (2014, s.p.)<sup>46</sup> nos destaca que a história da Matemática de acordo com Boutroux (SANTANA, 2011) poderia ser compreendida em três períodos:

1. Platão / Euclides.
2. Descartes / Newton.
3. Bolzano / Cantor e Hilbert.

Boutroux vê a revolução essencial ou quebra a ocorrer entre 2 e 3, enquanto a classificação 1. e 2. sendo ambas dedicadas a um ideal sintético de matemática, o qual é caracterizado por uma harmonia pré-estabelecida: “... *Entre le mas et la méthode de la ciência mathématique, Entre les objets Opaco poursuit ciência cette et les Procédés qui lui permettent d'atteindre ces objets*” (Boutroux, 1920: 193 p.). Mas, como já foi dito, temos uma mudança do tipo de racionalidade dominante que ocorre durante a Revolução Científica dos séculos 16th/17th.

A Cosmologia geométrica de Platão tinha sido concebido em um espírito ousado e quase romântico, não há dúvida sobre isso. E o que dizer de Galileu e sua afirmação de que o Grande Livro da Natureza é escrito em termos de figuras geométricas? Isso soa definitivamente como o platonismo, não!

Koyré escreve:

“O nome de Galileu Galilei está indissolavelmente ligado com a revolução científica do século XVI, uma das mais profunda, se não a mais profunda revolução do pensamento humano, desde a invenção do Cosmos pelo pensamento grego: a revolução a qual implica uma “mutação” intelectual radical, da qual a ciência física moderna é ao mesmo tempo a expressão e o fruto. Esta revolução é, por vezes caracterizada, e ao mesmo tempo explicada, como uma espécie de convulsão espiritual, uma transformação completa de toda a atitude fundamental do espírito humano; a vida ativa, tomando o lugar da vida contemplativa, que até então tinha sido considerado a forma mais elevada. O homem moderno busca a dominação da natureza, enquanto o medieval ou homem antigo tentou acima de tudo, sua contemplação”. (Alexandre Koyré, Galileu e Platão, Revista de História das Ideias, vol. 4, No. 4 (outubro de 1943), pp 400-428).

<sup>46</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014[nossa tradução].

Koyré não acha que essa imagem é totalmente correta. Ele diz: "Galileu não aprendeu seu negócio a partir de pessoas que trabalhavam nos arsenais e estaleiros de Veneza. Muito pelo contrário: ele ensinou-lhes o dele". E é ainda verdade que a experimentação foi uma parte essencial da "ciência moderna". Koyré novamente: "Não é a experiência", mas o "experimento", que desempenhou - mas só mais tarde - um grande papel positivo. A experimentação é a interrogação metódica da natureza, um interrogatório, o que pressupõe e implica uma linguagem na qual formulamos as perguntas, e um dicionário que nos permite ler e interpretar as respostas. Para Galileu, como bem sabemos, foi em curvas e círculos e triângulos, em matemática ou mesmo de forma mais precisa, em linguagem geométrica, - não na linguagem do senso comum ou de fato da dos símbolos puro - que nós devemos falar com a Natureza e receber suas respostas.

Observamos que, por exemplo, a Filosofia para gregos era analítica e a Matemática era sintética, e, até no pensamento de Kant comumente sempre foi considerado deste modo. Somente a partir do pensamento kantiano é que a matemática passa a ser considerada analítica. Um fato histórico que entendemos fundamental no sentido dessa mudança foi a Invenção da Imprensa (século XV), pois o contexto comunicativo começa a ganhar destaque em detrimento do contexto da descoberta. Muda o campo semântico do conhecimento.

Este estudo irá realçar que isso resultou de um movimento direcionado ao renascimento do pensamento platônico, que especialmente trouxe a reflexão filosófica ao pensamento matemático, promovendo a inserção da Linguagem e a possibilidade de uma abordagem interpretativa semiótica epistemológica. Pois, a experimentação passa a constituir-se um tipo de interrogatório, cujo os meios e atividades envolve processos simbólicos – a nova dialética – somava-se a isto o pensamento kantiano de modo que observamos à um novo encaminhamento interpretativo epistemológico. E, ainda Otte (2014)<sup>47</sup> complementa que

No entanto, obviamente, a escolha da língua, a decisão de empregá-la, não podia ser determinada pela experiência na qual sua utilização era tornada possível. Tinha que vir de outras fontes". Estas palavras de Koyré poderiam ser certamente mais adequadamente interpretada, dizendo que a oposição entre a especulação matemática e ordem cósmica, que havia dominado a filosofia de Platão, foi transformada e mudada, projetando-a para uma nova realidade, ou seja, a realidade humana, entendida como objetivo da atividade e prática. A ênfase de Kant sobre a importância da epistemologia e sua afirmação de que todo o conhecimento "brota de duas fontes principais da mente" humana é uma expressão dessas mudanças.

---

<sup>47</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014[nossa tradução].

Otte destaca que no final do século XVII e início do século XVIII inicia-se uma grande mudança, as aporias do pensamento antigo, passam gradualmente a serem substituídas por complementaridades. De modo que, fatos e teorias começam a figurar como elementos complementares do sistema da atividade Humana.

Um exemplo, que podemos tomar neste sentido, à compreensão dessa mudança que se processa ao pensamento de Complementaridade é o conceito de função, o qual foi decisivo tanto ao desenvolvimento do novo cálculo, como da mecânica clássica. Segundo Otte (2014, s.p.)<sup>48</sup>:

Enquanto Galileu foi o principal responsável pelo dismantelamento platônico – a Ptolomaica cosmologia, a criação da visão de mundo mecanicista-corporcular foi realização de um número de investigadores, devido sua culminação final para Newton. Neste sentido, Moscovici (Moscovici, S. (1968). *Essai sur l'histoire humaine de la nature*. Paris, Flammarion) está certo ao afirmar que a revolução científica consistiu essencialmente no aumento da mecânica ao nível da filosofia. A Abordagem de Newton para cálculo repousa firmemente sobre a concepção de contínuo como sendo gerado pelo movimento. E o movimento é matematicamente modelado em termos do conceito da função matemática. Para entender uma função matemática significa compreender a complementaridade da fórmula e da relação, de algoritmo e lei natural.

Na matemática dos séculos 17th/18th, funções descontínuas não podem ser representadas, porque a função era uma lei analítica. Uma curva geométrica, por outro lado, foi chamada contínua se poderia ser representado por um grupo (n) função (analítico) (Euler 1748, vol. II). Mas esta caracterização destes esforços (Grattan-Guinness, 1970), e revisto toda a abordagem com base no princípio da continuidade, transformou a matemática em teoria extensional. Uma função no sentido de Cauchy ou Dirichlet pode ser visto como uma classe de equivalência de expressões ou fórmulas analíticas, onde a relação de equivalência é baseada no axioma da extensionalidade. Este interruptor de uma visão intensional para uma visão extensional tornou possível desde Cauchy destacar conjuntos de funções por certas propriedades, e em geral para raciocinar sobre elas, sem representá-las explicitamente. Por exemplo, em vez de conferir uma função linear directamente por  $f(x) = ax$ , Cauchy prova que uma função contínua que tem a propriedade  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  pode ser representada como acima (Cauchy 1821, 99/100).

Somente mais especificamente no final do Século XVIII promove-se definitivamente uma transição do pensar em objetos para o pensamento relacional. Assim, é adotada uma nova visão de mundo, que fornece objetos e as relações entre os objetos como um estatuto ontológico igual. Estabelece-se uma mudança radical no tipo de raciocínio conceitual que de acordo com Otte (2014)<sup>49</sup> na visão de Boutroux, fica

<sup>48</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014 [nossa tradução].

<sup>49</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014 [nossa tradução].



característico naquele terceiro período da evolução matemática, que entendemos ser o período de apropriação do pensamento sobre Complementaridade (iniciado por volta de 1800).

No início do século 19, emerge a matemática pura, com base na análise da prova e da criação de conceitos cada vez mais abstratos, e a harmonia entre os meios e objetos de atividade matemática começa a entrar em colapso. A Matemática pura é a filha de um crescimento explosivo da atividade matemática que, pode ser caracterizada brevemente, afirmando que foram detectados um grande número de conexões entre os resultados e os problemas aparentemente muito diferentes, pela primeira vez na história da matemática (OTTE, 2014, s.p.)<sup>50</sup>.

Observamos que uma mudança nessa perspectiva pode ser destacada no pensamento de Frege (1848- 1925). Esta se contrapõe à lógica Aristotélica que, de uma forma ou de outra, dominava a filosofia ocidental desde o tempo da Antiguidade e ela lançou as fundações para a moderna Filosofia da Linguagem. No entanto, Frege defendia uma profunda continuidade entre a Lógica e a Matemática. E foi seu pensamento que forneceu as bases para a Filosofia Analítica Moderna.

Sobretudo, começa a emergir uma Filosofia Analítica que se destaca devido à substituição da investigação epistemológica, pela concentração na Semiótica e na sintaxe das Linguagens, promovendo uma ‘virada à linguística’ (Otte, 2012). E podemos verificar que, na Linguagem, interagem-se sentido e referência, ou seja, ‘o como’ e ‘o quê’, o que conduz à necessidade e ao grande desafio de distinguir entre esses dois lados da própria Linguagem. Assim, essa mesma direção da reflexão começa a ser impressa à exploração dos princípios e fundamentos do Conhecimento Matemático.

Frege publica um artigo em 1892 sobre ‘significado e referência’ (nós utilizamos o termo ‘sentido’ para significado), no qual analisa, sucintamente, como se processa uma Complementaridade entre objetos e símbolos, procedendo a uma análise sobre a identidade na expressão  $A=B$ , dizendo que:

A igualdade desafia a reflexão, dando origem a questões que não são fáceis de responder. É ela uma relação? Uma relação entre objetos? Ou entre nomes ou representações de objetos? Em minha *Begriffsschrift* assumi a

---

<sup>50</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014 [nossa tradução].

última alternativa. E as razões que parecem apoiar esta alternativa são as seguintes:  $a = a$  e  $a = b$  são, evidentemente, sentenças de valor cognitivo diferente, pois  $a = a$  sustenta-se *a priori* e, segundo Kant, deve ser denominada de analítica, enquanto que sentenças da forma  $a = b$  contêm, frequentemente, extensões muito valiosas de nosso conhecimento, e nem sempre podem ser estabelecidas *a priori*. A descoberta de que o sol nascente não é novo cada manhã, mas é sempre o mesmo, foi uma das descobertas astronômicas mais ricas em conseqüências. Mesmo atualmente, o reconhecimento de um pequeno planeta ou de um cometa nem sempre é evidente por si. Assim, se quiséssemos considerar a igualdade como uma relação entre os objetos a que os nomes "*a*" e "*b*" se referem, então  $a = b$  não pareceria diferir de  $a = a$ , caso  $a = b$  fosse verdadeira. Desse modo, expressaríamos a relação de uma coisa consigo mesma, relação que toda coisa tem consigo mesma, mas que nunca se dá entre duas coisas distintas. Mas, por outro lado, parece que por  $a = b$  quer-se dizer que os signos ou os nomes "*a*" e "*b*" referem-se à mesma coisa; e neste caso, a discussão versaria sobre esses sinais: uma relação entre eles seria asserida. Mas tal relação entre os nomes ou sinais só se manteria na medida em que eles denominassem ou designassem alguma coisa. A relação surgiria da conexão de cada um dos dois sinais com a mesma coisa designada. Essa conexão, porém, é arbitrária. Ninguém pode ser impedido de empregar qualquer objeto ou evento arbitrariamente produzido como um sinal para qualquer coisa. Com isto, a sentença  $a = b$  não mais se referiria propriamente à coisa, mas apenas à maneira pela qual a designamos: não expressaríamos por seu intermédio, propriamente, nenhum conhecimento. [...] Se, em geral, percebemos uma diferença no valor cognitivo de " $a = a$ " e " $a = b$ ", isto se explica pelo fato de que, para determinar o valor cognitivo de uma sentença, é tão relevante o sentido da sentença, isto é, o pensamento por ela expresso, quanto sua referência, a saber, seu valor de verdade. Se  $a = b$ , então a referência de "*b*" é o mesmo que a de "*a*", e, portanto o valor de verdade de " $a = b$ " é o mesmo que o de " $a = a$ ". Apesar disso, o sentido de "*b*" pode diferir do sentido de "*a*" e, portanto, o pensamento expresso por " $a = b$ " pode diferir do pensamento expresso por " $a = a$ ". Neste caso, as duas sentenças não têm o mesmo valor cognitivo. Se, como anteriormente, entendemos por "juízo" o movimento de um pensamento para o seu valor de verdade, então podemos dizer também que os juízos são distintos (G. Frege, *Lógica e Filosofia da Linguagem*, EDUSP S.P, 2009, p.129-158).

Observamos, no entanto, que o pensamento de Frege dá, aos objetos e à lógica dos objetos, uma predominância absoluta, reduzindo as intenções ou sentido dos símbolos a um papel secundário ou de dependência para com os objetos. Se, de um lado, Frege considera a Linguagem essencial para análise do pensamento, de outro, ainda a toma como obstáculo que devesse ser superado para se chegar a relações lógicas objetivas. Nesse sentido, ele destaca haver uma imperfeição que se relaciona à Linguagem, que não é isenta nem mesmo da Linguagem simbólica da Análise Matemática. Ele nos diz:

Nesta [Análise matemática] podemos encontrar combinações de símbolos que parecem referir-se a algo, mas que não têm, pelo menos até o presente, qualquer referência, por exemplo as séries infinitas divergentes. Isto pode ser sanado, digamos, por meio da convenção de que as séries infinitas divergentes devam referir-se ao número 0. Numa linguagem logicamente

perfeita (uma *conceitografia*), deve-se exigir que toda expressão construída como um nome próprio de maneira gramaticalmente correta a partir de sinais previamente introduzidos designe efetivamente um objeto (FREGE, 1892, p.147).

Frege, como explicaria Bateson (1981, p.329), vive em um mundo *newtoniano*, no qual se “atribui realidade somente aos objetos, e alcança sua simplicidade pela exclusão de qualquer contexto ou contexto de contexto. De fato, para a exclusão de quaisquer relações meta-perspectivas”.

Desta maneira, essa perspectiva nos conduz a uma teoria descritiva de referência, em cujo extremo, segundo Otte (2012), aponta como a uma ficção *leibniziana* de um conceito completo de qualquer substância individual.

Acordamos com Otte (2014) “em que a teoria descritiva de referência é o maior erro que a filosofia da ciência cometeu”. Ela resultou numa crença infundada de que a Ciência pode produzir verdades absolutas sobre o mundo, que ela não consegue se relacionar com o discurso cultural e que, de outro modo, não consegue distinguir claramente conceitos e objetos.

Diferentemente de Frege, assumimos uma perspectiva genética e evolutiva, por entendermos ser importante tomar conta do fato de que nosso conhecimento nunca é completo e está sempre em constante movimento. “E, do ponto de vista genético cognitivo a maneira de se representar qualquer coisa e o sentido dessa representação é muito importante, pois são eles que orientam e dirigem toda a atividade cognitiva” (OTTE, 2012). Para nós, os *axiomas*, como se apresentam na atualidade, são proposições relacionais que determinam conceitos e estes, por sua vez, refletem uma relação entre nomes ou símbolos (sinais de objetos), devendo ser entendidos como em processos dinâmicos que se baseiam na interação entre seus aspectos intencionais (sentido) e extensionais (referência).

Na relação que envolve intensão e extensão, sentido e referência, uma não pode ser conectada à outra de forma tão rígida, como defendia Frege. Isso porque as nossas escolhas de como representar as coisas não dependem apenas das coisas, mas também de nossos objetivos e metas e, de outro modo, qualquer representação não pode ser escolhida arbitrariamente.

Para Frege, não há uma distinção entre Lógica e Matemática. Sobretudo, observamos que ele considerava nomes não como índices, mas sim como descrições. Em nossa concepção, traçamos uma distinção entre nomes e descrições e, desta forma,

visualizamos que a Lógica tem maior aproximação com a Linguagem, sendo mais crítica dos usos linguísticos do que a Matemática. Já na Matemática, os índices têm um papel muito maior do que na língua e na Lógica, o que direciona o nosso pensamento ao fato de que a Matemática não deve ser reduzida nem a uma Linguagem nem à Lógica.

Além disso, Frege não acreditava que podemos obter conhecimento somente nomeando coisas novas. Diferentemente dele, numa perspectiva semiótica atribuída ao pensamento matemático, destacamos que, mesmo através de designações arbitrárias, podemos adquirir novos conhecimentos. Nesta perspectiva, um simples nome trata de um índice e implica uma afirmação de existência do objeto indicado e, na Matemática, esse objeto, normalmente, pertence a um modelo e não à realidade empírica; de forma que, nesta interpretação, temos assentado o sentido de hipóteses dos *axiomas*.

Assim, observamos que a Matemática, diferentemente da Lógica, não depende de uma metafísica ou pressuposições ontológicas. De acordo com Otte (2012, p. 6):

Como Georg Cantor disse: a essência da matemática pura é sua liberdade! Quanto à Lógica, Frege e Russell acreditavam que ela se refere a um determinado universo e não a modelos diferentes para se escolher. Russell afirma, por exemplo, que a Lógica “não deve admitir unicórnios mais do que a zoologia pode admiti-los, pois a Lógica diz respeito ao mundo real tão verdadeiramente quanto a Zoologia, embora com suas características mais abstratas e gerais” (RUSSELL, 2007, p. 202).

Foi nas mãos de Russell e Wittgenstein que a concepção Fregeana de Lógica e Matemática viria proporcionar uma nova metafísica e nova visão da natureza da argumentação filosófica. Russell aprimora a ideia de Frege ao apontar para uma distinção entre nomes e descrições.

Para Russell, “uma proposição que contém uma descrição não é idêntica ao que aquela proposição se torna quando o nome é substituído, até mesmo se o nome nomeia o mesmo objeto que a descrição descreve” (RUSSELL, 2006, p. 208). No seu entendimento, descrições, diferentemente de nomes, não incluem afirmações de existência.

Se o ‘x’ é um nome,  $x = x$  não é a mesma proposição que “o autor de Waverley é o autor de Waverley”, não importa que nome x possa ser. Assim do fato de que todas as proposições da forma “ $x = x$ ” são verdadeiras não podemos inferir que o “o autor de Waverley é o autor de Waverley”. De fato, proposições da forma “a tal coisa é a tal coisa” não são sempre verdadeiras; é necessário que a tal coisa *exista*. É falso que o atual rei da França seja o atual rei da França, ou que o quadrado redondo seja o quadrado redondo (RUSSELL, 2007, p. 210).

Quando nos deparamos com algo desconhecido, toda simbolização a ele atribuída será necessariamente arbitrária, mas como pode este fato gerar ou produzir conhecimento sobre este ‘algo’? O símbolo dessa ‘coisa qualquer’ transforma-se em um objeto da nossa atividade cognitiva, de modo que passamos para uma análise de sua relação com outros já conhecidos e desconhecidos. Os gregos chamavam essa atividade de ‘análise’ e sabemos que o poder ou a força dessa análise tem crescido enormemente com a invenção da álgebra simbólica, na época de Vieta e Descartes.

Observamos que a álgebra simbólica desde Vieta e Descartes aumentou as possibilidades tanto da análise quanto da síntese (OTTE, 2012). A análise comparece estabelecendo equações que representam relações entre objetos conhecidos e desconhecidos e a síntese tentando resolvê-las. Sobretudo, como a possibilidade de resolver as equações depende muito da habilidade ou perspicácia com a qual as equações foram estabelecidas, como também da maneira como as coisas foram representadas, sendo isso determinante e de muito valor, por esta razão as intensões são também de grande importância, existindo e tendo valor independentemente dos objetos e extensões (OTTE, 2012, p.).

Ao designarmos, por exemplo, um objeto desconhecido por ‘x’, seu significado repousará no uso e na atividade e não sobre sua referência. Temos evidenciado pela álgebra que a maneira de representação e a perspicácia escolhida determinam as possibilidades de se resolver um problema ou de se construir uma teoria de maneira estrutural.

De acordo com Arruda (2014, p.223)<sup>51</sup>, o surgimento do simbolismo algébrico (com Stevin, Descartes e Vieta) marca claramente a transição dos aspectos contemplativos para o aspecto operativo de nosso pensamento matemático. E tal mudança é direcionada, pois, no momento em que o homem se liberta do “ontologismo antigo, da exigência de que cada expressão (equação) deve ter não só o sentido, ou seja, formulado corretamente, mas que tenha também significado. Os gregos antigos não conseguiram se libertar desse ontologismo, pois não estavam preparados para aceitarem expressões sem significado, como, por exemplo:  $(x^2 + x^4)$ .”

Em nosso entendimento, a Matemática distingue-se da Lógica exatamente pelo fato de que ela tem, sim, seus objetos (que em nossa interpretação tratam das

---

<sup>51</sup> ARRUDA, E. J. *A Concepção de Jacob Klein sobre a Transição da Aritmética na época do Renascimento e suas Implicações para Educação Matemática*. Tese em fase de elaboração com previsão de defesa para Novembro de 2014.

representações), porém mais do que objetos a Matemática tem objetividade (perseguida pelas representações); então, não podemos assumir uma ligação tão rígida, como em Frege, entre a Matemática e a Lógica. Os objetos da Matemática são, no entanto, nada mais do que hipostatizações ou substancializações de atividades e os próprios pensamentos matemáticos.

Observemos que, como a Geometria não podia definir seus objetos, assistimos ao surgimento da abordagem axiomática, em especial, preocupada com os conceitos mais do que com os objetos. Tal perspectiva conduziu a uma concepção de conceitos matemáticos em termos completamente operacionais ou instrumentais. Um conceito deve ser definido, como Moritz Schlick disse, em relação à *axiomatização* da Geometria de Hilbert, pelo fato de que algumas conclusões podem ser tiradas sobre o assunto (Schlick, 1925,45). Com a abordagem axiomática, a Matemática parecia tornar-se intensional. Em sentido do raciocínio matemático, isso seria mais importante do que a referência.

No início do século 19, emerge a matemática pura, com base na análise da prova e da criação de conceitos cada vez mais abstratos, e a harmonia entre os meios e objetos de atividade matemática começa a entrar em colapso. A Matemática pura é a filha de um crescimento explosivo da atividade matemática que, pode ser caracterizada brevemente, afirmando que foram detectados um grande número de conexões entre os resultados e os problemas aparentemente muito diferentes, pela primeira vez na história da matemática. A descoberta da geometria analítica de Descartes já iniciou um processo que de fato tornou-se dominante a partir de apenas o início do século XIX (OTTE, 2014, s.p.)<sup>52</sup>.

Em muitos ramos de pesquisa, na atualidade, não temos uma teoria (ou sequer conhecemos sobre o objeto a que se deseja conhecer) e o que estamos procurando são relações ou estruturas estáveis ou constantes entre os dados e os resultados, e a formalização dessas relações assume papel de objeto. Tais processos que envolvem essa hipostatização ou substancialização, quando tradicionalmente codificados em termos de conjuntos - teóricos, têm de ser elaborados de modo a evitar paradoxos. Daí, o requisito de descrições por meio de sistemas de axiomas consistentes.

Uma teoria *axiomática* não é nada mais do que uma estrutura formal. O pensamento *axiomático* é pensamento sobre a forma e esta deve ser construída e idealizada. Entretanto, a Lógica faz-se presente e constitutiva do/no pensamento

---

<sup>52</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014[nossa tradução].

*axiomático* e na determinação de descrições, conceitos e na consistência do sistema de *axiomas*, o que, por vezes, dificulta identificar onde começa e termina o pensamento lógico e onde começa e termina o pensamento matemático, reforçando nossa tese sobre a importância de uma abordagem no sentido de Complementaridade do pensamento ‘Otteano’.

As teorias *axiomatizadas* modernas tornaram-se, por um lado, teorias intensionais, no sentido de que os *axiomas* são um conjunto de postulados que determinam as intensões dos termos teóricos, mas, por outro lado, constituem as extensões ou referentes. Qualquer teoria formal tem várias aplicações destinadas ou modelos não-isomorfos, e o que os *axiomas* descrevem, em termos de relações entre conceitos indefinidos, são classes de objetos em vez de objetos particulares próprios. A este respeito, os *axiomas* matemáticos lembram leis naturais. E como tais, eles têm que ser completados pela indicação do domínio dos objetos a que se aplicam. De forma que uma teoria matemática é, por conseguinte, concebida como um par, consistindo de uma estrutura formal e um conjunto de modelos ou aplicações pretendidas.

As condições que ocorrem nos *axiomas* de uma teoria podem ser consideradas, por um lado, como dando descrições, ‘atributivamente’, das suas referências a serem aplicadas àquelas e apenas aquelas entidades com as quais elas são verdadeiras. Por outro lado, os termos contidos nos *axiomas* ou discurso matemático, em geral, podem ser, também, utilizados ‘referencialmente’. Neste caso, de acordo com Otte (2013)<sup>53</sup>, nós não consideramos as expressões da teoria como se referindo a esses objetos que satisfazem uma dada denotação, mas como dizendo alguma coisa (podendo ser falso) sobre os objetos fixados, independentemente da descrição dada.

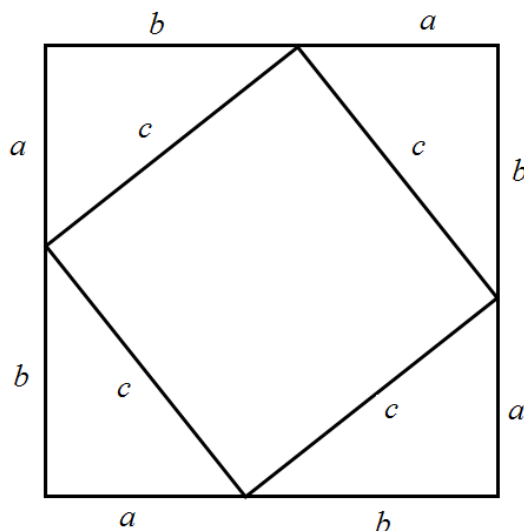
Otte (2013)<sup>54</sup> lembra-nos que Peano disse em 1923: “A matemática está situada entre a lógica (considerada como um cálculo algébrico) e as ciências experimentais” (citação em: Otte 1989, p.4). Na perspectiva *Otteana* sobre Complementaridade, nem a Matemática nem a Ciência moderna são analíticas e explicativas em sentido direto, no entanto não devem ser consideradas meros jogos formais. A Matemática não pode ser razoavelmente caracterizada independentemente de suas aplicações. Assim, defendemos a necessidade de uma abordagem interpretativa no sentido de Complementaridade.

---

<sup>53</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

<sup>54</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

A prova do teorema de Pitágoras, a seguir, que Otte (2014)<sup>55</sup> nos apresentou, oferece uma ilustração muito simples dessa relativa independência da estrutura e modelo e o sentido de Complementaridade que permeia essa relação:



$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (1)$$

$$= c^2 + 2ab \quad (2)$$

Na equação (1), a expressão do lado esquerdo é simplesmente calculada de acordo com as leis da aritmética enquanto que, em (2), uma comparação é feita. Já entre (1) e (2) podemos fornecer o resultado pretendido:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (3)$$

Assumimos aqui que a estrutura da álgebra poderia ser interpretada com respeito ao modelo de número e variáveis de substituição, isto é, ‘números desconhecidos’ seriam igualmente bons em termos de um cálculo com segmentos geométricos, isto é, variáveis objetuais. É a estrutura algébrica que faz com que a dualidade entre a Aritmética e a Geometria seja algo interessante e fértil. Tratando, neste sentido, ambas de representações complementares e só são complementares, pois se referem a uma, e a somente uma, estrutura ‘essencial’ (bem platônico, sabemos), tendo um sentido único, mas em cujo o significado se revela sempre em suas aplicações.

Na Aritmética, as variáveis são substitucionais (funcionam como espaços vazios) e, na Geometria, as variáveis são objetuais. O pensamento algébrico reflete a Complementaridade entre esses aspectos (que também podemos destacar entre “sentido” e “referência”).

---

<sup>55</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.



Na Álgebra, o sentido não trata como na nossa fala cotidiana de elementos do conceito (características); no contexto formal da Álgebra ou da Matemática formal, o sentido trata de algumas regras operatórias, de uma estrutura relacional. O único conteúdo das variáveis são as regras, por exemplo, a sintaxe da nossa Aritmética: as maneiras de calcularmos. As variáveis objetuais e substitucionais representam esse aspecto da Complementaridade que se revela na variável da Matemática, uma Complementaridade entre sentido e referência (significado).

O exemplo que mostramos é muito importante, pois mostra essa Complementaridade entre a Geometria e Aritmética pela e na Álgebra. É a variável, como objeto principal da Matemática, que espelha e reflete a Complementaridade, visto que ela pode significar duas coisas totalmente diferentes. Por isso, Otte afirma que, é assim que nesta direção que uma teoria *axiomática* deve ser tomada como um par formado por uma estrutura formal e um conjunto de aplicações destinadas ou modelos.

Geralmente, nós estamos acostumados em considerar as variáveis da Matemática como substitucionais, como calculações ou derivações lógicas somente, mas elas também podem funcionar como variáveis objetuais. Neste caso, as provas Matemáticas podem funcionar como experimentos mentais de modo que podemos, como no exemplo, usar modos geométricos para aumentar a capacidade de calcular. Usamos um tipo em outro, usamos o pensamento estrutural para criar fórmulas e usamos as fórmulas para gerar ainda mais fórmulas.

Segundo Otte (2013):

[...] então há uma grande diferença da geometria de figuras para geometria da estrutura do espaço... então foi isso que inspirou Hilbert para essa visão da axiomática!!! Ou seja, os axiomas são enunciados hipotéticos e não verdades profundas ou fundamentais! Ele só fala assim: se alguma coisa é verdade, uma outra coisa é verdade!

Um exemplo clássico, para Otte que demonstra claramente a Complementaridade entre o algoritmo e o relacional, ou entre o aspecto discreto e o contínuo podemos extrair do conceito de função derivado do paradoxo de Zenão de Aquile e a tartaruga. Um paradoxo que se tornou tão importante, pois mostra um tipo de racionalidade platônica clássica, dicotômica, e sobre suas dificuldades. Otte, assim explica:

Suponha que Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá uma centena de metros de vantagem. A fim de vencer a corrida Aquiles deve primeiro compensar sua deficiência inicial, executando uma centena de metros; mas quando ele fez isso e alcançou o ponto onde a tartaruga começou, o animal teve tempo para avançar dez jardas. Enquanto Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga toma um metro à frente; quando Aquiles foi executado este estaleiro, a tartaruga é um décimo de um quintal em frente; e assim por diante, sem fim. Aquiles nunca alcança a tartaruga, porque a tartaruga sempre tem uma vantagem, ainda que pequena. O problema de Zeno é um paradoxo do movimento. Na física, os movimentos são entendidos como funções contínuas de tempo em espaço tridimensional  $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , com  $t$  como um parâmetro de tempo: "Falamos de um movimento quando as (espaço) coordenadas do corpo muda ao longo do tempo", afirma um livro de física selecionados aleatoriamente. E a função contínua como um modelo de movimento realmente reflete muito claramente o carácter duplo deste conceito: Por um lado, ele contém aspectos discretos, tais como me permite calcular os valores individuais, quando está escrito como uma fórmula. Por outro lado, ressalta-se aspectos contínuos, por exemplo, na ilustração do gráfico funcional que dá uma ideia geral qualitativa da função (= movimento). **A função é, simultaneamente, qualitativa e quantitativa, o conhecimento (a ideia geral) e as ferramentas (a fórmula de cálculo) em um.** Zeno queria saber se o movimento percebido e "medido" em determinadas posições, em pontos, cujas distâncias convergiam para zero.

$$x_0 = 0,$$

$$x_{n+1} = 1/10x_n + 1 \text{ Stadion}$$

para  $n = 0, 1, \dots$

Ele disfarça este procedimento para "medir" o movimento na história acima: Quando Aquiles está em  $x_n$ , a tartaruga já está em  $x_{n+1} > x_n$ ! Aqui ele expõe sua audiência para a falácia de que coloca o ponto de vista discreto unilateral do movimento, em contraste com o conhecimento sobre o curso contínuo, juntamente com o conhecimento de que o mais lento deve finalmente ser ultrapassado pelo mais rápido, apesar de um grande começo tal. Se aceitarmos esta abordagem exclusivamente discreta, concordamos que Aquiles deve primeiro chegar a todos os pontos que a tartaruga já atingiu (pelo qual a tartaruga é, naturalmente, sempre um pouco mais na frente!). Então, o que estamos realmente dizendo é que Aquiles pode alcançar apenas esses pontos, que são quase as únicas posições que ele pode chegar, ou pelo menos, os únicos que determinam a sua posição. Nós quase encapsular o movimento de Aquiles dentro que da tartaruga, acorrentamos a este último. No entanto, quem ou o que impede a execução de Aquiles andar dois ou três estádios (para a tartaruga tem, obviamente, apenas se arrastou por um estádio mais uma que era a sua liderança inicial, e ele manteve-se um longo caminho atrás)? Temos que simetrizar nossa perspectiva, adotando um ponto de vista relacional. Precisamente falando, a tarefa é a seguinte: Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga, embora a tartaruga tem um começo um estágio anterior. Para cada uma das etapas,  $x$  ( $x > 0$ ), coberto por Aquiles, a tartaruga tem rastreado a distância  $f(x) = + 1/10x$  estágio. Esta função como um modelo do movimento (ou melhor, o movimento relativo a tartaruga para a posição "de pé" de Aquiles) agora permite-nos reproduzir o paradoxo em um novo nível por causa de seu duplo carácter: **O aspecto contínuo do movimento que é feito não contradiz a perspectiva discreta.** Esta é a representação em termos do conceito de função que, em primeiro lugar, permite libertar movimento Aquiles da fixação unilateral sobre a série de pontos distintos de  $x_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), e também ver o movimento como um todo. O movimento relativo de Aquiles e da tartaruga é uma função linear, como ambos os movimentos são uniformes:  $f(x) = ax + b$  (ou seja, quando atinge Aquiles  $x$ , a tartaruga está em  $f(x)$ ). O problema: "Em que ponto a Aquiles realmente alcança com a tartaruga?" agora é: "Qual é o ponto fixo de  $f(x)$ ?" O ponto fixo pode ser desligado simplesmente calculado como uma

função das constantes a e b:  $x = f(x) = ax + b$  (OTTE, 2014, s.p) [grifo nosso].

Otte observa que, o paradoxo acima do movimento demonstra a uma complementaridade que se revela no conceito de ‘função’. Sobretudo, esta complementaridade exige-nos que empreendamos à uma visão dinâmica ou genética da Matemática, ou seja, que a matemática seja entendida como uma atividade e não um edifício lógico fixo, mas como um organismo vivo e em evolução, sendo cada vez mais promotor de conhecimento e atividade (OTTE, 2014, s.p.)<sup>56</sup>.

Outro ponto diferencial que destacamos na abordagem sobre Complementaridade ‘Otteana’ trata de que o sentido de verdade se torna ainda mais profundo. Entendemos que as teorias Matemáticas *axiomatizadas* na forma em que se apresentam hoje em dia necessitam, no que se refere à ‘verdade’, de uma abordagem interpretativa que compreenda as dimensões semântica (correspondência), sintática (coerência) e pragmática. Neste sentido, a perspectiva de Complementaridade ‘Otteana’, agregada à perspectiva semiótica do pensamento de Peirce, responde mais adequadamente sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático e sobre a noção de verdade e falsidade desse Conhecimento.

Na Lógica, sempre houve o imperativo clássico de uma teoria da verdade que se baseia na correspondência, ou seja, na semântica, uma concepção cujo núcleo já se encontrava em Aristóteles. Para ele, em suma, uma dada sentença seria verdadeira se correspondesse a um estado das coisas reais e seria falsa se fosse o contrário. Para Tarski (1936)<sup>57</sup>, a verdade dependeria de relação entre a Linguagem e estados de coisas ou fatos aos quais a Linguagem se refere: uma teoria semântica da verdade.

Existem adeptos da teoria na coerência; nesta, a verdade significa coerência *sistemática*, não se identificando com consistência, mas se confundindo com a propriedade de pertinência ao todo proposicional que traduziria o absoluto – sintaxe. E, ainda, temos uma visão de teoria da verdade pragmatista, segundo a qual, em linhas gerais, algo é verdadeiro – uma proposição - se for útil para nós: há consequências satisfatórias para alguém se a proposição ou teoria ‘funcionar’ de algum modo.

---

<sup>56</sup> Manuscrito não publicado *What is Complementarity?* para orientação, datado de julho de 2014 [nossa tradução].

<sup>57</sup> TARSKI, A. . *Der Wahheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen*, *Studia Philosophica*, 1 (1936), p.261-405. Este artigo faz parte, em tradução inglesa, da coletânea do mesmo autor, *Logic, Metamathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1956.

Sobretudo, estas duas últimas nunca almejavam a correção e rigorosidade a que a primeira se refere.

A teoria de Complementaridade ‘Otteana’ busca empreender o sentido interpretativo-explicativo aos fundamentos do Conhecimento Matemático, numa direção e exercício que procura combinar/englobar as três teorias anteriormente delineadas à verdade, devidamente ‘matematizadas’ e somadas às ideias fundamentais da Lógica. De forma que o Conhecimento Matemático, que se configura através do método *axiomático* formal - abstrato, não é por nós entendido como puramente formal, abstrato ou mesmo arbitrário, ele é, em certa medida, resultante de nossas relações com o mundo, com o contorno (a própria mente do sujeito é moldada e delineada dentro desse processo e perspectiva). Entendemos que se torna interessante e frutífero o pensamento ‘Otteano’ que tem o trabalho de desenvolver de modo rigoroso, uma teoria que traga, ao sentido de ‘verdade’, as três perspectivas: correspondência, coerência e pragmatista.

Acordamos com Newton da Costa (2008, p.203), quando ele ressalta que, em particular, certamente, a teoria pragmatista só pode ser estruturada em nível pragmático e assim à Matemática apenas por meio de uma pragmática devidamente ‘matematizada’ [...]. É, neste sentido que trazemos a semiótica de Peirce para complementar nossa interpretação do Conhecimento Matemático sobre essa nova configuração do pensamento conceitual e mostrar a mudança significativa que, nesse contexto, ocorreu ao termo *axioma*, como também ao sentido atribuído à ‘verdade’.

Para o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’, a realidade implica um processo. Podemos inferir que temos a realidade humana, a realidade da teoria, a realidade da natureza, todas concebidas como processo. Para Otte, a ‘verdade’ tem mais o sentido a que Kant se referia como ‘ideia regulativa’. Não há uma verdade final e absoluta, temos sempre uma verdade relativa, ou melhor, temos uma verdade que se funda num complexo de verdades que são relativas. Como apontamos anteriormente, numa perspectiva semiótica, entendemos que o critério da verdade de uma teoria compreenda e se estabeleça a partir de uma tríade: correspondência (que se refere à semântica), coerência (que se refere à sintaxe) e pragmática.

Otte (2013)<sup>58</sup>, por mais de quarenta anos, tem defendido que “a prática matemática, a qual tem cada vez mais se libertado de agendas metafísicas e ontológicas desde Cantor e Hilbert, requer uma abordagem complementarista - talvez mais do que

---

<sup>58</sup> Manuscrito sem título não publicado.

qualquer outra área do conhecimento -, a fim de ser entendida corretamente”. E essa mesma abordagem tem seus fundamentos e esta tendo seus alicerces a partir de uma perspectiva interpretativa semiótica.

Sobretudo, segundo Otte (2012)<sup>59</sup>, mesmo sendo nossas as escolhas e as possibilidades, elas dependem também dos meios e instrumentos de nossa atividade, existe um teorema da incompletude da semiótica dizendo que a conexão entre objeto e instrumento, entre referência e significado (sentido), entre intensão e extensão, nunca pode ser resolvida de uma maneira definitiva e isso tem a ver, para ele, com a Complementaridade. E, por elementarmente apoiar-se na atividade, o fenômeno de Complementaridade ‘Otteano’ nega em absoluto uma justificativa metafísica e, oportunamente, relembra Engels (1987 b, p.22-3) ao dizer que:

Para o metafísico, as coisas e os seus reflexos mentais, ideias, são isoladas, são consideradas uma após a outra e separadamente uma da outra, são objectos de investigação fixos, rígidos, dados de uma vez por todas. Ele pensa em antíteses absolutamente irreconciliáveis. [...]. Para ele, uma coisa existe ou não existe; uma coisa não pode ser ao mesmo tempo ela própria e outra quando o piso ou quando nego a frase “uma rosa é uma rosa” dizendo que “uma rosa não é uma rosa”. Mas, esclarece Engels, não devo apenas negar, mas também superar a negação. Devo constituir a primeira negação de forma a tornar possível a segunda. Se triturei um grão de cevada, levei a cabo a primeira parte da acção, mas tornei impossível a segunda. “Cada tipo de coisas tem, portanto, uma forma particular de ser negado de tal forma que dê origem a um desenvolvimento e sucede o mesmo com cada concepção ou ideia” diferente. Positivo e negativo excluem-se absolutamente um ao outro; causa e efeito estão em rígida antítese um para com o outro. À primeira vista, este modo de pensamento parece-nos muito luminoso porque é o do chamado senso-comum. [...]. E o modo de pensamento metafísico, justificável e até necessário como e num número de domínios cuja extensão varia de acordo com a natureza do objeto particular sob investigação, mais cedo ou mais tarde atinge um limite, para além do qual se torna unilateral, restrito, abstracto, perdido em contradições insolúveis. Na contemplação das coisas individuais, esquece a ligação entre elas; na contemplação da sua existência, esquece o início e o fim da sua existência; do seu repouso, esquece o seu movimento. Vê as árvores, mas não vê a floresta. Para os objectivos do dia a dia, nós sabemos e podemos dizer, por exemplo, se um animal está vivo ou não. Mas, após investigação mais próxima, descobrimos que isto é, em muitos casos, uma questão muito complexa, tal como os juristas sabem muito bem [Engels desenvolve aqui acerca do problema do aborto]. E simplesmente impossível determinar absolutamente o momento da morte, já que a fisiologia prova que a morte não é um fenómeno momentaneamente instantâneo, mas um processo muito prolongado. Da mesma forma, todo o ser orgânico e em todos os momentos o mesmo e não o mesmo; em todo o momento assimila matéria fornecida de fora e vê-se livre de outra matéria; em todo o momento, algumas células do seu corpo morrem e outras se reconstróem de novo [...]. Para além disso, descobrimos após investigação mais profunda que os dois polos de uma antítese, positivo e negativo, por exemplo, são tão inseparáveis como são opostos e que, apesar da sua oposição, se interpenetram mutuamente [...].

---

<sup>59</sup> Manuscrito sem título não publicado.

Nenhum destes processos e modos de pensamento entra no quadro do raciocínio metafísico [...].

De todo, entendemos que a Complementaridade revela-se na e pela interação, no inter-relacionamento basilar e elementar entre Sujeito, Objeto e Representação. Para Otte, por exemplo, quando nos deparamos com os aspectos relativos à intensionalidade e extensionalidade, não poderemos resolver os problemas decorrentes dessa relação se não tomarmos conta de um ponto de vista dinâmico, evolutivo e complementar. Nas palavras de Otte (2013)<sup>60</sup>:

Vamos, portanto, conceber a complementaridade em termos de dupla noções de extensão e intensão de termos matemáticos. Esta complementaridade torna-se visível, e torna-se distinta da mera dualidade, somente a partir de uma perspectiva genética, que se concentra no caráter evolutivo do nosso conhecimento matemático. Só a partir dessa perspectiva a relação entre sujeito e objeto, ao invés de o objeto como tal, entra em foco. A noção de complementaridade é, portanto, pertinente, em especial, para qualquer estudo dos fundamentos epistemológicos da educação matemática. Entender a matemática a partir de uma perspectiva genética implica abandonar noções como "coisas em si" ou "incognoscível, ou seja objetos matemáticos, que não são representadas, ou idéias como "a matemática como tal" ou a verdade como separados de nossas possibilidades de verificação e comprovação. Nossa visão da matemática, portanto, tem um sabor pragmático, e sua tradição remonta a Peirce, Kant, e, finalmente, Berkeley. Berkeley concordava com Locke a suposição de que o nosso conhecimento se baseia em ideias percebidas pela sensação e, com base nisso, ele comprometeu-se a examinar tudo o que poderia existir. Ele concluiu que tudo o que existe ou é a percepção ou a percepção, ou seja, tanto as nossas ideias ou nós mesmos. Que tal problema? De acordo com Locke, a matéria foi a causa despercebido das nossas ideias. Como, então, pediu Berkeley, não havendo meios para verificar a sua existência, pode-se dizer que a matéria existe? Princípio de Berkeley também poderia ser expressa dizendo que, para que algo existir para nós, deve ser representado.

Foi assim que Kant e, mais tarde, Peirce entendido por Berkeley, e isso nos traz a ideia de complementaridade, que surge porque os sinais são, ao mesmo tempo utilizado referencialmente e atributivamente. O conhecimento é uma atividade, uma imagem espelhada de algum mundo existente, em vez de, e que está na base da conversa frequente de existência em matemática é o fenômeno da objetividade matemática, ao invés de objetos no sentido empírico concreto. Esta visão "pragmática" da matemática poderia ser reformulada da seguinte forma: um conceito matemático, como o conceito de número ou função, não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas não deve ser confundida com qualquer representação também.

De outro modo, para Otte (25 de abril de 2013)<sup>61</sup>, a Complementaridade é mais e muito além do que simples dualidade, pois implica a interação e a relação entre isso que foi distinguido no primeiro passo (pela intuição-espontaneidade) e a sua representação

<sup>60</sup>Manuscrito de título *Semiotics is all* não publicado.

<sup>61</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

(receptividade). A complementaridade tem muito a ver com um tipo de círculo hermenótico, isto é, quando a dedução fica reproduzindo o mesmo círculo, mas em contextos diferenciados de interpretação. Pensar num círculo hermenótico é um bom primeiro passo para se entender a complementaridade, por exemplo, quando você lê um texto e fica interpretando este texto, o que você chega pela interpretação a um texto “1”, que não é o primeiro texto mas a sua interpretação do texto. Mas, essa interpretação promove surgir uma nova ideia, que te conduz numa outra leitura do texto a uma interpretação outra- o texto “2” e assim sucessivamente.

Observemos o sentido da complementaridade no desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático, segundo Otte (2014)<sup>62</sup> a Revolução científica do século XIX não foi totalmente e “somente” uma revolução da filosofia da ciência, mas foi também uma revolução da prática, pois, toda revolução tem dois lados: de descontinuidade e de continuidade. Tal fato podemos constatar no desenvolvimento da geometria analítica de Descartes. Descartes começa com o problema da equação, ele por análise chega ao desenvolvimento de uma equação quadrada, mas ele não entende isso como suficiente. De forma que ele procede por um processo de síntese, ou seja, ele constrói as raízes da equação em termos de segmentos geométricos, num sentido que é construtivo. Descartes inclusive utiliza o termo técnico de “construir as equações algébricas”. Assim para resolver um problema algébrico ele procede primeiro em termos da álgebra simbólica, chegando às equações, e, depois vai construir essas raízes em termos geométricos, e, da geometria de Euclides. E a Geometria de Euclides é um corpo sistemático das ciências dos antigos. O que significa isso realmente? Que a geometria de Euclides para Descartes funciona como fundamentação para o contexto da justificação da álgebra em Descartes (continuidade), enquanto que as operações simbólicas da álgebra funcionaram como o contexto da descoberta (descontinuidade).

Certamente a grande novidade e revolução na matemática no século XIX foi a álgebra (se consideramos só a aritmética e a álgebra geométrica), ou seja, desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, podemos observar que a álgebra só foi possível por causa dessa dupla face: um método novo de criar e descobrir resultados, o lado simbólico; e, por um contexto de justificação para este método, que foi a geometria de Euclides, para se construir as aplicações desses resultados. Observamos que a forma

---

<sup>62</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação

simbólica é conveniente até certo ponto, mas ela não nos fornece *insights*, ou seja, não nos dá o entendimento imediato proporcionado pela geometria.

Então, podemos observar que toda revolução científica tem um elemento de continuidade, e, esse elemento de continuidade é aqui representado pelo contexto de justificação dos resultados descobertos por novos métodos. A primeira face em Descartes foi a Geometria de Euclides, que já existia, a segunda foi a algebrização da geometria. Segundo Otte (2014)<sup>63</sup> o grande erro de Thomas Khun é que ele só destacou a descontinuidade no desenvolvimento do nosso conhecimento, , qualquer revolução científica necessita de fundamento também. E isso tem a ver com complementaridade na perspectiva interpretativa epistemológica otteana.

Entendemos que este aspecto, ou em outros termos, “este fenômeno” da complementaridade sempre esteve presente e operante desde sempre no desenvolvimento do nosso conhecimento, mas ora se enfatiza mais o contexto da descoberta (teoria) ora se enfatiza mais o contexto da justificação (da comunicação). E, neste sentido ora consideramos a matemática como sintética, ora como analítica. Mas quando assumimos uma postura investigativa de base semiótica e genética é-nos possibilitado visualizar mais nitidamente esse processo dinâmico entre esses aspectos. O pensamento de Otte inova ao trazer à cena, para além dos dois aspectos anteriores, o aspecto da prática (da atividade) – a análise pragmática, que sempre está em jogo e que tem a ver com os usos e aplicações do conhecimento sistematizado da matemática.

Otte chama nossa atenção ao fato de que seres humanos são assediados e perseguidos por esperanças, sonhos, expectativas e ideias. Desta forma, a influência que essas coisas têm sobre a mente do homem não pode, de modo algum, ser superestimada. E “nós vivemos mais em um mundo de signos e possibilidades, do que em um universo de coisas determinadas, isto implica e significa que o processo de conhecimento é para ser descrito como o processo semiótico de interpretação e, portanto, é uma espécie de processo interativo entre objetos e idéias. Isto é o que queremos dizer com a noção de complementaridade” (Otte, 2003; Otte 2006).

Destacamos ter encontrado inferência de que a Matemática não explica o mundo, a Matemática constrói teorias, no diálogo *Crátilo* de Platão, onde este questiona se a língua é um sistema de signos arbitrários (convencionalismo) ou se as palavras têm uma relação intrínseca (naturalismo) com as coisas que elas significam, embora, nesse

---

<sup>63</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação



diálogo, Platão não toma claramente partido entre os convencionalistas e os naturalistas. Esta mesma preocupação, desde os tempos de Platão, sempre permeou a relação entre Linguagem e o Conhecimento e, evidentemente, não se exclui da relação entre a Linguagem e a Matemática, de modo algum.

Como entendemos, a Linguagem que utilizamos é produto tanto de aspectos relativos do objeto a que se dirige, quanto produto das atividades/metast envolvidas no processo; tal perspectiva denota e é por nós entendida no sentido de que a explicação científica é julgada a partir de um determinado ponto de vista ou visão do mundo e no contexto de certa língua. E a Matemática, em particular, sendo por sua natureza, exclusivamente, preocupada com ‘meta-dados’- que produzem, por vezes, em si - ao invés de objetos, tem que descobrir a ‘lógica oculta’<sup>64</sup> das nossas histórias sobre o mundo.

Quando o Cardeal Bellarmino (1542-1621) notificou Galileu do próximo decreto da Igreja, condenando a doutrina de Copérnico de heliocentrismo e ordenando que ele a abandonasse como uma explicação do mundo, Galileu usou um argumento dizendo que os matemáticos sempre costumavam argumentar hipoteticamente ou "suppositione ex" apenas: Em primeiro lugar, eu digo parece-me que a sua Reverência e Senhor Galileu agiu com prudência quando do seu conteúdo falando hipoteticamente e não absolutamente, ... Para dizer que as suposições que a Terra se move e o Sol permanece parado ainda conserva todas as aparências celestes melhor do que fazendo excêntricos e epiciclos é falar com excelente bom senso .... Essa maneira de falar é suficiente para um matemático . ... Para demonstrar que as aparências são salvas por assumir o sol no centro e na terra nos céus não é a mesma coisa que demonstrar que, de facto, o sol está no centro e a terra está nos céus ( Bellarmino, Carta aos pais. Foscarini de abril 1615).

A Matemática que se constitui no pensamento diagramático é, segundo Peirce, “a ciência que tira as conclusões necessárias (CP 5.40 *apud* OTTE, 2014, p.7)”, não verdadeiras, de modo que, como já destacamos, devemos empreender uma perspectiva de Complementaridade, inclusive, à interpretação do próprio sentido de ‘verdade’, como também ao de ‘realidade’, e, a tantos outros termos significativos e implicados no desenvolvimento de nosso conhecimento.

Nesta mesma direção, Otte (2014)<sup>65</sup> aponta que o conceito de evolução e de desenvolvimento é crucial para entendermos o pensamento sobre Complementaridade

---

<sup>64</sup> (PAULOS, JA (1998). *Era uma vez o número: A lógica Matemática oculta de histórias de Nova Iorque*: Basic Books; *apud* OTTE, 2013). Para nós este aspecto tem a ver com o sentido da “objetividade” da matemática.

<sup>65</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

‘Otteano’. De modo que a citação abaixo nos conduz a um parâmetro essencial de entendimento sobre eles e esta relação em uma perspectiva genética e evolutiva:

The evolution of the horse from *Eohippus* was not a one-sided adjustment to life on grassy plains. Surely the grassy plains themselves were evolved *pari passu* with the evolution of teeth and hooves of the horses and other ungulates. Turf was the evolving response of the vegetation to the evolution of the horse. It is the context which evolves (BATESON, p.128, 1972)<sup>66</sup>.

Ademais, destacamos que a perspectiva interpretativa sobre a Complementaridade possui uma dimensão fenomenológica . Ainda segundo Otte,

Teorias e obras de arte são formas construídas, são realidades em seu próprio direito. Uma obra de arte é apenas uma obra de arte; uma teoria é apenas uma teoria. Devem ser compreendidas como uma forma *sui generis*, como um mundo em si mesmo, e não como uma representação pálida ou abstrata do mundo empiricamente dado, antes que possamos investigar seus possíveis significados ou aplicações. Em um diagrama, como em uma teoria ou de uma obra de arte, a síntese da representação é realizada na construção e transformação da representação, que é o processo de generalização (OTTE, 2014, p.16).

De todo, esperamos ainda que, introdutoriamente, possamos ter contribuído para esclarecimentos sobre a perspectiva interpretativa dos fundamentos e sobre o desenvolvimento do Conhecimento Matemático, alicerçados no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ que empreenderemos na interpretação de oscilações de significado do termo *axioma*.

Esta perspectiva e a teoria em desenvolvimento são, por nós, assumidas, tanto como pressuposto teórico interpretativo quanto exercício de postura metodológica investigativa à pesquisa em Educação Matemática, pois compreendemos que, no estudo histórico e epistemológico da Educação Matemática, está sempre presente o conceito de Complementaridade. Sujeito e objeto estão sempre conectados e condicionados pela relação que envolve meios, representações e atividades cognitivas, de modo simétrico e assimetricamente quando na explicação sobre determinado conhecimento, seja ele matemático ou não.

---

<sup>66</sup> A evolução do cavalo de *Eohippus* não era um ajuste unilateral para a vida em planícies gramadas. Certamente as próprias planícies foram evoluindo *pari passu* com a evolução dos dentes e patas dos cavalos e outros ungulados. Turf foi a resposta evolutiva da vegetação para a evolução do cavalo. É o contexto que evolui [tradução nossa].

Foi uma postura investigativa, direcionada pelo fenômeno da Complementaridade que tornou mais visível a necessidade de trazer à tona à compreensão dos fundamentos do Conhecimento Matemático, aspectos relacionados aos pilares considerados e abordados neste estudo, sejam eles: o histórico, o filosófico e o semiótico. De modo que nossos apontamentos reflexivos ambicionam contemplar essas dimensões quando dos resultados de nossas reflexões. Buscamos, na construção metodológica e seleção do material estudado, atingir uma amplitude contemplativa sobre a inferência (e interferência) pró-ativo-reagente, entre esses pilares nos diversos contextos e, especificamente, sobre a dinâmica processual/relacional entre a Linguagem e a Matemática.

Ao visualizarmos a Complementaridade do Pensamento ‘Otteano’ como um movimento dinâmico, dialético e processual, entendemos que são inúmeros os aspectos em que ela possa ser destacada e em diversas áreas do conhecimento. E por configurar-se por um caráter interdisciplinar, figura como sendo, sumariamente, relevante no tratamento didático ao Conhecimento Matemático; assim, compreendemos que o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ assume uma dimensão também metodológica para sala de aula. É deste modo que evidenciamos e entendemos estar sendo promovida uma interpretação inovadora sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático.

Como a base teórico-filosófica que conduz o pensamento de Michael F. Otte no desenvolvimento de sua teoria sobre Complementaridade toma, como ponto de partida, a teoria de Kant e se consolida com a Semiótica de Charles Sanders Peirce, entendemos ser relevante esclarecer nosso entendimento sobre o que compreendemos por *Semiótica* e introduzir o pensamento de Peirce.

Nossos pressupostos compreendendo uma abordagem interpretativa dentro da Filosofia da Linguagem numa perspectiva semiótica privilegiam e se fundamentam no pensamento de Charles Sanders Peirce. Este filósofo figura essencialmente importante tanto pelo aspecto dele ter partido de uma análise profunda do seu Conhecimento Matemático das Ciências Exatas na construção de sua teoria quanto pela releitura semiótica que ele empreende ao pensamento kantiano. Também, nosso realce relacionado à Semiótica peirceana está direcionado, pois que, buscamos avançar de uma abordagem semântica e ampliar para uma dimensão pragmática do conhecimento.

Assim, no capítulo que seguirá, aprofundaremos nossa reflexão sobre a semiótica como enfoque interpretativo ao processo cognitivo e ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático e tomada como pressuposto teórico ao estabelecimento do Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

Esperamos contribuir com os fundamentos do Conhecimento Matemático e ampliar a reflexão ao tomarmos como nossas ‘lentes’ essas perspectivas de análise e interpretação que, neste estudo, partem do significado e possíveis oscilações de significado do termo *axioma*, sobre aspectos relevantes, implicantes e consequentes na/da relação entre a Matemática e a Linguagem. Nossa intenção também inclui e ambiciona que esta pesquisa venha a contribuir com os Educadores em Matemática, no/ao tratamento didático que eles concorram empreender a esse conhecimento em seus momentos de planejamento para sala de aula, ao disponibilizar mais uma forma interpretativa sobre a gênese e historicidade desse conhecimento.

### **CAPÍTULO III: *Semiótica* como enfoque interpretativo ao processo cognitivo e ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático e tomada como pressuposto teórico ao estabelecimento do Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’**

Este capítulo tem como finalidade apresentar, ao mesmo tempo em que tece reflexões, pontos relevantes a um enfoque interpretativo de base e fundamento *semiótico* que possa ser empreendido ao processo cognitivo e, em especial, ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático.

É inicialmente relevante esclarecer que a nossa interpretação dos signos, dos símbolos, ou seja, da própria *Semiótica*, parte do contexto e pressuposto da epistemologia e Filosofia da Ciência e não da Linguística, diferentemente dos linguistas, para os quais a *Semântica* trata da teoria da comunicação; aqui em nosso estudo, a concepção de *Semântica* está direcionada e preocupada também com o lado referencial da Linguagem (correspondência). Nosso estudo, ao direcionar-se à dimensão *semântica*, refere-se a aspectos da relação entre a Linguagem e o mundo e que se manifesta através da Matemática. É neste sentido que caminha nossa análise interpretativa quando nos referimos à *Semântica* e esta tendo a ver com o lado referencial, mas não exclui de modo algum o comunicativo.

Também como destacamos em nossa tese, dentre os resultados da Filosofia da Matemática, destaca-se a descoberta de precisarmos reconhecer que uma análise *semântica* de seus conceitos, como é de costume nas Ciências Humanas, não é suficiente na Matemática e devemos levar em conta os aspectos pragmáticos das representações. Se partirmos do ponto de vista da relação entre representação/signos e fenômenos/objetos, entre símbolo e objeto, para a compreensão de conceitos matemáticos, visualizamos que, em nossa noção de Complementaridade, a atividade humana é essencial tanto na formação como no entendimento dos conceitos, e, à produção de novos conhecimentos; daí a relevância da dimensão pragmática – de nossas escolhas e do uso que fazemos dos signos.

Uma grande virada para uma interpretação linguística ao processo cognitivo teve início, segundo Otte (2012), com a teoria epistemológica de Immanuel Kant, ou seja, com a Revolução Copernicana Epistemológica de Kant, mas foi Charles Sanders Peirce quem reformulou essa teoria, partindo de uma base *semiótica*.

Segundo Otte (2014)<sup>67</sup> embora seu pensamento de complementaridade tenha nascido em Kant, e ele perceba que já havia neste filósofo embrionariamente a ideia de complementaridade, podemos observar que, em Kant havia muito mais o sentido de dualidade do que de complementaridade, e isso pode ser essencialmente constatado na distinção bem clara que ele faz entre intuições e conceitos, entre teoria e realidade. Nossa abordagem Semiótica compreenderá e abordará o nosso desenvolvimento cognitivo, fundamentado no pensamento de Charles Sandres Peirce, como resultado de um processo triádico que envolve as dimensões: sintática, semântica e pragmática.

Otte sempre nos chama a atenção ao fato de que, comumente, as teorias interpretativa epistemológicas conduzem a duas visões da Matemática: a Matemática como Linguagem e a Matemática como atividade. E essa divisão advém, exatamente, de dois contextos específicos: o contexto sócio-comunicativo e o contexto da filosofia da natureza e da atividade. Para compreender essa relação, defende que o caminho adequado seja partirmos de uma abordagem Semiótica, pois dela e nela temos a grande vantagem que nos permite lidar e ligar as duas coisas, ou seja, os dois contextos: o objetivo e o social, porque o signo em si mesmo, como antecipamos anteriormente, já tem esse papel e função, uma vez que representa alguma coisa para alguém.

Otte (2014)<sup>68</sup> nos diz que “essa é a maior vantagem da semiótica. A semiótica sempre tem as características próprias da linguagem. E em nosso sistema de símbolos e da nossa linguagem já temos esses dois lados, que são tão difíceis de lidar na Educação”. Assim defendemos poder superar essa dificuldade, quando partimos do pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’, fundamentada em uma perspectiva semiótica.

Sobretudo, como já ressaltamos em nossas reflexões, a Matemática não pode nem deve ser confundida com uma Linguagem, mas reconhecemos que, sem a Linguagem, a Matemática não é “quase nada”. Então, a questão toda se desenvolve sobre a semântica e a pragmática da Linguagem Matemática. Haja vista, entendemos que, a Matemática não se refere ao mundo empírico, mas, sim, a nossas atividades neste mundo empírico, consideramos-a uma metaciência das Ciências, de si mesma e da tecnologia.

No sentido de superar e avançar na compreensão sobre o desenvolvimento do Conhecimento Matemático, que compreenda uma relação de Complementaridade entre

---

<sup>67</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

<sup>68</sup> Fala de Otte em Orientação na data de 24 de abril de 2014.

a dimensão semântica e pragmática desse conhecimento, é que destacamos a teoria Semiótica de Peirce. Este autor, de forma ímpar em suas respostas a questão sobre nosso desenvolvimento cognitivo, enfatizará a importância do princípio da continuidade, pois a inteligibilidade ou relevância pressupõe continuidade, mesmo diante do fato de que um fato novo e ainda inexplicável sempre marca uma ruptura ou uma descontinuidade.

Iniciamos com uma reflexão e apresentação que não tem a ambição de um aprofundamento histórico, mas que possa oportunizar compreensão mais apropriada sobre o que vem a ser uma abordagem semiótica, ou seja, o que é *Semiótica*<sup>69</sup> e sobre o desenvolvimento desta perspectiva. Neste sentido, tomamos a Lógica como fio condutor nessa reflexão, aportados no pensamento de John Deely.

Seguidamente, introduzimos o personagem central que fundamenta nossa interpretação dentro de uma perspectiva *Semiótica*: Charles Sanders Peirce. Brevemente, apresentamos pontos essenciais ao entendimento de seu pensamento cujo realce se faz necessário, como também ao empreendimento interpretativo relacionado à nossa intensão interpretativa sobre o termo *axioma* na Matemática e, assim, passamos para uma análise do aspecto representacional com destaque aos signos: ícone, índice e símbolo, e relacionado aos fundamentos semióticos ao pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

Finalizamos o texto, ensaiando a construção de um diagrama que possa comparecer e, de certo modo, espelhar-se em uma síntese das reflexões desenvolvidas, no qual ambicionamos deixar mais evidente e destacada a dinâmica operacional de nosso pensamento, ao optarmos pela abordagem semiótica, perspectiva *Peirceana* e alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’; sobretudo, esperando ressaltar o sentido de Complementaridade que envolve todos os aspectos evidenciados no processo cognitivo e desenvolvimento do pensamento matemático.

Entendemos que a *Semiótica* trata de uma Ciência (que consideramos, ainda, em nascimento) e, enquanto a Linguística é tomada como a Ciência da Linguagem verbal, para nós, a *Semiótica* é a Ciência de toda e qualquer Linguagem. A nossa existência no mundo, como indivíduos sociais que somos, é mediada por uma rede intrincada e plural de Linguagens. Afirma Santaella (2012) que somos uma espécie animal tão complexa quanto são complexas e plurais as Linguagens que nos constituem como seres simbólicos, isto é, somos seres de Linguagem.

---

<sup>69</sup> *Semiótica*- o sentido está relacionado a uma abordagem investigativa acerca dos fundamentos.

Portanto, quando dizemos linguagem, queremos nos referir a uma gama incrivelmente intrincada de formas sociais de comunicação e de significação que inclui a linguagem verbal articulada, mas absorve também, inclusive, a linguagem dos surdos-mudos, o sistema codificado da moda, da culinária [da matemática] e tantos outros. Enfim: todos os sistemas de produção de sentido aos quais o desenvolvimento dos meios de reprodução de linguagem propiciam hoje uma enorme difusão (SANTAELLA, 2012, p.16).

Nesse relacionamento com o mundo, em nossa inquietude para compreendê-lo, nós desvelamos significações. “É no homem e pelo homem que se opera o processo de alteração de sinais (qualquer estímulo emitido pelos objetos do mundo) em signos ou linguagens (produtos da consciência)” (SANTAELLA, 2012, p.18). Assim, o termo Linguagem, neste estudo, estender-se-á até sistemas aparentemente inumanos, como as linguagens binárias, a linguagem de computador, até tudo aquilo que, na natureza, fala ao homem e é sentido como Linguagem. Tomamos a *Semiótica* enquanto a Ciência que tem por objetivo investigar todas as Linguagens possíveis, ou seja, realizar o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno de produção de significação e de sentido como elemento construtivo e constituinte ao pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Como também, destacamos que a semiótica pode ser tomada como sendo fundamento e base à fenomenologia.

Entretanto, isso não deve confundir ou ser interpretado de forma que a *Semiótica* esteja ‘roubando’ o pilar ou campo de saber e de investigação de outras Ciências e, em nosso caso, da Matemática. Sejam quais forem os outros campos, a *Semiótica* sempre é vislumbrada, buscando divisar seu ser de Linguagem, isto é, sua ação de signo. Podemos, grotescamente, dizer que a Linguagem é o meio de manifestação do nosso pensamento matemático, uma intermediária entre nossa mente e o mundo.

A Matemática é observativa [ciência da “descoberta” de acordo com Peirce] na medida em que monta construções na imaginação de acordo com preceitos abstratos, passando, então, a observar esses objetos imagináveis para neles encontrar relações entre partes que não estavam especificadas no preceito da construção. No entanto, a Matemática estuda o que é e o que não é logicamente possível, sem se fazer responsável pela existência atual desse possível. Nesse sentido, é a ciência que fornece subsídios e encontra aplicação em todas as outras ciências, inclusive a Fenomenologia e a Lógica (SANTAELLA, 2012, p. 37).

Outra característica mais importante de uma abordagem *semiótica* ao processo cognitivo e ao desenvolvimento do pensamento matemático, de acordo com a perspectiva de Deely (1995), em nosso trabalho, repousa no fato de que ela contempla



uma estrutura ou natureza inerentemente interdisciplinar e, ainda, essa característica revela-se como a garantia mais segura do crescimento e aceitação desse tipo de abordagem, tanto epistemológica quanto didaticamente.

Este tipo de abordagem, ao estabelecer estrutura comum e canais interdisciplinares de comunicação, torna a perspectiva *semiótica* como a possibilidade, de um modo diferente, de romper com o paradigma criado com a Ciência Moderna que determinou uma especialização desta, uma espécie de atomização da pesquisa e fragmentação da comunidade intelectual. E, como a Ciência experimental e Matemática, foi ocasião e marco na transição da era latina aos tempos modernos, acreditamos, apoiados no pensamento dos autores que sustentam nossa abordagem neste capítulo, que a Semiótica nos pode conduzir a uma mudança tão profunda como aquela, uma vez que, o que passa a ser posto em cena, trata-se de uma atividade interpretativa da mente, isso é, *Semiótica*.

Todavia, nossa opção por uma abordagem interpretativa *semiótica* também compactua com o pensamento de Peters (1978, p.159) quando ele diz que:

A investigação semiótica não pode, e não deve, reduzir-se a uma matemática nem pode facilmente adaptar-se ao quase-rigor da linguística. [...] a semiótica é tanto uma perspectiva para a investigação crítica quanto uma metodologia. Neste sentido, a semiótica serve realmente de enquadramento para examinarmos o nosso universo e a maneira como o entendemos. Ao abordarmos as nossas investigações de um ponto de partida comum, ao examinarmos o nosso mundo de uma perspectiva partilhada, descobriremos que estamos, afinal, muito mais próximos uns dos outros do que pensávamos.

Para este momento, não ambicionamos traçar o caminho histórico do que hoje denominamos de *Semiótica*, mesmo porque esta não seria uma tarefa fácil e haja vista, principalmente, a necessidade de compreendermos, primeiro, o que é realmente a Semiótica, antes de podermos escrever sobre sua história. Sobretudo, propomo-nos, de início, uma breve reflexão, uma visão sinóptica, sobre o desenvolvimento dessa perspectiva, seus aspectos importantes, seus princípios e fundamentos. Nesta direção, optamos tomar a Lógica como condutora nesta reflexão e análise e, por seu papel contínuo, que tematicamente tem desempenhado no desenvolvimento da Filosofia e da Ciência. E buscamos finalizar com um estreitamento desta reflexão, relacionando ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Observamos, após nossas leituras, que o caminho da Semiótica é permeado por uma forte confluência com a Lógica, de forma que uma inventa e reformula

continuamente a outra e de maneiras diversificadas. Embora esse aspecto seja habitualmente mais evidenciado no pensamento de Peirce, segundo Deely (1995), desde os projetos doutrinários greco-romanos, esse aspecto relacional entre elas sempre esteve presente, configurando-se em momentos de aproximações e bifurcações.

No tempo de transição entre a época Medieval à Renascença, o estudo das ideias ou a concepção de ideia como signo mental, em contraste com a palavra verbal, ainda não esteve estabelecida de forma que seus pressupostos e consequências tivessem sido bem explorados entre os lógicos. De modo que, entre os filósofos lógicos, a questão de um tratado geral dos signos parece nunca ter sido levantada nesse período. Àquela época, uma direção nesse sentido pode ser atribuída às ciências da vida e, em particular, a um tipo de Psicologia, não à Lógica. Mas, mesmo o direcionamento à Psicologia, buscando por uma análise do *Ser* adequada aos conceitos e estes considerados precisamente como signos, ainda o fazia de forma desprovida de qualquer clarificação lúcida quanto as suas consequências e implicações (DEELY, 1995, p.57).

John Deely (1995) sugere que o período entre 1350 e 1650 tenha figurado como sendo a ocasião de gestação do desenvolvimento de um ponto de vista *semiótico*, motivada pela recuperação do conhecimento grego, o deslumbramento com as grandes descobertas, proporcionadas pelas primeiras traduções de Aristóteles e o despertar da consciência do efeito *feedback* da Linguagem, em estruturas subjacentes do pensamento e da experiência. Todos esses acontecimentos foram fundamentais para que, no final do século XVI e início do século XVII, a discussão sobre signos e significação se tornasse desenfreada, principalmente, nas tradições universitárias da Península Ibérica – especialmente em Coimbra (Universidade de Portugal) e Salamanca (principal centro da Espanha).

Em 1564, Pedro Fonseca (1528-1599), filósofo português, publica *Institutionum dialecticarum libri octo*, um texto de lógica sumulista<sup>70</sup>, que concebe e apresenta, à época, uma terminologia nova e especializada, capaz de assimilar a totalidade da análise onto-epistemológica do conhecimento vigente que inclui o processo de significação.

---

<sup>70</sup> Esta tradição incluía duas novidades surpreendentes, conside-adas hoje como os maiores contributos da lógica escolástica: a teoria das propriedades dos termos e a teoria das consequências. Uma e outra, conjuntamente com as doutrinas doutros tratados unidos às Súmulas (Exponibilia, Syncategoremata, Sophismata, Impossibilia, Insolubilia), ficaram a constituir aquilo que se designa por logica moderna ou logica modernorum.

Esta aponta e atesta a uma inequívoca e nova direção: a da *Semiótica*. Nesse trabalho, Fonseca apresenta os signos divididos entre ‘formais’ e ‘instrumentais’ e, para estes últimos, haveria uma distinção entre signos naturais e signos convencionais. O ponto positivo do pensamento de Fonseca e o que prova a sofisticação no sentido de uma perspectiva *semiótica* (ainda em vias de desenvolvimento) trata da distinção que ele apresenta entre signos naturais e signos convencionais, uma distinção que envolve mais do que dois termos, em suas palavras (FONSECA, 1564; lib.I, cap.IX; *apud* DEELY, 1995, p.73):

Os signos convencionais são aqueles que significam por intenção deliberada e, digamos, por uma espécie de acordo. Tais signos são de dois tipos. Alguns significam em resultado de estipulações, tais como as palavras através das quais os homens conversam, ou as cartas através das quais pessoas ausentes se comunicam; outros, no entanto, significam em resultado de costumes e tradições de uso, da mesma maneira que os itens expostos numa loja significam o que está à venda. E aqueles signos que significam por estipulação têm ainda uma significação dupla, própria e imprópria [...] De facto, praticamente todas as palavras têm uma significação imprópria em resultado da adaptação e da mudança no seu uso, através da metáfora, catacrese, metalepse ou metonímia.

Isto veio aumentar o interesse à compreensão sobre signos e o seu papel no desenvolvimento do pensamento. “A definição de signo desestabiliza-se, a divisão dos signos ramifica-se e intercepta caminhos inesperados que requerem nova análise e, sobretudo, têm consequências para própria tentativa de definição” (DEELY, 1995, p.74). No entanto a possibilidade de uma ciência, doutrina ou ‘teoria’ unificada em que o destaque esteja sobre um objeto comum na experiência da significação, era, até o final do século XVI, uma questão de difícil aceitação ao pensamento filosófico.

Somente no final do século XVII, apresenta-se o primeiro pensador a debater e apresentar a possibilidade de uma doutrina unificada ou ‘teoria geral’ dos signos, o filósofo espanhol Joannes Poinot (1589-1644). As reflexões envolvendo Lógica, Filosofia e uma perspectiva Semiótica convergiram e culminaram numa disposição unificada da doutrina dos signos, exposta em sua obra *Tractatus de Signis* (1632). Para este filósofo, a Lógica é tomada como a atividade interpretativa do pensamento, constituída inteiramente por signos e seus instrumentos.

Segundo o próprio Poinot, o seu trabalho consistiu em reduzir à sua unidade todas as questões básicas que haviam sido levantadas em relação aos signos e inseri-las no lugar que lhes cabia na tradição lógica e da Filosofia. A tradição lógica, até então,

tomava a *interpretação* de Aristóteles, como sendo tratada apenas em termos de interpretação intelectual ou lógica. Mas, para Poinot, segundo Deely (1995, p.76):

[...] a própria interpretação lógica é apenas uma modo, ou uma forma de interpretação; a interpretação em si mesma é antes co-extensiva com a vida cognitiva dos organismos; e a lógica alcança as suas formas específicas de interpretação (não apenas na dependência de hábitos perceptivos e sensoriais ‘aculturados’ – tal como a capacidade de reconhecer palavras e a sintaxe de uma dada língua, mas) inteiramente através do uso de signos.

Daí a necessidade de um tratado geral dos signos. Em seu tratado, Poinot torna explícita uma crítica à definição de signo, por entender que o essencial, na nossa experiência, para a existência e o funcionamento de um signo, não trata de que ele seja apreendido, mas que traga alguma outra coisa além de si mesmo à percepção de um organismo que é, exatamente, como as ideias funcionam dentro da nossa mente, trazendo ao intelecto, algo mais que elas próprias. Desta forma, para ele, os signos formais e os signos instrumentais são unívocos em seu modo de ser, igualmente, verdadeiros signos. Poinot nega expressamente a equação entre *representação* e *significação* e estabelece uma distinção sistemática entre ambas, em que o papel da representação é isolado e identificado dentro da significação. A representação, “na melhor das hipóteses, constitui a *fundamentação* para as relações de significação” (DEELY, 1995, p.78).

Poinot, de certa maneira, vê uma característica essencial da análise semiótica, com ela representando um novo início para o empreendimento do pensamento filosófico. Uma nova análise da experiência que, partindo do signo – *semiótica* - faculta um ponto de vista superior que transcende a divisão (até então iniciada no pensamento aristotélico) tradicional da mente em *ens reale* e *ens rationis*, porque no signo, tal como na experiência, encontram-se ambas as ordens do ser. De modo que o ser natural e o ser social unem-se no signo, deste ponto de vista.

No entanto é no pensamento de John Locke (1632-1704) que se efetivará esta confluência ao apresentar, em 1690, sua noção de *semiótica*. Enquanto a herança aristotélica tem vários tipos de objetos e vários tipos de conhecimentos que se mantêm sempre distintos, Locke inicia como em Aristóteles, apresentando uma divisão entre conhecimento especulativo e conhecimento prático, mas ele expõe a seguir uma proposta para se estudarem, de maneira sistemática e unificada, os caminhos e os meios pelos quais estes são adquiridos, desenvolvidos e comunicados.

Embora este possa sugerir uma divisão tríplice das ciências, por outro lado,

[...] trata-se de uma divisão que é mais dissemelhante do que semelhante à divisão de Aristóteles ou à dos estoicos: porque com a terceira ramificação de Locke é-nos dada uma *distinção que une*: ela distingue as diferentes ordens apenas para mostrar como elas se unem no signo- e este é exactamente o ponto de vista superior à divisão do ser em *ens reale* (o objecto principal do pensamento especulativo na tradição aristotélica) e *ens rationis* (certas formas que são o objecto do conhecimento prático), que já encontramos como porta de entrada na *doctrina signorum* de Poincaré. O objecto da *semiótica* não é nem o *ens reale* nem o *ens rationis* exclusivamente, mas ambos pelos modos como eles se misturam e se interpenetram na experiência (DEELY, 1995, p.81-82).

Isso já denota o sentido e Complementaridade a que Otte destaca em seu pensamento. Pela primeira vez, observamos uma abertura à abordagem epistemológica que prima pela interação entre as duas ordens do ser (real e racional), promovidas através da função dos signos, pelo processo de semiose. Desse modo, ‘o que é’, é circunscrito não por uma linha fixa, mas mutável, cujas mudanças são determinadas por esse processo de interação e o estudo dessa realidade mutável, dessa linha mutável, é a *semiótica*.

Ainda de acordo com Deely (1995, p.84):

Podemos dizer que é com Poincaré que a longa tradição da Lógica e da *Philosophia*, que se estende por séculos até a Grécia Antiga e além dela, alcança finalmente a *semiótica in actu exercito*, tendo, com Locke, sido alcançada in *actu signato*, isto é, a *doctrina signorum*, primeiro sistematizada por Poincaré, recebe de Locke o que estava destinado a tornar-se o seu ‘nome próprio logicamente’. Do século XVII em diante, a relação da lógica com a semiótica é algo que se alcançou de fato e em nome, apesar dessa conquista não ter sido reconhecida senão passados trezentos anos.

Destacamos que, após um período que podemos considerar de esterilidade a uma abordagem semiótica, que se estende de Descartes até meados do século XIX, vemos principiar um novo desenvolvimento da lógica formal. Nesta direção, temos a figura central de Charles Sanders Peirce.

Àquela época, seguidores de Ferdinand Saussure (1857-1913), particularmente estudiosos com formação nas Ciências da Linguagem em geral constituíram uma espécie de maioria sociológica dentro da Semiótica. Mas, tanto o pensamento deste grupo como os de fora dele caminha no sentido de um acordo gradual na direção dos escritos de Charles S. Peirce (1839-1914), que consideramos como o verdadeiro fundador contemporâneo de uma doutrina sistemática dos signos.

Jakobson destaca que, desde os primórdios do período Moderno, a consciência Semiótica e os estudos lógicos têm-se, constantemente, inter-relacionados e entendemos que este foi sempre um traço caracteristicamente forte nos estudos de Peirce. Segundo Max Fisch (1977, p.36):

Peirce, desde o início, concebeu a lógica como cabendo total e inteiramente no âmbito da teoria geral dos signos; que todo o seu trabalho em lógica se baseou nesse pressuposto; que uma vez, aos cinquenta anos, distinguiu um sentido restrito e um sentido lato da lógica, pelo último dos quais, a lógica era coextensiva com a teoria geral dos signos; que ele eventualmente abandonou o sentido restrito; e que o tratado compreensivo no qual trabalhava na última década da sua vida haveria de intitular-se *Um sistema de Lógica considerado como Semiótico [A System of Logic, considered as semiotic]*.

Ademais à confluência entre Lógica e Semiótica, a teoria de Peirce se constitui e fundamenta a partir de um ponto de vista evolucionista, e, este também é assumido, neste estudo, para interpretação e como fundamento para interpretação e compreensão do processo cognitivo. Assim é que a perspectiva *semiótica* sustentará e estará imbricada em nossa análise sobre a relação, envolvendo a Linguagem e a Matemática e, especificamente, relacionada ao destaque na análise interpretativa sobre os significados e oscilações de significado do termo *axioma*.

A seguir, passamos a uma apresentação e reflexão mais aprofundada sobre o pensamento de Charles Sanders Peirce.

### 3.1 O pensamento de Charles Sanders Peirce

O americano Charles Sanders Peirce (1839-1914) era cientista e filósofo e, embora tenha dedicado estudos a uma diversidade de campos, seu interesse maior repousava sempre na Lógica e na Lógica das Ciências. Assumia uma perspectiva evolucionista em relação ao nosso desenvolvimento humano e cognitivo. Expandiu seus estudos, no sentido de transpor para a Filosofia, o espírito de investigação científica e trabalhou nessa direção, buscando empregar os métodos de observações, hipóteses e experimentos. Desse modo, seu pensamento se preocupava em estabelecer um vínculo entre a Lógica e a Filosofia.

Começou estudar Kant aos dezesseis anos de idade e, segundo Otte (2014), Peirce transformou a epistemologia *kantiana* na Semiótica, a teoria geral dos signos. Se

em Kant identificamos o liminar de uma virada à Linguística, provocada por sua Revolução Copernicana<sup>71</sup>, em Peirce, assistimos à personificação de uma perspectiva *semiótica* interpretativa no e ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático, no sentido de uma releitura do pensamento kantiano. O pensamento ‘Otteano’ indica que encontramos os pressupostos da Complementaridade delineando-se já a partir de Kant e se confirmando nas reflexões de Peirce. Assim, Otte entende que Peirce seja o responsável pela reformulação em termos *semióticos* da Complementaridade que já se encontravam em Kant. Sobretudo, Peirce não se preocupa mais com o sujeito ou com a epistemologia, mas seu foco é a Lógica, sendo que, para ele, a Lógica seria baseada na Semiótica. De acordo com Santaella (2012, p.31),

[...] desde o começo do despertar do seu interesse pela Lógica, Peirce a concebeu como nascendo, na sua completude, dentro do campo de uma teoria geral dos signos ou Semiótica. Primeiramente, ele concebeu a lógica propriamente dita (aquilo que conhecemos como Lógica) sendo um ramo da Semiótica. Mais tarde, ele adotou uma concepção muito mais ampla da Lógica que era quase *coextensiva* a uma teoria geral de todos os tipos possíveis de signos.

Nossa opção por uma análise e reflexão sobre o significado do termo *axioma* em filósofos e matemáticos tem, como pressuposto, de acordo com Peirce, o entendimento de que um conceito teórico trata de um símbolo e, como tal, de ‘uma relação entre signos ou representações’. Defende Peirce que “os símbolos fornecem os meios para pensar sobre os pensamentos, de um modo que, ao contrário, não poderíamos fazer. Eles nos permitem, por exemplo, criar abstrações, sem as quais não teríamos essa grande máquina de descobertas” (PEIRCE, 1958, 4-531). E o momento histórico que marcou o início desse direcionamento foi entre os séculos XVI e XVII, consolidando-se do século XVIII a XIX.

Entendemos, também, que tais relações marcadamente entre signos ou representações, como afirmado anteriormente, são determinadas e influenciadas pelos seus respectivos contextos, tanto social quanto histórico, de modo que assumimos uma visão sistêmica, dinâmica, genética e evolucionista ao processo de construção dos conceitos, como ao desenvolvimento do nosso conhecimento. Assim, torna-se necessário clarificar sobre os fundamentos do pensamento *Peirceano*, em especial,

---

<sup>71</sup> A teoria de Kant promove o sentido de uma revolução na epistemologia, pois coloca o sentido de desenvolvimento e entendimento sobre objetos do nosso conhecimento como o desenvolvimento do próprio conhecimento dentro da mente do sujeito.

sobre como chegamos ao símbolo, uma vez que os conceitos tomam o sentido de símbolos. E especificamente neste estudo o termo *axioma* no século XIX assume status especial na constituição conceitual.

Após a leitura que Peirce faz das propostas de Locke nas quais até então se destacavam um silêncio e um período de esterilidade - denominado como período da Lógica Clássica, que se estendeu de Descartes ao século XIX - caracterizado pelo afastamento de uma consciência de fundamentações do conhecimento, o silêncio e a esterilidade foi efetivamente quebrado, iniciando-se fase nova para o desenvolvimento da lógica formal.

O diferencial inovador que se inicia com o pensamento de Peirce, àquela época, ao processo cognitivo, refere-se à uma especial e singular compreensão sobre o processo de *indução*. Até então, o período grego e latino da Lógica desenvolveu-se, essencialmente, em termos de compreensão do raciocínio dedutivo (conhecimento do geral ao particular) embora o raciocínio indutivo (conhecimento do particular ao geral) fosse conhecido, esse era subdesenvolvido nessas tradições ou mesmo, de certa forma, negligenciado.

No período da Lógica Clássica (de Descartes até o século XIX), no entanto, não podemos deixar de destacar que houve nova preocupação segundo a qual os pensadores procuram substanciar, no contexto da ciência experimental, uma nova compreensão sobre a *indução*. Esta que era, minimamente, concebida como o ascenso a concepções, leis ou princípios gerais, a partir de fatos particulares, tornou-se objeto de estudo como nunca antes o tinha sido, mas, nesse período, ela também passou a figurar como um dos termos mais confusos em Lógica (JOSEPH, 1916, p.393).

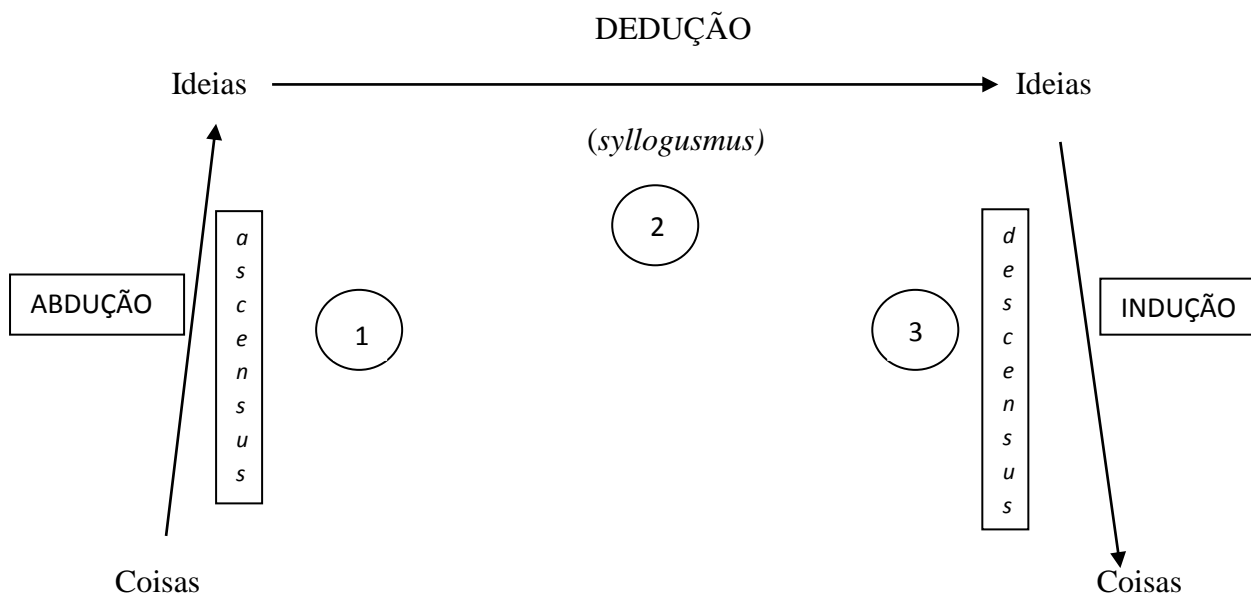
Uma clarificação no que se refere à *indução* e um salto em direção à Lógica Formal são-nos evidenciado quando Peirce reaviva um entendimento já apontado (em certo aspecto) por Poincaré. Peirce cita, por volta de 1866, que a *indução* é heterogênea, compreendendo duas espécies distintas de movimento e não uma: “o movimento da mente através do qual formamos uma hipótese com base na experiência sensorial, a que ele chamou *abdução* (às vezes chamada ‘hipóteses’ e também ‘retrodução’) e o movimento inverso através do qual confirmamos ou não a nossa hipótese com referência ao sensorial, movimento para o qual Peirce manteve a designação de *indução*” (DEELY, 1995, p. 90).



Sobretudo, a diversificação estabelecida por Peirce, de acordo com Fisch (1980, p. 11)

[...] tinha um determinado ponto a focar e um objectivo preciso. O ponto a focar era a lógica, concebida no início como um ramo de um ramo da semiótica, mas eventualmente quase coextensiva com a mesma, porém com uma distribuição de ênfase diferente daquela feita pelos semiotistas que não são lógicos. O objectivo era distinguir os tipos possíveis de semiose ou funções sígnicas, e, entre elas, fazer o estudo mais aprofundado que fosse possível dos argumentos em particular e, acima de tudo, das suas funções na matemática e nas ciências. A sua conquista mais importante foi a descoberta de que aquilo que a princípio denominou de *hipótese* e mais tarde de *abdução* ou *retrodução* é um tipo de argumento distinto, diferente da dedução e da indução e indispensável tanto na matemática como nas ciências.

De modo que, o esquema de Deely (1995, p.93) abaixo tenta ilustrar os três movimentos distintos, reconhecidos por Peirce no processo cognitivo:



Para Peirce Kant errou quando entendeu que as idéias seriam apresentadas separadas e só depois então pensadas em conjunto pela mente. Essa seria uma doutrina de que uma síntese mental precederia todas as análises nossas. Peirce ao evocar a abdução mostra-nos que o que realmente acontece é que algo nos é apresentado e que em si não tem partes, mas que, no entanto é analisado pela mente, ou seja, as suas partes como peças consistentes de fato e que a mente reconhece depois as partes nelas. Tais

ideias parciais não estão propriamente na primeira ideia, em si, apesar de serem separadas dela. A abdução é um processo de destilação destrutiva. Quando tendo, assim, separado-as, nós passamos a pensar sobre elas. Somos levamos a despeito de nós mesmos a partir de um pensamento para outro, é só aí reside a primeira síntese real (PEIRCE, 1.383-84, *apud* OTTE, 2014)<sup>72</sup>.

Neste sentido, Peirce entende que nossa percepção está conectada à generalização, ou melhor, a generalização abdutiva. De modo que, qualquer representação trataria é em si de uma generalização, daí a constatação em Peirce de que a matemática trata do raciocínio diagramático.

Otte (2014)<sup>73</sup> ainda nos informa que para Peirce ainda temos que reconhecer que:

1. Que não existem concepções as quais não sejam dadas a nós em julgamentos perceptivos, de modo que podemos dizer que todas as nossas idéias são idéias perceptivas. Isso soa como o sensacionalismo, mas, a fim de manter esta posição é necessário reconhecer;
2. que juízos perceptivos contêm elementos de generalidade; assim a terceiridade é diretamente percebida; e, finalmente, eu acho ser de grande importância reconhecer;
3. que a faculdade abdutiva, pela qual adivinhamos os segredos da natureza é, como podemos dizer, um sombreamento, uma gradação do que em sua perfeição mais elevada chamamos de percepção . (Peirce MS 316; Peirce, 1967, p 316.).

Sem essas três verdade seria impossível compreender sobre os méritos de uma visão pragmatista. Assim, na síntese abdutiva destacamos o que a mente é compelida a fazer não pelas atrações interiores dos nossos sentimentos ou representações próprias, nem tão pouco por uma força transcendental de necessidade, mas sim pelo interesse da nossa intelegibilidade, isto é, no interesse da própria síntese, e, isto a mente faz pela introdução de uma ideia que não está contida nos dados, e que nos fornece as conexões que elas não teriam jamais tipo.

Quando observamos o esquema acima, podemos destacar uma relação interessante que se estabelece entre objeto-sujeito-objeto (coisas-sujeito-coisas) em nível de inteligência humana e que, por meio da representação, toma a atividade como papel essencial.

---

<sup>72</sup> Manuscrito intitulado *Mathematics as mechanical Procedure and as Abductive Inference*, não publicado de 12 de julho de 2014.

<sup>73</sup> Manuscrito intitulado *Mathematics as mechanical Procedure and as Abductive Inference*, não publicado de 12 de julho de 2014.

Ao considerar a divisão de toda inferência em *Abdução*, *Dedução* e *Indução* como sendo a ‘Chave da Lógica’, sua caracterização veio transcender os seus contemporâneos modernos em direção a uma compreensão diferente e mais profunda das fundações e origem do pensamento na experiência e, absolutamente, num sentido à *semiótica*. Inclusive, concebendo “a lógica como cabendo total e inteiramente no âmbito da teoria geral dos signos” (FISH, 1977, p.36).

Uma Abdução é Originária no que diz respeito a ser o único tipo de argumento que inicia uma nova ideia. Um Argumento Transuasivo ou *Indução* é um argumento que se inicia com uma hipótese, resultante de uma Abdução prévia e de virtuais predições, por via da Dedução, dos resultados dos experimentos possíveis e, realizados os experimentos, conclui que a hipótese é verdadeira na medida em que aquelas predições forem verificadas; sendo esta conclusão, contudo, sujeita a prováveis modificações para se adequar a futuros experimentos (ECO, 1983, p. 96).

O pensamento de Peirce, dentro de uma perspectiva assumidamente *semiótica*, fundamenta-se na defesa de que a Lógica, como atividade interpretativa, pode também ser entendida como o uso autoreflexivo dos signos, tornando-se, dessa maneira, a teoria dos signos, coextensiva e sinônima da própria *Semiótica*. De forma que a Lógica também absorve a totalidade da epistemologia e da filosofia tradicional da natureza, pelo menos, nos aspectos fundamentais. Peirce promove, de forma singular, uma aproximação jamais efetivada no pensamento filosófico entre Lógica e *Semiótica* ao desenvolver sua teoria e, em especial, nos seus estudos, ele toma o Conhecimento Matemático como ponto de partida de suas análises. Desse modo, em especial, sua análise empreende um estreitamento na relação entre a Linguagem e a Matemática, principalmente, ao possibilitar que a primeira seja tomada como fundamento para análise interpretativa epistemológica sobre/da segunda.

### **3.2 A perspectiva semiótica Peirciana e o Conhecimento Matemático**

Depois de se pronunciar sobre o caminho, sobre o percurso metodológico do nosso pensamento diante de nossas experiências, Peirce nos afirma que não há

pensamento sem representação<sup>74</sup> e a representação é a base e fonte geradora e impulsionadora de toda atividade cognitiva.

Em sua obra, Peirce diz que representar é: “Estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro, que, para certos propósitos, seja considerado por uma mente como se fosse esse outro” (Peirce, 2005, p. 61). E, para distinguir *aquilo que representa* do ato de representar, Peirce introduziu o termo *representâmen* para o primeiro e, ao segundo, chamou representação.

Um dos pontos centrais na teoria de Peirce é a definição de signo. Fato este que se pode identificar pela presença numerosa da definição de signo. Peirce traz, em suas obras, o conceito de signo enunciado de diversas formas e em vários níveis de elaboração. Vejamos, a seguir, uma delas: “Um signo, ou *representâmen*, é aquilo que sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém” (PEIRCE, 2005, p. 46).

Sendo assim, todo conhecimento só é possível por intermédio de signos. De acordo com este estudioso, construímos sistema de signos para desenvolver o nosso pensamento e para aumentar o nosso conhecimento. Assim, conhecer trata de uma atividade semiótica e a Matemática comparece como exemplar nesse contexto para suas reflexões. Quando concebemos o pensamento humano como uma atividade semiótica, admitimo-la fazendo parte de uma teoria geral de sistemas, os quais são organizações complexas, constituídas a partir de outros organismos complexos, dependentes do seu ambiente.

Algo para ser um signo, de acordo com Peirce, necessariamente, tem que ‘representar’ ou referir-se a alguma outra coisa, chamada seu *objeto* (um signo pode ter mais de um objeto), por isso:

Um signo, ou ‘representâmen’, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino ‘interpretante’ do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu ‘objeto’. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei ‘fundamento’ do representâmen (PEIRCE, 1977, [228] p.46).

---

<sup>74</sup> Representar: estar em lugar de, isto é, estar numa tal relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro. Quando se deseja distinguir entre aquilo que representa e o ato ou relação de representação, pode-se denominar o primeiro de “representâmen” e o último de “representação” (PEIRCE, 1977, p.61). Um signo, ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém (PEIRCE, 1977, p.46).

Sobretudo, para Peirce, o signo caracteriza-se por seu aspecto, essencialmente, triádico: envolve um objeto, um sinal (uma ideia) e um intérprete (Peirce, CP 8-361). Destacamos que, através do signo, não se opera uma apreensão do objeto real pela nossa mente, isso seria impossível por nossa própria limitação de acesso a esses objetos, sejam eles reais ou não.

O caráter de um signo está na mediação genuína, uma vez que ele trata de tudo aquilo que “está relacionado a uma Segunda coisa, seu *objeto*, com respeito a uma Qualidade, de modo tal a trazer uma Terceira coisa, seu *interpretante*, para uma relação com o mesmo Objeto, e de modo a trazer uma Quarta para uma relação com aquele Objeto na mesma forma, *ad infinitum*” (PEIRCE, 1977, p.28).

Peirce, tomando como ponto de partida a relação objeto-signo e esta consistindo no fato de o signo ter algum caráter em si mesmo, ou manter alguma relação existencial com esse objeto ou em sua relação com um interpretante, apresenta-nos três tipos de signos que são:

[...] indispensáveis ao raciocínio: o primeiro é signo diagramático ou *ícone*, que ostenta uma semelhança ou analogia com o sujeito do discurso; o segundo é o *índice* que, tal como um pronome demonstrativo ou relativo, atrai a atenção para o objeto particular que estamos visando sem descrevê-lo; o terceiro (ou *símbolo*) é o nome geral ou descrição que significa seu objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e o caráter significado (PEIRCE, 1990, p.10).

Desse modo, o *ícone* está desconectado do seu objeto e refere-se apenas a uma relação de razão entre o signo e a coisa significada. Ele fornece as qualidades do seu objeto, mas não contém nenhuma declaração de existência com respeito a ele. O *índice*, em contraste, é uma declaração da existência do objeto sem fornecer dele qualquer característica, demonstrando haver uma ligação física direta com seu objeto. Já o *símbolo*, está conectado com seu objeto, em virtude de uma convenção ou de uma ideia da mente do usuário que usa o símbolo, associando-o ao seu objeto. Assim, podemos encontrar na Matemática os elementos da tríade ícone-índice-símbolo a todo o momento.

Peirce ainda dispõe cada classe de signos (ícones, índices e símbolos), respectivamente, de acordo com três categorias fenomenológicas: Primeiridade (originalidade), Secundidade (binariedade) e Terceiridade (mediação). Essas categorias recebem nomes diferentes de acordo com o campo ou fenômeno que tomam corpo.

Tais categorias são modalidades universais e gerais por intermédio das quais temos a apreensão-tradução dos fenômenos<sup>75</sup> que a nós se apresentam a todo instante e lugar. Podemos, talvez, ainda grosso modo, inferir que as categorias fenomenológicas destacadas no pensamento Peirciano tratam de dimensões que se sobressaem, podendo ser evidenciadas ‘no contato’ com os fenômenos, em nossa relação, na compreensão e interação (com a realidade).

Primeiridade remete à idéia de originalidade, imediaticidade, espontaneidade; figura como a categoria da qualidade do sentimento, a primeira apreensão dos fenômenos, tratando do puro sentir. Nesta categoria, situam-se os ícones que, como signos, apresentam algum caráter do objeto em si mesmo, isto é, guardam analogia ou apresentam alguns traços do objeto (ex.: uma fotografia).

Secundidade refere-se à ação-reação, conflito, esforço e resistência. Na Secundidade, observamos uma reação da consciência em relação ao mundo, ainda sem governo da camada mediadora da intencionalidade, da razão ou lei; é a categoria das existências particulares. Pertencem a esta categoria os índices, signos que têm uma relação existencial com o objeto, de modo que um existe porque existe o outro (ex.: uma pegada é o indicativo de que algo ou alguém passou por ali).

Já a Terceiridade reflete a reunião da Primeiridade e da Secundidade, numa síntese intelectual, ou seja, efetivando o pensamento em signos por intermédio dos quais representamos e interpretamos o mundo. A Terceiridade trata da generalidade, mediação e representação. É aqui que se situam os símbolos, enquanto signos que têm uma relação convencionalizada, uma lei, um hábito ou um acordo social, de modo que não são singulares, mas gerais (ex.: a bandeira de um país). E é na Terceiridade que vemos esboçada a noção de signo genuíno ou triádico (através do símbolo), a categoria própria da representação.

A Semiótica é o estudo das relações dos signos, a lógica dos signos. Peirce também definiu signo como: “signo é alguma coisa que representa algo para alguém.” E, na Matemática, deparamo-nos o tempo todo com representações de objetos e conceitos abstratos. Não temos, em Matemática, senão representações dos objetos e não os objetos em si, de forma completa e manipulável.

---

<sup>75</sup> Peirce chama de *fenômeno* tudo aquilo que se apresenta à nossa mente, seja algo real ou não, uma batida de porta, um cheiro de perfume, uma dor no braço, uma lembrança, sejam pertencentes a um sonho ou a uma ideia geral e abstrata da ciência (CORRÊA, 2008, p. 86).

De acordo com Otte (PEIRCE *apud* OTTE, 2001), quando nos encontramos com um fenômeno, percebemos um Primeiro, em relação com um Segundo, mediado por um Terceiro. De todo, qualquer fenômeno só é, por nós, percebido por meio de um signo. É assim que se processa nossa percepção de toda a realidade. Não existe pensamento sem representação. Nas palavras de Peirce (1970, [274], p. 62):

Um *Signo*, ou *Representâmen*, é um Primeiro que se coloca numa relação triádica genuína, tal com um Segundo, denominado seu *Objeto*, que é capaz de determinar um Terceiro, denominado seu *Interpretante*, que assume a mesma relação triádica com seu Objeto na qual ele próprio está em relação com o mesmo Objeto. A relação triádica é *genuína*, isto é, seus três membros estão por ela ligados de um modo tal que não consiste em nenhum complexo de relações diáticas. Essa é a razão pela qual o Interpretante, ou terceiro, não se pode colocar numa mera relação diática com o Objeto, mas sim deve colocar-se numa relação com ele do mesmo tipo da assumida pelo Representâmen. Tampouco pode a relação triádica na qual o Terceiro se coloca ser meramente similar àquela na qual se coloca o Primeiro, pois isto faria da relação do Terceiro com o Primeiro mera Secundidade degenerada. O Terceiro deve realmente colocar-se numa relação dessa espécie e, assim, deve ser capaz de determinar um Terceiro que lhe seja próprio; mas, além disso, deve ter uma segunda relação triádica na qual o Representâmen, ou melhor, a relação deste para com seu objeto, será seu próprio (do Terceiro) Objeto, e deve ser capaz de determinar um Terceiro para essa relação. Tudo isso deve igualmente ser verdadeiro em relação ao Terceiro do Terceiro e assim por diante indefinidamente.

Podemos observar que, quando refletimos ou discutimos sobre qualquer coisa, fazemo-lo em termos de sentenças ou afirmações, de modo que cada reflexão, qualquer pensamento ou pensamento sobre pensamento exige Terceiros, isto é, símbolos.

Os símbolos podem ser *Termos*, *Proposições* ou *Argumentos*. Os índices podem ser *Termos* ou *Proposições* e os ícones só podem ser somente *Termos*, pois:

Um *Termo* é um signo que deixa seu Objeto, e a *fortiori* seu interpretante, ser aquilo que ele pode ser. Uma *Proposição* é um signo que indica distintamente o Objeto que denota, denominado de seu *Sujeito*, mas que deixa seu interpretante ser aquilo que pode ser. Um *Argumento* é um signo que representa distintamente o interpretante, denominado de *Conclusão*, que ele deve determinar. Aquilo que resta de uma Proposição depois de seu sujeito ter sido removido é um Termo (um rema), denominado de seu Predicado. Aquilo que resta de um Argumento quando sua Conclusão é removida é uma Proposição que se denomina sua Premissa ou (dado que ela é, normalmente copulativa), mais frequentemente, suas Premissas... (PEIRCE, 1990, p.29).

Os *argumentos*, elaborações/construções situam-se no topo de toda ‘cadeia’ ou sequência do processo semiótico, podendo ser acionados de três formas, por: *dedução*, *indução* e *abdução* (geralmente denominado de adoção de uma hipótese). Como

abordamos no início, Peirce considera esta divisão quase como podendo ser considerada a chave da Lógica. Sendo que, para ele, a Lógica é quase outro nome para Semiótica e figura como a Ciência das leis necessárias gerais dos signos, em especial dos símbolos. Ainda segundo esse filósofo, em Lógica, também podemos ressaltar três departamentos:

Lógica obsistente, lógica em sentido estrito, ou ‘Lógica Crítica’, é a teoria das condições gerais da referência dos Símbolos e outros Signos aos seus Objetos manifestos, ou seja, é a teoria das condições da verdade. Lógica Originaliana, ou ‘Gramática Especulativa’, é a doutrina das condições gerais dos símbolos e outros signos que têm o caráter significante. [...] Lógica Transuacional, que denomino de ‘Retórica Especulativa’ é substancialmente, aquilo que é conhecido pelo nome de metodologia, ou melhor, ‘metodêutica’. É a doutrina das condições gerais da referência dos símbolos e outros signos aos Interpretantes que pretendem determinar (...) (PEIRCE, 1970, [93], p.29).

De todo, não iremos empreender uma abordagem aprofundada sobre esse aspecto que se relaciona à divisão da Lógica Peirciana. Nosso foco centrou-se no papel dos signos como elementos do/no processo de mediação com o mundo (objeto, fenômenos). Por extrapolar e avançar do sentido de uma compreensão que situa aos signos/representação uma função de simplesmente, ou minimamente, representar ou substituir as coisas, acreditamos que este estudo tenda ao campo denominado por Peirce de ‘Retórica Especulativa’.

Assim, “a mais importante divisão dos signos faz-se em *Ícones*, *Índices* e *Símbolos*” (PEIRCE, 1997, [275] p. 63). Como posicionamos o termo *axioma* enquanto que assumindo o *status* especial na constituição de um conceito na Modernidade – um símbolo -; como, em nossa interpretação, um conceito, nesta direção na Matemática figura resultado ou produto de uma relação elementarmente triádica entre esses elementos que se opera através da dinâmica relacional entre pensamento linguístico e pensamento matemático; e, assim elementarmente, como a Matemática é, por nós, e de acordo com Peirce, entendida como sendo o pensamento diagramático, julgamos adequado retornar e estreitar nossa reflexão sobre a estrutura, função e caracterização desses elementos, especialmente pela relevância que desempenham no desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático. Dessa forma, vamos progredir no sentido de compreender sobre a relação entre Linguagem e Matemática na constituição desse conhecimento, ao olharmos para o significado e oscilações de significado do termo *axioma*, até sua posição na estruturação do nosso pensamento conceitual.



### ***Da natureza do Ícone e o conhecimento Matemático***

O ícone está sempre desconectado do seu objeto, comparece fornecendo suas qualidades e ele não contém nenhuma declaração de existência com respeito ao objeto a que se refere, dispensando, inclusive, a existência desse objeto. Qualquer coisa é um ícone se funcionar como tal, mas, para tanto, ele pede um interpretante ao ser tomado para significar (ELGIN, 1997, p.143).

Podemos dizer que um ícone não representa efetivamente nada, ele apenas apresenta esse objeto, de modo que o (signo) interpretante que o ícone está suscetível a produzir é uma mera possibilidade, uma hipótese ou conjectura. De acordo com Santaella (2003), os ícones, por se relacionarem às qualidades do fenômeno, podem substituir qualquer coisa que a estas (às qualidades) se assemelhem, o que provê aos ícones um alto poder de sugestão.

Esta característica que faz o ícone prescindir da existência do seu objeto torna-se um aspecto relevante e extremamente importante quando observamos operacionalizar-se o pensamento matemático e, especialmente, pelos tipos de objetos que temos na Matemática. Os objetos da Matemática não são do tipo ‘concreto’ e não podem ser observados ou manipulados como nas ciências empíricas. Assim, o ícone, em sua forma, sobressai no desenvolvimento do pensamento matemático, principalmente, por sua capacidade de tornar visível o objeto a que se refere, especialmente, ao olhar mental (CORRÊA, 2008).

Uma propriedade peculiar ao ícone refere-se a que, pela sua observação direta, outra verdade relativa ao seu objeto pode ser inferida, além daquelas que bastaram para determinar sua construção.

Para Otte (2001, p.39):

Os ícones substituem tão completamente seus objetos que dificilmente podem ser distinguidos deles. Assim são os diagramas da álgebra e da geometria. Os diagramas são essencialmente ícones, e ícones ou imagens são particularmente adequados a tornar apreensível e concebível o possível e o potencial, mais que o real e o factual. A matemática tem sido sempre chamada de a ciência do possível ou do logicamente possível, e para verificar se alguma combinação de asserções é consistente ou logicamente possível, ela deve ser visualizada, porque a dificuldade reside na interação entre as várias afirmações, mais do que em significados particulares como tais.

Quando os ícones comparecem, representando seus objetos por semelhança, podem ser divididos, de acordo com o modo da Primeiridade de que participam, em: *imagens, diagramas ou metáforas*.

Os ícones que participam das qualidades simples ou Primeiridade são as *imagens*. Neste primeiro nível, podemos tomar como exemplo de imagem uma fotografia, na qual a qualidade de sua aparência é semelhante à qualidade da aparência do objeto que a imagem da fotografia representa.

Encontramos, num segundo nível, os *diagramas* que reproduzem as relações entre as partes do seu objeto. Tratam especialmente das relações diáticas, ou as que sejam desse modo considerado, referindo-se às partes de uma coisa através das relações análogas em suas próprias partes. Como exemplo, Peirce cita as equações da álgebra:

Quando em álgebra, escrevemos equações uma sob a outra, numa disposição regular, particularmente quando usamos letras semelhantes para coeficientes correspondentes, a disposição obtida é um ícone. Um exemplo:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= n_1 \\ a_2x + b_2y &= n_2 \end{aligned}$$

Isso é um ícone, pelo fato de fazer com que se assemelhem quantidades que mantêm relações análogas com o problema.

Podemos observar que as equações algébricas são ícones cuja semelhança é ajudada por regras convencionadas (regras de comutação, associação e distribuição de símbolos). Vimos aqui que esse aspecto realça a importante e peculiar propriedade do ícone e, através da observação direta sobre os ícones, outras verdades relativas a seu objeto podem ser descobertas além das que bastam para determinar sua construção. E “esta capacidade de revelar verdades insuspeitas é exatamente aquela na qual consiste a utilidades das fórmulas algébricas, de tal modo que o caráter icônico é o que prevalece” (PEIRCE, 1990, p. 64).

Corrêa (2008), neste sentido, destaca que, quando fazemos inferências sobre um ícone, agimos como se fizéssemos sobre o próprio objeto, seja esse ícone exercendo uma função de identidade, de analogia ou de semelhança estrutural para com esse objeto. “Assim, a dedução fundamenta a construção de um ícone ou diagrama em que as relações das partes dos objetos de raciocínio e de experimentação sobre a imagem na mente e na observação do resultado permitem a descoberta de relações despercebidas e escondidas entre as partes” (CORRÊA, 2008, p.91).

Para Peirce, toda equação algébrica é um ícone, exibindo, através de signos algébricos (que não são considerados ícones), relações de quantidades em questão. Ele afirma que todos os matemáticos raciocinam em torno de semelhanças que, segundo Peirce (1990, p.66), “são os próprios gonzos dos portões de sua ciência”. Embora muitos diagramas não tenham uma semelhança ‘sensível’ com seu objeto, o que está em

jogo é a semelhança que se estabelece apenas sobre as relações entre suas partes. E a utilidade dessa similaridade está na sugestão que fazem os novos aspectos sobre supostos estados das coisas, de um modo bastante preciso.

Também Peirce utilizou-se do termo ‘semelhança’ muitas vezes no início de seus estudos, tratando da relação (em Primeiridade) do signo com o objeto, mas, sobretudo, se a semelhança refere-se ao aspecto icônico. De forma que, relacionado à Matemática, ele afirmava que:

[...] o raciocínio dos matemáticos será encontrado alterando em parte o uso de semelhanças [ícones] que são necessárias e fornecem reais suportes a sua ciência. Para os matemáticos, a utilidade das semelhanças [ícones] consiste em sugerir, de um modo preciso, novos aspectos dos estados supostos das coisas. Por exemplo, suponha uma linha curva com pontos contínuos onde a curvatura muda sua direção circular horária e de modo oposto como na figura 1. Vamos também supor que essa curvatura é contínua até que se cruzem todos os pontos do ângulo invertido noutro ponto. O resultado aparece na figura 2. Pode ser descrito como um número de formas ovais completas e juntas, como se por pressão. Não se perceberia que as descrições da primeira e da segunda seriam equivalentes sem as figuras. Devemos perceber que novamente quando nos direcionamos ao tema, aqueles diferentes usos das semelhanças podem ser trazidos sob uma fórmula geral.

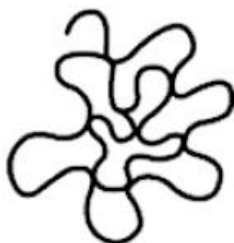


Fig. 1

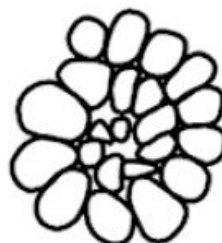


Fig. 2

Segundo Otte (2012), a Matemática procede tipicamente pela construção de *diagramas* (algébricos ou geométricos), observando e analisando os efeitos que certas atividades têm sobre eles. Os julgamentos matemáticos, portanto, tornam-se apodícticos e intuitivos e a diagramatização serve ao propósito de exibí-los (como Kant já afirmava tão enfaticamente).

No terceiro nível da Primeiridade, encontramos os ícones classificados como *metáforas*. Na perspectiva de Peirce (1990, p.63), elas denotam o caráter representativo de um Representâmen através da analogia de um paralelismo com alguma outra coisa. Figuram como justaposições entre duas ou mais palavras que colocam em intersecção o significado convencional dessas palavras.

### *Da natureza do Índice e o conhecimento matemático*

Um índice é um *Representâmen* cujo caráter representativo consiste em ser um segundo individual. Um índice não exprime uma semelhança com seu objeto, ele funciona para indicar outra coisa (uma relação) sobre esse objeto, da qual ele faz parte.

Nas palavras de Peirce (1970, p.74), um índice é

Um signo, ou representação, que se refere a seu objeto não tanto em virtude de uma similaridade ou analogia qualquer com ele, nem pelo fato de estar associado a caracteres gerais que esse objeto acontece ter, mas sim por estar numa conexão dinâmica (espacial inclusive) tanto com o objeto individual, por um lado, quanto, por outro lado, com os sentidos ou a memória da pessoa a que serve de signo.

Qualquer índice perde seu caráter de ser um signo quando seu objeto é removido, mas não quando não há um interpretante. “Tal é, por exemplo, o caso de um molde com um buraco de bala como o signo de um tiro, pois sem o tiro não haveria buraco; porém, nele existe um buraco, quer tenha alguém ou não a capacidade de atribuí-lo a um tiro” (PEIRCE, 1990, [304], p.74). Embora necessite de uma mente interpretadora para essa relação a que se refere, esse interpretante se limita à constatação da relação existente entre o índice e o objeto.

O papel operatório de um índice está em forçar a atenção ao objeto particular sem descrevê-lo, despertando nossa atenção para o objeto, fato, ou fenômeno. “Psicologicamente, a ação dos índices depende de uma associação por contiguidade, e não de uma associação por semelhança ou de operações intelectuais” (PEIRCE, 1970, p.76). A contiguidade se dá, de fato, entre dois elementos, de modo que o índice nos remete sempre a alguma coisa. Examine os exemplos que Peirce (1990, [285], p.67) nos apresenta:

[...] Vejo um homem que anda gingando. Isso é uma indicação provável de que é um marinheiro. Vejo um homem de pernas arqueadas usando calças de veludo, botas e jaquetas. Estas são indicações prováveis de que é um jóquei ou algo assim. Um quadrante solar ou um relógio *indicam* a hora. [...] Uma batida na porta é um índice. Tudo o que atrai a atenção é um índice. Tudo o que nos surpreende é índice, na medida em que assinala a junção entre duas porções de experiência.

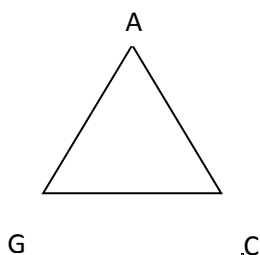
Dessa forma, o índice é um signo que significa algo somente por meio de seu vínculo existencial com seu objeto. Este objeto, sobretudo, pode ter ou não existência

real, podendo ser um objeto imaginário, uma experiência passada ou do presente. De acordo com Peirce (2003, p.75):

[...] Tais considerações poderiam induzir o leitor a supor que os índices se referem exclusivamente a objetos da experiência, e que não haveria uso algum para eles na matemática pura, que lida, como o faz, com criações ideais, sem se preocupar com o fato de elas serem ou não concretizadas em algum momento. Contudo, as construções imaginárias do matemático, e mesmo os sonhos, aproximam-se da realidade a ponto de disporem de um certo grau de fixidez e de quase realidade no objeto com o qual procura conformar-se.

Observamos que o caráter de um índice se encontra em indicar-nos a relação entre dois: elementos, experiências, objetos, circunstâncias quaisquer; de certo modo, sugerindo uma direção que nos conduzirá a encontrar um elemento com o qual a ligação deva ser feita. Ademais, “o que ocorre é que o significado de um índice está baseado sempre na experiência vivenciada pelo interpretador” (CORRÊA, 2008, p.93).

Os índices são imprescindíveis à Matemática, funcionam de modo a dar legitimidade à existência de seus objetos. Haja vista que os índices indicam uma relação, a qual só tem existência quando somos capazes de ter em mente um objeto ou uma experiência que se baseia e funda nesta relação. Observando os geometras, percebemos que eles utilizam letras em partes diferentes de seus diagramas, como segue no triângulo abaixo:



Neste caso A, G e C são índices do tipo *genuíno*, pois tratam de um segundo individual, onde a Secundidade é uma relação existencial.

Depois, os matemáticos passam a utilizar estas letras (A, B e C) para indicar essas partes:

<p>O triângulo ACG é isóscele quando <math>\hat{C}</math> e <math>\hat{G}</math> são congruentes.</p>
---

Dessa maneira A, C e G são índices do tipo *degenerado*, pois são empregados para fixar a referência em primeiro lugar. Para Peirce (1970, P.75, os índices são degenerados, “pois, embora eles possam, acidente e indiretamente, referirem-se a coisas existentes, eles diretamente se referem, e precisam se referir às imagens na mente que palavras prévias criaram”, caracteristicamente, chamam a atenção sobre alguma coisa, referindo-se a uma relação. Basicamente, todo índice funciona como uma declaração da existência do objeto sem fornecer qualquer característica desse objeto.

Segundo Otte (2001, p.43):

Do ponto de vista da matemática, a qualidade relativa ao índice é o que realmente torna a abordagem semiótica inevitável, porque ela ajuda a resolver o enigma dos objetos matemáticos. Os índices, [...], fornecem uma garantia positiva da realidade e da proximidade de seus objetos. Mas aqui também esses objetos podem, como as letras em álgebra ou geometria, pertencer a um mundo completamente virtual.

Sobretudo, os índices, como também os ícones, nada podem afirmar de/sobre qualquer objeto, mas, sem dúvida, eles podem servir a uma expressão de qualquer outro modo. O índice é singularmente importante no desenvolvimento do Conhecimento Matemático, pois, ao ficar indicando e não caracterizando as coisas, ele nos permite, mesmo não sabendo do que trata qualquer coisa, mas simplesmente ao indicá-la (atribuir-lhe um sinal), agir ou reagir, estabelecendo relações com o que já temos à mão, ou que já conhecemos. Otte<sup>76</sup>, explica que “muitas vezes, nós não sabemos da verdade final, mas já podemos tomar uma atitude, pois todo fenômeno tem várias facetas. E, isso tem a ver com a continuidade da natureza”.

Como Otte (2003)<sup>77</sup> escreveu uma vez:

---

<sup>76</sup> Fala de Otte em Momento de Orientação, em 24 de abril de 2014.

<sup>77</sup> Inserção de Otte em nosso texto:

“ A Matemática está preocupada, como Peirce escreve, com a substância das hipóteses. "A matemática é puramente hipotética: produz nada além de proposições condicionais" (Peirce, CP 4.240).

Ainda temos de ser capazes de decidir questões de identidade, para ver se  $A = B$ , ou não, ou, dito de outra forma, a matemática é uma atividade prática e, é mais do que um reflexo mental, opera com "objetos". Portanto índices são absolutamente indispensáveis em matemática pura também. Pode-se pensar, o próprio Peirce diz, "que não haveria uso para índices em matemática pura, que tratam, como faz, com criações ideais, sem levar em conta se eles estão em qualquer lugar ou não realizados. Mas as construções imaginárias do matemático, e até mesmo os sonhos, até agora aproximados da realidade como ter um certo grau de fixidez, em consequência do que eles podem ser reconhecidos e identificados como individuais. Em suma, não é uma forma degenerada de observação que é direcionado para as criações de nossas próprias mentes - usando a palavra observação em seu sentido pleno como implicando um certo grau de fixidez e quase-realidade ao objeto ao qual ele se esforça para se conformar. Assim, verificamos que os índices são absolutamente indispensáveis em matemática "(Peirce, CP 2.305).

Os índices que ocorrem em matemática pura referem-se a entidades ou objetos que pertencem a um modelo, ao invés de "o mundo real", ou seja, eles indicam objetos em universos semânticos

Mathematics is concerned, as Peirce writes, with the substance of hypotheses. "Mathematics is purely hypothetical: it produces nothing but conditional propositions" (Peirce, CP 4.240).

Still we must be able to decide questions of identity, to see whether  $A=B$ , or not, or, stated differently, mathematics being an activity and practice, rather than a mental reflection, operates on "objects". Therefore indices are absolutely indispensable in pure mathematics also. One might think, Peirce himself says, "that there would be no use for indices in pure mathematics, dealing, as it does, with ideal creations, without regard to whether they are anywhere realized or not. But the imaginary constructions of the mathematician, and even dreams, so far approximate to reality as to have a certain degree of fixity, in consequence of which they can be recognized and identified as individuals. In short, there is a degenerate form of observation which is directed to the creations of our own minds--using the word observation in its full sense as implying some degree of fixity and quasi-reality in the object to which it endeavors to conform. Accordingly, we find that indices are absolutely indispensable in mathematics" (Peirce, CP 2.305).

The indices occurring in pure mathematics refer to entities or objects that belong to a model, rather than to "the real world", that is, they indicate objects in constructed semantic universes. They may thus be considered as some sort of degenerate indices. That mathematics, on the one hand, does not make existential claims only outlining possibilities and in the other hand makes essential use of indices, in order to represent statements of fact, is fundamental for Peirce's conception of mathematics as "diagrammatic reasoning". Indexicality is what in particular makes the semiotic approach unavoidable, because it shows that mathematical reasoning is contextual like all other reasoning. The relevant contexts are semiotic contexts. And it is, in fact, sometimes claimed that it is with his notion of index "that Peirce is at once novel and fruitful" (Seboek 1995, 223). Peirce saw, Seboek continues, "as no one before him had, that indication (pointing, ostension, deixis) is a mode of signification as indispensable as it is irreducible".

### ***Da natureza do Símbolo e o conhecimento matemático***

Um símbolo tem seu caráter de signo porque possui um interpretante, de modo que é uma regra, uma lei que determinará seu interpretante. Tal regra ou lei pode ser convencionalizada ou fruto de um acordo coletivo e o símbolo não designa ou refere-se a um objeto particular, mas sempre a uma classe. Por referir-se a uma ideia abstrata, o símbolo não é singular, mas representa uma generalidade.

---

construídos. Poderão, assim, ser considerado como uma espécie de índices degenerados. Por um lado a matemática, por um lado, não faz afirmações existenciais apenas delineando possibilidades e por outro lado faz uso essencial de índices, com o fim de representar declarações de fato, isto é fundamental para a concepção de matemática como "raciocínio esquemático" de Peirce. Indexicabilidade é o que, em particular, faz com que a abordagem semiótica seja inevitável, porque mostra que o raciocínio matemático é contextual como todos os outros raciocínios. Os contextos relevantes são contextos semiótico. E é, de fato, às vezes, afirmado que é com sua noção de índice "que Peirce é ao mesmo tempo novo e fecundo" (Seboek 1995, 223). "Peirce viu", continua Seboek, "como ninguém antes dele tinha visto que essa indicação (apontando, ostensão, Deixis) é um modo de significação tão indispensável quanto é irreduzível" [Tradução nossa].

Um símbolo é uma lei ou regularidade do futuro indefinido. Seu interpretante deve obedecer à mesma descrição, e o mesmo deve acontecer com o Objeto imediato completo, ou significado. [...] Assim, embora o objeto completo de um símbolo, quer dizer seu significado, seja de natureza de uma lei, deve ele ‘denotar’ um individual e deve ‘significar’ um caráter (PEIRCE, 1970, [293], p.71).]

Quando alguém diz a palavra *quadrado*, ela não está querendo chamar atenção ou dizendo a respeito de um quadrado em particular. A figura de um quadrado qualquer desenhado no papel, seria um índice. Essa pessoa está referindo-se a uma ‘ideia geral’ de um objeto, que se apresente, geometricamente, limitado por quatro linhas, do mesmo tamanho cujos vértices formam ângulos retos. Ela está tratando de um quadrado em geral, não um específico e particular e é dessa generalidade que trata um símbolo. De modo que a compreensão da palavra *quadrado*, quando esta é pronunciada, dá-se por uma lei de representação que está armazenada em minha mente ou de outra pessoa qualquer. O símbolo se conecta ao sujeito em virtude de uma convenção ou de uma ideia da mente de seu usuário.

Peirce (1970, [298], p.73) ainda reforça dizendo que:

Qualquer palavra comum, como ‘dar’, ‘pássaro’, ‘casamento’, é exemplo de símbolo. O símbolo é aplicável a tudo o que possa concretizar a ideia ligada à palavra; em si mesmo, não identifica essas coisas. Não nos mostra um pássaro, nem realiza, diante de nossos olhos, uma doação ou um casamento, mas supõe que somos capazes de imaginar essas coisas, e a elas associar a palavra.

Observamos que a palavra em si mesma não tem existência, mas trata de um ser real que consiste no fato de que existe algo a que se deverá acomodar. A palavra e seu significado são ambas regras gerais e irão diferir somente se algum sentido especial for atribuído ao seu significado.

Um símbolo não pode indicar uma coisa particular qualquer, denotando uma espécie de coisas. Não somente aquilo, mas ele é ele mesmo, um tipo e não uma coisa singular. De forma que um símbolo não carrega em si todo o significado de uma ideia ou conceito, mas basta olhar ou ouvir um símbolo que identificamos as características do objeto ou do conceito a que está associado.

Quando um símbolo passa a existir, ele se espalha entre as pessoas e cresce. Eles têm existência pelo desenvolvimento externo de outros signos, particularmente de semelhanças ou de signos misturados, participando da natureza das semelhanças e dos



símbolos. Nós pensamos somente por signos. Tais signos são de natureza mista e a parte simbólica deles são os conceitos. Se um homem forma um novo símbolo, é por pensamento, envolvendo conceitos.

É apenas a partir de outros símbolos que um símbolo novo pode surgir. Os símbolos “retiram seu ser do desenvolvimento de outros signos, especialmente ícones, ou de signos misturados que compartilham da natureza dos ícones e símbolos” (PEIRCE, 1970, [302], p.73).

Na Matemática, podemos visualizar facilmente esse processo. Se observarmos, por exemplo, um teorema, neste, as proposições admitidas se tornam outras proposições no transcorrer da argumentação com a intenção de promover uma convicção. Assim, as palavras ou termos utilizados funcionam como ícones, pois servem para evocar uma ideia; as proposições, ao declararem fatos, são consideradas índices e o argumento que estabelece a estrutura do pensamento, ou um hábito, é considerado como símbolo.

Podemos inferir, de acordo com Corrêa (2008), que os símbolos por si sós nada acrescentam em termos de conhecimento. O que realmente nos fornece a chance de descoberta acerca do objeto são os ícones, uma vez que invocam uma ideia.

O símbolo só existirá de fato se houver uma mente interpretadora predisposta a fazer a conexão entre ele e seu objeto, através de uma regra, lei, hábito ou convenção. Isso é o que fornece ao símbolo o caráter mediador, uma vez que é somente através do símbolo que se é capaz de generalizar, de realizar processo de generalização, de pensar sobre o pensamento. É a função mediadora dos símbolos que os tornam imprescindíveis à Matemática, fornecendo-nos os meios para pensar sobre os pensamentos, de modo que, ao contrário, não poderíamos fazer.

Os símbolos nos permitem, como já afirmamos, criar abstrações, sem as quais não teríamos essa grande máquina de descobertas (OTTE, 2001). “Eles nos permitem contar; ensinam-nos que coleções são individuais (individual = objeto individual) e, em muitos aspectos, são uma distorção da razão” (CP 4.531).

Todo raciocínio humano acontece de uma mistura de ícones, índices e símbolos; não podemos dispensar nenhum deles. O todo complexo do pensamento pode ser chamado de símbolo e, para sua simbolização, o caráter vivo é o que prevalece.

A Matemática não é um estudo dos objetos, mas das relações entre esses objetos e relações expressas por representações diagramáticas. Desta forma, pressupõe-se sempre uma atividade sobre o símbolo, de modo que este ofereça, a qualquer pessoa,

elementos sobre os quais ela possa abstrair o significado do símbolo, formar conceitos, e, posteriormente, usar essas experiências para realizar as conexões em seus processos mentais. Através de uma associação de ideias e conceitos que nos remete ao objeto geral, recorre a um raciocínio indutivo ou dedutivo, que nos provê a condição necessária de pensar sobre o próprio pensamento.

O símbolo é resultante de uma série de fatores, mas seu significado está livre para se relacionar a novos processos, gerando novos resultados, novos símbolos (CORRÊA, 2008, p.97). A generalização depende da simbolização. Ao se dirigir a atenção para as propriedades relacionais das representações matemáticas dadas e, transformando-as em novos objetos por um processo denominado por Peirce de ‘abstração hipostática’ e por Piaget de ‘abstração reflexiva’, temos o processo de generalização que possui, na simbolização, seu elemento essencial. E é por meio desse tipo de abstração, segundo o Estruturalismo Matemático Construtivo, que substituímos um sistema de operações por um objeto integrado, possibilitando-nos pensar sobre o pensamento para ter, como resultado, um novo objeto. No entanto cabe fazer aqui uma distinção entre o processo abstrativo de Peirce e o de Piaget, segundo Otte (2012, p.9)<sup>78</sup>

O que distingue Piaget de Peirce é a ausência de observação e intuição como elementos da atividade matemática. Nós assumimos com Peirce que a componente extensional do pensamento matemático, como um resultado da ausência de um autêntico polo referencial – além disso, números ou funções não são como cadeiras ou outros objetos concretos -, é para ser concebida num modo duplo. Por um lado, é entendido com algo que Castonguay (1972) chamou de “componente heurística do pensamento matemático” e que denota a fonte da inspiração “para a colocação de relações entre diversos conceitos e entidades matemáticos possivelmente percebidos de forma referencial, relações as quais podem eventualmente cristalizar,... em relações objetivas de vínculo entre conceitos expressos linguisticamente” (p.3). Por outro lado, pretendemos que essa componente heurística seja o conjunto de todas as possíveis representações de uma relação matemática ou a classe de todas as possíveis aplicações ou modelos de uma estrutura matemática à mão.

Vejamos a ideia de um triângulo geral que, segundo Berkeley (1975, p.70), “devemos reconhecer que uma ideia, que considerada em si mesma é particular, torna-se geral, por ser feita para representar ou pôr de pé todas as outras ideias particulares do mesmo tipo”. Assim, como na afirmação ‘uma maçã é uma fruta’, o triângulo e a maçã funcionam como uma variável livre que pode ser, ainda, especificada por necessidade.

---

<sup>78</sup> Texto *O que é a Matemática realmente?* de Michael Otte (Apresentação plenária no colóquio internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012).

Quando concebemos generalização com a introdução de variáveis, podemos perceber a diferença entre o predicativo generalidade e continuidade e, observando que, em Matemática discreta e Ciência da Computação, as variáveis são meros espaços reservados, enquanto em Matemática contínua e as Ciências empíricas variáveis, são objetual, isto é, objetos incompletamente determinados. Em uma proposição como ‘uma maçã é uma fruta’, seria natural interpretar ‘uma maçã’ como um espaço reservado, porque isso pressupõe que demos os nomes individuais para todas as maçãs neste mundo (QUINÉ, 1974, capítulo III).

Para Otte (2014), existem ideias de uma maçã ou um triângulo em geral, mas eles acabam sendo as ideias de determinados triângulos, colocados para um determinado uso. Por isso, um triângulo, em geral, é uma variável livre, como os termos em descrições *axiomáticas* e não uma coleção de triângulos determinados. É uma ideia, um ‘objeto ideal’ que governa e produz suas representações particulares. Os conceitos matemáticos figuram com esse mesmo sentido, ou seja, bem platônico, como um ‘objeto ideal’.

Otte (2012), neste sentido, aponta que os matemáticos generalizam, ao introduzir objetos, ideias, em atividades matemáticas, que não são nada mais do que abstrações hipostáticas. Ainda afirma Otte, que Peirce foi um dos primeiros a observar que a abstração em que se baseia esse procedimento é muito importante para os matemáticos. A generalização depende, portanto, da simbolização. E o princípio da continuidade é o elemento que justifica tal generalização. Para Otte, generalização e continuidade funcionam como sendo a mesma coisa.

Na dinâmica do raciocínio matemático, interagem e se unem: ícone, índices e símbolos. Poder-se-ia pensar, ressalta Otte (2014)<sup>79</sup>, que não haveria uso para índices em Matemática pura, tratamento que normalmente se faz com criações ideais, sem levar em conta se eles estão em qualquer lugar ou não realizados. “Mas as construções imaginárias do matemático, e até mesmo os sonhos, até o momento aproximado da realidade tem certo grau de fixidez, em consequência do que eles podem ser reconhecidos e identificados como indivíduos” (Peirce, CP 2.305). Os índices que ocorrem em Matemática pura referem-se a entidades ou objetos que pertencem a um

---

<sup>79</sup> Manuscrito de Michael F. Otte, datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

modelo, ao invés de ‘o mundo real’, ou seja, de acordo com Otte (2014)<sup>80</sup>, eles indicam objetos em universos semânticos construídos. E evidenciamos, nesse aspecto, a relevância dos *axiomas* tomados como hipóteses.

A Matemática, por um lado, não dispõe de reivindicações existenciais somente delineando possibilidades; por outro lado, ela faz uso essencial de índices, no sentido de representar declarações de fato, sendo fundamentais para a concepção da Matemática de Peirce como ‘raciocínio esquemático’.

O pensamento de Otte destaca também que a Matemática não pode estabelecer seus objetos por meio de descrição à moda da noção de ‘conceito completo’ de uma substância individual, como em Leibniz. E aqui entra o princípio da continuidade e ele pode ser tomado como outro nome para generalização. Peirce, buscando respostas a questões como esta, enfatizava a importância do princípio da continuidade, por entender que a intelegibilidade ou relevância pressupõe continuidade, ao passo que um fato novo e, ainda, inexplicável sempre marca uma ruptura ou uma descontinuidade (OTTE, 2014). O primeiro filósofo que tinha visto isto foi Peirce e, por esta razão, foi ele quem caracterizou a Matemática como a prática de ‘raciocínio esquemático’.

A Matemática é, como Peirce define: "a ciência que tira conclusões necessárias" (Peirce, CP 3.558 ).

E se a Matemática é

"a ciência que desenha conclusões necessárias", e se todo o seu negócio consiste em deduzir as consequências de suposições hipotéticas, ela “é aquela ciência na qual uma ciência da lógica não é pertinente. Pois nada pode ser mais evidente sem a ajuda de seus próprios raciocínios. Mas há uma parte do negócio do matemático em que é necessária uma ciência da lógica. Ou seja, o matemático é chamado para considerar um estado de fatos que são apresentados em uma massa confusa . Fora deste estado de coisas que ele tem desde o início ele tem que construir a sua hipótese . Assim , a questão da geometria tópica é sugerida por observações comuns. A fim definitivamente de afirmar a sua hipótese, o matemático, antes que chegue ao seu próprio negócio, deve definir em que consiste a continuidade, para os tópicos propostos, e isso requer uma análise lógica de extrema sutileza"(PEIRCE, CP 7,525-7,525).

E, na verdade, os processos de generalizações requerem uma nova lógica, uma lógica de pensamento relacional para escapar dos paradoxos da continuidade. O ‘princípio da continuidade’ se transforma em um poderoso meio de investigação matemática e experimentação (Descartes, Leibniz, Poncelet, e Peirce). Esse princípio da

---

<sup>80</sup> Manuscrito de Michael F. Otte datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

continuidade é, antes de tudo, um meio de idealização e de generalização, isto é, um meio para a criação de objetos ideais ou idealizados, em termos de invariantes, bem como uma nova forma de raciocínio, ou seja, ‘o raciocínio esquemático’ (PEIRCE, CP 4.418).

Com Peirce, o princípio da continuidade torna-se um instrumento de análise de estruturas relacionais e suas possíveis transformações, ao invés de ser concebido como princípio de ordem entre determinados fenômenos ou um mero princípio da razão.

Peirce escreve: "O geômetra desenha um diagrama, que se não é exatamente uma ficção, é, no mínimo, uma criação, e por meio da observação de que o esquema que ele é capaz de sintetizar e mostrar relações entre elementos que antes pareciam não ter nenhuma conexão necessária. As realidades obrigam-nos a colocar algumas coisas em relação muito próxima e outras nem tanto, em um ambiente altamente complexo, e no sentido em si de forma ininteligível, mas é o gênio da mente, que ocupa todas essas sugestões de sentido, acrescenta muito para eles, torna preciso, e mostra-lhes de forma inteligível nas intuições de espaço e tempo "( PEIRCE, CP 1.383 ).

Daí resulta, em particular, que as palavras ou sinais, por um lado, e os objetos e metas, por outro lado, não são tão distintas e separadas como se poderia supor. Para desenhar uma distinção absoluta entre signos e objetos, ou entre conceitos e percepções, os lados operativos e receptivos da mente humana, equivaleria a algo como paradoxo da corrida entre Aquiles e a tartaruga de Xenon (PEIRCE, CP. 5.157 e 5.181).

Kant, de um outro modo, referia-se de mesmo modo a ‘conceito e intuições’, dizendo que conceitos sem intuições são cegos e intuições sem conceitos são vazios. Peirce era um profundo estudioso de Kant e ele transforma a epistemologia de Kant na Semiótica, a teoria geral dos signos (OTTE, 2013).

Nossa interpretação de abordagem semiótica, nas palavras de Otte (2013), concorda com E. J. Dijksterhuis (em seu livro: *A mecanização da visão de mundo*), pois, de certo modo, os cientistas aristotélicos não conseguiram avançar e descobrir, por exemplo, as leis corretas dos corpos em queda livre, porque eles não estavam dispostos a reduzir a grande complexidade do mundo que brota da percepção empírica. Eles, definitivamente, não concordaram em aceitar o reducionismo técnico.

Se, de um lado, a crítica do empirismo ingênuo da atualidade exige que se é preciso investigar mais profundamente e proceder a partir da aparência para a essência,

Otte (2013), alicerçado em Peirce, aponta que é necessário proceder da aparência da realidade à representação simbólica da mesma.

Para Otte (2013), a essência de algo é a essência da representação desse algo e esta é apenas mais uma representação, cuja essência desta última é mais outra representação etc. etc. Mas isso não significa que a gente poderia inventar representações à vontade. Um signo é o signo de algum objeto, caso contrário, não é signo! E o termo ‘objeto’ não deverá ser entendido em termos empíricos, mas no sentido de uma representação que surge em nossa mente sobre esse mesmo objeto, ou *Representâmen*. O mundo empírico precisa ser sempre adaptado. E, neste sentido, a atividade que envolve a relação entre sujeito e objeto torna-se elementar e, essencialmente, importante nas escolhas dos signos e das representações.

Para Peirce, o único significado de uma ideia reside nas consequências práticas que dela se possa inferir, tese esta central em sua filosofia, denominada de Pragmatismo. No ponto de vista sobre Complementaridade ‘Otteano’, o significado e a objetividade de uma ideia representada por um signo repousam na atividade envolvida, nas infinitudes de aplicações últimas desse signo.

Sempre e novamente uma construção ou um procedimento algorítmico é tomado como um objeto para ser incorporado em outra construção ou outro procedimento. Mas para reificar conceitos operacionais é necessário empregar a intuição espacial, porque a intuição e a atividade matemáticas não operam em objetos singulares mas em “espaços” de todos os tipos (OTTE, 2012, p.11)<sup>81</sup>.

Mesmo porque o mundo é matéria em movimento e o movimento das nossas representações corresponde ao próprio movimento da realidade objetiva da matéria.

---

<sup>81</sup> Texto *O que é a Matemática realmente?* de Michael Otte (Apresentação plenária no colóquio internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012).

### **3.3 Reflexões sobre nossa opção de uma abordagem semiótica e perspectiva Peirceana na interpretação do termo *axioma* e alicerçada pelo pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’**

Por defendermos que a matemática é essencialmente uma atividade que opera com símbolos e diagramas, a semiótica se torna um basilar instrumento de pesquisa para entender a cognição e a epistemologia matemática (OTTE, 2012)<sup>82</sup>.

Nosso objetivo, nesta parte final deste capítulo, buscará sintetizar as reflexões efetuadas e exercitará elaborar um diagrama que espelhe essa síntese, contemplando nosso entendimento sobre a abordagem semiótica, perspectiva Peirciana agregada a uma interpretação que mire o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. A pretensão com a diagramatização é tentar destacar o sentido, princípio (no sentido de Bohr), ou seja, o fenômeno da Complementaridade que está envolvido na dinâmica processual de desenvolvimento cognitivo operacionalizada através de signos, como resultados de uma relação entre a Linguagem e a Matemática.

Estamos conscientes do risco que corremos, diante da difícil tarefa de, a partir de um diagrama, poder conseguir estabelecer as possíveis relações entre os aspectos delineados; pensamos até que não conseguiremos. Mas, mesmo com essa ameaça, acreditamos valer a pena, por entendermos que esta é uma construção que não deve ser solitária, precisa ser conjunta. Assim, é na possibilidade de dialogar com o leitor, de instigar um exercício metarreflexivo, que nos permitimos correr esses riscos. Afinal, na pesquisa, devemos-nos permitir a alguns mergulhos incertos. Evidentemente, com fôlego bastante para volta à tona. Então, respiremos fundo!

Para Peirce, não existe pensamento sem representação, pois esta se constitui a base e fonte geradora de toda a atividade cognitiva. De forma que todo nosso conhecimento só se torna possível através dos signos.

Toda epistemologia começa com a distinção do sujeito e do objeto, concebendo o conhecimento, em termos de uma relação, entre esses dois polos. Como já foi dito: não existe pensamento sem representação e esta é uma terceira categoria básica.

Relacionado à primeira que temos é nossa intuição, à segunda é a atividade do objeto que resiste a nossos esforços e à terceira é que temos o conhecimento, em termos de uma representação.

---

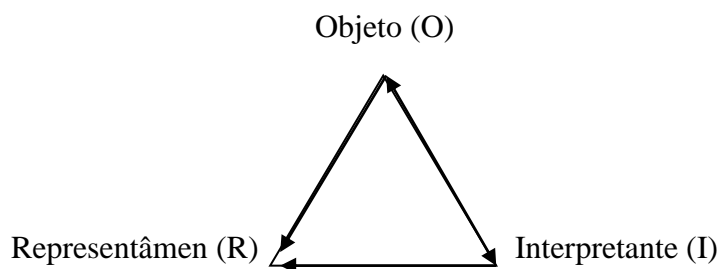
<sup>82</sup> Texto *O que é a Matemática realmente?* de Michael Otte (Apresentação plenária no colóquio internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012).

Dinamicamente, poder-se-ia dizer: o primeiro é a coisa em si sem tomar conta do mundo lá fora; o segundo é um par (o mundo sendo percebido/reagindo pelo/ao sujeito) e o terceiro é a relação entre duas coisas. Por exemplo: A apresenta ou entrega C para B.

Peirce nos diz isso:

Um signo, *ou representamen*, é uma coisa qualquer que está para alguém em lugar de outra coisa qualquer sob um aspecto ou a um título qualquer. Dirige-se a alguém, isto é, cria no espírito desta pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido. A este signo que ele criou o nome de interpretante do primeiro signo. Este signo está em lugar de qualquer coisa: do seu objecto. Está em lugar deste objecto, não sob todos os aspectos, mas em referência a uma espécie de ideia a que por vezes tenho dado o nome de fundamento do *representamen* (PEIRCE, 1977, [228] p.46).

O signo origina-se a partir de uma relação triádica, que pode ser esboçada da seguinte forma:



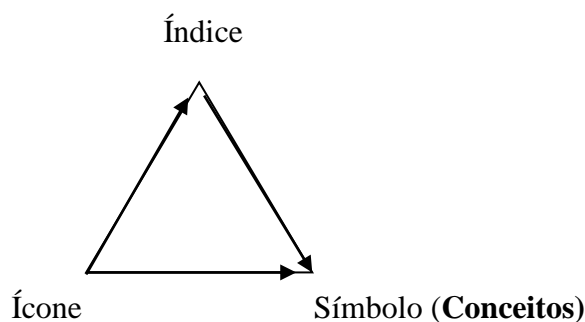
Partindo desta relação, ele desenvolve toda sua teoria, principalmente, tomando como exemplo a Matemática. De início, podemos interpretar que o sentido de Complementaridade se estabelece na dinâmica do relacionamento interdependente entre esses três elementos destacados por Peirce.

Daí, o seu fundamento e base essencial do seu pensamento, por entender que conhecer trata de uma atividade semiótica. O caráter do signo é determinado pela relação de mediação genuína entre o sujeito cognoscente (interpretante) e o objeto (fato, fenômeno.). O signo trata de todo aquele que “está relacionado a uma Segunda Coisa, seu *objeto*, com respeito a uma Qualidade, de modo tal a trazer uma Terceira coisa, seu *interpretante*, para uma relação com o mesmo Objeto, e de modo a trazer uma Quarta para uma relação com aquele Objeto na mesma forma, *ad infinitum*” (PEIRCE, 1977, p.28).



Para Peirce, segundo Otte<sup>83</sup> (2013), é muito importante entender que um signo não é uma coisa arbitrária nem uma coisa que fica sob o comando exclusivo do sujeito. Mesmo se o matemático estiver pensando num diagrama, este diagrama tem certa natureza própria; mesmo ficções precisam ter certa coerência, pois a primeira característica de um signo é ser consistente. Daí resulta que uma primeira classificação de signos deveria ser feita de acordo a como eles se referem aos objetos. E aqui, nesta primeira classificação, o índice se destaca, pois representa uma afirmação de existência enquanto o ícone dá as características de seu objeto, mas não garante que esse objeto exista. Podemos desenhar unicórneos sem garantir a sua existência. Já o símbolo, junta índice e ícone. Por exemplo, uma proposição como ‘Sócrates é bom’, é um símbolo; o nome *Sócrates*, sendo um índice e o predicado *bom*, um ícone!

O Representânen pode assumir três **tipos de signos básicos**:



Segundo Peirce (1990, p.10):

[...] indispensáveis ao raciocínio: o primeiro é signo diagramático ou *ícone*, que ostenta uma semelhança ou analogia com o sujeito do discurso; os segundo é o *índice* que, tal como um pronome demonstrativo ou relativo, atrai a atenção para o objeto particular que estamos visando sem descrevê-lo; o terceiro (ou *símbolo*) é o nome geral ou descrição que significa seu objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e o caráter significado (PEIRCE, 1990, p.10).

Observamos que o símbolo tem conexão com seu objeto em virtude de uma convenção ou de uma ideia da mente do usuário que usa esse símbolo, associando-o com seu objeto. Neste ponto, destacamos nossa compreensão de que os conceitos tratam de símbolos, assumindo relação estreita com o Interpretante e como resultado de uma

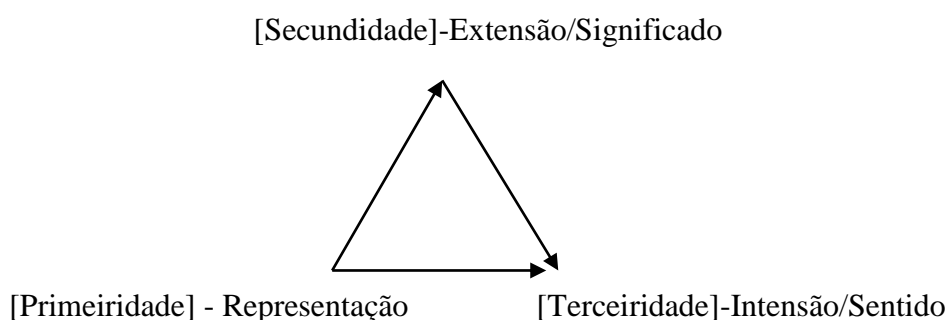
<sup>83</sup> Anotação de Otte, em 16/04/2013, ao fazer inferências neste capítulo.

síntese intelectual. De maneira que, como entendemos que todo raciocínio matemático seja diagramático, constituindo-se de ícones, índice e símbolos, identificamos, de imediato, ser imprescindível o empreendimento de uma abordagem interpretativa semiótica na análise dos (também) conceitos matemáticos.

Tais signos se constituem no processo de apreensão dos objetos, ou fenômeno com o qual o sujeito (Interpretante) se relaciona. Segundo Peirce, podemos distinguir, nesse processo, o que ele define como sendo três categorias fenomenológicas de apreensão-tradução dos fenômenos: Primeiridade, Secundidade e Terceiridade (mediação).

Peirce ainda explica que, na Primeiridade, temos a categoria do sentimento e é onde se processa a primeira apreensão dos fenômenos e trata do puro sentir. Nessa categoria, encontramos os ícones, que tais como signos apresentam algum caráter do objeto em si mesmo, guardando uma analogia ou apresentando alguns traços do objeto (ex.: uma figura, fotografia ou imagem). Aqui temos a representação propriamente dita.

Na Secundidade, já existe uma reação da consciência em relação ao mundo, mas, ainda, sem o governo da camada mediadora da intensionalidade, da razão ou lei. Esta categoria trata das existências particulares (significados), da **extensão**. É, na Terceiridade, que temos a fusão de Primeiridade com a Secundidade, por meio de uma síntese intelectual, e chegamos à **intensionalidade**, o sentido, ou seja, onde se efetiva, por meio dos signos, o modo pelo qual representamos e interpretamos o mundo.

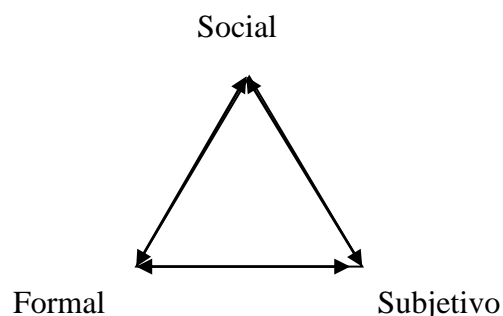


Otte (2001), neste sentido, afirma que, quando nos deparamos com um fenômeno, percebemos um Primeiro em relação com um Segundo, mediado por um Terceiro. Esse Terceiro é a representação ou o signo.

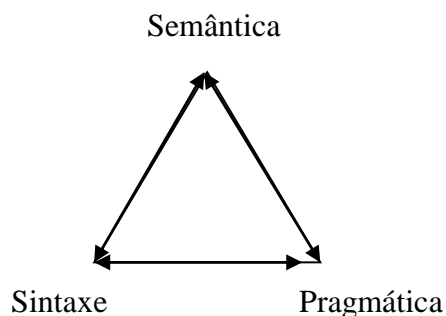
E todo e qualquer fenômeno só pode ser, por nós, percebido através de um signo. E é, assim, que se processa nossa percepção de toda a realidade.

Acordamos com Peirce que todo conhecimento só seja possível por intermédio de signos e também entendemos que seja pela construção de sistema de signos que desenvolvemos nosso pensamento e aumentamos nosso conhecimento. E, como afirmamos no início deste capítulo, ao concebermos a atividade cognitiva com uma atividade semiótica, situamos a Semiótica como fazendo parte de uma teoria geral de sistemas, e estes como sendo organizações complexas, constituídas a partir de outros organismos complexos e dependentes do ambiente em que estão inseridos.

Assim, devemos perceber todo o conhecimento como uma relação que se estabelece e se revela a partir da dinâmica entre **três aspectos** do nosso conhecimento imanentes de/em sua base elementar, sejam eles: **o formal, o social e o subjetivo**.

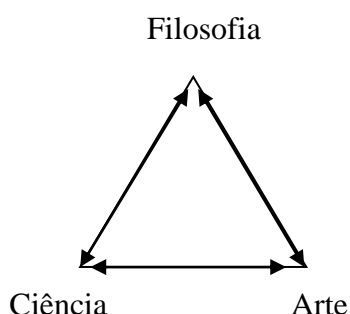


Decorre daí nosso entendimento em justificar que, na Matemática, para além de uma análise envolvendo a **dimensão** semântica dos seus conceitos, como é comum nas Ciências Humanas, necessitamos empreender uma análise que envolva a dimensão pragmática dos conceitos.



Se, de um lado, a dimensão de análise semântica pode nos aproximar dos significados dos conceitos, estes estão sujeitos aos sentidos que possam ser atribuídos a eles e, só através de um estudo sobre o uso, sobre as atividades envolvidas na utilização desses conceitos, chegamos aos sentidos a eles atribuídos. De forma que, neste estudo, em especial, uma análise que envolva a dimensão pragmática do conceito de *axioma* pode nos possibilitar a compreensão sobre uma mudança que ocorre do *axioma*, sendo tomado como antônimo de hipótese e passando a ser tomado como sinônimo de hipótese, uma vez que esta dimensão trata do uso que empreendemos aos signos (o que envolve mais propriamente a subjetividade- criatividade- intuição).

Ainda, podemos exercitar, classificar, de acordo com nosso entendimento do pensamento em Peirce, a existência de três formas de ‘potências’ no desenvolvimento de nosso pensamento que, neste sentido e a certo modo, conduzem-nos a identificar três grandes **áreas manifestas desse conhecimento**: o filosófico, o científico e o artístico.



Mesmo traçando essa distinção, não intencionamos dicotomizar ou polarizar esses conhecimentos; sobretudo, queremos mostrar que ela pode até existir no sentido prático, mas não existe para nós, no sentido ‘real’ e ‘operacional’ em nível intelectual, pois, se a entendemos como base fundamental e elementar da mesma referência, ambas estão imbricadas, mútua e essencialmente, constituindo-se. Historicamente, observamos uma tendência a segmentá-las e percebemos que a aproximação promovida pela abordagem semiótica entre Linguagem e conhecimento deixa mais evidente essa relação de interdependência, ou uma distinção que, talvez, nem valesse a pena ser efetuada. E, permitindo-nos ousar, inferimos que tais potências funcionam como forças intermitentes

no processo de constituição do nosso (todo) pensamento e do desenvolvimento do nosso conhecimento.

Assim, concluímos com o pensamento de Peirce, quando nos informa que:

O trabalho do poeta ou novelista não é tão profundamente diferente do trabalho do homem da ciência [ou do filósofo]. O artista introduz uma ficção, porém não uma ficção arbitrária; essa ficção demonstra certas afinidades às quais a mente atribui uma certa aprovação ao declará-las belas, o que, se não corresponde exatamente a dizer que a síntese é verdadeira, é algo do mesmo tipo geral. O geômetra desenha um diagrama, que não é exatamente uma ficção, mas que é, pelo menos, uma criação, e através da observação desse diagrama ele é capaz de sintetizar e mostrar relações entre elementos que antes pareciam não terem nenhuma conexão necessária. As realidades compelem-nos a colocar algumas coisas num relacionamento estrito, e outras num relacionamento não tão estrito, de um modo altamente complicado e ininteligível no [para?] o próprio sentido; mas é a habilidade da mente que apanha todas essas sugestões de sentido, acrescenta muita coisa a elas, torna-as precisas e as exhibe numa forma inteligível nas intuições do espaço e tempo. Intuição é a consideração do abstrato numa forma concreta, através da hipostatização realística das relações; esse é o único método do pensamento válido (PEIRCE, 1990, [383], p. 17).

Nosso ensaio e reflexões, neste capítulo, apontam resumidamente para o esquema que apresentamos a seguir: Diagrama (D), que pretendemos sintetizar e situar, ainda que de forma incipiente sobre nosso entendimento relacionado ao desenvolvimento de nosso conhecimento, alicerçado em signos, embutido por uma perspectiva semiótica. Nossa pretensão busca destacar a dinâmica de Complementaridade que envolve todos os elementos, aspectos e dimensões que decorrem da trilogia inicial elementar e basilar. A formatação triangular já destaca a existência do que podemos nomear como sendo ‘três potências’ em jogo no desenvolvimento cognitivo. Entendemos que a perspectiva semiótica de Peirce, somada à teoria de Complementaridade de Otte, pode nos ajudar a ampliar e a justificar a abordagem de dimensão pragmática de conceitos, em especial neste estudo, do termo *axioma* na Matemática.

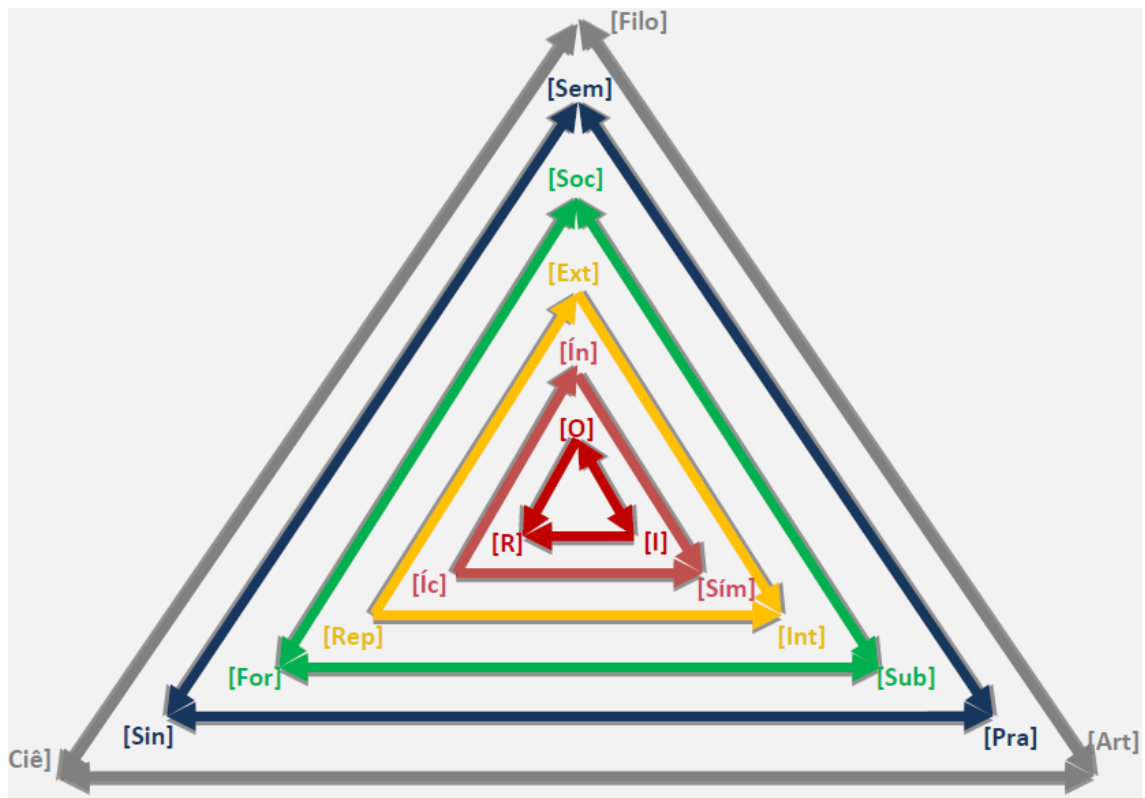
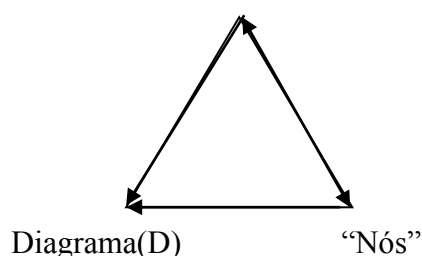


Diagrama (D)-Legenda: [O] Objeto; [R] Representâmen; [I] Interpretante; [Ín] Índice; [Íc] ícone; [Sí] Símbolo; [Ext] Extensão/Significado (Secundidade); [Rep] Representação (Primeiridade); [Int] Intensão/Sentido (Terceiridade); [Soc] Social; [For] Formal; [Sub] Subjetivo; [Sem] Semântica; [Sin] Sintaxe; [Pra] Pragmática; [Filo] Filosofia; [Ciê] Ciência; [Art] Arte.

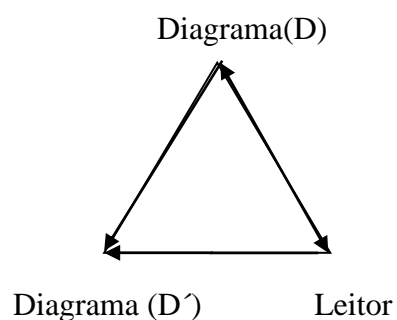
E, ainda, pela evidência triádica desse exercício interpretativo-reflexivo, temos justificado evidentemente as dimensões que consideramos ‘pilares’ envolvidas e que buscamos contemplar para a compreensão da mudança de significado do termo *axioma*, sejam elas: a histórica, a filosófica e a semiótica.

Num exercício contemplativo, podemos, de certa forma, inferir ao entendermos que o Diagrama (D) é resultado da relação processual e dinâmica entre:

Pensamento de Peirce e OTTE (pressupostos teóricos)



E, como tal, esta mesma relação dá início ao processo que, a partir de então, conduzirá o leitor a estabelecer um novo e/ou outro Diagrama (D')/Representâmen:



Sempre e novamente, a relação basilar e potencial, carregada e imbricada de todos os elementos, aspectos e dimensões apontados anteriormente. O interessante é perceber que o Diagrama D, ora figura num determinado momento (e anteriormente) como produto do processo e, em outro momento (posteriormente), ele já assume a posição de produtor da possibilidade interpretativa de outro (novo) Diagrama D'. Desse modo, o que desejamos ressaltar também tem o sentido de mostrar uma relação de circularidade, o que engloba também ao que Otte (2014) denomina de Complementaridade.

Suponhamos estar diante de uma situação problema ‘nova’. Para entendermos essa situação (nova) problemática e desenvolvermos ou um conceito (dela) ou uma teoria sobre ela, isso significa desenvolver ou ampliar uma ideia como um todo logicamente fundado. Nesse processo e empreendimento cognitivo, tudo o que já temos conhecido, todos os nossos saberes são mobilizados, mesmo sendo algo tão novo e inusitado que não faça parte do que já sabemos; mesmo assim, há esse movimento mobilizador. E aí está o caráter especialmente valioso do índice, pois, muitas vezes, não conhecemos a ‘verdade final’, mas, ao indicá-lo, ao tomá-lo dentro de uma perspectiva e contexto, podemos adotar uma atitude, estabelecer relações, pois um fenômeno tem várias e diversificadas facetas. E isso tem a ver com a continuidade da natureza.

De forma que, mesmo um conceito ou teoria nova, para que seja desdobrado em uma ideia ou conceito original, necessita de um fundamento em algo anterior, ainda que essa ideia anterior possa depois ser negada ou ultrapassada. A ideia anterior tem de

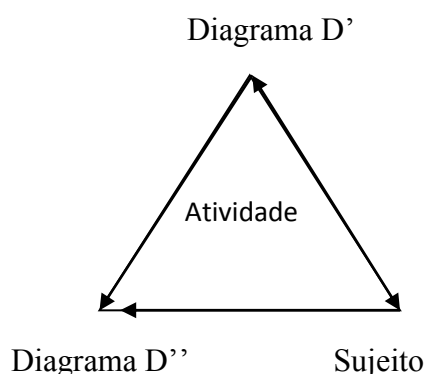
(...) ser intuitivamente impressionantes, devem motivar a **atividade e orientar a representação**. Os Paradigmas e os conceitos fundamentais ou idéias básicas, portanto, são auto-referenciais, ou seja, elas organizam o processo de sua própria implementação e articulação. "O sucesso de um paradigma (...) é, no início, em grande parte uma promessa de sucesso detectável no selecionado e ainda nos exemplos incompletos" (Kuhn, Th., 1962, *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago, p. 23). Além disso, "a pesquisa científica normal está dirigida para a articulação daqueles fenômenos e teorias que o paradigma já fornece" (p. 24).

Se fosse impossível que o paradigma ou o conceito teórico, pelo menos em parte, fornecesse a base do seu próprio desenvolvimento e explicação, o único caminho padrão seria tentar e ver se as novas idéias e os novos conceitos seriam semelhantes ao velho ou não. Neste caso nada significativamente novo resultaria, como o paradigma dado da ciência normal continuando a ser o pano de fundo para tudo. O processo da ciência equivaleria a acumular fatos e organizá-los no quadro de representações e normas explicativas, que têm sido válidas até então. Para explicar algo novo significaria tentar reduzi-lo ao já conhecido. Se, ao contrário, o desenvolvimento fosse absolutamente descontínuo e o (novo) paradigma tornando-se uma base do mundo, e de pensar sobre este mundo, em sentido absoluto, isso seria transformar o desenvolvimento do conhecimento em um processo aleatório. Assim, é que entendemos que intenções e extensões dos nossos conceitos são complementares entre si na medida em que, por um lado, funcionam de forma relativamente independente uns dos outros e permanecem, por outro lado, circularmente ligados uns aos outros [grifo nosso].

É salutar o pensamento de Otte sobre a relatividade que envolve intensão e extensões dos nossos conceitos, principalmente, ao percebê-los como complementares, mas um fato que também destacamos é a importância dessa relação diante da atividade que irá permear essa relação, ou seja, esta é operacionalizada na condução e expressão da relação entre esses



aspectos. De maneira que interpretamos melhor nosso esquema se, na representação, acrescentarmos a uma outra dimensão nomeada de ‘atividade envolvida’ entre os elementos basilares:



É na e pela atividade envolvida, no contexto definido por metas e objetivos, que se encontra a objetividade do conhecimento desenvolvido e estruturado, isto é, esta perpassa por determinada orientação e direcionamento escolhido e/ou determinado (dimensão pragmática). Este nosso modo de conceber o desenvolvimento do nosso pensamento dentro de uma perspectiva semiótica tem seus alicerces no pressuposto, segundo Costa (2008), de uma razão dialética. Desse modo, queremos discordar de que a razão possa ser codificada *a priori*, “via um sistema lógico fixo e que, na verdade, suas categorias são históricas, nascendo, modificando-se e completando-se pela sua própria atividade” (COSTA, 2008, p.32).

Na ciência, para entender um conceito significa desenvolver uma teoria , e vice-versa, uma teoria como um todo é logicamente fundada, se ela pode ser entendida como uma - original - idéia, que foi desenvolvida e desdobrada fazendo-se assim "concreta" .

**O maior alcance do desdobramento da idéia em si fundamenta uma teoria o conceito original, embora este seja fundado nessa última.** Assim, essas idéias são o objetivo do desenvolvimento da teoria. **Então essas idéias são, no entanto, ao mesmo tempo, o seu início e a sua base** [grifo nosso].

O produto se revela o próprio produtor de conhecimento e mesmo a própria atividade está sujeita a alterações e desenvolvimentos que resultam dessa relação. Isto é, segundo Otte (2014)<sup>84</sup>, uma reflexão que combina uma questão presente, a informação real ou fato com o

<sup>84</sup> Manuscrito de Michael F. Otte, datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

conhecimento já armazenado na memória, não pode simplesmente consistir, como Platão acreditava, em uma redução do ‘novo’ pelo ‘velho’ - caso contrário, não haveria nada de novo - mas deve representar o velho à luz do novo e explicá-lo assim. O novo é tanto o ponto de partida como o objetivo do conhecimento. O que observamos tem o sentido de um círculo hemenêutico. Otte (2014)<sup>85</sup> continua, informando que

Na ciência, para entender um conceito significa desenvolver uma teoria, e vice-versa, a teoria como um todo é logicamente fundada, se ela pode ser entendida como uma ideia original, que foi desenvolvida e desdobrada e assim tornada "concreta". O maior alcance do desdobramento da ideia em si como uma teoria fundamenta o conceito original, embora esta seja fundada no último. Assim, essas ideias são o objetivo do desenvolvimento da teoria. Essas ideias são, no entanto, ao mesmo tempo o seu início e a sua base. Isso significa que elas têm de ser intuitivamente impressionantes, devem motivar a atividade e orientar a representação. Conceitos fundamentais ou ideias básicas, portanto, são auto-referenciais, ou seja, elas organizam o processo de sua própria implementação e articulação.

Cabe ressaltar que, enquanto Peirce considera que o único significado de uma ideia reside nas consequências práticas que dela se possam inferir, tese esta que é central em sua filosofia denominada de Pragmatismo, no ponto de vista que este estudo busca agregar à interpretação semiótica peirceana e que se refere à perspectiva do pensamento sobre a Complementaridade ‘Otteano’, entendemos que o significado e a objetividade de uma ideia (representada no signo) estão na atividade envolvida, ou seja, decorre dessa atividade em questão.

Peirce também pode ser interpretado em determinados momentos e posicionamentos, como negando a possibilidade de qualquer evidência intuitiva. Desse modo, indica que não teríamos nenhuma faculdade intuitiva e todo nosso conhecimento seria constituído de pensamentos com signos apenas e com base no conhecimento externo. Entendemos como Peirce que não há pensamento sem representação, mas, sobretudo, nosso pensamento repousa em uma compreensão kantiana, onde:

O nosso conhecimento procede de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber representações (receptividade ou sensibilidade), a segunda é a capacidade de conhecer um objeto por meio dessas representações (espontaneidade dos conceitos ou entendimento). Pela primeira um objecto é-nos dado, pela segunda, ele é pensado. Intuições e conceitos constituem os elementos de todo o nosso conhecimento de maneira que, um sem o outro, podem dar conhecimento (Crítica da Razão Pura, B 74).

---

<sup>85</sup> Manuscrito de Michael F. Otte, datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

Contrariamente a Peirce (se a interpretação anterior realmente ocorre), na perspectiva de Complementaridade ‘Otteana’, a intuição se apresenta diretamente, não sendo nem pensamento nem representação. A intuição destaca-se na conexão e relação basilar à constituição do signo, sobretudo, que se opera, dinâmica e dialeticamente, na e pela atividade envolvida. Otte (2014)<sup>86</sup> ainda destaca que:

A continuidade da experiência ou, como Kant coloca, a unidade do "eu acho" , é uma indicação importante da objetividade do conhecimento. Kant escreve: "O que 'eu acho' que deve acompanhar todas as minhas representações, caso contrário algo seria representado em mim que não poderia ser pensado; em outras palavras, a representação ou seria impossível, ou pelo menos não seria nada, em relação a mim. Essa representação que pode ser dada anteriormente para todo o pensamento é chamado de intuição. Toda a diversidade ou de conteúdo múltiplo da intuição tem, portanto, uma relação necessária com o " eu acho", no assunto em que esta diversidade é encontrada " (Kant , B 131).

Kant sempre chamava a atenção para que nossas fontes de conhecimentos sejam de dois tipos: conceitos e intuições. E a interação entre essas duas faculdades se realizaria dentro do Sistema da atividade humana. Otte (2013) nos informa que Kant havia concebido a diferença entre a Matemática e a Filosofia, em termos de método, ao invés de ser em termos de objeto, de modo que ele procedeu a uma descrição do que Otte chama de ‘Complementaridade’ entre ambas. Kant escreveu: “conhecimento filosófico é conhecimento racional por meio de conceitos, a cognição matemática é a cognição por meio da construção de conceitos [na intuição]” (KANT, *Crítica*, B 741).

A Matemática não procede a partir de conceitos e linguagem lógica somente, mas tem de construir diagramas e observar as relações entre as partes individuais deles. E, não existe atividade sem um objeto, nem tampouco a atividade matemática; assim é que ela (a Matemática) constrói seus objetos. A Matemática não estabelece seus objetos por meio de descrições à moda da noção de ‘conceito completo’ de qualquer substância individual como queria Leibniz cujo ponto era observado por Peirce.

---

<sup>86</sup> Manuscrito de Michael F. Otte, datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

Peirce entendendo distintamente da interpretação kantiana, OTTE (2014, s.p.)<sup>87</sup> destaca que;

Kant dá a visão errônea de que as idéias são apresentadas separadas e então pensadas em conjunto pela mente. Esta é a sua doutrina de que uma síntese mental precede todas as análises. O que realmente acontece é que algo é apresentado o que em si não tem partes, mas que, no entanto, é analisado pela mente, ou seja, as suas com peças consistem no fato de que a mente reconhece depois as partes nelas. Essas idéias parciais não estão realmente na primeira idéia, em si, apesar de serem separadas dela. É um processo de destilação destrutiva. Quando, tendo, assim, separada-as, nós pensamos sobre elas, somos levados a despeito de nós mesmos a partir de um pensamento para outro, e é aí que reside a primeira síntese real. Uma antecipada síntese do que é uma ficção "(Peirce, CP. 1,383-84).

E entendemos que, em certa medida, uma dimensão intuitiva perseguia o pensamento de Peirce, muito embora ele não reconheça isso, sobretudo, por sua confiança exagerada no poder da Lógica.

Assim, julgamos adequado destacar que o entendimento de Peirce não evidencia, coloca ou dispõe uma ausência extremada de observação e intuição como elementos da atividade matemática. E Otte (2014)<sup>88</sup> indica que seu pensamento de Complementaridade se apoia na Semiótica de Peirce, afirmando que

Nós assumimos com Peirce que a componente extensional do pensamento matemático, como um resultado da ausência de um autêntico polo referencial – além disso, números ou funções não são como cadeiras ou outros objetos concretos -, é para ser concebida num modo duplo. Por um lado, é entendido com algo que Castonguay (1972) chamou de “componente heurística do pensamento matemático” e que denota a fonte da inspiração “para a colocação de relações entre diversos conceitos e entidades matemáticos possivelmente percebidos de forma referencial, relações as quais podem eventualmente cristalizar,... em relações objetivas de vínculo entre conceitos expressos linguisticamente” (p.3). Por outro lado, pretendemos que essa componente heurística seja o conjunto de todas as possíveis representações de uma relação matemática ou a classe de todas as possíveis aplicações ou modelos de uma estrutura matemática à mão.

Segundo Peirce, a Matemática é caracterizada, como inicialmente apontamos, como a prática do ‘raciocínio esquemático’ - diagramático. E existe, nesse empreendimento construtivo da Matemática, a necessidade de uma Ciência da Lógica, ou seja, o matemático é chamado a considerar um estado de fatos que são apresentados numa massa confusa. E, nesse

---

<sup>87</sup> Texto em anexo intitulado *Mathematics as mechanical Procedure and as Abductive Inference* datado de 12 de julho de 2014 [nossa tradução].

<sup>88</sup> Texto em anexo, intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no Colóquio Internacional, em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio /2012.

ponto, é salutar o sentido de continuidade no pensamento de Peirce, que difere do sentido de continuidade em Kant. Em Kant, a continuidade era concebida como um princípio de ordem entre determinados fenômenos ou um mero princípio da razão. Para Peirce, o princípio da continuidade torna-se um instrumento de análise de estruturas relacionais e suas possíveis transformações.

O princípio da continuidade, em Peirce, é, antes de tudo, um meio de idealização e de generalização, isto é, um meio para criação de objetos ideais ou idealizados em termos de invariantes, bem como uma nova forma de raciocínio, ou seja, o raciocínio esquemático (PEIRCE, CP 4.418).

Peirce ainda diz que:

O geômetra desenha um diagrama, que se não é exatamente uma ficção, é, no mínimo, uma criação, e por meio da observação do esquema que ele é capaz de sintetizar e mostrar relações entre elementos que antes pareciam não ter nenhuma conexão necessária. As realidades obrigam-nos a colocar algumas coisas em relação muito próxima e outros nem tanto, em um ambiente altamente complexo, e no [ para ] sentido em si forma ininteligível, mas é o gênio da mente, que ocupa todas essas sugestões de sentido, acrescenta muito para eles, torna preciso, e mostra-lhes de forma inteligível nas intuições de espaço e tempo ( Peirce, CP 1.383 ).

A prática experimental produz, em si, somente dados, não conhecimento teórico. O conhecimento teórico é produto de uma íntima relação e interação entre sujeito, objeto e Representamên ou, de outro modo, sujeito, prática experimental e objeto.

Assim, de um lado, temos o contexto que pode ser uma teoria ou um Sistema formal de uma cultura, ou um estilo de pensamento que opera determinando os fatos, os conceitos, o significado de termos como *axioma*. De outro lado, temos a possibilidade da descoberta, diante da atividade, da experiência empírica, que pode ser interpretada como um suplemento ao desenvolvimento ou à transformação do estilo de pensamento, ou paradigma à teoria.

É nesse sentido que Otte (2014) entende as intensões e as extensões das nossas teorias, dos nossos conceitos serem complementares entre si. Na medida em que, de uma maneira, funcionam de forma relativamente independentes umas das outras, de outra maneira, elas permanecem como num tipo de circularidade ligadas umas com as outras. Este é o tratamento interpretativo do pensamento ‘Otteano’ sobre Complementaridade.

Otte (25 de abril de 2013) tem sempre defendido que a Complementaridade é mais que dualidade, pois implica a interação e a relação entre isso que foi distinguido no primeiro passo (pela intuição) e sua representação. Perceber, neste sentido, é interpretar. E, para se perceber

algo, precisamos perceber algo como sendo algo. Qualquer representação é, de fato, algo de uma descrição geral ‘que traz uma coisa em relação a outra’, como disse Peirce. Qualquer representação já é uma generalização.

Nesta direção, o conceito de evolução e do desenvolvimento é crucial para entendermos a Complementaridade. De modo que achamos relevante trazer novamente a citação abaixo ( e que eu particularmente gosto muito), que nos conduz a entender, de outra forma, sobre como se dá essa relação:

The evolution of the horse from *Eohippus* was not a one-sided adjustment to life on grassy plains. Surely the grassy plains themselves were evolved *pari passu* with the evolution of teeth and hooves of the horses and other ungulates. Turf was the evolving response of the vegetation to the evolution of the horse. It is the context which evolves<sup>89</sup> (BATESON, p.128, 1972).

Nossa razão evolui conforme progride a nossa ciência, e nossa ciência ao tempo e consequentemente à evolução da nossa razão e não de uma maneira arbitrária e com base num processo racional que possa ser modificado ou transformado *ad libitum*; e isso tentamos demonstrar através da nossa exposição do processo semiótico que a regula e a estrutura, ao destacar o princípio da continuidade que permeia o processo de representação esquemático.

Segundo Otte (2014)<sup>90</sup>, “o interessante é que ele [Bateson] concebe o conhecimento como o processo de adaptação mútua entre sujeito e objeto de um processo, que muda tanto”.

Sobretudo, defendemos a existência de uma realidade objetiva, configurando como sendo o conteúdo das representações humanas que não depende do sujeito. Para isso, tomamos como fonte de nosso conhecimento as sensações, mas temos como fontes dessas sensações a tal realidade objetiva. Neste sentido, as representações são o elemento mediador desse/ nesse processo dialético, configurando-se num reflexo da realidade objetiva impressa em nossos órgãos do sentido. Também entendemos que os critérios dessa verdade objetiva repousam na prática, na atividade ou contexto em evidência ou operacionalizado.

Defendemos que o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ pode contribuir no sentido de interpretar e compreender a possibilidade de o pensamento matemático,

---

<sup>89</sup> A evolução do cavalo de *Eohippus* não era somente um ajuste unilateral para a vida em planícies gramadas. Certamente as próprias planícies foram evoluindo *pari passu* com a evolução dos dentes e patas dos cavalos e outros ungulados. Turf foi a resposta evolutiva da vegetação para a evolução do cavalo. É o contexto que evolui.[tradução nossa]

<sup>90</sup> Retirado de uma Carta de Otte ao amigo Davide Crippa, em fevereiro de 2014.

espelhado pelo Conhecimento Matemático, exprimir essa realidade objetiva, seja de forma absoluta ou relativa. Foi o que buscamos apresentar através destas reflexões. E, ainda, ressaltamos que nossa opção pela Semiótica de Peirce, Otte (2014)<sup>91</sup> justifica, pois a teoria semiótica é exemplar como

[...] uma tentativa de explicar o processo cognitivo de aquisição de conhecimento científico como um padrão de atividade comunicativa em que os parceiros são dialógicos, indiferentemente, os membros de uma comunidade ou estados seqüenciais da mente de uma única pessoa. Na ligação entre a aquisição de conhecimentos e a estrutura de comunicação, Peirce funde os dois pólos da herança semiótica clássica, a tradição epistemologicamente focada que estuda a *semeion* ou "natural" ou "sinal indicativo" e a tradição linguisticamente fundamentada que estuda a *symbolon* ou "símbolo convencional." (Parmentier, R. 1994, *Sinais na sociedade*, Indiana University Press Bloomington, p. 3).

De acordo com o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’, os *axiomas* matemáticos e as leis naturais devem ser classificados, ontologicamente, como da mesma natureza. Uma abordagem semiótica é o que nos permite perceber que essas leis gerais ou possibilidades têm interesse apenas em relação às suas aplicações factuais. A aplicação de uma lei ou uma teoria, no entanto, não pode ser explicada apenas em termos teóricos, mas demanda experiência e princípios gerais bastante vagos; daí a nossa tese de precisarmos tomar conta dos aspectos pragmáticos de nosso conhecimento.

Otte (2014)<sup>92</sup> ainda destaca que nem tudo no mundo é racionalizável e inteligível. “Existem fatos brutos ou experiências particulares que parecem escapar a qualquer explicação racional. Poderíamos expressar isso metaforicamente, dizendo que há coisas e sinais no mundo que são relativamente independentes uns dos outros. Sinais ou representações são o que tornam a realidade inteligível”. “A lei é, em si, nada mais do que uma fórmula geral ou símbolo. Uma coisa existente é simplesmente uma coisa cega reagindo, as quais não apenas toda generalidade, mas mesmo toda a representação, é totalmente estranha” (PEIRCE, 5.107, *apud* OTTE, 2014)<sup>93</sup>.

Assim, o problema de um conhecimento novo é para ser visto sobre a questão de como particular e geral interagem, como objetos e sinais estão ligados. E esta questão só pode ser respondida a partir de um ponto de vista genético, explicando como surgem as leis ou

---

<sup>91</sup> Manuscrito de Michael F. Otte, datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

<sup>92</sup> Manuscrito orientativo: *Piaget as a Platonist?* Datado de 29, abril, 2014.

<sup>93</sup> Manuscrito orientativo: *Piaget as a Platonist?* Datado de 29, abril, 2014.

representações e que significados envolvem. Por isso, como afirmamos, “Peirce em suas respostas a essa questão enfatiza a importância do princípio da continuidade, pois a inteligibilidade ou relevância pressupõe continuidade, ao passo que um fato novo e ainda inexplicável sempre marca uma ruptura ou uma descontinuidade” (OTTE, 2014)<sup>94</sup>.

Estamos convictos da importância do estabelecimento deste diálogo. Cada novo olhar, cada nova reflexão, é fundamental. Esperamos, de todo, ter oportunizado, ainda que minimamente, uma compreensão do nosso entendimento sobre a importância dessa propositura interpretativa semiótica e também, em especial, ao entendimento do pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’, relacionado aos aspectos e dimensões envolvidos e operantes no processo de desenvolvimento cognitivo do nosso conhecimento e do Conhecimento Matemático.

Mesmo porque, de acordo com Dietzagem, o conhecimento humano nunca esgotará o seu objeto, da mesma forma que, apenas de forma aproximada, um quadro ‘coincide’ com o seu modelo. E, especificamente, relacionado à Matemática, temos convicção de um horizonte ilimitado de possibilidades. Relembrando o pensamento de Otte (2012)<sup>95</sup>: “A Matemática é fantástica! Em termos de entender sobre o conhecimento, a epistemologia, a filosofia do mundo, não há coisa melhor! Porque é a luta do homem diante do mundo que se cristaliza na matemática”.

---

<sup>94</sup> Manuscrito orientativo: *Piaget as a Platonist?* Datado de 29, abril, 2014.

<sup>95</sup> Comentário de Otte em momento e orientação.



## **CAPÍTULO IV: Apontamentos sobre o desenvolvimento do pensamento conceitual: o conceito de conceito.**

A problemática deste estudo busca compreender sobre a relação entre a Filosofia<sup>96</sup> e a Matemática pautada do ponto de vista da relação entre a *Linguagem*<sup>97</sup> e a *Matemática*<sup>98</sup>, no desenvolvimento do *Conhecimento Matemático*<sup>99</sup>, no seu desenvolvimento e sua constituição,

---

<sup>96</sup> Entendemos a Filosofia como tratando do estudo geral sobre a natureza de todas as coisas e suas relações entre si; os valores, o sentido, os fatos e princípios gerais da existência, bem como a conduta e destino do homem. De todo, consiste no estudo de problemas fundamentais relacionados à existência, ao conhecimento, à verdade, aos valores morais e estéticos, à mente e à linguagem.

<sup>97</sup> “[...] quando referimo-nos à Linguagem, tratamos de uma gama incrivelmente intrincada de formas sociais de comunicação e de significação que inclui a linguagem verbal articulada, mas absorve também, inclusive, a linguagem dos surdos, o sistema codificado da moda, da culinária, da matemática [no sentido de que o pensamento matemático requer e produz uma linguagem própria] e tantas outras. Enfim: todos os sistemas de produção de sentido aos quais o desenvolvimento dos meios de reprodução de linguagem propiciam hoje uma enorme difusão” (SANTAELLA, 2012, p.16). Em suma, ao nos referirmos à Linguagem, tratamos do modo de pensamento humano caracterizado pela classificação, descrição e comunicação.

<sup>98</sup> A Matemática constitui uma atividade humana. Reconhecemo-la com sendo uma ciência do tipo observativa [ciência da “descoberta” de acordo com Peirce] na medida em que monta construções na imaginação de acordo com preceitos abstratos, passando, então, a observar esses objetos imagináveis para neles encontrar relações entre partes que não estavam especificadas no preceito da construção. No entanto, a Matemática estuda o que é e o que não é logicamente possível, sem se fazer responsável pela existência atual desse possível. Nesse sentido, é a ciência que fornece subsídios e encontra aplicação em todas as outras ciências, inclusive a Fenomenologia e a Lógica (SANTAELLA, 2012, p. 37). Quando nos referimos à ‘Matemática’, tratamos do modo de pensamento humano que se formaliza através do raciocínio diagramático, configurando-se, sobretudo, no pensamento estruturalista-relacional e que se constitui na e pela inter-relação e interação de nossa ordenação temporal e espacial em relação ao mundo e aos seus fenômenos. A atividade a que se aplica a que se aplica o nosso pensamento matemático irá culminar no que Freudenthal (1973, p.44) nomeia de ‘matematização’, compreendendo esta como sendo a “organização da realidade com significado matemático”. E ele considera o processo de matematização como a característica mais importante da atividade matemática. Husserl (1970, p.33) considera a matematização como um processo de objetivação das formas e do movimento, obtida segundo a aplicação da matemática “para todas as propriedades reais e todas as relações de causalidade reais do mundo da intuição”. O processo de matematização envolve diversas características, como: a análise, a sistematização, a reflexão e o desenvolvimento de conceitos matemáticos Seguindo esse raciocínio, é nesse processo e etapas que o compõem que temos a inserção e importância da linguagem no desenvolvimento do conhecimento matemático. Assumimos uma interpretação da matemática numa perspectiva semiótica.

<sup>99</sup> Embora este estudo traga uma reflexão aprofundada sobre nosso entendimento sobre o que seja o ‘Conhecimento Matemático’ entendemos adequado uma antecipação resumida. O conhecimento Matemático é fruto do pensamento reflexivo sobre fenômenos naturais e sociais. Quando nos referimos ao Conhecimento Matemático, temos em mente primeiramente duas grandes correntes de pensamento. Uma delas tratando diretamente do discreto, pois lida com a indução, recursão, combinatória e em geral tudo o que se refere à aritmética dos números inteiros, um ponto de vista que se assume algorítmico. A outra corrente se refere ao contínuo, lidando com a ideia de função, com a geometria, derivadas e integrais. Também compreendemos que, para além dessas duas correntes quantitativas, existem na matemática características qualitativas, que podemos destacar na topologia, nas leis da lógica, entre outros temas. Assim a matemática não lida somente com grandezas quantitativas, expressa em números, variáveis algébricas ou elementos geométricos como o de comprimento e área. Observamos que na Modernidade o desenvolvimento da matemática toma um caminho diferente do da Antiguidade, produzindo a idealização e formalização de seus objetos em meio a um campo no qual a abstração e o raciocínio lógico predominam, destituídos de vínculos com aplicações práticas e situações do mundo físico. Atualmente a atividade matemática, conseqüentemente o conhecimento matemático, é espelhado na axiomatização simbólica, regida por símbolos e regras e a abstração, axiomatização e generalização

ao investigar: o quê significa o fato de como o termo *axioma* até a Modernidade (século XIX) ter sido tomado como antônimo de hipótese e, nos dias atuais, ser considerado como sinônimo?

Quando no capítulo I apresentamos os significados identificados em dicionários de Filosofia, de Língua Portuguesa e de Ciências Naturais, pudemos observar que um aspecto não foi especificamente delineado, ou seja, apresentado, e, em nossa interpretação tem fundamental importância relacionado à mudança interpretativa do termo *axiomas*. Tal aspecto tem a ver em que, à partir da Modernidade o termo *axioma* assume um status diferenciado na constituição de um conceito, ou mesmo de uma definição.

Recordemos inicialmente como se apresentam algumas *noções comuns (axiomas Gerais)* em *Os Elementos* de Euclides (~325 – ~265 a. C.):

- A.1 – Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
- A.2 – Se parcelas iguais forem adicionadas a quantias iguais, os resultados continuarão sendo iguais.
- A.3 – Se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos são iguais.
- A.4 – O todo é maior que a parte.

E os *postulados (axiomas específicos)* em Euclides:

- Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
- E, como todo centro e distância descrever um círculo.
- E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
- E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

---

têm se mostrado tão essencial à matemática pura, quanto a construção de modelos que representam problemas ou fenômenos inerentes à natureza complexa do mundo físico. Nosso entendimento de ‘Conhecimento Matemático’ inclui uma interpretação que destaca uma relação imbricada, de interdependência e de Complementaridade entre aspectos que se referem à Linguagem e à Matemática- de modo que entendemos o desenvolvimento do Conhecimento Matemático dentro de uma perspectiva semiótica.

E, observemos os famosos *Axiomas* de Peano (1858 – 1932) abaixo:

1. O 1 é um número natural.
2. Se  $n$  é um número natural, então o sucessor de  $n$  também é um número natural.
3. O 1 não é o sucessor de nenhum número natural.
4. Se há dois números naturais  $n$  e  $m$  com o mesmo sucessor, então  $n$  e  $m$  são o mesmo número natural.
5. Se o 1 pertence a um conjunto, e dado um número natural qualquer, o sucessor desse número também pertence a esse conjunto, então todos os números naturais pertencem a esse conjunto. Este é o axioma da indução, e captura a ideia de indução matemática.

É historicamente reconhecido e amplamente sabido que os *axiomas*, desde o tempo de Euclides e por mais de dois mil anos, foram interpretados como ‘verdades’, ou seja, proposições verdadeiras e indemonstráveis. Já os *axiomas* de Peano, apresentam-nos como um conjunto de proposições que definem o *conceito* de Número Natural e o sentido interpretativo das proposições axiomáticas que compõem esse *conceito* é o de sinônimo de ‘hipótese’. De forma que nosso desafio é desvelar e ampliar o entendimento dos motivos e fatores intervenientes que conduziram ou permearam mudanças tão significativas ao termo *axioma*, inclusive com o destaque a que este termo nomeará um método – o Método Axiomático - e observar em que sentido esse movimento pode ter ido influenciado e/ou condicionado do ponto de vista que envolve a relação entre a Linguagem e a Matemática no desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático.

Numa avaliação e reflexão superficial, podemos dizer que as primeiras sentenças (*axiomas* euclidianos) tratam de declarações descritivas e não se configuram em seu conjunto como o *conceito* de qualquer coisa, enquanto que o grupo de *axiomas* de Peano (1, 2, 3, 4 e 5) nos fornecem a definição ou, mais precisamente, o *conceito* de Número Natural. E ainda podemos destacar que o conjunto de proposições de *axiomas* em Peano tem caráter operativo em proposições subsequentes que se figuram lógico-dedutivas em seu desenvolvimento, enquanto que em Euclides estão mais para regras que definem contextos.

Assim, uma primeira mudança que podemos destacar no exemplo comparativo que apresentamos indica que, a partir da Modernidade, os *axiomas* (ou proposições axiomáticas)

assumem *status* privilegiado na constituição de um *conceito*, especial e especificamente, no desenvolvimento do Conhecimento Matemático. E parece-nos não fazer mais sentido a necessidade de uma distinção nítida entre proposições e *conceitos*. Desse modo, tal situação nos conduz a interpretar que uma possível mudança no sentido interpretativo do significado do termo *axioma* esteja relacionada a uma possível variação que tem a ver com o próprio entendimento de *conceito*. E que, ambas podem ser explicadas sob o ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática.

Sabemos que uma característica principal de nossa razão<sup>100</sup> é a de poder exercer sua atividade por meio de conceitos. Para nós, em sentido amplo, o conhecimento científico trata elementarmente do tipo de conhecimento conceitual tanto quanto esquemático, efetuando-se mediante conceitos basilares e gerais (caracterizados na Matemática pela generalização). São agentes operantes e imbricados nesse processo de produção de conhecimento: a nossa razão, o apoio da experiência/objetos e, extrapolando-os, a atividade<sup>101</sup>. Também observamos que, ao nos expressarmos, fixamos e comunicamos esse mesmo conhecimento pelo emprego da Linguagem, deduzimos, de imediato, a importância da Linguagem para a atividade racional. Como resultado do processo cognitivo (seu produto) e, numa perspectiva Complementar, figura e opera no sentido de produtor e como produto do desenvolvimento do nosso conhecimento.

Sobretudo, ao situarmos o *conceito* como produto de nossa atividade racional, e minimamente tomando a Linguagem neste processo em sua manifestação e formalização, observamos que uma pergunta emerge inicialmente para reflexão neste estudo: o que é um *conceito*? Houve mudança significativa em nosso entendimento do *conceito*, e de um conceito na matemática? Se houve, qual os fatores que operaram nessa mudança do ponto de

---

<sup>100</sup> De acordo com Costa (2009, p.14-15), a Razão “é a faculdade por intermédio da qual concebemos, julgamos e raciocinamos, isto é, refletimos, pensamos. Ela se caracteriza por duas funções: em primeiro lugar, é a faculdade que forma conceitos e, em particular, constitui categorias, ou seja, os conceitos-chave do pensamento cognitivo em geral; desse ponto de vista, sua função é a de coordenar os dados da experiência e fornecer os moldes subjacentes a todo pensamento objetivo. Em segundo, ela é a faculdade de combinar conceitos, julgando e inferindo; sob este aspecto, sua função é tipicamente ativa”.

<sup>101</sup> Segundo Otte (2014, in: *Activity theory and Complementarity*, s.p., anexo IV) “As principais componentes das diversas atividades humanas são as ações que elas realizam. Por ação entendemos um processo orientado objetivo e consciente. As condições, as metas e as ações andam juntas como os conceitos motivo e atividade (Leontjew, AN 1977, *Tätigkeit, Bewusstsein Persönlichkeit*, Estugarda, Klett, p. 34)”. O objeto de uma atividade é o seu motivo. As condições da atividade e os motivos estão necessariamente ligados. Uma atividade sem um motivo não existe. Entendemos o pensamento criativo e a aprendizagem como sendo uma atividade. [Tradução Nossa]

vista da relação entre a Linguagem e a Matemática? E, quais seriam as implicações dessa mudança relacionada ao significado do termo *axiomas*?

Este capítulo tem como objetivo mostrar uma mudança que se processa histórica e socialmente relacionada ao desenvolvimento do nosso pensamento conceitual, esta pois sendo do aspecto descrito ao operacional, e, refletir sobre consequentes reflexos na interpretação do sentido do termo *axioma*, ou seja, este, passando de ‘verdade’, para sinônimo de ‘hipóteses’. Nesta tarefa buscaremos conjecturar sobre fatores e aspectos operantes no desenvolvimento do nosso pensamento conceitual, fundamentados no pensamento de Ernest Cassirer, Émile Durkheim e Claude Lévi-Strauss.

Sabemos que o desenvolvimento do *conceito* de conceito ocorre dentro de determinados contextos que são definidos tanto pelo sujeito, pelo objeto, como pela relação entre ambos, na e pela atividade. Também que o próprio *conceito* de conceito resulta de um processo que está interligado e imbricado a outros processos, como, por exemplo, da nossa noção de ‘realidade’ para a ciência – o próprio conceito de realidade – ou, de outro modo, a nossa própria noção de ‘sujeito’- o próprio conceito de sujeito. De modo que podem e existem variadas possibilidades de relações e relacionamentos nessa dinâmica processual. Sobretudo, pretendemos destacar a mudança na qual o pensamento conceitual deixa de ter caráter substancial, passando a assumir um caráter relacional na sua constituição, não há dúvidas de que isto tenha implicações de ordem filosóficas, entretanto priorizaremos nossa análise do ponto de vista que envolve a relação entre a Linguagem e a Matemática no desenvolvimento do Conhecimento Matemático.

Assim, soa elementar aos objetivos selecionados para este estudo constituir um referencial teórico que nos permita construir uma noção sobre o que seja um *conceito*, sobre quais sejam suas variantes e níveis de evolução, aspectos de seu desenvolvimento histórico, enfim, aspectos da gênese e historicidade do conhecimento conceitual – do desenvolvimento do nosso pensamento conceitual.

Quando procuramos em Abbagnano (1990) sobre a definição de um *conceito*, encontramos que:

Em geral todo processo que torne possível a descrição, a classificação e a previsão de objetos cognoscíveis(a). Assim entendido, o termo tem significado generalíssimo e pode incluir toda espécie de sinal ou procedimento semântico, qualquer que seja o objeto a que se refere abstrato ou concreto, próximo ou longínquo; universal ou individual, etc. Pode-se ter um conceito da mesa como do número 3, do homem como de Deus, do Gênero e da espécie (os chamados

universais) como da realidade individual, por ex., de um período histórico ou de uma instituição histórica (o ‘Renascimento’ ou o ‘Feudalismo’). Embora o conceito seja normalmente indicado por um nome, ele não é um nome, já que diferentes nomes podem exprimir o mesmo conceito ou diferentes conceitos podem ser indicados, por equívoco pelo mesmo nome(b). O conceito, além disso, não é um elemento simples ou indivisível, mas pode ser constituído de um conjunto de técnicas simbólicas extremamente complexas(c); como é o caso das teorias científicas que também podem ser chamadas conceito (o conceito de relatividade, o conceito de evolução). [...] Enfim, o alegado caráter de universalidade subjetiva ou validade intersubjetiva do conceito é, na realidade, simplesmente sua comunicabilidade de signo linguístico (d): a função primeira e fundamental do conceito é a mesma da linguagem, isto é, comunicação.

Nesta definição de Abbagnano, temos espelhado, parcial e resumidamente, todo um processo de conceituação (desde ‘a’ à ‘d’) que foi desenvolvido através de séculos para enfim poder apresentar a definição de um conceito na forma de um conjunto de signos articulados que permitem um entendimento por parte de quem os lê. Em Abbagnano, ora o conceito é um processo, ora é um termo, ora é um sinal, ou conjunto de técnicas simbólicas, o que gera certa confusão na definição do que seja um *conceito*. Sobretudo, ele realça alguns aspectos imbricados que devem ser tomados em conta para a constituição de um conceito:

- enquanto símbolo, seus atributos: permitem a descrição, a classificação e a previsão;
- enquanto signo comunicativo: contempla o aspecto universal, o individual, a representação e configura-se em um sistema.

Portanto, vê-se nitidamente a complexidade a que chegou historicamente a configuração do que seja representado em um conceito ou do desenvolvimento do nosso conhecimento conceitual. Neste estudo, que trata da gênese e historicidade do pensamento matemático, sentimo-nos privilegiados, pois entendemos ser a Matemática aquela (Ciência) que, de certa forma, melhor expressa o processo evolutivo do pensamento conceitual e este, caminhando de uma perspectiva, minimamente, descritiva a níveis de abstração cada vez mais complexos, contemplando inclusive aos aspectos destacados e aos quais cumpre, na atualidade, o papel do *conceito*.

Entendemos que um estudo que se dirige ao termo *axioma* e a sua evolução merece e enriquece, ao agregar em sua base de análise, uma reflexão sobre o desenvolvimento do nosso pensamento conceitual. Ademais porque o termo *axioma* peculiarmente a partir do século XIX assume um status diferenciado e muito importante na constituição de um conceito,

especificamente e especialmente relacionado ao Conhecimento Matemático e científico, ao tempo em que assistimos a institucionalização do Método Axiomático.

Nossas opções e estratégia de abordagem ao nosso objeto de pesquisa são, assumidamente, fundamentadas em pressupostos do pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Compreendemos o incremento do nosso pensamento conceitual, do desenvolvimento do Conhecimento Matemático, dentro de uma perspectiva genética ou evolutiva e semiótica. Temos certeza da impossibilidade, num empreendimento investigativo desta envergadura, de construir (de modo completo e fechado) toda uma rede de significados que possa intervir numa mudança interpretativa do termo *axioma*, mas esperamos constituir um quadro que nos aproxime mais do fluxo dinâmico e de fatores imbricados, mais acentuada e especificadamente, nesta problemática e relacionada ao Conhecimento Matemático.

Para Otte (2014), enquanto o *conceito* era entendido como resultado de uma abstração empírica em Aristóteles e no Empirismo, ou como a essência das coisas, em Platão e no pensamento Racionalista, tanto a intensão como a extensão dos conceitos eram interligados estritamente e, por isso, os conhecimentos analíticos e sintéticos não eram tomados como independentes um do outro. Kant e Bolzano foram os primeiros a perceberem isso, de forma que, sem essa ‘relativa’ independência das intensões e extensões dos conceitos, os *axiomas* (verdades intuitivas) não têm nada a ver com hipótese. Assim, uma mudança no pensamento conceitual – e neste sentido à uma perspectiva operativa/relacional - é relevante ser analisada como possibilitadora da mudança interpretativa do termo *axioma*.

Somente a partir de uma mudança no entendimento, ou seja, no modo de se conceber um *conceito*, como também quando um papel mais significativo é atribuído à Linguagem no/ao processo cognitivo, é que assistimos operarem mudanças relacionadas ao termo *axioma* e estas direcionadas a um novo *status* às proposições axiomáticas e este sendo o de papel operativo na constituição de *conceitos* e o *axioma* passando a ter um significado sinônimo ao de hipóteses. E, neste novo sentido, se é possível justificar e destacar uma distinção relativa, entre as intensões e as extensões.

Tentamos justificar nossos pressupostos relacionados a uma mudança que se processa no pensamento conceitual, nas considerações sobre o desenvolvimento do entendimento conceitual, em Ernest Cassirer (1874-1945), esboçada em sua obra *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910) (Substância e Função) onde procuramos identificar argumentos

arrolados a uma alteração que ele destaca ocorrer no próprio entendimento sobre o *conceito* o qual esse filósofo, consubstanciado no seu Conhecimento Matemático.

Cassirer inicialmente nos apresenta que, na Lógica Aristotélica, o *conceito* tratava-se de uma abstração, como um espelho refletindo a metafísica de Aristóteles, pois é a concepção da natureza e da ordem de apresentação desta que determinam as formas fundamentais do pensamento, tendo, como sua função característica essencial, comparar e diferenciar sensorialmente um conjunto de dados. Assim, o processo reflexivo que conduzia aos conceitos, toma os objetos a fim de determinar as características essenciais nas quais estes concordariam, conduzindo, desse modo, a um processo de abstração que se refere à clara consciência dessas características puras e isentas de qualquer mistura de elementos dessemelhantes.

O *conceito*, nessa perspectiva, não seria algo estranho à realidade sensível, mas faria parte dessa realidade, figurando como uma seleção do que é imediatamente contido nessa realidade. Os conceitos matemáticos e os das Ciências Exatas, desta forma, situar-se-iam no mesmo plano dos conceitos das ciências descritivas, destacando, como nestas, uma classificação e ordenação superficial do que está posto. Neste tipo de entendimento, o conceito figurava, relacionando-se diretamente com o seu objeto, tratando de suas características e se referindo ao que Cassirer chama de “conceito de substância”.

Segundo Abido (2012), nesse sentido, do mesmo modo como formávamos o conceito de uma árvore, selecionando, a partir de uma totalidade de árvores (carvalhos, ipês...), o grupo de propriedades comuns entre elas, formaríamos o conceito de uma figura plana retangular, ao isolarmos as propriedades comuns ao quadrado, ao losango, ao trapézio etc., que podem ser verificadas de imediato e apontadas.

Entretanto esse modo de proceder, na opinião de Cassirer, conduz-nos a alguns problemas, como os destacados na fala abaixo:

Nesse ponto, a tradicional teoria do conceito causa as primeiras dúvidas sobre a sua validade universal e sua aplicabilidade. Se o objetivo final deste método de dar forma aos conceitos está inteiramente vazio, o processo inteiro que conduz a ele deve despertar suspeita. [...] O conceito perderia todo o valor se isso significasse apenas a negligência dos casos particulares a partir da qual começa a aniquilação de sua peculiaridade (CASSIRER, 1910, p.4-7, tradução nossa).

Cassirer observa que, neste modo de proceder na constituição conceitual, quando tomamos o número de propriedades de um conceito como a magnitude do seu conteúdo, esse



valor aumenta à medida que descemos dos conceitos mais elevados para os de níveis inferiores. Entretanto, nesse caminho, diminui-se o número de espécies subordinadas a esse conceito, de forma que essa extensão crescente do conceito corresponde a uma diminuição progressiva do conteúdo, de maneira que os conceitos mais gerais tendem a não possuírem qualquer conteúdo definitivo. “A pirâmide conceitual que moldamos alcança seu ápice na representação abstrata de ‘algo’ que inclui todo conteúdo possível intelectual, mas que ao mesmo tempo é desprovida de qualquer conteúdo específico” (CASSIRER, 1910, p. 4-7).

Tomar essa direção no entendimento sobre o pensamento conceitual situava o conceito distante do que Cassirer entendia como sendo o ‘ideal científico’ e que, por sua vez, ele enxergava nos *conceitos* gerais da Matemática.

Em sua crítica à lógica da escola de Wolff, Lambert salientou que foi mérito exclusivo dos conceitos gerais da matemática de não cancelar as determinações dos casos especiais, mas em todo o rigor retê-los. Quando um matemático faz sua fórmula mais geral, isto significa não apenas que deve reter só uns casos mais especiais, mas também possa deduzi-los a partir da fórmula universal. A possibilidade de dedução não é encontrada no caso dos conceitos escolásticos, uma vez que estes, de acordo com a fórmula tradicional, são formados por negligenciar o particular e, portanto, a reprodução dos momentos particulares do conceito parece ser excluída. Assim, a abstração é muito fácil para o “filósofo”, mas por outro lado, a determinação do particular é muito mais difícil, pois no processo de abstração todas as particularidades foram deixadas para trás de tal forma que ele não pode recuperá-los [...] Essa observação simples contém, de fato, o germe de uma distinção de grande importância. O ideal de um conceito científico aqui aparece em oposição à apresentação esquemática por uma palavra simples.

O verdadeiro conceito não ignora as peculiaridades e particularidades que detém ao abrigo do mesmo, mas procura mostrar a necessidade da ocorrência e conexão de apenas essas particularidades. O que dá é uma regra universal para a conexão dos elementos próprios. Assim, podemos avançar a partir de uma fórmula matemática geral, por exemplo, a partir da fórmula de uma curva de segunda ordem, para as formas geométricas especiais do círculo, da elipse etc., considerando certo parâmetro que ocorre com eles e que lhes permitem variar por uma série contínua de potências. Aqui, o conceito mais universal mostra-se também o mais rico em conteúdos, quem o tiver pode deduzir dele todas as relações matemáticas que dizem respeito aos problemas específicos, enquanto, por outro lado, ele tem esses problemas não tão isolados, mas com ligação contínua uns com os outros, assim nas suas ligações sistemáticas mais profundas. O caso concreto não é excluído, mas é fixo e mantido como um passo perfeitamente determinado em um processo geral de mudança. É evidente que o novo traço característico do conceito não é a “universalidade” de uma apresentação, mas a validade universal de um princípio de ordem em série (CASSIRER, 1910, p.24-25, tradução ABIDO, 2012, p.34).

Em suas reflexões sobre o desenvolvimento histórico sobre o *conceito* de conceito, Cassirer traçou o contraste entre a perspectiva conceitual aristotélica e a perspectiva conceitual da Matemática na Modernidade (desde o século XVII). Nós entendemos que essa mudança de perspectiva possa estar alicerçada numa promoção de estreitamento que se opera

na relação entre a Linguagem e a Matemática, e, em especial por uma convergência do pensamento filosófico ao pensamento matemático.

Cassirer afirmou que, se desejamos uma reforma na Lógica da Matemática e se desejamos compreender melhor a Álgebra e a Geometria, precisamos, necessariamente, começar pela reconstrução do *conceito* de conceito. Assim, como bom neokantiano, Cassirer defendia que toda a mudança do pensamento científico e matemático dependia do desenvolvimento de uma nova noção do *conceito*, que ele denominou de “o *conceito* do conceito”.

Anteriormente às observações de Cassirer, ao novo entendimento sobre o papel de um *conceito* especialmente direcionado à sua nova configuração a se apresentar na Modernidade, foi fundamentalmente importante o pensamento de Kant. Ele é considerado o primeiro a exprimir, em sua *Crítica da Razão Pura*, a essência da Ciência Moderna e de uma nova perspectiva na constituição de nosso conhecimento, o que, de certo modo, redirecionaram estudiosos, a partir de então, a interpretarem diferentemente o papel do conceito (e em nossa interpretação sobre o papel da linguagem) no processo cognitivo. O conceito deixa uma perspectiva meramente descritiva e é colocado num sentido, tanto de produto quanto de produtor no processo cognitivo. Ele escreve que:

Nosso Conhecimento surge de duas fontes básicas da mente; a primeira recebe as concepções (receptividade das impressões), e a segunda é a capacidade de reconhecer um objeto por meio dessas concepções (espontaneidade dos conceitos); a primeira nos dá um objeto, a segunda nos permite pensá-lo em relação àquela concepção. Intuição e conceitos são assim os elementos de todo o nosso conhecimento, de modo que nem conceitos sem as correspondentes intuições, nem intuições sem conceitos podem produzir conhecimento [...]. Sem o sensorial, nenhum objeto se daria para nós e, sem a razão, nenhum poderia ser pensado. Pensamentos sem conteúdos são vazios, intuições sem conceitos são cegos (KANT, 2001, B 75).

Assim, os conceitos, nessa nova direção interpretativa enunciada por Kant, não tratariam de meras imagens abstratas das coisas, sendo empregados, em primeiro lugar, como instrumentos operatórios, baseando-se em abstrações reflexivas sobre a ação. O pensamento kantiano nos direciona a uma nova noção de conceito Matemático e científico que se fundamenta na *abstração reflexionante*. Essa noção teve suas origens no instrumentalismo da Ciência Moderna e em seu caráter ativo e construtivo que imperava àquele momento.

Kant promove o que ficou conhecido como ‘Revolução Copernicana’<sup>102</sup> da epistemologia. Primeiro, porque é a partir de Kant que temos a possibilidade do surgimento de uma filosofia da Matemática de modo original. Segundo, porque ele foi o primeiro pensador, depois dos gregos, a permitir modos radicalmente novos, por exemplo, de se conceber os domínios matemáticos, transportando-os do mundo natural ou supranatural e posicionando-os no interior do intelecto humano. Após as reflexões kantianas, o sujeito passa a ter papel central no processo cognitivo e no desenvolvimento da Matemática.

Ele substitui a distinção entre pensar e Ser por “duas fontes fundamentais da mente” (OTTE, 2014)<sup>103</sup>: Conceitos e Intuições. Tal perspectiva tem consequências singulares à concepção do *conceito* do conceito e, ainda, consequentemente à interpretação do termo *axioma*. E Kant também afirma que nenhuma descrição poderia garantir a existência de nada, nem mesmo de Deus (B 622), de modo que ele apontará e destacará à uma distinção entre realidade e teoria.

Kant, de certo modo, já tinha um entendimento de *conceitos* enquanto funções e como resultado de construções na nossa intuição pura. Para ele, a seguridade da Matemática residiria na abstração reflexiva e, deste modo, nós entendemos que Kant não havia percebido o seu próprio *conceito* de conceito.

Entretanto foi Cassirer quem tentou mostrar esta transição na interpretação do *conceito* de conceito. Cassirer entendia que, para se construir uma Lógica para a Matemática, necessitamos de uma Lógica de relações e não somente uma Lógica de sujeito-predicado, como tradicionalmente. Para se edificar essa Lógica de relações, exigem-se entender os *conceitos* como representações de relações ou de funções. Temos que nos movimentar de uma Lógica conceitual de substância, esta sendo meramente a imagem de um objeto

---

<sup>102</sup> A ‘Revolução Copernicana’ de Kant trata de que: agora em vez de admitir que a faculdade de conhecer-se regula pelo objeto, mostra que o objeto se regula pela faculdade de conhecer. Não seria o sujeito que se adequaria aos objetos do conhecimento, como queria a lógica tradicional, mas os objetos se adequariam às condições formais do sujeito. As coisas naturais (fenômenos) para Kant são o conhecimento sensível. Os conceitos são captados pelo intelecto e são responsáveis pela universalidade e necessidades dos fatos. O pensamento de Kant é o divisor de águas no mundo da filosofia como foi Copérnico no mundo das ciências epistemologia ou teoria do conhecimento, esse novo modo de ver o mundo e as coisas que eles existem Copérnico tendo a coragem de lançar a teoria heliocêntrica que mudou a humanidade baseado em métodos rigorosos para estudar a origem, a estrutura e a validade do conhecimento dentro da metafísica, da lógica que é a correta ciência. A busca pelo conhecimento total e técnico sobre o universo. Nesse caminho a epistemologia oscila entre resposta dogmática ou empirista que vai atingi o simples saber ou a origem do saber. Em Kant esse conhecimento é colocado em prova, haverá conhecimento certo e seguro por este motivo Kant deixa tudo sobre o crivo da razão essas são as implicações epistemológica de Emmanuel Kant ao estabelecer a sua ‘Revolução Copernicana’ (KANT, 2001).

<sup>103</sup> Manuscrito *Axiomas, Leis naturais, Regularidades e Pensamento hipotético-dedutivo* de 17/01/2014.

(*substanzbegriff*), para uma Lógica que tem o sentido das relações elementares e fundamentais, relacionadas ao objeto que se apresenta. O sentido é o de uma perspectiva relacional. Essa nova perspectiva assumida remete à uma interpretação de uma relativa independência entre intensões e extensões dos conceitos, somente com essa premissa passa a existir a possibilidade de interpretar *axiomas* como sinônimo de hipóteses.

Na análise histórica de Cassirer, essa mudança na perspectiva do entendimento do *conceito* emergiu vinculada ao movimento da Revolução Industrial que foi o definidor de mudanças profundas no comportamento da sociedade. Nesse período, conseqüentemente, a Matemática clássica entrou em crise, já não fornecendo respostas às novas necessidades que se apresentavam. Também começa a existir o imperativo em se educar, matematicamente, grandes grupos, provocando uma imposição de reconceitualização da Matemática. Torna-se, portanto, imprescindível uma nova visão do *conceito*. Foi através de um nova interpretação de um conceito teórico e este como sendo do ponto de vista as relações, que se teve a formação de novos conceitos e de novas estruturas conceituais. Otte (2014, s.p.)<sup>104</sup> faz uma importante observação

A história da ciência pode ser grosseiramente esboçada como uma transição de pensar em objetos para o pensamento relacional, assim como uma consciência crescente de que o ponto de vista relativo ou relacional é limitado e deve ser complementado por mais ou menos assumir pragmaticamente restrições uma restrição a priori. O conhecimento teórico, então, não está preocupado com objetos concretos, nem com as propriedades intrínsecas de tais objetos, e, em particular, os termos teóricos não são apenas nomes de objetos. A Ciência está preocupada com as relações entre os objetos ou fenômenos. Só relacionamentos podem ser formados, estudados e pode objetivamente ser compreendidos e comunicados. Assim, o desenvolvimento do conhecimento começa por transformar uma propriedade intrínseca (qualidade) em um relacionamento. Esta transição e a mudança relacionada à noção de objetividade científica é causada por uma mudança de orientação da realidade como um conjunto de coisas e fatos para uma nova concepção da realidade como uma prática ou atividade.

Como esta transição histórica tomando lugar, tornou-se cada vez mais óbvio que um termo teórico receberia seu conteúdo sólido, sua forma clara, apenas pelas suas relações com outros conceitos. Assim, a posição de um conceito dentro da estrutura teórica regula questões de referência e sentido.

A transição para o pensamento relacional, sendo fortemente relacionado com a consciência do caráter ativo do conhecimento, deu ao estruturalismo uma posição muito proeminente, pelo menos naquelas ciências, onde a epistemologia já havia sido fortemente influenciada pela idéia de atividade, como, por exemplo, em matemática e lingüística

---

<sup>104</sup> Texto intitulado *Activity theory and Complementarity*, s.p. de julho de 2014.

Por exemplo, Newton trabalhou com generalização de fórmulas algébricas, apresentou seu teorema binomial, como também usou aproximações da série das funções de Taylor. A sua visão mecânica de mundo conduziu ao primeiro paradigma da Ciência Moderna, que veio a substituir a visão aristotélica e, agora, optando por um conceito metodológico do processo de matematização da filosofia natural, em vez de um conceito filosófico ou ontológico (LENHARD; OTTE, 2010, p.306).

Nos tempos modernos, conseguimos observar que os *conceitos* não tratam de simples imagens da realidade, mas constituem-se em instrumentos do pensamento e para o pensamento. E podemos destacar na Ciência Moderna as metas do próprio homem oscilando entre um pensamento relacional e um pensamento puramente instrumental.

Interessa-nos para este estudo o realce que Cassirer empreende em sua abordagem sobre as duas formas de apresentação do *conceito*: ou o conceito é uma imagem, de acordo com a perspectiva aristotélica, que representa a teoria clássica de formação de conceitos, o que para ele tende a um empobrecimento desse conceito, cuja concepção permaneceu até o final do século XVIII; ou o conceito é uma construção da forma, como vemos ocorrer na Álgebra, onde uma função pode ser uma fórmula, um polinômio ou uma série de Taylor. No primeiro caso observamos que o termo *axioma* é tomado como verdade e no segundo como hipótese. E, neste segundo caso destacamos à uma inserção da Linguagem (enquanto álgebra) nos domínios matemáticos como nunca antes presenciado.

De acordo com Arruda (2014, p.209)<sup>105</sup>, Jacob Klein (1992) descreve a mudança do significado de *arithmo* antigo para o significado de número no início da Modernidade, argumentando sobre a transformação que ocorreu no *conceito* de conceitualização,

pois a interpretação do mundo mudou, devido a novas perspectivas e novos instrumentos. Nesse sentido, a primeira intenção de um objeto diz respeito a sua essência ou ao objeto em si e a segunda intenção se refere ao fato da possibilidade de tornar conhecido o desconhecido na mente do sujeito; apreender sobre o vir a ser, ou até mesmo o será-aí de Heidegger do ponto de vista de cálculos simbólicos. A característica da conceitualização moderna de número é exatamente a possibilidade de “equivalência” entre a apreensão do objeto de primeira intenção por meio do objeto de segunda intenção.

Neste sentido observamos a representação de qualquer objeto começa a ganhar destaque, o que indica ao sentido de uma interpretação semiótica empreendida ao processo

---

<sup>105</sup> Tese em fase de elaboração intitulada *A Concepção de Jacob Klein sobre a Transição da Aritmética na época do Renascimento e suas Implicações para Educação Matemática*.

cognitivo. Essa visão conceitual, de acordo com Otte (2013)<sup>106</sup>, nasceu com os românticos<sup>107</sup>, inclusive, estes foram os primeiros que encontraram novos campos de matematização. De qualquer modo, ou sendo tomados como imagens ou como construções de sistema de *axiomas*, o que passa a prevalecer, no processo de desenvolvimento do pensamento conceitual, é a representação e esta com destaque ao pensamento relacional-operacional.

Apresentadas a abordagem e a reflexão de Cassirer sobre o *conceito* de conceito, cabe destacar que, em nossa interpretação, o que tem o sentido de uma mudança ou de outra forma de compreensão sobre a constituição de um *conceito*, parece-nos estar interligado a uma mudança que se opera sobre o entendimento relacionado à própria constituição do pensamento conceitual, a qual aparenta denotar como decorrente e consequência de uma aproximação sócio-histórica da Linguagem ao processo cognitivo e neste estudo na relação entre a Linguagem e a Matemática, promovida pelo pensamento filosófico.

Sobre a relação entre a Linguagem, o Conhecimento e a Matemática, estaremos aprofundando nossas reflexões nos capítulos posteriores. Mas selecionamos e antecipamos para este momento uma reflexão sobre a mudança no processo do desenvolvimento conceitual e a concomitante mudança que se processa na significação do termo *axioma* destacando quando vem à cena o pensamento relacional-estruturalista.

A fim de compreendermos os fatores intermitentes e exteriores ao Conhecimento Matemático propriamente que nos conduzem ao direcionamento que prima pelo pensamento

---

<sup>106</sup> Fala de Otte em momento de Orientação.

<sup>107</sup> Entendemos o *Romantismo* como ‘estrutura mental’, uma forma de ver o mundo, *weltanschauung*, ou de outra forma, como um movimento que surge com a Modernidade, no início do século XIX, mas seria uma estrutura de pensamento identificável já a partir de meados do século XVIII e perdurando até os dias atuais. Configurou uma reação a modernidade capitalista que adveio com a Revolução Industrial. De modo bem geral o romantismo pretendia combater: (1) O desencantamento do mundo, ou sua visão exclusivamente racional/científica. Surge por isso a idéia de reencantamento do mundo, buscada por um renascimento da religião, da magia e do mito. Nem tudo que aconteceu na religião, ou em relação ao mito, nos tempos modernos é relacionado ao romantismo (certos ramos mais racionais do protestantismo, por exemplo, ou a mitologização barata promovida pelos nazistas), mas o recrudescimento destes valores na modernidade pode ser creditado em parte ao programa romântico. (2) A quantificação do mundo, que reduziu tudo a valores quantificáveis, trocáveis por dinheiro. A natureza passou a ser vista meramente como matéria-prima. O romantismo, em contrapartida, exacerbou o qualitativo, as relações humanas não mercantilizadas. Os autores citam como exemplo o anti-tipo ideal do romance *Tempos difíceis* de Dickens, no personagem Mr. Gradgrind. (3) A mecanização do mundo, que passa a ser dominado pela máquina, pelo artificial, pelo construído. Os autores seguem identificando os anti-tipos na literatura inglesa e alemã: o homem-máquina do trabalho industrial, a política e o Estado concebidos como grandes máquinas. As soluções propostas pelos românticos variaram de uma nostalgia do sistema monárquico até a proposta da livre organização social anarquista. (4) A abstração racionalista, que está na base mesmo da organização da produção capitalista e na própria idéia do dinheiro como medida de valor, à qual o romantismo contrapõe a irracionalidade do amor como ímpeto emotivo e, até mesmo, uma valorização da loucura. (5) A dissolução dos vínculos sociais, demonstrada criticamente em vários personagens literários que lastimam a desumanidade da vida urbana e industrial, onde as pessoas estão próximas fisicamente mas não se relacionam (MORA, 2001).

relacional na constituição do pensamento conceitual, apoiar-nos-emos no filósofo e sociólogo Émile Durkheim (1858-1917) e no filósofo e etnógrafo Claude Lévi-Strauss (1908-2009), principalmente pelo ponto comum de suas análises serem fundamentadas pelo viés da Linguagem.

Creemos que o parecer desses filósofos seja fundamental, neste estudo, para a reflexão e entendimento sobre a mudança no processo conceitual em direção ao pensamento relacional, em especial, pela conexão que esses pensadores e filósofos traçam entre Sociedade, Linguagem e Pensamento Lógico.

Como eles, compreendemos que a vida social não pode ser excluída de ser entendida como uma fonte importante (sendo, a Linguagem, o seu combustível) e que ela mesma funcionaria como direcionamento e produto da nossa vida lógica. Sobretudo, para esses filósofos a lógica é entendida como a formação de nossa intelectualidade.

Em Durkheim, a ênfase está na conexão que ele traça entre Pensamento Conceitual, Sociedade e Linguagem – com evidência à dimensão social. De forma que o pensamento desse filósofo amplia o entendimento que empregamos neste estudo sobre a perspectiva do pensamento relacional que, anteriormente, é destacada em Cassirer.

Primeiramente interessa-nos em Durkheim, o seu entendimento sobre a generalidade do pensamento conceitual e este como resultado das experiências diferentes dos diferentes usuários desses conceitos. Ele evidenciará o elemento social e cultural ao desenvolvimento do pensamento conceitual, passando de uma abordagem fundamentada na teoria epistemológica de conceito para uma teoria social de conceito.

Atevemo-nos a dizer que, se em Cassirer temos uma visão ‘vertical’ (sincrônica) sobre o desenvolvimento conceitual, em Durkheim, encontramos uma visão ‘horizontal’ (diacrônica), haja vista ele estreitar a reflexão que envolve os contextos (a visão das realidades e dos sujeitos) que permeiam o processo do desenvolvimento do pensamento conceitual. Dentro desta perspectiva, em nosso entendimento, existe também um movimento dinâmico que influencia a qualquer interpretação nossa sobre esse processo, o que, em certa medida, entendemos relativizar também nossa interpretação.

No livro *As Formas Elementares da Vida Religiosa*, Durkheim tece importantes considerações sobre a inferência e influência de condições sociológicas no processo de desenvolvimento de nosso conhecimento e, especificamente, relacionadas à construção de conceitos enquanto atividades humanas.

Já em Lévi-Strauss, partem nossas reflexões de seus estudos interpretativos sobre o *Mito*, nos quais realçamos uma análise que aponta para a perspectiva estruturalista do processo cognitivo e do entendimento humano. Interessa-nos, também, a conexão traçada por Lévi-Strauss ao papel da Linguagem na compreensão do desenvolvimento do pensamento conceitual e ao processo cognitivo como um todo. Em Strauss, intencionamos ampliar a reflexão sobre o pensamento relacional, agregando a dimensão estruturalista<sup>108</sup> do pensamento desse filósofo à nossa cognição.

Quando, em Durkheim, destacamos, nos conceitos, a característica de um tratamento como sendo representações sociais (impessoais, estáveis, coletivas), atribuindo a estas um sentido de ‘consciências completas’, figurando como uma síntese, que tenta representar a essência/totalidade de determinado objeto ou fenômeno. Percebemos que o pensamento de Lévi-Strauss, em certo sentido, pode complementar e ampliar essa interpretação, ao apontar em sua reflexão para o que poderia ser entendido como o estilo em que se dá essa síntese: o pensamento estruturalista (e a estrutura no sentido das relações).

Outro ponto que nos permite entrelaçar esses pensadores e filósofos advém do fato de que Émile Durkheim identifica e aponta especificamente número, espaço e tempo como sendo *conceitos* que assumem, sobretudo, uma complexidade maior. Também Lévi-Strauss, em seus estudos, contempla elementos explicativos ao processo de desenvolvimento do pensamento conceitual, destacando essas mesmas categorias. Esse ponto de convergência torna-se importante e relevante em nosso entendimento, por se referirem a categorias que se situam fundamentais ao/no desenvolvimento do Conhecimento Matemático e à compreensão sobre seus fundamentos.

Tais pressupostos comungam com nossa assimilação de que a Matemática, como as referidas categorias de número, tempo e espaço, só existem na medida em que são pensadas. Como só são pensadas totalmente pelo homem, é na atividade humana que elas acontecem. De acordo com Otte (2011), a Matemática, em sua essência, revela-se somente na e pela atividade. Isso implica que o sentido dos conceitos matemáticos, como o das Ciências Exatas,

---

<sup>108</sup> Nosso entendimento de estruturalismo não se refere a um aglomerado mecânico, mas sim refere-se a um todo estrutural, cuja tarefa, por exemplo na ciência, busca revelar o ‘interior’ (no sentido de implícito), quer seja estático ou em desenvolvimento, buscar pelas “leis” de um sistema, pelas “leis” que regem relações (intrínsecas ou extrínsecas) – pensamento relacional. Para a ciência as preocupações não se fixam mais no estímulo quer seja somente interno ou exterior, mas em premissas internas (imbricadas em estruturas) de desenvolvimento. O pensamento estruturalista é baseado no relacionamento e interação entre as partes e o todo, de um fenômeno, entre cor e forma, entre representação e o representado.



encontra-se no uso deles. Isso vem justificar e reforçar a nossa tese de que os conceitos, para além de uma análise semântica como são costumeiros nas Ciências Humanas e Sociais, necessitam de uma análise pragmática<sup>109</sup> de suas representações. Daí a importância do estruturalismo que é (para nós), ao mesmo tempo, um construtivismo e um campo de atividade intelectual e cultural. Por isso, a nossa justificativa de que a Matemática destaca-se como uma ciência com objetividade embora não apresente objetos diretamente naturais no sentido empirista ou tampouco ideais no sentido apriorista.

Concebendo o caráter imanente social do desenvolvimento do nosso conhecimento, portanto, do Conhecimento Matemático, entendemos extremamente relevante trazer à reflexão esses dois pensadores que figuram essenciais ao nosso objetivo por observarem e refletirem sobre aspectos característicos que influenciam no processo de desenvolvimento do pensamento conceitual e de desenvolvimento cognitivo e, com isso, ampliam nosso entendimento sobre ‘o que é um *conceito*’.

Quando nos debruçamos no pensamento de Durkheim, observamos que suas reflexões são fortemente caracterizadas pela ênfase dada ao contexto social, ao papel da sociedade no desenvolvimento cognitivo humano e ao processo de desenvolvimento do pensamento conceitual. Sobretudo, Durkheim está convicto de que “a matéria do pensamento lógico é feita de conceitos” (DURKHEIM, 1996, p.479), o que se observa em diversas culturas.

Entretanto, para este filósofo, um conceito não pode ser caracterizado somente pelo aspecto da generalidade, como comumente é feito, pois o conceito é muito mais do que uma palavra generalizadora. “É inadmissível que o pensamento lógico se caracterize exclusivamente pela maior extensão das representações que o constituem” (DURKHEIM, 1996, p.480). Dessa forma, o conceito não contempla somente uma dimensão extensional.

Durkheim aponta a dimensão da intensionalidade que está em jogo no processo de constituição de um conceito. Esse é o mesmo sentido da crítica que Cassirer empreendeu, ao se reportar à Lógica Aristotélica, que destacava mais a extensionalidade do conceito e isso faz com que, de certa forma, o conceito perca seu valor.

---

<sup>109</sup> Sobre esse sentido de ‘uma análise pragmática’ Otte (orientação em 12 de setembro de 2014) nos apresentou um exemplo bem indicativo deste tipo de perspectiva à abordagem ao desenvolvimento do conhecimento matemático. Otte nos apresentou o teorema 35 do Livro I em *Os Elementos* de Euclides: “Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si”. Para prová-lo Euclides utiliza 13 vezes a palavra *igual*, mas quando vamos analisar as deduções e resultados consequentes observamos que o sentido dessa palavra assume três tipos significados diferentes, sejam eles: (1) igualdade como congruência; (2) igualdade identidade numérica; e, (3) igualdade como grandeza-medida de áreas. Isto é o que ambicionamos efetuar em nossas reflexões e análise do termo *axioma*.

Para Durkheim, a primeira característica do conceito é que ele se opõe às representações sensíveis de qualquer ordem (sensações, percepções ou imagens), uma vez que estas se situam num tempo e espaço do devir, num fluxo perpétuo e sujeito a mudanças, para ele o conceito é resistente às mudanças, representando uma maneira de pensar fixa e cristalizada, a cada momento de tempo. Entretanto, Durkheim (1996, p.481) destaca que isso não impede que possam ocorrer mudanças no conceito:

(...) Se [o conceito] muda, não é que esteja na sua natureza mudar, é que ele tem necessidade de ser retificado. O sistema de conceitos com o qual pensamos na vida corrente é aquele que o vocabulário de nossa língua materna exprime, pois cada palavra traduz um conceito. Ora, a língua é fixa, modifica-se lentamente e, por isso, o mesmo acontece com a organização conceitual que ela exprime.

De modo que essa certa relatividade que ele atribuirá à rigidez conceitual decorre de sua natureza na Linguagem. Assim, para Durkheim, existirá sempre a possibilidade de o conceito ser retificado e, nesse sentido, destacamos em seu pensamento uma perspectiva evolutiva no desenvolvimento do pensamento conceitual ao pensamento lógico e, em especial, ao situar a gênese de nosso desenvolvimento cognitivo no campo da Linguagem.

Observamos que Durkheim vincula o pensamento conceitual à Linguagem, estando deste modo sujeito às mesmas determinações desta última. Ele nos afirma também que a palavra ‘traduz’ um conceito e isso nos conduz ao entendimento de haver um tipo de especialidade na ideia que um conceito carrega. Parece-nos que, a esse ‘tipo de especialidade’ a que Durkheim faz referência, estejam condicionadas à algumas características específicas.

Dessa maneira, uma dessas características específicas do conceito, para Durkheim, trata que o conceito, mesmo não sendo universal, é minimamente universalizável. Para ele, a universalidade difere fundamentalmente da generalidade. A universalidade é a propriedade que um conceito tem de ser comunicado a um grande número ou a todos os espíritos. A universalidade independe do grau de extensão de um conceito. O sentido de universalidade está em o conceito ser o mesmo para todos os entendimentos possíveis e isso é um dos fatores pelo qual também se realiza a comunicação entre nós. Ele destaca que “(...) a conversação, o comércio intelectual entre os homens consiste numa troca de conceitos. O conceito é uma representação essencialmente impessoal, é através dele que as inteligências humanas se comunicam” (DURKHEIM, 1996, p.481).

Segundo este filósofo, por ser característico do conceito ser comum a todos, ele não é obra individual, mas de uma comunidade. Assim, qualquer conceito é sempre uma obra coletiva. Ele não tem sua origem numa inteligência particular. Segundo Durkheim (1997, p.482), o conceito nasce de uma inteligência única a que todas as outras se referem. É com base nesse aspecto que advém a estabilidade (ainda que relativa, mas superior à das representações sensíveis) do conceito. Uma vez que trata de uma representação coletiva, somente acontecimentos de suficiente gravidade e relevância podem chegar a afetar a base mental da sociedade.

Entendemos que os conceitos matemáticos também em sua natureza estão vinculados a tais características. Daí defendermos a tese da necessidade de uma abordagem pragmática na interpretação do significado dos conceitos. Uma hipótese que admitimos, por exemplo, é a mudança de significado do termo *axioma* ter sido influenciada e desencadeada por variações profundas, ocorridas na sociedade (incluindo neste contexto a comunidade científica) no final do século XVIII e início do século XIX e, nas palavras de Durkheim, ao tempo em que essas mudanças afetam a base mental da sociedade, podem promover mudanças na significação de alguns conceitos. Por exemplo, o construtivismo kantiano surge com o fim da metafísica e teologia dogmática e, pela primeira vez, a filosofia (kantiana) passa a impor, como não era possível no pensamento grego até então, restrições à prática Matemática.

Retomando, destacando e reforçando a influência da Linguagem na análise sobre a formação dos conceitos, Durkheim afirma que

(...) os conceitos com os quais pensamos correntemente são aqueles consignados no vocabulário. Ora, não há dúvidas de que a linguagem e, portanto, o sistema de conceitos que ela traduz, é o produto de uma elaboração coletiva. O que ela exprime é a maneira como a sociedade em seu conjunto representa os objetos da experiência. As noções que correspondem aos diversos elementos da língua são, portanto, representações coletivas (DURKHEIM, 1996, p.482).

No pensamento de Durkheim, um conceito revela-se um *tipo* de pensamento e ação que se impõe uniformemente (como uma regra ou uma norma instituída) às vontades e às inteligências particulares. Indica, desse modo, uma intervenção da sociedade na sua constituição, ingerência esta apoiada e justificada, essencialmente, na ligação estreita do pensamento conceitual com nosso processo linguístico.

Cabe ressaltar que, quando esse filósofo afirma que conceitos são representações coletivas, ele está enfatizando que os conceitos são comuns a um grupo social inteiro e não

representam uma simples média entre as representações individuais correspondentes, pois os conceitos são carregados de um saber que ultrapassa, sobremaneira, o indivíduo médio.

Eles [os conceitos] não são abstrações que só teriam realidade nas consciências particulares, mas representações tão concretas quanto as que o indivíduo pode ter de seu meio pessoal, representações que correspondem à maneira como esse ser especial, que é a sociedade, pensa as coisas de sua experiência própria. Se, de fato, os conceitos são na maioria das vezes ideias gerais, se exprimem categorias e classes em vez de objetos particulares, é que as características singulares e variáveis dos seres só raramente interessam à sociedade; em razão mesmo de sua extensão, ele praticamente só pode ser afetado pelas propriedades gerais e permanentes desses seres. Assim, é para aí que se volta sua atenção: faz parte de sua natureza ver as coisas por grandes massas e sob o aspecto que elas têm mais geralmente. Mas nisso não há pobreza. Em todo caso, mesmo quando essas representações têm o caráter genérico que lhes é mais habitual, elas são obra da sociedade e são ricas de sua experiência (DURKHEIM, 1996, p.483).

É a consistência desse saber que o faz perpassar por todas as consciências individuais, uma consistência que só se revela na essência, uma essência que se configura como uma regra, uma ordem imanente;

Ao assumirmos os conceitos como representações coletivas e não, minimamente, como ideias gerais, exatamente aí é que encontramos seu real valor. Não se trata de simplesmente ver o real pelo lado mais geral. Representações coletivas são carregadas de nossas experiências pessoais e tudo que ele pode nos ensinar ao longo de séculos. “Conceber uma coisa é, ao mesmo tempo, que apreender melhor seus elementos essenciais, situá-la num conjunto, pois cada civilização tem seu sistema organizado de conceitos que a caracteriza” (DURKHEIM, 1996, p.484).

No pensamento de Durkheim, pelo convívio social e através da sociedade é possível, ao homem, chegar a conceber todo um mundo de ideias estáveis, em que temos o ponto comum das inteligências (o conceito). Outro ponto essencial no pensamento desse filósofo trata de que o ‘caráter de verdade’ do conhecimento não se situa somente na sua impessoalidade e estabilidade que se fundam numa experiência coletiva, mas em que o conceito esteja em concordância com a natureza das coisas. Significa que “é nas coisas, pensadas tão adequadamente quanto possível, que os espíritos deveriam comungar” (DURKHEIM, 1996, p.486).

Sobretudo, nas palavras de Durkheim, quando afirma que conceituar envolve apreender melhor sobre elementos essenciais (de objetos e fenômenos) e que o conceito deve estar em concordância com a natureza dessas coisas, identificamos sobressair outro aspecto do

pensamento conceitual que ele aponta, figurando como resultado e determinante da promoção da comunhão entre os espíritos. Assim, para esse filósofo, tal aspecto que determinaria o ‘caráter de verdade’ teria um caráter, eminentemente, social.

A visão desse filósofo promove sobremaneira o processo de inserção da Linguagem ao processo cognitivo, e, principalmente o direcionamento à uma relativização entre as dimensões extensional e intensionais que entendemos estar imbricado implicitamente em seu pensamento no entendimento de um conceito.

Entendemos que o pensamento de Lévi-Strauss pode ampliar nossa interpretação, ao reforçar os condicionantes sociais na constituição do pensamento conceitual, principalmente, sobre o caráter e natureza dessa apreensão de seus elementos essenciais, acerca da concordância com a natureza das coisas. Enfim, ele trataria em nosso entendimento de como se dá essa relação entre a experiência coletiva, a verdade (intensionalidade/sentido, extensionalidade/significado) e o pensamento conceitual.

Percebemos essa conexão quando identificamos que, para Durkheim, a nossa vida intelectual tem, na raiz de nossos julgamentos, certo número de noções essenciais que, em Aristóteles, foram chamadas de categorias do entendimento, dentre elas: noções de tempo, de espaço, de gênero, de número, de causa, de substância etc. Para Durkheim, tais categorias são conceitos, mas um tipo de conceito que tem outro sentido e num segundo grau e, envolvendo e dominando todos os outros conceitos, constituindo-se em marco permanente da nossa vida mental. Lévi-Strauss afirma que, quando somos confrontados com fenômenos demasiado complexos (neste caso, aqui para nós, interpretados como sendo as categorias/noções essenciais de Durkheim), sua abordagem deve processar-se pelo estudo de suas relações internas, “isto é, tentando compreender que tipo de sistema original forma no seu conjunto. Isto é precisamente o que tentamos fazer na Linguística, na Antropologia e em muitos outros campos” (STRAUSS, 1978, p.21-22).

É nesta direção que a perspectiva de Strauss parece contribuir e somar ao pensamento de Durkheim. Lévi-Strauss apresenta uma abordagem relacional e estruturalista ao processo do desenvolvimento do pensamento conceitual da humanidade que, para nós, tem o sentido do que Durkheim, ao fazer suas inferências, aponta como sendo ‘um tipo de especialidade na ideia que um conceito carrega’ ou, em outro momento, como sendo ‘a consistência desse saber que o faz perpassar por todas as consciências individuais, uma consistência que só se revela na essência, uma essência que se perfigura como uma regra, uma ordem imanente’.

Nossa interpretação, assumindo o pensamento de Lévi-Strauss em Durkheim, é que o conceito personifica uma estrutura (trata de relações entre elementos), resultado de um processo construtivo e evolutivo. E é na e pela ‘estrutura’, formalizada na representação simbólica que, para além da extensão, chegamos ao sentido, ao qual temos revelado o aspecto intensional do pensamento conceitual, sem excluir que essa estrutura esteja sempre a sofrer implicações dos condicionantes sociais. Podemos inferir como interação de certo modo esses aspectos, numa relação e independência relativa na representação conceitual.

Como resultado de seus estudos, Strauss defende que a mente humana, apesar das diferenças culturais entre as diversas frações da humanidade, é em toda a parte e nos diversos contextos históricos uma e a mesma coisa, com a mesma capacidade. De modo que, no pensamento de Lévi-Strauss, a concordância com a natureza das coisas e o fato de se pensar as coisas tão adequadamente quanto possíveis, a ‘verdade’ que Durkheim parece situar no caráter coletivo/social (estabilidade e impessoalidade), é posicionada como vinculada ao tipo de organização cognitiva característico da humanidade, isto é, pela busca de uma ordem e regra ‘imanescentes’ aos fatos, ou fenômenos e pela identificação/estabelecimento das relações, da estrutura, mas, que se revelam também pelas/nas ‘consciências completas’ produzidas pelas sociedades.

Em seu livro *Mito e Significado*, Lévi-Strauss afirma que “a originalidade do pensamento mitológico está em desempenhar o papel do pensamento conceitual” (STRAUSS, 1978, p.37). E, na análise que empreende ao *Mito*, ele interpreta o pensamento conceitual, como se revelando na busca de uma ‘estrutura’ que, para ele, possibilita-nos chegar ao significado. Dentro desta perspectiva, também Durkheim, destacando que a Mitologia tem sua origem na Linguagem, diz que o pensamento mitológico se utiliza de modos variados, para tentar exprimir uma propriedade invariante de variados contextos, sublinhando no mito o aspecto do sentido que está, profundamente, presente na Linguagem.

O mito, em nossa interpretação trataria de um tipo de manifestação de nosso pensamento conceitual e a estrutura que ele estabelece emana do contexto do poder criativo da Linguagem. Utilizando o raciocínio de Strauss, observamos que a matemática, age do mesmo modo, mas em um nível de abstração muito maior.

Para Lévi-Strauss, o pensamento conceitual é, propriamente, uma característica da humanidade, distinguindo-se por trabalhar com a finalidade de atingir, por meios diminutos e econômicos, uma compreensão geral do universo, cujo ‘geral’ sendo entendido no sentido de

*totalidade* (1978, p.31). Esta afirmação comunga com o pensamento de Durkheim, quando ele afirma que o conceito é muito mais do que uma generalidade. Sobretudo, em Lévi-Strauss, fica claro que o sentido dessa *totalidade* do significado encontra-se e revela-se na/pela estrutura que o pensamento conceitual tenta estabelecer.

Ao analisar os diversos contextos em que se revela o pensamento mítico, Lévi-Strauss, como destaca a citação que segue, manifesta nitidamente o seu sentido de estrutura:

A história mítica tem uma célula explicativa, onde podemos observar que a estrutura básica é sempre a mesma, mas o conteúdo da célula já não é o mesmo e pode variar, isso dá a propriedade de um Mito. Na medida em que o podemos seguir sob diferentes transformações. Quando se transforma um elemento, outros elementos têm que ser forçosamente readaptados às mudanças sofridas pelo primeiro. (1978, p.60-61)

Assim, a ‘célula’ explicativa representaria o pensamento conceitual, carregada de uma estrutura. De certo modo, nesta concepção, só chegamos a algum significado quando captamos uma ordem, uma regra que se manifesta, chegando, inclusive, a afirmar que “falar de regras e falar de significado é falar a mesma coisa” (1978, p.24).

Para Lévi-Strauss (1978, p.20), a abordagem estruturalista versa também sobre a busca de invariantes entre diferenças ou, ainda, tenta exprimir uma determinada propriedade invariante de um variado e complexo conjunto de códigos, numa Linguagem ou de outro modo de ser. Por exemplo: na Geologia, o problema é tentar compreender o que é invariante na tremenda diversidade da paisagem, ou seja, reduzir a paisagem a um número finito de dados e operações geológicas.

Outra característica ou aspecto do pensamento estruturalista é o da repetição (redundância), em que o mesmo tipo de elemento pode ser utilizado diversas vezes na explicação de vários acontecimentos. (1978, p.61) de forma que os significados estão também ligados à redundância. Entretanto, significados não podem ser completamente determinados e fixos. Eles não estão sujeitos a critérios de identidade nítida e rígida com os objetos existentes. O significado, então, muda conforme o contexto, ele é relativo e relacional.

Observamos que um ponto comum no pensamento desses filósofos refere-se a que ambos compreendem que a origem do pensamento intelectual, do nosso pensamento conceitual, tem suas bases elementares na Linguagem, estando, assim, sujeita aos condicionantes imperativos legítimos do/no processo linguístico.

Nossa compreensão é que o pensamento conceitual, ou seja, nossos conceitos evoluem tais quais as sociedades. Conceitos são representações coletivas, de modo que devem exprimir realidades coletivas. Assumimos uma perspectiva genética ou evolutiva relacionada ao nosso desenvolvimento cognitivo, do pensamento conceitual, conseqüentemente, do Conhecimento Matemático.

A Matemática se caracteriza essencialmente pelo raciocínio diagramático - isso veio a ser mais evidenciado após a Modernidade - não menos porque o estreitamento na relação entre a Linguagem e a Matemática, fazendo com a matemática caminhasse à nível cada vez mais alto de abstração. O diagramático em nosso entendimento toma o sentido do pensamento relacional-estruturalista

E, na história da filosofia, como já antecipamos, foi Kant quem, por meio da sua Revolução Copernicana da Epistemologia, percebeu primeiro esses fatos. Kant escreve, na introdução do sua *Crítica da Razão Pura* (OTTE, 2014):

Quando Galileu fez experiências com bolas de um peso definido num plano inclinado, quando Torricelli usou o ar para sustentar um peso, o qual ele já tinha calculado antes manualmente como sendo igual àquele que é definido numa coluna de água [...] uma luz se acendeu para todos os filósofos naturais. Eles aprenderam que a experimentação só percebe aquilo que é produzido depois de seu próprio desenho; que não deve ser suficiente para seguir as cordas condutoras da Natureza [...] ( KANT B XII/XIII).

Assim, resumidamente, a realidade sobre a qual as Ciências, a Matemática, falam-nos, desde os tempos remotos de Galileu, “não é mais de um mundo externo estático, mas de um mundo modificado pelas atividades e práticas humanas. Galileu não matematizou a Natureza, mas, sim, matematizou as suas técnicas experimentais”. De modo que, para nós, a Matemática é a atividade resultante desse processo ‘Complementar’ entre Linguagem, meios/técnicas e objeto/fenômeno real ou não.

Todavia, mesmo quando precisamos (como na Matemática, ou nas Ciências em geral) da ajuda de símbolos para exprimir um objeto, também esses símbolos, como indicados por Durkheim, figuram como imperfeitos, pois são tomados sempre como aproximados, não mais do que isso. E, os conceitos, mesmo construídos de acordo com as regras de qualquer Ciência, sempre estarão longe, afirma Durkheim, de derivar sua autoridade única e exclusivamente de seu valor objetivo, uma vez que não basta serem verdadeiros para que se creia neles. Com este entendimento não há como delegar aos *axiomas* o sentido interpretativo de verdades. Ele destaca que:



Se não estiverem [tais conceitos] em harmonia com outras crenças, as outras opiniões, enfim, com o conjunto das representações coletivas, serão negados; os espíritos se fecharão a eles; (...) Se hoje é suficiente, em geral, que eles tragam o selo de ciência para obterem uma espécie de crédito privilegiado, é porque temos fé na ciência. (...) O valor que atribuímos à ciência depende, em suma, da ideia que temos coletivamente de sua natureza e de seu papel na vida; vale dizer que ela exprime um estado de opinião. É que tudo na vida social, inclusive a ciência, repousa na opinião (DURKHEIM, 1997, p.487).

Durkheim chama atenção para um aspecto imbricado ao sentido de ‘verdade’ do conhecimento e, especificamente, ao valor do atributo social da verdade conceitual.

De todo modo, observamos que, para Durkheim e Lévi-Strauss, conceber e nessa direção ‘conceituar’ é uma especial maneira de generalizar. “Pensar conceitualmente não é simplesmente isolar e agrupar juntos as características comuns a determinados números de objetos; é subsumir o variável no permanente, o individual no social” (DURKHEIM, 1997, p.488). Eles apontam que o pensamento conceitual deve ser tomado e considerado para além do aspecto extensional e que está também em jogo na sua constituição e interpretação o que se refere ao aspecto intensional, herdados ambos de sua origem na/da Linguagem.

Destacamos, no pensamento de Cassirer, Durkheim e Lévi-Strauss, e que justifica nossa escolha à constituição da fundamentação reflexiva sobre nossa problemática, é que, através do pensamento desses filósofos, vemos avançar a análise sobre o desenvolvimento do pensamento conceitual para além do aspecto extensional, que geralmente é mais comumente visualizado e destacado e, por outro lado, amplia uma reflexão que envolve o aspecto intensional dos conceitos. Entendemos que, nesse sentido, o Conhecimento Matemático e o próprio conceito na Matemática funcionam como exemplares, no sentido de espelhar uma configuração que busca incorporar e configurar tanto o aspecto extensional e intensional. E, nesta relação dinâmica é operacionalizado com o estreitamento da relação entre a Linguagem e a Matemática.

Retomando o desenvolvimento do pensamento conceitual, Cassirer (1910, p.24) nos alerta que “o ideal de um conceito científico aqui aparece em oposição à apresentação esquemática por uma palavra simples”. Para Cassirer, o verdadeiro conceito não ignora as peculiaridades e particularidades, mas procura mostrar a necessidade da ocorrência e conexão de apenas essas particularidades e sua perspectiva relacional pactua com o sentido da perspectiva estruturalista que destacamos em Lévi-Strauss. Nesta mesma direção, Cassirer

ainda completa, dizendo ser isto “o que dá uma regra universal para a conexão dos elementos próprios” (1910, p.24).

Especificamente, Durkheim e Lévi-Strauss compreendem que a origem do pensamento intelectual do nosso pensamento conceitual tem suas bases elementares na Linguagem, sendo portanto condicionado aos imperativos ao e no processo linguístico. Dessa forma, entendemos que uma complementaridade entre os aspectos intensional e extensional poderia ser mais bem entendida a partir de um ponto de vista semiótico. Segundo Otte (19/02/2013)<sup>110</sup>.

Entendemos que, na busca e constituição da generalidade em Durkheim e das relações estruturais na perspectiva do pensamento de Lévi-Strauss, esses dois aspectos também podem ser compreendidos no sentido de uma Complementaridade. A Matemática, neste sentido, espelha esse processo na formalização de seus conceitos, através de suas representações, de seus símbolos e de seus diagramas.

Quando retornamos a nossa apresentação inicial dos *axiomas* em Euclides e dos *axiomas* de Peano observamos que tratam de apresentações bem distintas da configuração dos *axiomas*. As proposições de Euclides em seu conjunto não espelham um conceito ou definição de qualquer coisa. Já em Peano o conjunto das proposições axiomáticas espelham um conceito. De forma que, os *axiomas* adquiriram um *status* especial na constituição de um conceito. É evidente a mudança de perspectiva de um pensamento descritivo contemplativo à um nível de pensamento mais abstrato e essencialmente estruturalista-operativo/instrumental.

Diante das reflexões anteriores, sobre os aspectos e características que entendemos relevantes ao processo de desenvolvimento do pensamento conceitual, atrevemo-nos a dizer que: para nós, um *conceito* trata de uma representação sociocultural, instrumento de nosso pensamento, elaborado para versar ou informar sobre a estrutura de determinado fenômeno ou objeto (de existência real ou não); então, conceitos não podem ser traduzidos ou entendidos como uma imagem da realidade. De forma que, o conceito contempla o caráter de generalidade através do pensamento relacional-estruturalista ao dirigir-se a qualquer fenômeno ou realidade. Eles (os conceitos) apresentam tanto uma dimensão extensional (referência - objetos e fenômenos a quem podem se referir) quanto uma dimensão intensional (significado), que se personificam na e pela atividade humana e em sua aplicabilidade.

---

<sup>110</sup> Fala de Michael F. Otte, em momento de orientação.

Consideramos, por exemplo, ser de fundamental importância compreender um *conceito* em termos da Complementaridade entre esses aspectos.

E, aos conceitos matemáticos, empreendemos uma interpretação que prioriza a Complementaridade entre a Linguagem e a Matemática. De modo que, na Matemática, também se faz necessária a abordagem sobre a constituição dos conceitos, tanto de um ponto de vista instrumental, quanto do ponto de vista relacional.

A representação do conceito é o elemento de mediação e manifestação entre esses aspectos (intensão e extensão). Daí, a nossa justificativa e opção pela necessidade de uma abordagem semiótica. Resumidamente, nosso conhecimento e seu desenvolvimento baseiam-se na interação entre símbolos, objetos e um interpretante (indivíduo - meios/atividades - objetos).

E também, como já observamos, significados dependem de redundância; assim, universais são mais bem entendidos, não como abstrações no sentido platônico, porém concebidos como relações (apontam para uma estrutura). Entendemos que a Complementaridade entre aspectos dicotômicos se revela na formalização e no exercício do pensamento matemático e no desenvolvimento do Conhecimento Matemático, podendo ser mais bem percebida a partir do ponto de vista da cognição como atividade semiótica, porque a atividade semiótica é, ao mesmo tempo, construtiva e reflexiva.

Compreendemos que nossa opção, em estudar possíveis oscilações na significação do termo *axioma*, oportuniza espaço para ampliar, aos educadores em Matemática, conhecimentos sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático, em especial, sobre sua gênese e historicidade. Muitos dos problemas no processo ensino-aprendizagem em Matemática residem na ausência ou carência sobre o entendimento desses aspectos por parte dos educadores.

O pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ nos conduz ao entendimento de que o significado de um termo ou um conceito evolui, assim como também esse conceito pode ser usado e aplicado junto com uma variedade de diferentes contextos objetivos e com diferentes tarefas em mente. “Os estudantes são muito frequentemente avisados para estritamente aplicar a definição de um conceito, não deixando intuições e livres associações de ideias interferirem. Este conselho, embora tenha alguma justificação – como conceitos servem para distinguir e classificar fenômenos, e definições refletem exatamente essa função – é unilateral e essencialmente mal orientado” (OTTE, 2014).

Segundo Otte, parece ser verdade que tudo esteja, metaforicamente, relacionado a tudo, mas, sobretudo, para agirmos contra incertezas, tentamos ser precisos em nossa Linguagem e, ao mesmo tempo, devemos trabalhar com contextos objetivos; daí a necessidade de uma abordagem Complementar para entendermos sobre essa relação no desenvolvimento do nosso pensamento conceitual. “Um conceito pode mudar seu significado de um contexto para outro, e deve ser assim para ser útil com um geral ou um universal. A criação de conceitos está fazendo força atrás da generalização, a qual por sua vez é o negócio essencial para todas as ciências, incluindo acima toda a Matemática. Um conceito é, portanto, para ser distinguido de qualquer de suas definições ou aplicações, mas não tem significado além da totalidade de suas possíveis representações ou aplicações” (OTTE, 2014). É isto que queremos dizer com uma ‘relativa’ independência.

Este estudo destaca uma mudança que se processa na Modernidade no modo de conceber um *conceito* e sobre sua constituição, direcionada de uma visão descritiva à uma visão operativa, e, neste novo modo, o termo *axioma* assume *status* diferenciado na constituição de um *conceito*; como consequência disso, opera-se também uma mudança na significação do termo *axioma*, o qual deixa de tratar e referir-se a verdades e passa a ser entendido no sentido interpretativo, sinônimo de hipóteses.

A visão interpretativa que pretendemos empreender neste estudo considera ser de essencial relevância situar um conceito como resultado de um movimento dinâmico e de Complementaridade entre os aspectos e elementos participantes em sua constituição, tanto aspectos internos como externos neste processo de formação.

O *conceito* atualmente é tomado como uma supraestrutura, um esquema que coordena sistemas de representação, sistema de classificação e um sistema lógico, o qual constrói sistema de relações. Estas, podendo ser de equivalência ou diferença que evoluem em operações. E, ainda, este conceito como elemento de assimilação dos sujeitos permite a descrição, classificação, previsão e a comunicação, favorecendo, assim, uma abordagem de aspectos universais e individuais dos objetos.

E considerando que o raciocínio diagramático é característico e basilar na e para a Matemática (caracterizando uma íntima e interdependente relação entre a Linguagem e a Matemática), defendemos que, para além de uma compreensão sobre o desenvolvimento do pensamento conceitual, à Matemática e, especificamente, os seus conceitos, principalmente na configuração que assumem a partir da modernidade, torna-se interessante, importante e

inovador empreender, à interpretação desses conceitos, uma abordagem interpretativa que contemple uma perspectiva semiótica no sentido da Complementaridade do pensamento ‘Otteano’.

No capítulo a seguir, passaremos a uma reflexão, buscando delinear aspectos fundamentais dessa teoria que está em desenvolvimento por mais de quarenta anos pelo professor Michael F. Otte e, no terceiro capítulo estaremos apresentando aspectos da Semiótica de Peirce, sobre a qual se fundamenta o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

Segundo Otte (2013)<sup>111</sup>, o grande sociólogo Emile Durkheim (1858-1917), criador da Sociologia da Educação, teve razão quando disse que qualquer revolução científica é pressentida e pré-formada por uma revolução didática. Compreendemos que uma revolução didática em Matemática, antes de mais nada, necessita concentrar esforços e investimentos financeiros direcionada ao desenvolvimento intelectual dos Educadores em Matemáticos, e focar em que esses educadores conheçam mais apropriadamente sobre a gênese e historicidade do desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático. Entendemos que o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ pode constituir-se em uma propositura ímpar, principalmente, em sua dimensão potencializadora do processo ensino-aprendizagem em Matemática. E, ambicionamos que as reflexões, estudos e críticas suscitadas possam tomar o sentido de promoção dessa verdadeira revolução didática necessária aos projetos educativos: potencializar as aprendizagens matemáticas ao tempo em que consegue tornar mais claras aos educadores matemáticos questões relacionadas à gênese e historicidade do conhecimento matemático, e, assim promover o desenvolvimento de autonomia intelectual dos alunos.

---

<sup>111</sup> Manuscrito de Michael F. Otte.



## **CAPÍTULO V: Uma Reflexão sobre a Relação entre a Linguagem, o Conhecimento e a Matemática: pensamentos que conduziram à introdução de uma abordagem semiótica ao processo cognitivo e à Teoria Estruturalista da Metáfora**

Este capítulo pretende apresentar e apontar para momentos históricos cujas abordagens de alguns filósofos e matemáticos possam nos revelar distanciamentos e aproximações da Linguagem ao processo cognitivo (desenvolvimento do nosso conhecimento) e, conseqüentemente, à Matemática, ou seja, sobre os reflexos de um movimento do pensamento filosófico à produção do Conhecimento Matemático. Buscamos destacar fatores preponderantes nesse movimento, refletindo sobre um possível condicionamento à mudança no direcionamento do significado do termo *axioma*.

Neste sentido, deixamo-nos conduzir pelo caminho delineado a partir da inserção de uma abordagem interpretativa de cunho semiótico até chegarmos ao papel do pensamento metafórico no processo cognitivo. Nosso entendimento perpassa que sejam fatos interligados, tanto à mudança que se processa no significado do termo *axioma*, de antônimo para o sinônimo de hipóteses, como o processo de destaque que incide a ser dado (e aceito) à Linguagem, conseqüentemente à metáfora ao/no processo cognitivo e que conduziu a introdução da Teoria Estruturalista da Metáfora enquanto movimento epistemológico.

### **5.1 Da inserção do pensamento metafórico no processo cognitivo: da certeza intuitiva à contingência do pensamento metafórico**

Observamos que, na Antiguidade greco-romana, houve sempre um distanciamento da Linguagem enquanto constitutiva e/ou reflexo no/do nosso desenvolvimento cognitivo. O papel atribuído mais comumente a ela era o de informativo, cumprindo a função de comunicar o conhecimento que teria sua origem, ora transcendental, ora como imanente dos objetos (e em ambos os sentidos com ligação e atribuição divina). Embora houvesse especulações sobre algumas poucas reflexões do papel da Linguagem, como nos afirma Otte (2013), na filosofia greco-romana não se concebia a Linguagem como fundamento da verdade, nem mesmo em Aristóteles. E mesmo a analogia, conseqüentemente, o pensamento metafórico, ao invés de ser tomado como demonstração do poder criativo da Linguagem, de outro modo, serviria para comprovar sua própria inadequação no processo cognitivo. A analogia só teria valor quando

os Deuses nos falavam, como uma “indicação da luz do além, que seria tudo em brilho e grandeza” (NEF, 1995, p.42). Mas o homem, ao procurar sondar o abismo inteligível, ao recorrer à analogia, denunciava o próprio não valor do discurso, mostrando sua fraqueza radical, principalmente, em relação às realidades não sensíveis. E as verdades eram concebidas como verdades sobre o ser, como essências.

De modo que, em sentido epistemológico, consideramos haver na Antiguidade uma distância entre retórica e conhecimento e muito evidente entre Linguagem e Conhecimento Matemático. Essa distância começa a ser reduzida somente na passagem dos tempos Modernos (do século XVI ao XVIII), impulsionada pela invenção da Imprensa, a Revolução Industrial, a Revolução Científica e, sobretudo, pela Revolução Copernicana, produzida pelo pensamento kantiano, aos tempos Contemporâneos (do século XIX a XX) e, principalmente na metade do século XX. Observamos que, a partir do século XX, começam a surgir teorias sobre a metáfora, sugerindo que o conhecimento humano sempre esteve ancorado em uma perspectiva metafórica.

O distanciamento, na Antiguidade, da retórica ao processo de desenvolvimento do nosso conhecimento teve, como combustível, a disputa entre os sofistas e o pensamento platônico. Para os sofistas, “o homem seria a medida de todas as coisas”, em cujo sentido a verdade seria sempre relativizada, com forte ênfase dada à retórica e ao discurso, e a Linguagem tendia ao convencionalismo. De outro modo, o pensamento platônico foca sua busca (e crença) pelo conhecimento verdadeiro que, nesse sentido, significava uma busca pela elevação da alma, e era o que nos aproximava de Deus.

Em Platão, observamos que, como as realidades sensíveis seriam compostas de cópias de objetos reais, poderíamos pensar que a Linguagem, na óptica platônica, fosse um misto sensível, composto de objetos ideias, como o nome ideal ou o verbo ideal. Tal entendimento, extraímos de *Crátilo*, onde nos é informado que a exatidão da denominação repousa na conformidade da relação entre as palavras e as coisas (ideias). Nesse diálogo, Platão estabelece, implicitamente, um programa de filosofia racional da Linguagem.

Mas isso não se estenderia ou compreenderia o sentido de uma relação entre a Linguagem e a Matemática. Uma vez que, para Platão, a Matemática situava-se como um ponto de partida para sua Filosofia e ele não questionava ou empreendia uma Filosofia da Matemática; de outro modo, ele agia no sentido de tentar trazer o método da Matemática à Filosofia. O máximo que podemos inferir de uma ligação (ou inserção) da Linguagem à



Matemática no pensamento platônico é o sentido que ele dá à palavra *logos* que assume o sentido primeiro de ‘reunião, coleção’ e não ‘termo, palavra’. Assim, *logos* poderia designar, ao mesmo tempo, um discurso ou uma linguagem, mas, também, uma relação Matemática ou um argumento.

Sobretudo, para Platão, a Linguagem no processo cognitivo é tomada como um instrumento deficiente do qual se servem os fatores que nos levam a conhecer (rememorizar) cada coisa, tal e qual quanto ao que ela é.

Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) e Cícero (106 a.C. – 43 a.C.) são nomeadamente outras duas principais fontes do pensamento greco-romano sobre a relação entre Linguagem e Conhecimento na Antiguidade. Desde sua *Retórica*, Aristóteles sempre deixa clara sua preocupação com o tipo de Linguagem a ser usada ao se comunicarem as ideias, sempre evidenciando que, para se tratar do conhecimento ou a se enunciarem verdades, deveríamos usar palavras o menos imprecisa possível. Para Aristóteles, a eloquência ou a arte encantatória da retórica não tinham como característica a precisão, algo fundamental ao bom discurso, ele mesmo apontava que “ninguém se vale de uma linguagem elegante quando ensina geometria” (ARISTÓTELES, 2007b, p.148).

As concepções de Linguagem de Aristóteles foram, certamente, influenciadas pela tradição da academia de Platão, onde se ensinava, em oposição aos sofistas, que o universo das palavras era inseguro e orientava-se para o exame cuidadoso dos significados das palavras e para a busca das essências (estáveis e perenes) dos significados dos vocábulos. Sua preocupação com a Linguagem esteve centrada na possibilidade de, através dela, construírem-se normas que permitissem prescrever regras de raciocínio, independentes do conteúdo dos pensamentos que tais raciocínios conjugassem. De modo que se procurou elaborar uma espécie de lógica formal, partindo da análise de proposições da Linguagem corrente.

Aristóteles, ao buscar na Linguagem normas que permitissem demonstrações corretas e irretorquíveis para se atingir a certeza científica e se construir um conjunto de conhecimentos seguros, promove uma separação entre Lógica e argumentação retórica, situando a metáfora nesta última e tomando-a como inadequada ao discurso científico. Concebia a metáfora apenas como uma ornamentação do discurso, sendo desnecessária e, até mesmo, imprópria à Ciência. Assumia como sendo o principal efeito da metáfora possibilitar semelhança entre os diferentes.

Observando sua definição de metáfora:

A metáfora é a transposição do nome de uma coisa para outra, transposição do gênero para a espécie, ou da espécie para o gênero, ou de uma espécie para outra por via de analogia. Quando digo do gênero para a espécie é, por exemplo, “minha nau aqui se deteve”, pois lançar ferro é uma maneira de “deter-se”; da espécie ao gênero: “certamente Ulisses levou a feito milhares e milhares de belas ações”, porque “milhares e milhares” está por “muitas”, e a expressão é aqui empregada no lugar de “muitas”; da espécie para a espécie: “tendo-lhe esgotado a vida com o bronze”; aqui, “esgotar” equivale a “cortar” e “cortar” equivale a “esgotar”: são duas maneiras de tirar. Digo haver analogia quando o segundo termo está para o primeiro, na proporção em que o quarto está para o terceiro, pois, neste caso, empregar-se-á o quarto em vez do segundo e o segundo em lugar do quarto. Às vezes também se acrescenta o termo ao qual se refere a palavra substituída pela metáfora. Se disser que a taça é para Dionísio o que o escudo é para Ares, chamar-se-á à taça o escudo de Dionísio e ao escudo, a taça de Ares. O que a velhice é para a vida, a tarde é para o dia. Diremos, pois que a tarde é a velhice do dia, e a velhice a tarde da vida (ARISTÓTELES, 2007a, p.74-75).

O sentido da metáfora em Aristóteles é o mesmo de *símile* e uma boa metáfora implicaria apenas uma percepção intuitiva de semelhança e dessemelhanças. Destacava somente a característica retórica da Linguagem metafórica, não sendo a ela atribuído qualquer potencial heurístico ou cognitivo.

De outro modo, aos sofistas daquela época, a Linguagem serviria tanto para defender uma ideia quanto para combatê-la logo a seguir. Neste sentido, uma perspectiva que tende a certa aproximação na relação entre Linguagem e Conhecimento.

Boécio (480 d.C. – 524 d.C) foi um dos últimos a ler o texto de Platão e Aristóteles no período da Antiguidade. Nas diversas traduções que fez (*Organon*- a maior parte-, *Isagoge*, *Categorias*, *De Interpretatione*), seus comentários tiveram grande influência aos estudos posteriores. Assim, há um tipo de interpretação boeciana do pensamento greco-romano e inferências interessantes sobre o papel da Linguagem no processo cognitivo.

Na sua interpretação da doutrina aristotélica, por exemplo, da relação entre as palavras, os conceitos e as coisas, ele é conduzido a afirmar que as palavras significam os conceitos e não as coisas:

Embora as palavras sejam nomes das coisas, nós utilizamos as palavras não em vista de significar as coisas, mas de significar essas modificações mentais que são causadas em nós pelas coisas. Por conseguinte, já que as palavras são utilizadas para significar essas entidades, ele [Aristóteles] tem razão de dizer que elas são principalmente os signos (*notae*) dessas entidades (BOÉCIO *apud* NEF, 1995, p.49).

Essa interpretação de Boécio tem importância para a concepção ideacional da significação, definida pela necessidade de mediação pela ideia; assim, uma palavra não

significaria em virtude de sua referência à coisa que ela denota, mas em virtude da expressão da ideia representada pela coisa. Trata-se de uma noção muito interessante de conceito enquanto signo. Inclusive, esse aspecto acoplado a um dos três tipos de Linguagem conduziu à concepção de uma língua mental. Boécio esteve na origem de uma análise lógica da Linguagem (porém, mais propriamente, da Linguagem teológica). Entendemos que há, nesse sentido, a prospectiva (ainda que distante) de uma interpretação semiótica e uma postura tendendo à aproximação da Linguagem à produção de Conhecimento. Todavia não identificamos o mesmo sentido de aproximação da Linguagem ao desenvolvimento do pensamento Matemático.

O romano Cícero, em sua *De inventione*, mesmo assumindo algumas classificações das tipologias da Linguagem de acordo com Aristóteles, concebia a retórica como elemento indispensável à comunicação do conhecimento, de modo que, para ele, as ideias por si só não se fazem conhecer, necessitamos da Linguagem. Diferentemente de Aristóteles que desconfia da eloquência, Cícero a considerava fundamental, pois mesmo a razão, permitindo ao homem desvendar a verdade, não seria ela suficientemente capaz de convencer-nos de suas verdades.

Com o Renascimento, o pensamento de Cícero é o que passa a predominar nas discussões e reflexões na Europa, principalmente, na Inglaterra, trazendo reflexos diretos à educação dos séculos XV e XVI. A retórica passa a ser tomada como elemento indispensável para se elevar o homem de um nível de cidadão comum a de cidadão ilustrado. Sobretudo, nesse período, havia uma subvalorização das Ciências e, principalmente, da Matemática. A formação científica do cidadão havia sido deixada em segundo plano, sendo valorizado e priorizado o campo político em detrimento da formação com vistas à produção de conhecimentos científicos, comprometendo, sobremaneira, a relação entre Ciência e Educação.

Nesta época, a Matemática era tida como Ciência que não necessitava de uma Linguagem que a comunicasse em diálogos; a concepção, àquela época, não estabelecia uma relação significativa entre ideias matemáticas e a necessidade de um discurso para comunicá-las (LEITE, 2010, p.25). A Matemática era tratada como um saber individual, difícil e problemático, que pouco tinha a contribuir para a melhoria da vida pública. Por isso, a Educação, de certa forma, não priorizava esses saberes, pela natureza complicada desses conhecimentos, o que aumentava, sobremaneira, a distância na relação entre Linguagem e conhecimento científico.

Entretanto, mesmo o pensamento de Cícero promovendo uma limitada aproximação na relação entre Linguagem e Conhecimento, este esteve longe de atribuir à Linguagem uma função diretamente relacionada à constituição do conhecimento, limitando-a somente a uma função secundária. De maneira que as reflexões se centravam, na maioria das vezes, nos aspectos relacionados à comunicação do conhecimento.

Já o período que se estende de 1450 a 1800 irá se configurar como um período permeado por um intenso movimento social, político, cultural e intelectual, com reflexos consideráveis na relação entre a Linguagem e a Matemática, promovendo, nessa relação, grandes e profundas mudanças, e em especial em meados século XIX e no século XX. Acontecimentos que agenciaram essa mudança significativa foram, inquestionavelmente, a invenção da imprensa que ocasiona maior socialização da informação, o movimento promovido pela invenção da máquina a vapor que iria culminar na Revolução Industrial, a necessidade educativa da massa trabalhadora que teve o direcionamento promotor para o processo de revolução didática e sobre novas e produtíferas reflexões sobre os fundamentos do nosso conhecimento. Tudo isso figurou e se configurou em mudanças importantes tanto ao pensamento filosófico como ao desenvolvimento da Ciência Moderna.

Esse período, segundo Frédéric Nef (1995, p.99), é marcado positivamente por: uma orientação para a teoria do Conhecimento (mais para a Ontologia, ou para a Semântica): “o método científico, ao mesmo tempo dedutivo experimental, tem como objetivo desvelar a verdadeira natureza do conhecimento humano”. O paradigma divino se dilui consideravelmente: por um debate sobre o caráter inato dos conhecimentos ou sobre a aquisição, que permitirá ordenar, simultaneamente, a significação epistemológica do cartesianismo, a discussão de Locke e Leibniz e se compreender alguém como Condillac; também por um projeto de língua universal e, embora se enfraqueça no século XVIII, marcará todo um período (o pensamento de Leibniz é resultado dessa longa gestação); e, por um tema: a origem da Língua.

Com as descobertas de Galileu, Kepler e, posteriormente, de Newton e o advento da Revolução Científica (do século XVI até o século XVIII), ainda há a manutenção do distanciamento entre Ciência e Retórica/Linguagem que tende a se intensificar com o Iluminismo no séc. XVIII. Por causa de um movimento, àquela época, que vem ressaltar, na Ciência, um caráter de objetividade e precisão e, nesse sentido, a Linguagem é retomada e novamente interpretada sob a suspeita de ser meramente um conjunto de engodos e enganos

retóricos e a Matemática a ser considerada como o modelo epistemológico por excelência para a Ciência, mas sem conotações de participação da Linguagem no processo de desenvolvimento dessa Ciência.

Com a Revolução Industrial em seu prelúdio, é fundada, em 1794, a primeira grande escola científica, a *École Polytechnique*, na França. Passa a existir a necessidade social de se educar matematicamente, sobretudo, para se formar mão de obra especializada. Há um direcionamento à socialização do conhecimento científico às camadas da população a que este era negado ou negligenciado, pois antes esse conhecimento era direcionado/disponibilizado somente a especialistas. Essa eminência da necessidade educativa faz com que comecem a existir preocupações e reflexões no sentido de se definir o papel exato e preciso da Linguagem para a Ciência e Conhecimento, que irão destacar/realçar aproximações na relação entre Linguagem e Conhecimento.

Entretanto, nessa época, como a concepção vigente era de se atribuir ao Conhecimento a busca pela certeza e objetividade, ainda persiste um realce que atribuía, à Linguagem, um sentido que colocava mais o discurso como um empecilho ou obstáculo epistemológico ao conhecimento e entendimento humano (LEITE, 2010, p.26) do que como a possibilidade da participação mais efetiva no processo cognitivo. Uma visão que, de certa forma, foi se cristalizando até o início do século XIX.

Sobretudo, são as reflexões e considerações geradas nesse período que irão despertar o caminho à interpretação diferente do papel da Linguagem, principalmente, relacionada ao desenvolvimento da Matemática. Nesse sentido, veremos surgir, em meados do século XIX e consolidando-se no século XX, uma perspectiva que não ignora o papel significativo da relação entre Linguagem e Conhecimento, especificamente, entre a Linguagem e a Matemática, inclusive, com reconhecimento especial direcionado à metáfora que irá culminar com o surgimento da Teoria Estruturalista da Metáfora, como possibilidade explicativa à leitura interpretativa do/no processo cognitivo humano.

O que contribui, em definitivo, para esse novo direcionamento, é o surgimento de um rompante movimento denominado *Romantismo* que apareceu em contraposição ao movimento capitalista provocado pela Revolução Industrial, um contramovimento capitalista. Acima de tudo, ele irá contribuir com o sentido de promoção da aproximação na relação entre Linguagem e a Matemática e reforçar isso, principalmente, pelo papel que este movimento atribui à metáfora.

Vivia-se um cenário que conduzia a certo nível de inquietude profunda, um solo fértil para o surgimento de novos modos de pensamento, de conceptualização e de atribuição de sentido, só assim se poderia processar a aproximação da Linguagem ao desenvolvimento cognitivo. Um fator que contribui decisivamente foi o surgimento e fomentação da multiplicidade dos modos de pensar, gerada nesse período de efervescência e pelo crescente aumento da necessidade educativa como também para o incremento da produção de conhecimento, pois, nas diversas e recentes áreas, era necessário o desenvolvimento de novos princípios de inédita ordem e forma de racionalidade técnica. De outro modo, provocaríamos o risco de adquirir-se um amontoado de conhecimentos desorganizados e incompreensíveis, o que equivaleria a não ter conhecimento algum. Assim essa nova forma de racionalidade técnica seguirá o caminho que aproximará a Linguagem do processo de produção científica, consequentemente, da Matemática.

### **5.1.1 Pensamentos filosóficos em que destacamos (o sentido de) um distanciamento da Linguagem ao processo cognitivo**

O pensamento de Descartes (1590-1650), Hobbes (1588-1679) e Leibniz (1646-1716) destacou-se por tentar definir o exato e preciso papel da Linguagem para a Ciência e para o entendimento humano a partir do século XVII (LEITE, 2010, p.26). Em nossa interpretação, a teoria desses filósofos é permeada por uma perspectiva que tende ao distanciamento entre Linguagem e Conhecimento, convergindo para a desqualificação da Linguagem ‘comum’, ordinária e, consequentemente, da metáfora. Eles se orientam no sentido de impor objetividade e precisão à Linguagem e fundamentam essa exigência por assumirem uma concepção que toma a Matemática como modelo epistemológico ideal.

Para Descartes, cujo tema central de sua filosofia era a certeza intuitiva, a Matemática possui um *status* epistemológico privilegiado em relação às outras Ciências, como ele afirma:

Os longos encadeamentos de razões, todas simples e fáceis, que os geômetras costumam utilizar para chegar as suas mais difíceis demonstrações, me haviam feito imaginar que todas as coisas passíveis de serem conhecidas pelos homens se seguem uma às outras do mesmo modo (DESCARTES, 2008, p.55).

Para ele, são os métodos demonstrativos da Matemática que acostuariam o espírito a se alimentar de verdades e a não se contentar com falsas razões e que, entre todos que

buscaram, até então, a verdade nas Ciências, somente os matemáticos puderam encontrá-la com suas demonstrações (DESCARTES, 2008).

Observando a álgebra e a geometria, Descartes desenvolveu as quatro regras de seu método, chamado cartesiano<sup>112</sup>, que, segundo ele, são capazes de conduzir a razão na busca pela verdade e, assim, intenta generalizá-lo a todas as demais Ciências. A primeira regra demanda a dúvida generalizada, ou o ceticismo, como princípio, segundo o qual não se deve aceitar jamais alguma coisa como verdadeira antes de a conhecermos evidentemente como realmente é, pelo uso da razão. É imprescindível “evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e nada incluir nos julgamentos senão o que se apresentasse de maneira tão clara e distinta ao espírito que não tivesse nenhuma ocasião de colocá-lo em dúvida” (DESCARTES, 2008, p.54). A segunda regra postula a necessidade de se dividir todas as dificuldades encontradas em tantas parcelas quantas forem possíveis, a fim de facilitar a busca de soluções e da verdade. A terceira regra trata da forma de condução do pensamento, informa que devemos começar sempre pelos objetos mais simples, mais fáceis de conhecer para, aos poucos, ir atingindo os mais compostos e complexos. Por último, a quarta regra postula a necessidade de se “fazer em toda parte enumerações tão completas, e revisões tão gerais, que se tenha a certeza de nada omitir” (DESCARTES, 2008, p.55).

Ele indica que, para uma boa representação da imaginação e dos pensamentos construídos a partir de seu método, seria necessário designá-los por signos, os mais breves possíveis e que, para essa tarefa, deveríamos tomar de empréstimo “o melhor da análise geométrica e da álgebra” (DESCARTE, 2008, p.28).

Observamos que o papel central ocupado pelo modelo matemático no método de Descartes imputa à Matemática e a seus modos de representação (signos, símbolos e conceitos) um *status* de assepsia quanto a induções da eloquência e da persuasão emotiva, habilitando-a, assim, a expressar o verdadeiro conhecimento. De acordo com esse filósofo: “[...] me comprazia sobretudo com a matemática, por causa da certeza e da evidência de suas razões” (DESCARTES, 2008, p.42).

Destacamos uma nítida distinção entre pensamento e Linguagem, em que esta última possui tão somente uma função instrumental ao conhecimento, somente uma forma de se materializar o pensamento. Neste sentido, os conceitos matemáticos devem situar-se num esforço constante pela clareza e objetividade ao externalizarem o pensamento e as verdades.

---

<sup>112</sup> Derivado de seu nome latinizado *Renatus Cartesius*.

A concepção cartesiana de Linguagem situa o discurso comum e, conseqüentemente, a metáfora como um obstáculo epistemológico, uma vez que é sujeito a induções sedutoras da eloqüência e da persuasão emotiva. Para Descartes, as palavras são signos que os homens instituem para expressar seus pensamentos, e estes pré-existem anteriormente e independente, não tendo uma natureza discursiva.

Thomas Hobbes (1588-1679) principia reflexões que começam a destacar a importância epistemológica das palavras. Mas, sobretudo, ele advoga em favor da objetividade no discurso e toma como base a lógica geométrica na construção do conhecimento. Entretanto, diferentemente de Descartes, ele estabelece, de modo peculiar, uma ligação direta entre Linguagem e a faculdade do pensamento. Nos capítulos V e VI de sua obra *Leviatã*, publicada em 1651 na Inglaterra, ele se dedica à discussão sobre a Linguagem e sua relação com o conhecimento científico.

Desenvolve sua teoria que dialoga sobre a importância epistemológica das palavras, que pode ser situada entre apelo à experiência (empirismo) e à valorização da razão (racionalismo). Sobretudo, influenciado pelo pensamento Euclidiano e por Descartes, tende mais ao racionalismo.

Na teoria de Hobbes, as imagens derivadas das sensações constituem um ‘discurso mental’ que são, na realidade, o princípio dos princípios e origem da Ciência. De modo que as imagens, não sendo suficientes para que se constitua qualquer entendimento, identificam a necessidade da associação de cada elemento do mundo real a um nome, um signo, uma palavra.

Estes constituiriam, assim, o elo entre a sensação e o pensamento racional propriamente dito, o que faz surgir, desse modo, o ‘discurso verbal’. Tudo o que podemos considerar num cálculo estaria sujeito a nomes. Assim, a adição de dois nomes, constituiria uma proposição; duas proposições, um silogismo; vários silogismos, uma demonstração. A somatória de vários silogismos nos conduziria à Ciência e esta definida como “conhecimento das conseqüências de uma palavra à outra” (HOBBS, 1996, p.11).

A ligação direta entre pensamento e Linguagem, para Hobbes, está na dependência do pensamento racional à palavra e esta não está dissociada das sensações. São as palavras que garantem as definições e deduções necessárias às explicações da realidade. Mesmo o conhecimento sendo dependente da experiência, a sensação, por si só, não levaria à Ciência. Esta depende da razão, operacionalizada através de uma soma ordenada de nomes, de



palavras. Assim, podemos concluir, de acordo com o pensamento de Hobbes, que a Linguagem verbal desempenharia papel fundamental para o entendimento humano.

No entanto, interpretamos que, para Hobbes, parece existir um discurso mental e um discurso verbal. As palavras é que possibilitam a passagem de um discurso para o outro. “O uso geral da linguagem consiste em passar nosso discurso mental para um discurso verbal, ou a cadeia de nossos pensamentos para uma cadeia de palavras” (HOBBS, 1996, p.44).

Reconhecendo a palavra como elemento fundamental para o raciocínio, Hobbes defende que cada palavra deve possuir um único e exato significado, assim como uma ordenação clara e precisa no discurso, pois “[...] a verdade consiste na adequada ordenação de nomes em nossas afirmações, um homem que procurar a verdade rigorosa deve lembrar-se que coisa substitui cada palavra de que se serve, e colocá-la de acordo com isso” (HOBBS, 1996, p.46).

Portanto, as palavras que não são bem definidas ou que possuem sentidos diversos são impróprias para o discurso científico. Hobbes toma como exemplo e modelo de precisão e objetividade o cálculo matemático, fazendo, dessa forma, uma analogia com a Geometria, na qual “os homens começam por estabelecer as significações de suas palavras, e a esse estabelecimento de significações chama *definições*, e colocam-na no início de seu cálculo” (HOBBS, 1996, p.46).

Para esse filósofo, que estabelece na precisão das palavras uma condição primeira ao discurso científico, fica entendido que com palavras imprecisas, como no caso da Linguagem figurada ou da metáfora, não chegamos a lugares seguros e nem ao conhecimento científico.

Sobre o papel da metáfora, ele faz uma reflexão direta em sua obra *Leviatã*, publicada em 1651. No capítulo V, em *Da Linguagem*, ao tratar sobre a importância epistemológica das palavras, reforça a função objetiva do discurso ao conhecimento científico e, para se atingir o conhecimento verdadeiro, critica veemente a metáfora, considerando-a como um empecilho ao bom desempenho das palavras no discurso. Assim, ele afirma:

[...] os nomes das coisas que nos afetam têm um sentido vacilante, pois uma coisa nem afeta todo mundo da mesma maneira nem a mesma pessoa sempre da mesma maneira. Dado que todos os nomes são impostos para significar nossas representações, e todas as nossas afeições nada mais são do que representações, quando concebemos as mesmas coisas de forma diferente, dificilmente podemos evitar denominá-las de forma diferente também. (...) E portanto tais nomes nunca podem ser verdadeiras bases de nenhum raciocínio. Como também não o podem ser as metáforas e os tropos do discurso (HOBBS, 1996, p.49).

Tomando as metáforas como imperfeições e abusos linguísticos, ele as considera como absolutamente dispensáveis, ou mesmo como prejuízos à cognição e à verdade. Assim, mesmo embora o pensamento de Hobbes aponte para uma ligação mais direta entre Linguagem e pensamento, notamos que ele atribui, à Linguagem, uma concepção objetivante e uma tendência à matematização do discurso. Observamos que seu posicionamento está também intimamente ligado ao modo de se conceber a Matemática, àquele momento, um modelo absoluto, exato e objetivo. De modo que, com base no pensamento geométrico, ele irá defender o uso de significados comuns e previamente definidos, embora não tenha buscado estabelecer um sistema de referência para a Linguagem.

Defendendo uma ideia aproximativa à esta perspectiva, verificamos que Leibniz (1646 – 1716) também advoga no sentido de uma perspectiva objetivante dos significados no discurso e afirma que, na relação Linguagem e Conhecimento, deve-se evitar a subjetividade e a inconstância dos significados em qualquer discurso. Mas, ele assume que a Linguagem trata da condição *sine qua non* para o exercício do nosso raciocínio.

Só que, distintamente de Hobbes, ele intercede no sentido de busca por um sistema referencial para a Linguagem. De modo que procura por uma Linguagem própria ao conhecimento, que seja o reflexo preciso e adequado aos objetos sobre os quais pensamos.

Para Leite (2010), Leibniz parte da premissa de que as operações mentais ou os raciocínios não devem se dar diretamente sobre os objetos e coisas sobre as quais pensamos, mas, sim, sobre signos e símbolos que representariam tais objetos. De forma que a atividade do pensamento deve se realizar dentro de um sistema simbólico, com regras de operacionalização previamente definidas e exatas e, a cada ideia, temos um signo associado. Assim, um pensamento correto e preciso deve se dar a partir de um sistema simbólico preciso e exato. Leibniz acreditava que não são as referências específicas dos signos mas a relação do sistema de signos a verdadeira realidade dos objetos. Ele entendia que os símbolos da álgebra e da aritmética eram abstrações.

Observamos que Leibniz destaca o caráter semiótico da Linguagem, uma vez que o raciocínio se dá sobre representações de coisas e objetos e não, necessariamente, de uma forma direta sobre tais coisas e objetos. Ele assim nos diz:

Todo o raciocínio humano se consuma por meio de certos sinais e caracteres. Pois não apenas as próprias coisas, mas também as ideias das coisas, não podem nem devem ser sempre observadas distintamente pelo ânimo, e, assim, para resumir, são empregados sinais ao invés delas. Pois...se, durante um cálculo, um

aritmético pensasse continuamente nos valores e na multiplicidade de unidades de todas as notas ou cifras que escreve, nunca solucionaria cálculos extensos, do mesmo modo que se quisesse utilizar a mesma quantidade de pedras (LEIBNIZ, *Opúsculo sem título*, apud MOREIRA, 2005, p.69).

E, para Leibniz, a Matemática é indicada como modelo epistemológico de busca na elaboração de uma Linguagem universal e capaz de representar a estrutura de nosso raciocínio. Entretanto, a Linguagem serviria de instrumento de formalização do pensamento, a ser adequada às exigências específicas das Ciências.

Deste modo, Leibniz tentou estabelecer um sistema de referência para a Linguagem no qual as palavras fossem substituídas por signos, permitindo a formalização das operações do pensamento de modo similar às operações da aritmética ou da álgebra. Em suas palavras:

Se houvesse ou alguma língua exata... ou ao menos um gênero de escritura verdadeiramente filosófica, pela qual as noções resumidas a algum alfabeto do pensamento humano, tudo o que se seguisse de uma dada razão poderia ser descoberto por um certo gênero de cálculo, do mesmo modo como são resolvidos os problemas aritméticos ou geométricos (LEIBNIZ, *Opúsculo sem título*, apud MOREIRA, 2005, p.69).

Sobretudo, na visão desse filósofo, temos reforçado o sentido de Linguagem de um ponto de vista epistemológico preciso e objetivo, sendo que, se, em um raciocínio sobre determinado objeto, emprega-se uma notação adequada, não se cometendo nenhuma incoerência ou inconsistência ao longo do procedimento, então, partindo-se de pressupostos verdadeiros, é impossível chegar-se a resultados não verdadeiros.

Para Leibniz, a notação adequada se daria por meio do que ele chamou de *caracteres* assim definidos por ele:

*Caracteres* são certas coisas pelas quais são expressas as **relações** de outras coisas entre si, e cujo manuseio é mais fácil que o delas. Eis por que a toda operação que se faz nos caracteres corresponde um certo enunciado nas coisas, e podemos sempre adiar a consideração das próprias coisas até o término da operação. Pois, uma vez descoberto o que é buscado nos caracteres, o mesmo é facilmente encontrado nas coisas pela conformidade colocada desde o início entre as coisas e os caracteres (LEIBNIZ, *Exemplo de Cálculo Universal*, apud MOREIRA, 2005, p.64). [grifo nosso]

A Linguagem funcionaria como instrumento de formalização da Matemática dos raciocínios. Contrariamente à ideia de Hobbes, para Leibniz, a exatidão e precisão dessa Linguagem não prescindem da definição prévia de termos e signos a serem utilizados num tal

sistema de representação simbólica, se houvesse uma correspondência biunívoca entre ideias e signos.

Para esse filósofo, a Matemática representa o modelo epistemológico ideal e dispõe as representações da Linguagem comum, num patamar inferior ou secundário, concebendo-as como que sujeitas a erros e incoerências, de forma que não podem atender às propriedades de um sistema simbólico rigoroso, preciso e exato. Para ele, “proporcionam um admirável benefício somente as notas dos aritméticos e algebristas, nas quais todo o raciocínio consiste no uso de caracteres” (LEIBNIZ, Opúsculo sem título, *apud* MOREIRA, 2005, p.71).

Nós observamos que, tanto para Descarte e Hobbes a compreensão humana é considerada um dom privado (não há ainda a inserção da dimensão social ao desenvolvimento cognitivo que encontramos, por exemplo, em Locke), no qual as relações sociais não são caracterizadas como um aspecto relevante na questão do conhecimento e do pensamento.

Tendendo levemente à uma dimensão social, destacamos, sobretudo, no pensamento de Leibniz, o caráter semiótico da Linguagem sobre o conhecimento, ao apontar que o raciocínio deve dar-se sobre as representações e não sobre objetos. Mas, ainda por tomar a Linguagem sob um ponto de vista preciso e objetivo, não a coloca num primeiro plano no processo cognitivo e, além disso, exclui a Linguagem comum, figurada e metafórica.

Segundo Otte (2014) parece-nos que uma diferença entre Leibniz e Hobbes é destacada na noção de conceito. Hobbes tem uma noção de conceito como substância (como indicado por Cassirer) enquanto Leibniz tem uma noção de conceito como relação (ainda que intrínseca), por isso observamos que em Leibniz o conhecimento matemático é analítico (como observaremos mais adiante em Kant o sentido de relação é extrínseco, o conhecimento matemático é considerado sintético).

Para Descarte e Hobbes o método que pode nos conduzir ao conhecimento verdadeiro deveria seguir o modelo ideal da Matemática. Defendem uma epistemologia, na qual a Linguagem comparece, sobretudo, com papel instrumental e secundário no processo cognitivo. O pensamento deles veio reforçar um *status* epistemológico privilegiado e de centralidade da Matemática na Filosofia da Ciência.

Todos os filósofos e matemáticos destacados partem de pressupostos que admitem o pensamento tendo pré-existência, independentemente da Linguagem na qual o conhecimento ora trata de uma realização privada e individual, ou, ora social (quando Leibniz busca uma linguagem universal). Mas em todos a centralidade e tratamento com a Linguagem coloca-a

sempre sujeita a enganos e truques retóricos, sempre sob a suspeita no processo cognitivo. De modo que prevalece, no pensamento desses filósofos do século XVII, uma concepção que situa a Linguagem figurada e a metáfora como prejudicial à cognição e à verdade.

### **5.1.2 Pensamentos filosóficos em que destacamos (o sentido de) uma aproximação da Linguagem ao processo cognitivo**

Ainda no século XVII, mudanças começam a se processar no sentido de uma nova ordem social, impulsionadas pelo movimento da Revolução Industrial que irão culminar com a Revolução Francesa (1789) no século XVIII. Especialmente a Revolução Industrial promove um redimensionamento na posição do indivíduo na sociedade, que passa a valorizá-lo por seu esforço e capacidade de produção e não mais por sua origem, pela família (hereditariedade).

Identificamos, desta maneira, que tais mudanças, ao mesmo tempo em que promovem são, de certa forma, atravessadas pela nova visão de Homem, que passa a ser considerado como um ser social, que tanto influencia como é influenciado pela sociedade, causando reflexos filosóficos tanto no modo de se conceber a humanidade como no cultivo das relações sociais. A vida social torna-se questão central e essencial às reflexões. E, como a Linguagem figura como fundamental ao estabelecimento das relações sociais, o pensamento filosófico começa por imputar-lhe uma nova abordagem e busca pela definição de seu exato papel.

Assim, ao tempo em que principia despontar uma nova compreensão da constituição social de homem, identificamos tomar corpo uma inédita forma de compreensão sobre o papel da Linguagem no processo cognitivo.

Até então, a Linguagem havia sido tratada sempre como suspeita quando relacionada ao conhecimento científico, sendo considerada como sujeita a enganos, erros e truques retóricos, mas, agora, ela passava a tomar espaço significativo nas reflexões, começando a figurar como algo essencial para o desenvolvimento individual e cultural do homem.

Nas Ciências, começa a operar mudança no critério de verdade, cujo critério, anteriormente, sustentado pela fé e pela ideia de revelação, é substituído pelo parâmetro da razão. De modo que as discussões e reflexões filosóficas tornam-se focadas no método que possa garantir-nos a verdade, imprimindo-se grande preocupação com a obtenção de dados pela observação, experimentação e quantificação. Assistimos à substituição do princípio da

semelhança cujo critério de verdade encontrava respaldo na revelação e na fé, pelo princípio da comparação (análise) agora ancorado na verdade de uma racionalidade. De acordo com Foucault (1995, p.70):

[...] no século XVI admitia-se de início o sistema global das correspondências (a terra e o céu, os planetas e o rosto, o microcosmo e o macrocosmo), e cada similitude singular vinha se alojar no interior dessa relação de conjunto; doravante, toda semelhança é submetida à prova da comparação, isto é, só será admitida quando for encontrada, pela medida, a unidade comum, ou mais radicalmente, pela ordem, a identidade e a série das diferenças... A comparação pode, portanto, atingir uma certeza perfeita.

A partir do momento em que passamos a imprimir maior relevância ao papel da Linguagem no desenvolvimento social, observamos processar-se uma mudança na forma e maneira de se conceber um signo. Anteriormente, este era tomado como o próprio objeto em nossa mente, através de uma relação de semelhança; agora, ele passa a ser visto e concebido em função da origem da sua ligação com o objeto, do tipo de ligação que tem e da certeza dessa ligação. De forma que a similitude deixa de ser a condição de determinação dos signos e este passa a ser tomado como a representação desse objeto (não o objeto). Observamos, também, que o atributo criativo da Linguagem passa a superar uma perspectiva que a colocava como algo arriscado e testemunhamos, a partir de então, dar-se espaço ao surgimento de uma visão genética sobre conhecimento e subjetividade.

O conhecimento científico que, anteriormente, tinha seu modelo explicativo centrado na objetividade tanto do sujeito como do objeto, começa a dar espaço à concepção de cognição concebida como um processo semiótico. Esta perspectiva de abordagem semiótica à cognição, como já destacamos, teve, como momento de destaque, os pensamentos de Poincaré e de Locke, nos quais, definitivamente, podemos observar a uma confluência entre a Lógica e a Semiótica, com consequências fundamentais, a partir de então, aos modos de se conceber o próprio desenvolvimento do pensamento matemático.

Sobretudo, John Locke, embora já avance no sentido de uma perspectiva semiótica ao processo cognitivo, segundo Leite (2010, p.48-9), esta se dá, principalmente, dentro de uma típica autodisciplina retórica do Iluminismo e uma perspectiva empirista. Ainda é possível observar em Locke a avaliação negativa do papel da metáfora no discurso que ambicionasse transmitir conhecimento verdadeiro, inclusive, afirmando que elas deveriam ser

evitadas em todo o discurso que procurasse informar ou instruir. Em seu *Essay*, ele nos aponta que:

Se falarmos das coisas como são, devemos admitir que toda a arte da retórica, além de ordem e clareza, e todo o emprego figurado e artificial de palavras inventado pela eloquência servem apenas para insinuar ideias erradas, estimular as paixões e, assim, induzem o juízo ao erro, são, portanto, verdadeiro embuste (LOCKE *apud* COHEN, 1992, p.10).

Todavia entendemos que o pensamento de Locke começa a ser minado pelo peso que as relações sociais despertam em todos os campos da reflexão filosófica, cuja efervescência se processará na passagem do século XVIII para o século XIX e na direção da construção de novo caminho para a inédita forma de compreensão sobre o papel da Linguagem, especialmente da metáfora no desenvolvimento do pensamento humano. Não observamos, de outro modo esse aspecto no pensamento de Leibniz (contemporâneo de Locke), mas reconhecemos que tanto em Leibniz como em Locke ainda era forte a concepção de conhecimento no sentido de um discurso mental (como em toda mentalidade do século XVII até início do século XIX).

Mas, podemos destacar o pensamento do filósofo francês Étienne Bonnot de Condillac (1715-1780). Ele, imerso neste novo cenário e contexto sociocultural, tece reflexões que vieram impulsionar significativas mudanças no pensamento filosófico relacionado ao desenvolvimento do conhecimento humano, inclusive, ele situa-se, em nossa interpretação, como sendo um dos primeiros a empreender a abordagem semiótica à cognição e à epistemologia.

Condillac toma as palavras e a fala como condições da discursividade e as coloca, conseqüentemente, como relevantes para a atividade do conhecimento e exercício da razão. Em seu pensamento, a origem do conhecimento está no sentimento, na expressão, na compaixão e no auxílio mútuo da resposta afetiva que surge da interação social. Para esse filósofo, tudo advém das sensações; seu pensamento foi fortemente influenciado por John Locke (1632-1704) e pelo método de Isaac Newton (1642-1727), não defendendo, dessa maneira, a existência de ideias inatas.

No entanto Condillac tece críticas ao empirismo clássico, por perceber sua insuficiência para explicar o sucesso das Ciências. Para ele, as teorias científicas seriam construídas ou desenvolvidas e não percebidas. E, assim como Newton, mesmo

compreendendo que a percepção opera como elemento fundamental ao conhecimento, aponta para a existência de um elemento dedutivo ou interpretativo que é imperativo nesse processo cognitivo que, de modo geral, é resultado de uma operação mental.

Essa operação mental se revela na conexão das ideias por meio de signos e é por esse processo que a mente humana e o conhecimento se desenvolvem. Partindo do princípio de que a fonte única de toda operação mental são as sensações, o conhecimento surge como resultado da percepção dessas sensações que serão transformadas em sentenças. Ele toma as palavras e a fala como condições à discursividade e, conseqüentemente, para a atividade do conhecimento e exercício da razão. De modo que devemos, a Condillac, a ideia de que a mente humana e o conhecimento só se desenvolvem por meio de um processo semiótico.

Em 1746, ele publica um ensaio sobre a origem do conhecimento humano<sup>113</sup>, que contempla, de modo inovador, uma explicação empirista sobre conhecimento. Condillac situa a Linguagem como produto no/do contexto da comunicação social e no processo de construção de conhecimento.

O pensamento de Condillac comunga com a perspectiva interpretativa semiótica no processo cognitivo, mesmo denotando uma acentuada justificativa empirista. Tomamos como ponto concordante na interpretação que, conforme aponta Côrrea (2008), em primeiro plano, sentimos o mundo e as coisas, mas só temos consciência dessa sensação quando nossa mente atribui, à sensação, uma imagem ou um signo. E, por meio dessas representações, desses signos, somos capazes de realizar operações mentais, independente da presença dessas sensações ou da existência de objetos sensíveis. Os signos não existem de fato na realidade, mas operam como dispositivos funcionais efetivos para o desenvolvimento da cognição e da identidade humana, tratando de formas e processos de interpretação da realidade e do mundo.

Entendemos que o processo das operações mentais está relacionado à criação de novos signos e ao seu uso, por meio de nossos modos de expressão. E, para este filósofo, neste mesmo sentido, a Linguagem assume papel essencial no desenvolvimento e evolução do pensamento. Pensamento e representação fazem parte de um movimento único, dinâmico e constante. De acordo com Condillac (1973, p.143), a arte de falar pode conduzir à arte de pensar e consegue-se reduzir o falar e o pensar a uma única e mesma arte. E isso, em nossa compreensão, apontaria para a perspectiva de Complementaridade no entendimento de Condillac.

---

<sup>113</sup> *Essai sur l'origine des connoissances.*



Para Condillac, a característica da racionalidade humana está em nossa capacidade de trabalhar com signos, sendo que nosso conhecimento se desenvolve pelo processo de estabelecer conexões entre signos, sobre ideias presentes e ideias ausentes, constituindo e construindo nossa memória.

Defende esse filósofo que a atividade do conhecimento e o exercício da razão se dão pela fala, pelas palavras e pela Linguagem. Até então, atribuía-se à Linguagem uma função meramente secundária, instrumental na comunicação das ideias que pré-existem independentemente.

Em sua perspectiva, os signos que não existem, de fato, na realidade, operam como dispositivos funcionais essenciais para o desenvolvimento tanto da Linguagem, da cognição e da identidade humana, tratando de formas e processos de interpretação da realidade e do mundo. Desse modo, Condillac identifica que as teorias científicas não seriam percebidas diretamente e, sim, construídas e desenvolvidas. E, ele aponta que o conhecimento advém da mais pura percepção, é sempre resultado de uma operação mental, mas possui um elemento dedutivo ou interpretativo. Os processos mentais são baseados em representações das nossas sensações, ou seja, em signos que são os responsáveis pelo desenvolvimento do conhecimento.

Nesta direção, ele afirma que o método natural pelo qual acessamos a verdade e o processo do conhecimento é a análise. Se a língua é gerada a partir do conhecimento sensível, sobretudo, sua função comunicativa só se realiza com base no conhecimento racional (resultado do processo de análise).

A análise se traduz num processo que nos faz remontar à origem das ideias, desenvolver a sua geração e fazer delas diferentes composições ou decomposições, para compará-las em todos os aspectos e, assim, verificarmos as relações que possam existir entre as diferentes partes, de modo também a produzir novas ideias. Tratando de um processo contínuo de comparação e organização de ideias, no qual o raciocínio é feito em função de observar semelhanças e diferenças, de traçar e fazer relações entre as partes e de usar analogias, ou seja, traduções de uma mesma ideia de formas diferentes, isso possibilita a descoberta de novas relações. No pensamento de Condillac, a análise figura como um caminho que se processa de trás para frente, até chegarmos às coisas como realmente são (e, neste ponto, a perspectiva sobre Complementaridade ‘Otteana’ difere, pois, numa perspectiva semiótica, chegamos à representação, sempre uma aproximação com a realidade, não

chegamos a coisas como realmente ‘são’). Para Condillac, a vantagem da análise está em disponibilizar poucas ideias, uma de cada vez, ordenando-as das mais simples às mais complexas. A análise é um tipo de cálculo que, pela composição e decomposição de ideias para efetuar comparações, está sempre buscando novas relações e novos conhecimentos.

Segundo Condillac, a analogia é o recurso, no processo de análise, o qual utilizamos tanto para expansão da língua como do raciocínio. De forma que nossa interpretação de novas situações, de novos objetos, está sempre condicionada ao que já conhecemos e já temos representado através de alguns signos; quando nos deparamos com uma ideia inédita, necessitamos sempre recorrer ao que já possuímos em nossa mente. Entretanto produzir ideias para questões novas e gerais requer novos signos e o progresso das operações mentais, a evolução do nosso conhecimento, está em nossa capacidade de inventar novos signos e em seu uso na arte de se expressar.

A constituição dos signos é inseparável da análise e eles, na analogia, têm um papel intermediário, funcionando como mediador entre a sensação (sentidos) e a reflexão (operação mental). Os signos servem tanto como instrumentos no processo de análise quanto são criados como resultado do processo de análise. Sendo que, uma vez determinados, podem ser remetidos a novas impressões e, deste modo, desempenham, com relação a elas, a função de rótulo, de um índice. Então, Condillac afirma, no primeiro parágrafo de *La langue dès calculs*, que:

Toda língua é um método analítico, e todo método analítico é uma língua. Foram demonstradas estas duas verdades, tão simples quanto nova; a primeira, em minha Gramática; a segunda, em minha lógica; e se pode convencer da clareza que elas trazem à arte para falar e à arte raciocinar, que se reduzem a uma mesma arte (CONDILLAC, 1798, p.1).

Ele destaca que o recurso utilizado pela humanidade na expansão da língua e do raciocínio é a analogia. Ele afirma, em *A Língua dos Cálculos*, que “a analogia é propriamente uma relação de semelhança: portanto, uma coisa pode ser expressa de várias maneiras, porque não existe nenhuma que não se assemelhe a muitas coisas” (CONDILLAC, 1973, p.43). Observamos que sua interpretação de analogia se aproxima da concepção de metáfora em Aristóteles, em que o sentido da expressão analógica se constrói de uma perspectiva na qual se estabelece uma relação, ou diferentes relações, a partir do que já temos convencionalizado. Para Condillac, tais relações tratariam de abstrações que, segundo Man (1992), passam a existir quando paramos de pensar nas propriedades pelas quais as coisas se

distinguem e pensamos apenas naquelas em que elas concordam uma com a outra, de modo que podemos mesmo inferir que, em Condillac, o termo ‘abstração’ poderia ser substituído por metáfora.

É a partir deste ponto que o pensamento de Condillac assinala para a singularidade, destacando uma Complementaridade entre as funções conotativas ou expressivas da Linguagem e suas propriedades denotativas ou representacionais, o que abre espaço, de acordo com Leite (2010, p.39), para que a metáfora seja reconhecida pela primeira vez na história da filosofia ocidental, como tendo papel importante para todo raciocínio humano, minimizando (pelo menos em Condillac) a desconfiança histórica que a antecedeu. Ele aponta que encontrar no processo de análise nossa capacidade tanto de compreender nossa língua (de ação) como a língua (de ação) dos outros, permite-nos progredir ao viabilizar a construção de uma língua que seja universal.

Seguindo este raciocínio, ele critica a língua cotidiana, uma vez que, em seu desenvolvimento, ela não respeita o processo de analogia, não sendo uma boa língua para dar suporte ao desenvolvimento do conhecimento. E, embora ainda ache arriscada a utilização da Linguagem figurada, da metáfora, ele a reconhece como indispensável para produção de novas ideias ou para se acessarem ideias abstratas, haja vista que a mente não pode refletir sobre o nada.

Desse modo, ele defende o princípio de que uma Ciência bem feita é apenas uma língua bem feita. E esta última é aquela em que há uma correspondência perfeita entre signo e significado, o que é possível e garantido por meio da análise. De modo que é a análise que torna essa língua naturalmente compreensível a qualquer indivíduo, uma vez que a linguagem traz, incorporada, a análise da realidade.

Assim, Condillac trabalhou em função de conceber uma língua, na qual a Ciência pudesse se afirmar, onde nada fosse arbitrário, mas que seguisse, rigorosamente, o caminho da geração das ideias. Concluiu que essa língua ‘bem feita’ poderia ser a álgebra, não só para a Matemática, mas para as Ciências em geral, desde que siga sempre a analogia assim como o faz a álgebra.

A álgebra é uma língua bem feita e é a única: aqui nada parece arbitrário. A analogia, que jamais foge, conduz sensivelmente de expressão em expressão. Aqui, o uso não tem nenhuma autoridade. Não se trata de falar como os outros, mas é necessário falar segundo a maior analogia para se chegar à maior precisão; e aqueles que fizeram essa língua sentiram que a simplicidade do estilo faz toda a elegância:

verdade pouco conhecida em nossas línguas vulgares (CONDILLAC, 1973, p. 144-5).

Ao verificar a abundância de analogias que existem na álgebra, em que uma expressão conduz a outra sempre por analogia, apontou para a possibilidade de uma Linguagem universal. Para Corrêa (2008, p. 54-5):

A principal ideia implícita em Condillac, por trás da análise e da língua bem feita não é o método algébrico, mas a de um sistema de signos, que nos permite distinguir e relacionar as coisas. Analisar é ordenar por meio de identidades e diferenças, classificações de ordem (decompor e recompor), rompendo com a ideia de signo como algo existente, numa relação de similitude com o objeto, à espera de ser descoberto.

Devemos, à análise, o poder de abstrair e generalizar e ela só se realiza com a mediação dos signos; daí o sentido evolucionista e genético da perspectiva semiótica no processo cognitivo. No entanto, esta visão de Condillac que toma a álgebra como uma Linguagem, inclusive, podendo ser aplicada a estudos de objetos não numéricos, se, por um lado, revela a ampliação de olhar, pois, até então, a álgebra era tomada apenas como uma aritmética generalizada, de outro lado, apresenta uma limitação, porque, ao aplicar à álgebra o tratamento de uma língua universal, não permite que ela seja elevada ao *status* de teoria independente, uma vez que não abre as portas ao estudo das estruturas algébricas propriamente ditas.

Observamos, de qualquer forma, que, no pensamento de Condillac, há uma subversão na ordem da relação entre Linguagem e conhecimento científico. Se, até então, para filósofos como Descartes, Hobbes e Leibniz, o destaque estava no método demonstrativo da Matemática que deveria ser o modelo adotado em todas as Ciências, para Condillac, esse método deveria ser abraçado não por seu caráter de exatidão no sentido cartesiano-leibniziano, mas, sim, pelo seu método de invenção que se encontra na própria analogia, na análise, sendo impregnado de criatividade e por sua natureza intrinsecamente comunicativa. Observamos que Condillac subverte a ordem do campo semântico de desenvolvimento do nosso conhecimento do da descoberta ao comunicativo.

Outro fator que destaca a uma mudança significativa empreendida pelo pensamento de Condillac e que o diferencia de Locke, está na avaliação do signo, que detaca a mudança na educação de uma filosofia de auto-estima à uma pedagogia (OTTE, 2014).

Interpretamos, deste modo, a relevância que esse filósofo destaca ao papel ativo da Linguagem no desenvolvimento do pensamento individual, como, conseqüentemente, no progresso do conhecimento coletivo e social. Há uma relação de interdependência entre pensamento e Linguagem, conduzindo, de certo modo, a uma abordagem semiótica de conhecimento. Condillac atribui, à Linguagem, uma função constitutiva na formação das ideias, sendo que a base de todo conhecimento devem ser os signos e a Linguagem, não puramente intuições.

Conforme nos aponta Corrêa (2008), o pensamento, nessa perspectiva, consiste na conexão de ideias, sendo impossível raciocinar sem a utilização de signos. Assim, é na Linguagem que reside a capacidade relacional que constitui o nosso pensamento. Tampouco os objetos como as ideias, enquanto representações desses objetos, são capazes, por si sós, de estabelecer conexões conceituais tais que possamos chamar de pensamento. Muito embora o conhecimento tenha origem nas sensações que os objetos imprimem em nossos sentidos, é somente a partir de sua representação que se torna possível a constituição do resto do processo cognitivo.

Dessa maneira, ancorados no pensamento de Condillac, podemos assumir que a língua seja o recurso fundamental no processo cognitivo, uma vez que, analisar uma sensação e distinguir entre as diferentes impressões e compará-las, conduz-nos implicitamente a um juízo, quer seja pela similaridade ou pela diferença e este juízo só é articulado por meio da Linguagem. De todo, temos que qualquer raciocínio é um encadeamento de juízos, de modo que a própria constituição das ideias requer o recurso da Linguagem. Deste modo, Condillac (1822, p.10) afirmou estar convencido “de que o uso dos signos é o princípio que desenvolve o germe de todas as nossas ideias”.

Leite (2010) reforça que esse filósofo estabelece, por meio desse pensamento, uma visão genética e evolucionista da Linguagem e do pensamento, destacando a necessidade de uma abordagem semiótica da cognição e da epistemologia.

Observamos que esta perspectiva se processou conjuntamente e impulsionada por uma mudança cultural radical que acontece nesse período, a qual coloca a ênfase em fatores sociais, de modo que também os signos passam a ser concebidos como tais, primeiramente, no contexto da vida social. Também nesta direção, as reflexões de Rousseau compareceram de modo significativo à interpretação do papel da Linguagem no processo cognitivo e desenvolvimento humano.

Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) chegou a conclusões semelhantes a Condillac sobre o papel da Linguagem no processo cognitivo. Ele foi tutor dos sobrinhos de Condillac, juntamente com Diderot (1713– 1784) e outros enciclopedistas franceses e, provavelmente, ele deve ter tido contato mais reservado com as ideias de Condillac. Rousseau toma a palavra como sendo a primeira instituição social. “A palavra distingue o homem dentre os animais: a linguagem distingue as nações entre si [...]. A língua de convenção pertence somente ao homem” (ROSSEAU, 1998, p.109-115).

Ele compreende que o surgimento e desenvolvimento da Linguagem se dão motivados pela vida social. Conclui estar nesse ponto a causa e a razão pelas quais o homem progride, de modo que estabelece, em sua concepção, uma relação direta entre Linguagem e conhecimento no e para o desenvolvimento humano. Entretanto, enquanto para Condillac, a Linguagem nasce no interior de uma sociabilidade já esboçada, diferentemente para seu contemporâneo Rousseau, a Linguagem pode ser considerada tanto como expressão de uma forma de sociabilidade, como também, é verdade, que todas as formas de sociabilidade podem ser descritas como versão material das diferentes formas da Linguagem.

De acordo com Bento Prado Jr. (1998, p. 85), foi o pensamento de Rousseau que fez “tremar os princípios da linguística clássica em todos seus níveis”, principalmente, ao introduzir, como elemento essencial na determinação da estrutura da Linguagem, a forma pela qual as sociedades se articulam. Neste sentido, a organização social, o regime da intersubjetividade, o lugar do poder na sociedade não são elementos exteriores ou causas ocasionais na constituição da Linguagem.

Na obra de Rousseau: *Ensaio sobre a origem das línguas*<sup>114</sup>, observamos a defesa de que a origem e desenvolvimento da Linguagem humana não são meramente uma consequência de métodos racionais ou geométricos, tal como postulava Descartes e Hobbes. Para esse filósofo, a invenção da palavra nasce das paixões e não da necessidade. Toma como exemplo as línguas orientais, para negar uma marcha didática em sua composição, uma vez que essas comparecem vivas e figuradas, não apresentando nada de metódico e de raciocinado. Segundo Rousseau (1998, p.118):

Como os primeiros motivos que fizeram falar o homem foram paixões, suas primeiras expressões foram tropos. A linguagem figurada foi a primeira a nascer, o

---

<sup>114</sup> *Essai sur l'origine des langues*, publicado em 1781.

sentido próprio foi o último a ser encontrado. As coisas somente foram chamadas por seu verdadeiro nome quando foram vistas sob sua verdadeira forma.

De maneira que, para Rousseau, a essência da língua está no fato de ela ser figurada e, através dessas figurações, possibilitarem a representação e comunicação de fatos e objetos novos, expandindo-se por esse meio não só para si mesma como também ao próprio pensamento.

É pela Linguagem figurada, analisa Rousseau, que o homem adquire novos conhecimentos sobre objetos novos, sendo, ela, anterior à própria palavra. Ele nos explica que

[...] quando a paixão nos fascina os olhos e quando a primeira ideia que ela nos oferece não é verdadeira. [...]. Como a imagem ilusória oferecida pela paixão é a primeira a evidenciar-se, a linguagem que lhe correspondia foi também a primeira a ser inventada; tornou-se em seguida metafórica quando o espírito esclarecido, reconhecendo seu erro inicial, somente usou as expressões para as mesmas paixões que haviam produzido (ROUSSEAU, 1998, p.119).

Tal pensamento se aplica tanto às palavras e aos nomes como também às formas das frases. A possibilidade da anterioridade da Linguagem ser figurada ao seu sentido próprio explica-se, pois, em que aquilo que se efetua em primeiro, é uma transposição da ideia que a paixão nos apresenta, de modo que: “transpõem-se as palavras apenas porque se transpõem também as ideias: caso contrário, a linguagem figurada nada significaria” (ROUSSEAU, 1998, p.118).

As expressões originalmente figuradas, como translações de sentido do que é conhecido e comunicável ao que ainda não é conhecido, irão resultar na Linguagem metafórica, após o esclarecimento do espírito. Assim, esse filósofo identifica a origem de palavras novas e expressões como sendo translação de sentido, que surgem através de palavras e expressões já conhecidas, as quais passam a configurar como sendo originalmente palavras e expressões metafóricas. De modo que, para Rousseau (1998, p.87), tanto a função comunicativa como a função cognitiva da Linguagem está subordinada a uma função imitativa. E as línguas formam-se naturalmente de acordo com as necessidades dos homens, transformando-se e alterando-se segundo as variações dessas mesmas necessidades.

De todo, é destacadamente a partir do pensamento de Condillac e Rousseau que o pensamento teórico e conceitual deixa de ser considerado como algo naturalmente inerente ao homem, que esteja ligado a uma realização pessoal e/ou condicionado por desenvolvimentos meramente racionais. Vemos delineada, mais especificamente, uma interpretação que se

direciona à teoria Semiótica epistemológica. O conhecimento conceitual passa a ser concebido como um produto da cultura e da sociedade (seja ela já esboçada ou ainda em desenvolvimento). De modo que todo o conhecimento, classificações e desse modo os conceitos passam a se basear e depender de convenções humanas, como reflexos e frutos de nossas necessidades e problemas objetivos a serem resolvidos coletivamente.

De acordo com Leite (2010), a certeza absoluta, perseguida e postulada pela concepção de Linguagem de Descartes, Hobbes e Leibniz, começa a dar espaço, no final do século XVIII, a uma concepção cuja Linguagem passa a ser tomada como intimamente ligada ao/no processo de cognição, constituindo-se como base para sua gênese. Verificamos um estreitamento significativo na relação entre Linguagem e Conhecimento e o início de reflexões que podem conduzir a uma nova perspectiva de se conceber a metáfora.

Assim, quando vinculamos a Linguagem ao processo pelo qual adquirimos conhecimento, através de num movimento dinâmico em que ambos se influenciam mútua e reciprocamente e, tomando-os como produtos de convenções humanas, isso implicará também que os signos, símbolos e conceitos estejam sempre sujeitos ao jogo de relações entre si, na constituição de um corpo ordenado de conhecimento à oscilações nessa rede ordenada, na medida em que novas configurações de significações venham a ser estabelecidas sócio-histórica e culturalmente. De maneira que se processa um movimento que tende a deslocar a objetividade do nosso conhecimento de seus fundamentos, ou melhor, as bases dessa objetividade devem ser entendidas (ou promovida) de outra forma e, essencialmente, quando inserimos uma interpretação de cunho semiótico ao desenvolvimento do nosso conhecimento. Não se justifica mais atribuir o sentido de verdade aos *axiomas*, ou ao menos isso começa a se tornar extremamente questionável àquela época. Deste modo, compreendemos que o fator imperativo para uma mudança interpretativa no significado do termo *axioma*, de antônimo de hipóteses para sinônimo de hipóteses, está vinculado à aproximação da Linguagem como fundamento interpretativo de nosso desenvolvimento cognitivo e, especialmente, por uma aproximação que se efetiva na relação entre a Linguagem e a Matemática operado pelo pensamento filosófico também na Matemática.



## **5.2 Uma nova perspectiva interpretativa sobre a relação entre a Linguagem, o Conhecimento e a Matemática: da negação do pensamento metafórico ao processo cognitivo à Teoria Estruturalista da Metáfora**

Se, relacionado à metáfora, desde Aristóteles até o pensamento filosófico do século XVIII, havia um consenso em negar-lhe qualquer capacidade de conter ou transmitir conhecimento, observamos, a partir do pensamento de Condillac (1715-1780) e Rousseau (1712- 1778) – contemporâneos de Kant (1724-1804), uma tendência de mudança, pelo redirecionamento e intenção no pensamento desses filósofos da aproximação da Linguagem ao processo cognitivo, de uma forma até então inovadora, indicando a possibilidade de nova perspectiva interpretativa sobre o papel do pensamento metafórico no processo cognitivo.

Entretanto, identificamos que, mesmo a Linguagem passando a ser considerada como constituinte no/do processo cognitivo, ainda prevalecia grande tensão nessa relação. O fator que se destaca como promotor de tal tensão residia na característica da expressividade da Linguagem. Essa característica feria princípios que, até então, dominavam o pensamento científico, especialmente sobre o critério de verdade, que estava fortemente ancorado numa perspectiva empirista. De maneira que, à metáfora, por exemplo, era excluída qualquer conexão direta com fatos ou significado real, ela seria inconveniente ao conhecimento científico. Por exemplo, a impossibilidade de se verificar, empiricamente, sentenças metafóricas, fazia com que elas fossem colocadas como empecilho às bases de um conhecimento que se desejava científico.

Reforçava essa tensão, uma concepção que colocava os objetos matemáticos como tendo existência própria e independente dos indivíduos. Daí, a preocupação e conseqüente busca por uma língua exata e universal e a tomada da álgebra como exemplo maior dessa língua e a concepção que conduzia a Matemática a ser considerada uma Linguagem, pois o que existe é uma perspectiva que nos afasta da possibilidade de se refletir sobre as estruturas algébricas propriamente ditas e estudá-las.

Outro ponto tensional vem emergir, quando observamos que a metáfora ainda fica atrelada ao ponto de vista da perspectiva aristotélica, ou seja, no sentido de que seu trabalho reside somente em realizar estrita ‘comparação’ (símile) entre coisas distintas, constituindo-se a partir de uma percepção intuitiva de semelhança e dessemelhanças.

Entretanto, essa tensão começa a se dissipar com o novo cenário que passa a se desenhar, com o recente contexto sociocultural e as decorrentes transformações no

pensamento, ocorridos no século XVIII. Nesse cenário, nasceram os elementos que contribuíram tanto com a nova maneira de se conceber a natureza dos objetos matemáticos, como também para que, além da comparação, a metáfora passasse a ser concebida de outros modos, dentro de novas perspectivas no processo comunicativo e, em consequência, no/para desenvolvimento do pensamento humano.

Nesta nova concepção que surge dos objetos matemáticos, eles passam a ser concebidos como estruturas, um tipo de esquemas vazios que podem ser ‘preenchidos’, em princípio, por quaisquer objetos. Observamos que há a inserção do pensamento metafórico estruturalista, principalmente quando agregamos uma leitura semiótica, e esta começa a ganhar força e forma no processo epistemológico e ao/no desenvolvimento do pensamento matemático.

### **5.2.1 Sobre o objeto da Matemática quando a Linguagem ganha destaque no processo cognitivo: a mudança destacada por uma abordagem semiótica que agrega o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’ e a dimensão metafórica**

Existem questões relacionadas ao conhecimento matemático e seus fundamentos que só podem ser compreendidas em âmbito reflexivo do pensamento filosófico. Não figuram como sendo questões *de* Matemática, mas *sobre* a Matemática. Entendemos que uma questão fundamental, nesta pesquisa, refere-se ao objeto da Matemática. Serão os objetos da Matemática de um tipo especial (ou não)? Que tipo especial seria? Que realidade podemos (ou não podemos) lhes atribuir? Seriam criações, invenções de nossas mentes? Teriam existência independente de nós?

Haveria alguma relação entre a mudança na compreensão sobre o objeto da Matemática e sobre o entendimento do papel da Linguagem no processo cognitivo? Em que sentido estudar uma oscilação no significado do conceito *axioma* poderia nos ajudar a entender essas questões que se apresentam?

Entendemos que tais questões extrapolam os domínios da Matemática, assumem um caráter metodológico e epistemológico, ou seja, tratam de questões que, em sua natureza, são filosóficas, direcionando que para a Matemática seja empreendida uma análise de perspectiva reflexiva, filosófica. Nosso trabalho, neste momento, não se isenta desse objetivo, quer seja, refletir e analisar sobre uma mudança no entendimento do objeto da Matemática, relacionada

com a aproximação na relação entre Linguagem e Matemática, ou promovida pela inserção de uma abordagem semiótica ao processo cognitivo.

Na Grécia Antiga, a Ciência Matemática, por excelência, era a Geometria; mesmo havendo alguma Aritmética, esta era ineficiente por causa da notação numérica grega e pela ausência de concepção, exclusivamente, Aritmética de número. De certa forma, o que existia era a concepção geométrica dos números. Estes eram pensados como coleções de unidades e essas coleções, como sendo de figuras geométricas.

A matemática na Grécia especialmente ganha um papel mais filosófico do que prático. Por exemplo, os matemáticos gregos tinham por hábito fazer uma distinção entre as ciências dos números e a arte do cálculo, a primeira eles chamavam de aritmética e a segunda de logística, uma distinção àquela época muito natural. Tal distinção equivalia à distinção entre teoria e prática. Para os sofistas a arte de calcular era o estudo preferido, para Platão, no entanto, o interesse estava na aritmética filosófica.

A álgebra era praticamente inexistente, embora houvesse na *Aritmética* de Diofano, matemático grego do século III d.C., o que podemos conceber como uma álgebra num estágio intermediário entre a Aritmética (mais precisamente a logística) e a Ciência mais desenvolvida pelo árabes a partir do Islamismo. Fundamentalmente, quando falamos e pensamos na Matemática grega, é a Geometria euclidiana que está em foco e, quando tratamos do método daquele tempo, é em *Os Elementos* de Euclides que pensamos, e essa era, basicamente, a Matemática que Platão e Aristóteles conheciam.

Para Platão, herdeiro de uma concepção pitagórica, a Matemática é a reveladora da essência do mundo. Os objetos matemáticos, como números e figuras geométricas, têm existência independente de quaisquer sujeitos e de outros objetos desse mundo. Acessamos esses objetos (ideiais) pelo que Platão chama de reminiscência, recordamo-nos deles através dos olhos da razão.

Aristóteles critica a teoria platônica das Ideias, recusando atribuir aos entes matemáticos uma idealidade platônica, direcionando a uma interpretação que os posiciona mais diretamente ligados ao mundo empírico. As teorias que esses dois filósofos nos fornecem sobre a natureza dos objetos matemáticos destacam dois modelos exemplares de explicação sobre os mesmos,

Silva (2007, p.37) aponta que:

Enquanto para Platão as entidades matemáticas constituem um domínio objetivo independente e autossuficiente, ao qual temos acesso pelo entendimento, para Aristóteles os entes matemáticos têm uma existência parasitária dos objetos reais – uma vez que objetos matemáticos só existem encarnados em objetos reais – e só nos são revelados com o concurso, ao menos em parte, dos sentidos. Para Platão, o mundo real apenas reflete imperfeitamente um mundo puro de entidades perfeitas, imutáveis e eternas – os conceitos matemáticos entre elas. Para Aristóteles, o mundo sensível é a realidade fundamental, os entes matemáticos são ‘extraídos’ dos objetos sensíveis por meio de operações do pensamento, e os conceitos matemáticos são apenas modos de tratar o mundo real.

Temos, de um lado, o realismo ontológico *transcendente* de Platão e, de outro lado, o realismo ontológico *imane*nte de Aristóteles. Os dois pensamentos concordam com a tese de que a Matemática é independente da ação do sujeito, mas discordam quando ao que deve esse mesmo sujeito fazer para revelar esse conhecimento, essa verdade. Há, claramente, em ambas as posições, uma separação fundamental entre sujeito e objeto cognoscente e o objeto da Matemática tem existência própria e independe do sujeito. Não há qualquer destaque à Linguagem no processo e desenvolvimento cognitivo ou ao desenvolvimento do pensamento matemático.

O pensamento platônico esteve sempre conduzido e focado numa disputa implacável contra o pensamento sofista, em cujo sentido, embora promova uma convergência do pensamento filosófico ao pensamento matemático, o que poderia ser entendido como o sentido de uma aproximação da Linguagem ao processo cognitivo, não se efetiva, pois Platão sempre tomava a Linguagem em sentido restritivo ao desenvolvimento cognitivo. Sobretudo, observamos, dentro do pensamento platônico, um movimento de tensão entre o sujeito epistemológico e o sujeito ontológico que se destaca.

Já, de algum modo, no pensamento de Aristóteles, podemos inferir a possibilidade de interpretar o prelúdio de um caminho no sentido de inserção da Linguagem no processo cognitivo, principalmente, quando ele fala das Formas, ao observarmos que, para Aristóteles, as Formas ocupam uma posição intermediária entre Ideias e as coisas do mundo físico. Neste sentido, a Matemática consideraria, em relação aos objetos, somente o aspecto formal matemático; por exemplo, ao ver neles sua forma geométrica ou aritmética. Silva (2007, p.44-45) exemplifica dizendo que, seguindo o pensamento de Aristóteles em:

[...] Paulo é marido de Maria, não existe um ente ‘o marido de Maria’ separadamente de Paulo, e do qual Paulo de algum modo participa; ser marido de Maria é apenas um aspecto de Paulo. Podemos tratá-lo como um homem sem considerar em nada esse aspecto, mas podemos também, talvez para efeitos legais numa ação de divórcio, considerá-lo apenas sob esse aspecto. Assim, nós abstraímos

de Paulo [...] apenas o seu aspecto que nos interessa nesse contexto. O homem Paulo em nada se modifica. É claro; a operação de abstração é simplesmente uma operação lógica, não real.

Ele diz que ‘abstraímos’ (que significa literalmente ‘tirar fora’) dos objetos apenas os aspectos que nos interessam e assim observamos que essa abstração aristotélica comporta, também, certo elemento de *idealização*. Tratando de uma operação de abstração lógica, na qual se consideram somente alguns aspectos, podemos interpretar como o sentido a um pensamento relacional entre alguns elementos/aspectos. Também, percebemos que Aristóteles considera que a Matemática se aplica ao mundo sensível, simplesmente na medida em que é só uma maneira de ‘falar dele’.

Ao compreender a Matemática como uma maneira de ‘falar’ do/sobre o mundo sensível, somando-se a isso um sentido de *idealização* e na direção do pensamento relacional (exemplo: Paulo ser marido de Maria) – relações intrínsecas - e estes aspectos conduzindo a um tipo de representação (tendo uma síntese na Forma de Aristóteles), é que inferiríamos poder estar contido o sentido a uma perspectiva semiótica. De modo que poderíamos empreender uma interpretação que entenda esse processo de abstração na perspectiva lógico-linguística, em que a separação/abstração se dê pelo discurso e não na mente. Mas, evidentemente, não foi esse o sentido atribuído por Aristóteles.

Segundo Thom (*apud* BROLEZZI, 1996, p. 36), depois de Platão, foi “Aristóteles quem soube introduzir plenamente a qualidade no campo filosófico” e isso, possivelmente, por vislumbrar de certa forma o poder da atividade linguística na apreensão do mundo real. Aristóteles desenvolve, em seu *Órganon*, os fundamentos da Lógica, valorizando o papel de Linguagem para a compreensão do universo.

Outro aspecto que direciona esta nossa interpretação, observamos quando Aristóteles defende que alguns objetos matemáticos, por exemplo, existiriam apenas como possibilidades, ou ficções, podendo existir se fossem efetivamente construídos. De maneira que há, para esse filósofo, uma ‘matemática de cenários possíveis’ (SILVA, 2007, p.53), completa, para dar forma a uma realidade que poderia, em princípio, existir. Neste modo interpretativo de Aristóteles, uma verdade matemática depende *em um grau* do matemático e de sua atividade: e isto, se não conduz a certo idealismo epistemológico, pode reforçar nossa interpretação a uma leitura semiótica. Também, aceitamos que nosso ponto de vista interpretativo possa estar forçando, demasiadamente, a perspectiva aristotélica, uma vez que

ela, naquele contexto, esteve longe de ser direcionada a uma abordagem semiótica ao processo cognitivo e, em especial, ao Conhecimento Matemático.

Sobretudo, Aristóteles não segue esta direção, ele não entende nem situa a Linguagem, efetivamente, no e ao processo cognitivo e, mesmo para ele, a existência do objeto matemático depende da existência do mundo físico e objetivo. E, mesmo suas Formas, que ele apresenta e defende na oposição às ideias transcendentais de Platão, figuram como invariantes estáticas que representam o que há de permanente na natureza em incessante mudança.

Segundo Aristóteles, conforme Silva (2007, p.44) relata,

Assim, a matemática não tem um domínio distinto do de qualquer ciência empírica; como a física, ela se ocupa de objetos deste mundo. Elas diferem apenas no modo de tratá-los. A matemática considera-os exclusivamente do aspecto formal matemático (de fato, a matemática se ocupa apenas com as formas: ela não tem a ver com os substratos; pois ainda que as propriedades geométricas sejam propriedades de um certo substrato, não é enquanto pertencente ao substrato que ela se mostra – *Segundo analíticos* – cós. I, 13), isto é, vê neles apenas sua forma geométrica ou aritmética.

Também observamos que, enquanto para Platão, por exemplo, os números tratam de nomes de objetos ideias, já em Aristóteles, os números referiam-se às relações intrínsecas. E, relacionado à verdade matemática, Aristóteles empreende a ela um tratamento híbrido, uma vez que o elemento transcendental parece, de certa forma, estar ausente. No entanto, Aristóteles estabelece sua Lógica, partindo de pressupostos metafísicos, cujas raízes se firmam em Platão. De qualquer modo, no empirismo de Aristóteles, encontramos o contraponto a um pensamento racionalista, que foi inaugurado por Platão.

No entanto, em ambas as perspectivas, o objeto da Matemática (numa perspectiva relacional ou não) pré-existe independentemente do sujeito. Desde Platão, reforçado pelo pensamento de Aristóteles até o século XVI o que notamos é um tratamento à Matemática como sendo uma Ciência da unidade e da ordem do universo. Esse direcionamento começa a mudar, alavancado pelas descobertas de Galileu (1564-1642). De forma que as pessoas passam a tender acreditar que a Matemática não descreve o mundo objetivo, nem tampouco é reflexo de algum realismo metafísico, incidindo a tomá-la como um reflexo da própria atividade humana em nosso mundo. Começa a se processar a transição de uma interpretação ontológica para uma possibilidade interpretativa semiótica da Matemática.

De acordo com Otte (2014)<sup>115</sup>, parece-nos que foi Kant, por meio de sua ‘Epistemologia da Revolução Copernicana’, quem primeiro percebe esse aspecto. E o pensamento kantiano empreende uma mudança de perspectiva relacional aos objetos do conhecimento, de relações intrínsecas para relações extrínsecas. De modo que começa uma mudança significativa relacionada ao objeto da Matemática. No entanto, em Kant, o elemento transcendental aflora completamente à constituição do conhecimento; para ele, a universalidade das asserções matemáticas, puras ou aplicadas, está garantida *a priori* pela forma *necessária* de qualquer experiência possível.

relacionadas ao seu método. A concepção sobre Matemática e seu objeto que assistimos chegar à Modernidade está alicerçada no pensamento de Descartes (sua crítica radical ao conhecimento, a sua algebrização da Geometria), Hobbes e Leibniz (e a criação do cálculo infinitesimal). Para eles, ainda que seja o pensamento atravessado por uma perspectiva racionalista ou empirista, os objetos matemáticos são sempre elementos pré-existentes (ou num mundo ideal, ou, no mundo real), independentes de construções, passíveis tão somente de serem por nós descobertos. Eles (os objetos) existem independentes e livres (num mundo ideal ou sensível) do desejo da mente humana. Essas visões apontam para uma desvinculação total entre sujeito e objeto do conhecimento. A Matemática é tomada como uma Ciência objetiva e precisa que necessita estar legitimada por uma Linguagem ‘especial’, enfatizando a busca pela literalidade e exatidão, na ambição de uma objetividade absoluta.

Entretanto, essas concepções, nas quais observamos uma dicotomia entre sujeito e objeto cognoscente, começam a ser questionadas, uma vez que não nos forneciam respostas suficientes que pudessem nos explicar o modo como o Conhecimento Matemático é produzido, representado e comunicado. Além de que alguns aspectos do Conhecimento Matemático permaneciam ‘nebulosos’ e ‘misteriosos’, como, por exemplo, explicar a incomensurabilidade da diagonal do quadrado, ou os números imaginários (por isso mesmo foram chamados de imaginários)? Como podemos ter a compreensão de  $3-5$ , ou mesmo  $7/3$ ? Qualquer quantidade que seja inteira, ou seja, qualquer número inteiro nós podemos representar em termos de algo real, mas relações tipo ‘abstratas’ não existem na natureza. Como compreendê-las? Como explicar que chegamos a elas? De que tipo são?

---

<sup>115</sup> Texto em anexo intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no Colóquio Internacional, em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012.

No começo da Idade Moderna, observamos que a Matemática dos antigos gregos já está muito modificada tanto em conteúdo quanto em métodos. O mundo assiste à derrocada do poder do clero e da Igreja.

Otte (2014)<sup>116</sup> destaca e se refere a um reavivar nesse período, relacionado ao pensamento platônico, que influenciará a ‘nova’ concepção do objeto da Matemática. Ele nos fala sobre um retorno ao ‘Problema de Platão’, em seu comentário à revista *Mathematical Reviews* (Mathematical Reviews, MR 3115057, Revisor: Michael Otte, Número Revisor: 005111, Marco Panza / Andrea Sereni, *O Problema de Platão*, Palgrave Macmillan, New York, 2013. XVI+306pp):

Os autores caracterizam um "objeto ideal" em distinção de um objeto real ou concreto existente , apresentando a equipe nacional de futebol da Itália como um exemplo . "O estado deste objecto é diferente da dos jogadores individuais[...]. Estes nós podemos encontrar, ver e tocar. É difícil fazer o mesmo com o time para o qual eles jogam. A forma de contabilização para essa diferença é de fato reconhecendo os primeiros como objetos concretos, enquanto o segundo é um objeto abstrato " (p. 2). Agora podemos reconhecer um grupo de pessoas como um time de futebol somente logo que vê-los jogar. O jogo de futebol ou o futebol mais geral, como tal, é que "objeto" ideal de que os jogadores e sua equipe são meros componentes. Além disso, se alguém de outro " planeta " ou de uma cultura diferente assiste a um jogo, ele provavelmente não vai reconhecê-lo como um jogo de futebol ou mesmo como uma peça de teatro. Portanto, o nosso "objeto ideal " é um objeto sócio-cultural. Alguém precisa estar envolvido no contexto para concebê-lo. Ele exige que partilhemos as aspirações e reconheçamos as regras e recompensas [...]<sup>117</sup>.

Nos apontamentos seguintes, Otte destaca que o ‘Problema de Platão’ tratava da diferença inevitável entre signo e objeto, entre conhecimento e o objeto conhecido. De qualquer forma, evidentemente Platão não assume uma perspectiva semiótica, empreendida ao Conhecimento Matemático. "Ele cria uma ontologia em que a realidade como um todo é imitativa, e ainda a imitação humana é considerado deficiente, mesmo perigosa" (Girard, R., 2014, *A Um por quem o escândalo vem* , Michigan State UP , p. 6 ) . O objetivo de Platão esteve em mostrar que não era possível uma verdade absoluta produzida, exclusivamente, pelo pensamento humano (uma vez que esteve sempre motivado por uma disputa com os sofistas).

---

<sup>116</sup> Comentário à revista *Mathematical Reviews* (Mathematical Reviews, MR 3115057, Revisor: Michael Otte, Número Revisor: 005111, Marco Panza / Andrea Sereni, *O Problema de Platão*, Palgrave Macmillan, New York, 2013. Xvi+306pp).

<sup>117</sup> Manuscrito não publicado até a presente data.



Assim, a verdade teria de ser concebida como um princípio regulador a serviço da perfeição do homem e da adaptação mútua entre o sujeito e o objeto do conhecimento e, neste sentido, seu posicionamento é muito relevante, pois pode nos direcionar a entender e a assumir a relatividade do conhecimento e da verdade, fazendo com que o conhecimento se torne reflexivo (o que não ocorreu na era platônica, mas que renascia agora dentro de um novo espírito tanto epistemológico quanto ontológico do sujeito). É assim que essa dimensão do pensamento platônico retorna durante a Revolução Industrial na Europa, como parte da filosofia romântica e da Matemática pura e, sobretudo, desafiando o utilitarismo de século XVIII do Iluminismo. De forma que, quando a Matemática pura surgiu no século XVI, ela torna-se reflexiva.

A convergência dessa perspectiva platônica à Revolução Copernicana, promovida pelo pensamento kantiano, promovendo e abrindo caminhos à interpretação linguística ao processo cognitivo e, ainda, como informa Otte (2014)<sup>118</sup>, agregando-se a isso todas as mudanças sócio-políticas, provocadas pela modernidade e

A modernidade , em geral, é caracterizada , como Norbert Wiener, George Steiner, Eric Kandel , Peter Gay e muitos outros têm enfatizado, **por uma viragem expressiva para dentro e um compromisso com uma autoanálise de princípios em muitos de seus talentos e espíritos criativos** (ver, por exemplo : Gay , P. 2007, o Modernismo, WW Norton & Company)

Tal aspecto direcionará a uma nova interpretação sobre os fundamentos do nosso conhecimento, do Conhecimento Matemático, sobre sujeito, método e objeto do processo cognoscível. Identificamos os objetos da Matemática como objetos do pensamento passando a serem tomados como abstrações dependentes de uma representação, não existindo por si mesmos no mundo. Passam a ser situados como condicionados às representações e sendo, de certa forma, metafóricas. Como tais, também sempre dependentes de formas particulares de considerações nas consciências dos sujeitos, suscetíveis a variações interindividuais, sujeitas a oscilações no tempo e no espaço, representando uma mudança paradigmática no modo de conceber a Matemática e seus objetos. Entendemos que os objetos da Matemática assumem, de certo modo, uma perspectiva platonista – objetos ideias – mas um objeto, sobretudo, sociocultural.

---

<sup>118</sup> Manuscrito de Michael F. Otte de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizando é necessário ou mesmo inevitável*.

Temos uma mudança na compreensão e entendimento do objeto matemático quando começamos a empreender uma perspectiva interpretativa semiótica. E Silva (2007, p.74) considera que foi Kant o primeiro pensador depois dos gregos que introduziu um modo radicalmente novo de se conceber os domínios matemáticos. Em sua análise, ele transportou o conhecimento do mundo natural ou supranatural para o interior do intelecto humano. Como Copérnico que subverteu o cosmos grego ao descentrá-lo, Kant, ao colocar o sujeito num papel central no processo cognitivo, redireciona, completamente, os pressupostos sobre o Conhecimento Matemático. A Matemática que está em cena, nos tempos de Kant, sobretudo, já se apresenta muito diferente da tradicional Matemática da Grécia antiga, o que certamente influenciou seu posicionamento filosófico. A partir do pensamento de Kant, os objetos da Matemática passam a ser entendidos como ‘objetos ideias’, no sentido oposto à ‘objetos reais’ e, sobretudo, tratando de extensões de conceitos. De modo que teríamos acesso imediato e intuitivo a eles.

Também com a Revolução Industrial, assistimos ao surgimento de novas Ciências, na Matemática, a álgebra e disciplinas como a Geometria e Aritmética desenvolveram-se consideravelmente. Um ponto que chama a atenção, nesse momento, foi a crescente autonomia do simbolismo matemático, o procedimento de resolução de equações torna-se, pouco a pouco, um processo mecânico de manipulação de símbolos. Entra em operação no domínio do Conhecimento Matemático um movimento que cria condições para que o simbolismo algébrico adquira uma espécie de vida própria, gerando, inclusive, seus próprios conceitos, de forma que assistimos ao aparecimento de novas concepções de número que germinaram do domínio da álgebra.

Certas fórmulas e procedimentos gerais para a resolução de determinadas equações (por exemplo, a fórmula de Scipione del Ferro ou a técnica de Cardano para resolver equações do terceiro grau do tipo  $x^3 + mx = n$ , com  $m$  e  $n$  positivos), em alguns casos, dão origem a expressões simbólicas àquela época sem significado, como, por exemplo, raízes quadradas de números negativos. Como a raiz quadrada de um número é entendida por eles como a média proporcional entre esse número e a unidade, não podemos extrair raízes quadradas de números negativos. Entretanto, alguns algebristas (em particular Bombelli, mas também Cardano) passaram a tratar os números negativos e suas raízes quadradas (que denominamos atualmente de números *imaginários*), até então nada além de símbolos sem sentido, como números de pleno direito. Bombelli chegou a fornecer a regra operatória  $i \cdot (-i) = +1$ , onde  $i = \sqrt{-1}$  (SILVA, 2007, p.78).

Especificidades como essas, relacionadas ao tratamento aos números imaginários, foram muito importantes na história da extensão do conceito de número e também à

constituição da concepção moderna de Matemática. Criam-se números, de acordo com a crescente autonomia do simbolismo matemático, que não mais corresponde a uma particularização do conceito de quantidades. Os números passam a não ser mais entendidos como entidades independentes apenas denotadas por símbolos, mas entidades *geradas* pelo próprio simbolismo que se caracterizam, exclusivamente, pelas suas relações operatórias com outros números.

Esse novo papel atribuído ao simbolismo irá aos poucos subverter nosso modo de entender a matemática. Germinava na álgebra do século XVI uma concepção puramente *formal* de matemática que irá desabrochar mais visivelmente a partir do século XIX, quando irá emergir uma concepção de matemática não como uma ciência de conteúdos, ou objetos, mas de estruturas ou invólucros formais de possíveis domínios de objetos, definidos por relações puramente formais no interior de um sistema simbólico sem interpretação pré-determinada. É nesse espírito que surgem, no século XIX, a álgebra moderna, isto é, a teoria de estruturas apenas formalmente definidas, e certas concepções filosóficas do século XX, como o ‘estruturalismo’ do grupo de Bourbaki, segundo a qual a matemática se confunde com o estudo de estruturas formais axiomáticamente definidas e suas relações recíprocas [...] (SILVA, 2007, p.80).

O crescente simbolismo na Matemática, o pensamento kantiano redirecionando a atenção ao sujeito no processo cognitivo, foram os ingredientes fundamentais ao estabelecimento de uma perspectiva estruturalista ao desenvolvimento cognitivo, especialmente, no desenvolvimento do pensamento matemático. Sobretudo, vemos surgir um estruturalismo e de perspectiva platônica, mas que não propõe a existência de objetos matemáticos (números, conjunto e outros) e, sim, a existência de *estruturas* matemáticas, tratando de esquemas relacionais vazios que poderiam ser preenchidos, em princípio, por quaisquer objetos.

De acordo com Otte (2012)<sup>119</sup>, por exemplo, o número, mais geralmente a aritmética, era para os pitagóricos “principalmente uma ciência de um universo visível, uma cosmologia, isto é, uma ciência da unidade e da ordem deste universo” (Klein 1985, p. 45), já para Dedekind era um meio para melhor distinguir as coisas. Dedekind estava – ao lado de Grassmann e Peano – entre os primeiros matemáticos, que responderam à questão, o que números são, não por uma análise do seu *status* ontológico como entidades simples, mas

---

<sup>119</sup> Fala de M. F. Otte em apresentação plenária no colóquio internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012 – intitulada *O que é matemática realmente?*

como elementos de uma estrutura, a qual ele construiu recursivamente. Otte (2012)<sup>120</sup> Observa que Dedekind usa da natureza recursiva do processo de pensamento – isto é, a habilidade de fazer de um pensamento o assunto de um outro segundo pensamento – para provar a realidade do *infinito real* (Dedekind, 1963).

Os números, para os estruturalistas, são objetos puramente formais, ou seja, pura forma de objetos caracterizados apenas por suas relações com outras formas do mesmo tipo. De acordo com Silva (2007, p.72):

Na verdade, pensar os entes matemáticos como estruturas, e estas como entidades independentes, está próximo de uma mistura de platonismo e aristotelismo. Estruturas são formas em sentido aristotélico (meros invólucros ‘recheados’ por substância) existindo como formas em sentido platônico. Tanto essas formas quanto as estruturas são ‘instauradas’, já que são continentes sem conteúdo, enquanto objetos, por oposição, são ‘saturados’, já que são formas com conteúdo.

Seja objeto ou estrutura abstrata, só podemos concebê-los se a ambos atribuirmos uma representação. Reflexões que envolvem o desenvolvimento do pensamento matemático e o papel da representação da Linguagem nesse processo de desenvolvimento e, concomitante, como reflexo destas e nessas reflexões, conduzem-nos a um novo modo de conceber a natureza dos objetos matemáticos e têm suas raízes influenciadas pelo pensamento dos filósofos Condillac e Rousseau. Foram as ideias desses filósofos que abriram caminho à inserção e ao reconhecimento do papel da Linguagem no processo cognitivo, iniciando o direcionamento de um novo olhar ao modo de se conceber a Linguagem, como também a Linguagem figurada, especialmente a metáfora, ao processo cognitivo.

Esses filósofos, ao promoverem a aproximação entre a Linguagem e a Matemática ao processo cognitivo, fazem com que se comece a olhar para a Matemática em termos de relações e não somente em termos de seus objetos e aplicações. Assim, outra característica dos objetos matemáticos é que estes tratam de relações e representações de relações, sendo que o simbolismo é o que nos ajuda a tornar explícitas essas representações e relações, as generalizações. E isso não ocorre somente na Matemática, mas em qualquer tipo de conhecimento. Todo conhecimento passa a ser baseado na representação de alguma coisa. E a Matemática caracterizada pelo raciocínio diagramático.

---

<sup>120</sup> Fala de M. F. Otte em apresentação plenária no colóquio internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012 – intitulada *O que é matemática realmente?*

O que assistimo se processar é uma mudança no entendimento do que seja conhecimento. O Conhecimento deixa de ser entendido como um conhecimento do mundo e passa a ser tomado como uma representação do mundo. Quando o simbolismo começa a se desenvolver, por exemplo, na época de Leibniz, isto é, quando ainda não se processou definitivamente essa mudança de visão, o grande problema era saber como uma linguagem que produz resultados sem a necessidade de pensar poderia nos dar conhecimento concreto. Leibniz acreditava pois na harmonia pré-estabelecida entre signos e objetos (um neoplatonismo). Entendemos que o pensamento de Kant foi fundamental como ponto limítrofe à mudança de visão de mundo, especialmente à um redirecionamento da interpretação epistemológica do desenvolvimento de nosso conhecimento.

De acordo com Otte (2014)<sup>121</sup>, o objeto da Matemática é geral e hipotético, resulta de nossas construções, mas ele tem objetividade. E Otte fundamenta sua abordagem na perspectiva semiótica de Peirce, haja vista que este último redimensiona a epistemologia *kantiana* em termos semióticos e ele ainda considera a fenomenologia como a Ciência da aparência e do abstrato, como são as próprias construções matemáticas.

Fundamentados nessa nova perspectiva, entendemos como imprescindível uma abordagem semiótica na interpretação do objeto da Matemática e sobre o desenvolvimento do pensamento matemático, pois compreendemos que todas as ideias e os conceitos matemáticos só se tornam objetos quando representados.

De acordo com René Thom (1973), diferentemente das outras Ciências, os objetos matemáticos não existem independentes da teoria ou das atividades dos pesquisadores. Não possuem existência concreta, não pertencem a nosso ambiente empírico, nem fazem parte de nossas experiências diárias; eles, de outro modo, só existem dentro de uma estrutura, enquanto representantes de um papel dentro de uma estrutura determinada.

Vemos despontar uma perspectiva construtiva relacionada à razão e aos entes matemáticos. De acordo com Brouwer, o matemático é quem cria as entidades que estuda, ele é quem dá forma aos entes matemáticos. E toda a atividade matemática acontece, exclusivamente, de acordo com algumas regras da estrutura a qual pertença. Assim, qualquer tipo de interação com esses objetos (mentais) da matemática só pode acontecer a partir de

---

<sup>121</sup> Manuscrito de Michael F. Otte de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*.

signos, uma vez que regras só se aplicam a coisas concretas. Por esse motivo, o pensamento simbólico é tão importante na Matemática.

Essa capacidade representativa, característica do pensamento matemático, é denominada de função simbólica, ou semiótica, ou ainda de representação. De modo geral, de acordo com Peirce, entram em jogo, na formalização do pensamento matemático: símbolos, índices e ícones; e a generalização é o que caracteriza mais essencialmente o pensamento matemático e seus objetos, uma vez que, generalizar, significa introduzir novos objetos ideais. Otte (2014)<sup>122</sup> ainda destaca que:

Vemos, agora, que, além de termos gerais, dois outros tipos de sinais são perfeitamente indispensável em todo o raciocínio " ( Peirce, CP 8.41 ). Um desses tipos é o índice, o outro o ícone. É na dinâmica do raciocínio matemático só que eles interagem e se unem. Peirce chama de ícones e índices explicitamente "não-simbólicas de pensamento sinais" (CP 6.338), e distingue -os dizendo que os ícones são "imagens ou diagramas ou outras imagens, como tem que ser usada para explicar os significados das palavras", ao passo que os índices são sinais mais ou menos análogos a sintomas e têm o papel de designar o sujeito do discurso. Pode-se pensar, o próprio Peirce diz, "que não haveria uso para índices em matemática pura, tratamento, como o faz, com criações ideais, sem levar em conta se eles estão em qualquer lugar ou não realizados. Mas as construções imaginárias do matemático, e até mesmo os sonhos, até o momento aproximado da realidade como ter um certo grau de fixidez, em consequência do que eles podem ser reconhecidos e identificados como indivíduos" ( Peirce, CP 2.305 ). Os índices que ocorrem em matemática pura referem-se a entidades ou objetos que pertencem a um modelo, ao invés de "o mundo real", ou seja, eles indicam objetos em universos semânticos construídos. Que a matemática, por um lado, não faz reivindicações existenciais apenas delineando possibilidades e no outro lado faz uso essencial de índices, em ordem para representar declarações de fato, sendo fundamental para a concepção da matemática como "raciocínio esquemático" de Peirce.

Assim, o ato de representar pode ser entendido como uma relação que indica alguma outra coisa. De acordo com Corrêa (2008), na Matemática, quando perguntamos qual o valor de  $x$ , ele está representando algo que se deseja determinar, seja esse algo uma medida, um lucro, uma idade, um percentual etc.

Sobretudo, observamos que a compreensão de objetos matemáticos pressupõe a utilização de uma Linguagem específica, com características diferentes da nossa Linguagem comum. Para compreender, por exemplo, o valor relativo dos números, das simplificações, das frações, das resoluções de integrais, ou das resoluções de equações, necessitamos, além do

---

<sup>122</sup> Manuscrito de Michael F. Otte datado de 07 de abril de 2014, intitulado *Generalizando é necessário ou mesmo inevitável*.

conhecimento conceitual, do domínio das regras sintáticas e das convenções de um sistema de notação e do simbolismo matemático.

Entendemos que a Semiótica, sendo definida como a Ciência geral dos signos, que abrange todos os fenômenos culturais como se fossem sistemas sýgnicos, isto é, sistemas de significação, ocupando-se do estudo do processo de significação ou representação dos objetos ou fenômenos, na natureza e na cultura, do conceito ou da ideia, figuram como o pressuposto fundamental ao entendimento dos objetos matemáticos, do seu processo de significação, ou seja, do próprio desenvolvimento do pensamento matemático à sua formalização.

De acordo com Otte (2014)<sup>123</sup>:

A ideia de que o homem é essencialmente um ‘ser simbólico’ substituiu gradualmente, durante o último século, mais ou menos, a tradicional caracterização aristotélica do homem como um ‘animal racional’. ‘O conhecimento humano é por sua natureza um conhecimento simbólico. É esse aspecto que caracteriza tanto a sua força como as suas limitações. E para um pensamento simbólico é indispensável fazer uma distinção aguda entre real e possível, entre coisas reais e coisas ideais. Um símbolo não tem uma verdadeira existência como parte do mundo físico; ele tem um “significado”. Nos pensamentos primitivos, é ainda muito difícil diferenciar entre as duas esferas do ser e do significar. Elas são constantemente confundidas: um símbolo é olhado como se ele fosse dotado de mágica em seus poderes físicos. Mas no progresso posterior da cultura humana a diferença entre coisas e símbolos se torna claramente notada, o que significa que a distinção entre realidade e possibilidade também se torna mais e mais pronunciada’ (Cassirer 1944, 28ª impressão 1977, pp. 56/57).

Cabe destacar que uma mudança operacionalizada no entendimento do objeto da Matemática também se relaciona íntima e complementarmente a uma mudança que ocorre no entendimento da ‘verdade’ e certeza, arroladas ao Conhecimento e ao Conhecimento Matemático. Otte (2014) nos diz que, primeiramente, não podemos definir a ‘verdade’, como também não podemos definir ‘realidade’ de um ponto de vista da Complementaridade. Se o fizermos, por exemplo, em ‘realidade’, já estaremos substituindo a realidade pelo seu modelo linguístico, ou seja, pela sua definição. De modo que estamos cometendo o erro de tomar a representação pelo seu objeto.

Assim, não há uma verdade final e definitiva e entendemos que a verdade esboça um conjunto de verdades que são relativas. E, numa propositura semiótica que agrega o pensamento de Complementaridade, estabelecemos, como critério desta ‘verdade relativa’, um compositório de três dimensões e sentidos do conhecimento produzido/elaborado:

---

<sup>123</sup> Texto em anexo intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no Colóquio Internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012.

correspondência (dimensão semântica), coerência (dimensão sintática) e a pragmática (dimensão pragmática).

É por isso que Otte defende o sentido de Complementaridade e não de dualidade, porque a Complementaridade implica que tanto a realidade como a verdade, trata de processos e devem ser entendidos e interpretados como tais. De forma que, no pensamento ‘Otteano’ sobre Complementaridade, o sentido de verdade se aproximaria mais ao que Kant denomina de ‘ideia regulativa’.

Assim, antes de tudo, emana deste entendimento uma dimensão sociológica à constituição do objeto da Matemática como a compreensão e sobre o entendimento da ‘verdade’. Neste sentido, Otte (2014)<sup>124</sup> explica, apoiado em Hersh (1997, p.14), que, até cerca de 1800, a filosofia ocidental acreditava que “existiam dois tipos de coisas no mundo: mentais e físicas. Hersh pensa que a Matemática mostra a inadequação dessa crença e propõe, em vez disso, considerar os objetos matemáticos como entidades sociais e aceitar que ela é, essencialmente, uma realidade social, [...]. ‘Entidades sociais’, ele diz, ‘não são nem mentais nem físicas’, mas elas têm ‘aspectos mentais e físicos’ ”. De forma que as questões sobre a natureza dos objetos matemáticos só podem ser respondidas quando assumimos uma perspectiva social. E, neste sentido, Otte acrescenta, ainda, a abordagem semiótica, assumindo uma perspectiva genética ou evolutiva.

Mas, sobretudo, a Matemática não pode ser confundida com Linguagem. A Matemática, no pensamento otteano, é, antes de tudo e essencialmente, uma atividade. No entanto trata de uma atividade que nasce e é permeada de certa complexidade. Otte avisa que, mesmo quando estamos inclinados, “como Kant, a considerar a matemática como uma atividade, mais do que uma linguagem, deveríamos admitir que a atividade matemática não é só um processo simples, que ocorre *hic et nunc*, mas um sistema de relações entre temas (problemas) e meios. E essa noção de ‘meios’ de atividade deve ser vista num contexto social mais amplo e como mutante e variável através da história” (OTTE, 2014)<sup>125</sup>. É neste sentido que Otte argumenta e acrescenta, à abordagem social, a necessidade de uma abordagem semiótica, assumindo uma perspectiva genética ou evolutiva.

---

<sup>124</sup> Texto em anexo intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no Colóquio Internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012.

<sup>125</sup> Texto em anexo intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no Colóquio Internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012.



A Matemática não é uma atividade que descreve o mundo objetivo, como também não é reflexo de qualquer realismo metafísico. Ela é mais um reflexo da atividade humana neste mundo. De maneira que o objeto da Matemática se torna a própria Matemática, que se manifesta no e pelo Conhecimento Matemático: suas representações e generalizações. Para Otte (2014)<sup>126</sup>:

O aspecto mais importante da mensagem de Galileu resulta do fato de que muitos conceitos teóricos e verdades não estão ligados à experiência cotidiana e nem à percepção passiva de um modo apropriado. Assim, nós deveríamos reconhecer que a matemática teórica e abstrata é uma parte essencial da nossa relação com a realidade objetiva.

Na história da filosofia, foi Kant quem por meio da sua “Revolução Copernicana da Epistemologia” percebeu esses fatos. Kant escreve na introdução do seu *Crítica da Razão Pura*:

“Quando Galileu fez experiências com bolas de um peso definido num plano inclinado, quando Torricelli usou o ar para sustentar um peso, o qual ele já tinha calculado antes manualmente como sendo igual àquele que é definido numa coluna de água .... uma luz se acendeu para todos os filósofos naturais. Eles aprenderam que a experimentação só percebe aquilo que é produzido depois de seu próprio desenho; que não deve ser suficiente para seguir as cordas condutoras da Natureza...” (B XII/XIII).

Em resumo, a realidade sobre a qual as ciências e a matemática falam desde os tempos de Galileu e Descartes não é mais de um mundo externo estático, mas de um mundo modificado pelas atividades e práticas humanas. Galileu não matematizou a Natureza, mas sim matematizou as suas técnicas experimentais.

Ainda, podemos destacar o caráter metafórico que atribuímos aos objetos da Matemática no desenvolvimento do pensamento (Conhecimento) matemático. Desse modo, é relevante observar que, ao se aplicar aos fundamentos da Matemática esta perspectiva, em primeiro lugar, vemos serem trazidas, à tona, novamente, questões que tratam da objetividade desse conhecimento, como também sobre que tipo de visão opera para tomá-la como um dos modelos epistemológicos ‘precisos’ e ‘verdadeiros’ na construção do conhecimento.

A metáfora funciona, em nosso entendimento, como um mecanismo subjacente à produção do conhecimento, permitindo-nos fazer inferências sobre novos contextos, com base no que já conhecemos. De forma que a bagagem de impressões, as experiências e conhecimentos locais que temos adquirido (nossa bagagem intelectual) servem-nos de base para exploração de novos e mais amplos contextos, além de nos possibilitar o movimento do local para o geral. E, “ao se considerar que as relações ‘existem’ no sentido metafórico, isto é, existem, pois podem ser representadas, podemos tentar calcular com expressões ‘imaginárias’

---

<sup>126</sup> Texto em anexo intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no Colóquio Internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012.

do tipo  $7/2 + 2/3$ ,  $(2 - 8) - 3$  de modo que a metáfora seria útil ao possibilitar a generalização das operações” (LEITE, 2010, p. 81).

Tomadas como mecanismo cognitivo, inerente ao domínio do pensamento, elas atuam no sentido de permitir uma interação entre domínios conceituais distintos, figurando como essenciais ao avanço da própria Matemática, da Ciência, ao longo dos tempos. Nesta última, de modo geral, a introdução de novos termos sempre se processou numa perspectiva metafórica. Kuhn (2007) observava que a introdução de termos como ‘eletricidade’, ‘calor’ e ‘massa’ dependeu, originalmente, de relações metafóricas. Assim, uma ideia científica nova nunca é acompanhada definitivamente de uma referência imediata e conclusiva, depende sempre de termos já estabelecidos na Linguagem científica usual.

De acordo com Leite (2010, p.90-92), na Matemática, por exemplo:

[...] tomar  $A$  por um  $B$  ( $A$  é  $B$ ; analogicamente  $A$  é como  $B$ ), com  $A$  literalmente diferente de  $B$ , ou ainda com  $A$  proveniente de um contexto diferente do contexto de  $B$ . Nesse sentido, uma possibilidade para se considerar  $A=B$  é tomar a igualdade em um sentido metafórico. Assim, metáfora também é tomada como uma equação, entendida no sentido de Frege, ou seja, a base da distinção entre sentido e significado, ou ainda, de um ponto de vista semiótico, é a base da distinção entre intenção e extensão de um signo.

Também, podemos inferir que esse direcionamento nos leva a que as equações matemáticas, além disso, sejam entendidas por nós como metáforas. De maneira que a metáfora deixa de ser considerada apenas como fenômeno linguístico, mas, em especial, como mecanismo cognitivo, um recurso semiótico que promove a transferência de significados próprios e costumeiros os quais proporcionam, desta maneira, tanto a expansão da língua quanto do nosso pensamento.

E, sendo tomadas como inerentes ao domínio do pensamento, permitindo a interação entre domínios conceituais distintos (por exemplo, entre Geometria e Aritmética), podem ter sido fundamentais para o avanço da Matemática, como também a todo conhecimento ao longo da história da humanidade.

O reconhecimento da perspectiva metafórica que desponta a partir de uma abordagem semiótica ao Conhecimento Matemático vem negar a concepção que toma a Matemática e a Lógica como conhecimentos literais, descontextualizados e universais. Passa, assim, a dar lugar a uma concepção de Matemática como ramo de conhecimento que é permeado por contingências e construções particulares, sujeito a especificidades do espaço e tempo em que

estão inseridos. Portanto, não tem mais sentido entender o termo *axioma* como sendo verdades irrefutáveis e/ou inatas. Assim, Otte (2008b) aponta ser possível que toda exposição de teorias Matemáticas, desde *Os Elementos* de Euclides, tenha sido, essencialmente, metafórica. E, quando olhamos para a configuração do Conhecimento Matemático, ao grau de generalização a que alcançamos, especialmente, ao método *axiomático* formal, fica mais evidente essa perspectiva metafórica do conhecimento.

Mesmo havendo as condições para esta nova interpretação sobre o objeto da Matemática e sobre seus fundamentos iniciada no Século XIX, foi somente na segunda metade do Século XX, alicerçados em pensadores e filósofos como Peirce, Black, Davidson, Lakoff e Otte, e, figurando como fruto de muitas discussões e reflexões teóricas, é que a Semiótica, principalmente, a metáfora, foi se constituindo como a possibilidade de um novo olhar epistemológico ao conhecimento e à constituição do Conhecimento Matemático, promovendo a direção de uma nova interpretação sobre a concepção, origem, representação e comunicação dos objetos matemáticos.

### **5.2.2 A(s) Teoria(s) Estruturalista da Metáfora e o pensamento Matemático**

Dois momentos anteriores merecem destaque, principalmente, ao apontarem a aproximação da Linguagem e processo cognitivo. O primeiro deles refere-se ao pensamento que vai de Locke à Leibniz, este último foi um dos primeiros a cogitar a álgebra de forma mais geral, não como uma aritmética generalizada, mas como um jogo de símbolos, de signos, partindo de uma combinatória entre eles. Entendemos que foi uma das primeiras visões a agregar a perspectiva semiótica ao conhecimento e ao Conhecimento Matemático. Entretanto Leibniz tomava a Linguagem comum, a metáfora como um obstáculo ao conhecimento preciso e verdadeiro.

Num segundo momento, e de modo mais significativo, temos o pensamento de Condillac. Ele foi o primeiro a apresentar a álgebra como uma língua sistematizada, que nos possibilitava mostrar além de relações entre números, mas relações entre objetos quaisquer. Até Condillac, ao pensamento metafórico, foi sempre negado qualquer tipo de relação direta com fatos ou significado real, de modo que ele não poderia conter ou transmitir conhecimento, mas ele irá promover uma mudança nessa maneira de considerar o pensamento metafórico.

No pensamento de Condillac, a metáfora surge carregada de um papel heurístico, e ele não expurgava do conhecimento científico o recurso da expressividade da Linguagem. Os sentidos originais das palavras podem ser previamente convencionados no contexto da analogia - ou da metáfora, podendo gerar sentidos múltiplos, e isso é o que possibilita a expansão da Linguagem e do raciocínio. Ele reconhecia que, como a analogia e a metáfora são recursos inerentes a qualquer língua, seria também à própria Matemática e às outras Ciências. Sobretudo, ele identificava a Matemática com uma língua (bem feita), como também as outras Ciências. Apontava para a álgebra como exemplo deste contexto na Matemática. Para ele:

A álgebra é uma língua bem feita e é a única: aqui nada parece arbitrário. A analogia, que jamais foge, conduz sensivelmente de expressão em expressão. Aqui, o uso não tem nenhuma autoridade. Não se trata de falar como os outros, mas é necessário falar segundo a maior analogia para chegar à maior precisão; e aqueles que fizeram essa língua sentiram que a simplicidade do estilo faz toda a elegância (CONDILLAC, 1973, p.144-5).

Para este filósofo, a única precisão de uma Ciência está, pois, em sua constituição em língua ‘bem feita’; o que muda, é que Condillac não coloca o sentido de precisão relacionado (como até então) à ligação direta com o objeto do conhecimento. De modo que observamos, nesta concepção, Condillac assumindo o caráter contingente da Linguagem, do Conhecimento, alertando, ainda, sobre o fato de ser improdutivo buscar-se por uma língua que seja absoluta e que conduza a um objeto fechado e previsível.

Uma tendência, àquela época (século XVIII), que tratava da negação de certos pressupostos cartesianos na relação entre Linguagem e Conhecimento, somada à visão de Condillac (e ao pensamento de seu contemporâneo Rousseau), instigou novas reflexões filosóficas e epistemológicas, direcionamento a uma nova maneira de se conceber a natureza dos objetos matemáticos, o que promoverá oscilação significativa no sentido interpretativo dos *axiomas*. De tal modo, fazendo com que a Matemática passasse a ser vista, em termos de relações, ao invés somente de objetos e suas aplicações. Nesse contexto vemos aflorar o direcionamento a uma nova maneira de se conceber a metáfora no processo cognitivo.

Apesar da inovação destacada no pensamento de Condillac, na direção de aproximação da Linguagem ao processo cognitivo, ainda persistia e prevalecia, por um tempo considerável, o sentido, no pensamento filosófico e científico, de negar à Linguagem figurada, à metáfora, um lugar significativo dentro do processo cognitivo e, conseqüentemente, fazendo

com que a Matemática fosse tomada (confundida), minimamente, como uma língua; e isso tornava distante a possibilidade de aprofundamento de reflexão sobre estruturas relacionais (que envolvem tanto o aspecto linguístico como a dimensão metafórica agregada à Linguagem), características no/do pensamento matemático.

Um aspecto que irá ser decisivo, ao redirecionamento e interpretação do pensamento metafórico ao processo cognitivo, tratou que, no século XIX, como consequência da invenção da imprensa, somada à Revolução Industrial, é que se desencadeia uma necessidade de expansão do ensino e de produção de textos em maior escala e para um público menos especializado, o que conduziu as instituições a serem influenciadas pelo estudo da língua em toda sua amplitude (LEITE, 2010, p.83). Esse aspecto sociocultural-político conduzirá a uma verdadeira revolução no campo científico e do Conhecimento Matemático. Assim, o grande diferencial dos matemáticos desse século foi que em relação aos seus antecessores, grande parte deles esteve envolvida diretamente com o ensino da Matemática.

Foi assim que assistimos, no campo da Matemática, ao centro de interesse se deslocar da Geometria para a Aritmética e Álgebra, havendo ansiedade crescente pela busca do rigor e começa a preocupação com a formação da estrutura básica da Matemática, intensificando-se o cuidado com a Linguagem, inclusive, no sentido de se aproximar a Matemática da Lógica.

Evidenciamos efervescente, entre os matemáticos, dois movimentos bem patentes. Um movimento buscava o rigor através da aritmetização, cujos representantes podemos destacar: Cauchy, Lagrange, Gauss e Bolzano, abordando os problemas fundamentais da Matemática, dentro da perspectiva reducionista, procurando definir os conceitos em termos de entidades básicas (ex.: números naturais). Dentro da perspectiva desse grupo, a teoria matemática deveria ter aplicação direta com seus objetos bem definidos e o número, sendo o principal deles. O outro movimento, representado por Grassmann, Peano e Hilbert, o da *axiomática* moderna, procurava resolver os problemas fundamentais da Matemática através da extensão e da generalização de suas estruturas relacionais e de suas regras de inferência. Neste último, a Matemática passa a ser concebida não mais como uma Ciência com conteúdo e objetos, mas como uma Ciência das estruturas formais e com suas relações *axiomaticamente* definidas. As teorias matemáticas seriam realidades *sui generis*, que deviam ser compreendidas em seus próprios termos, antes de se pensar em sentidos ou se planejarem aplicações (LEITE, 2010, p. 83-4).

Dentro desse segundo movimento, estabeleceu-se o reconhecimento de que conceitos matemáticos tratam de estruturas formalmente definidas, sendo desenvolvidos por uma interação recursiva de raciocínio operatório e intuitivo. Para Otte (2008), isto foi o que nos conduziu a novas teorias estruturais, como a álgebra linear ou a teoria de grupo.

Entretanto, agrega esse movimento a busca excessiva por um simbolismo formal na Matemática. De forma que o grupo da *axiomática* tomou o objetivo que ambicionava a completa formalização de um sistema dedutivo, o que implicava na eliminação dos significados das expressões que existissem no sistema, sendo elas consideradas como signos vazios a serem manipulados por um conjunto de regras formuladas com precisão. Além de que essa formalização deveria ser imposta a todas as outras Ciências e formalizar significaria “construir um vocabulário de termos básicos, enunciar leis fundamentais a partir de tais termos e compor, a partir de tais leis fundamentais, uma teoria rigorosa por meio da lógica” (LEITE, 2010, p.85).

Este movimento caracterizado pelo fato de que as demonstrações e conceitos deveriam se basear na álgebra, no rigor da prova, foi interessante, pois veio acentuar o aspecto linguístico da Matemática. Isso provocou uma mudança na concepção de Matemática e começa a eliminar, de um lado, a ideia de que a Matemática poderia ser resumida somente a cálculos e, de outro lado, a ideia de que ela deveria ser considerada, somente, em termos de grandezas ou figuras concretas, representadas pela geometria euclidiana. Observamos que a história então muda e a álgebra se transforma de Linguagem para teoria de estruturas, como as teorias dos grupos, corpos, anéis, espaços vetoriais.

De todo, no século XIX, foram consideráveis os avanços com a criação de novos objetos e teorias matemáticas. Mas, se por um lado, aparece a preocupação com o aspecto da Linguagem (principalmente na comunicação de ideias), a busca pelo rigor e formalismo esteve calcada, ainda, por uma epistemologia positivista que imperava e não colocava em questão a concepção de natureza da Matemática, originada ainda no século XVII. Nesta epistemologia, reforçada pelos filósofos e pensadores do Círculo de Viena, a Matemática continuava a ter o *status* de universal, objetiva, precisa, lógica, neutra, exata e natural, sendo, inclusive, considerada como a Linguagem pela qual está escrita a natureza.

Esta epistemologia positivista começa a perder sua força, quando ela é posta em discussão, a partir da segunda metade do século XX. Surgem novos resultados de outras áreas, como na Ciência da cognição, da Linguagem e na Física, evidenciando-se novas

possibilidades de se conceber a Ciência e mesmo a Matemática. Estas começam a sugerir que grande parte do que antes acreditávamos pertencer ao mundo objetivo, como algo ‘concreto’, nada mais seriam do que construções e elaborações da mente humana, projetadas por esquemas semióticos e tendo o próprio corpo humano e o meio social como sua base.

Essa revelação coloca-nos, de certa forma, diante de nova visão também sobre a natureza da Matemática e de seus objetos e da possibilidade também de uma nova abordagem epistemológica. Sendo que, nesta direção, destacamos que uma abordagem metafórica pode apontar como probabilidade de formulação de outra e nova maneira de se conceber a natureza da própria Matemática, seus objetos e fundamentos. É dentro dessa nova abordagem que se consolidará o sentido interpretativo de hipóteses aos *axiomas*, como também ele assumirá *status* diferenciado, no sentido operativo e não mais descritivo, na constituição conceitual.

Dentro dessa nova perspectiva de interpretação do desenvolvimento do conhecimento Matemático, de sua natureza e sobre seus objetos o Pensamento sobre Complementariade ‘Otteano’ emerge como uma teoria singular. Especialmente por compreender e destacar a dimensão pragmática do nosso conhecimento, pois são nos usos, diante de necessidades novas e frente à novos conhecimento que se revela a capacidade criadora e criativa de nossa mente, e, isto tem a ver com a riqueza e qualidade do pensamento metafórico.

Procuramos destacar que ao se processar uma aproximação do pensamento filosófico ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático, temos promovida a possibilidade de uma interpretação semiótica ao processo cognitivo, ou seja, uma aproximação entre Linguagem e Matemática, e, é neste contexto que *axioma* não pode mais referir-se ao sentido interpretativo de verdades, mas passa a ser entendido como sinônimo de hipótese.





## **CAPÍTULO VI: Apresentando os Significados do Termo *Axioma*: interpretação fundamentada em uma abordagem de cunho histórico, filosófico, semiótico e alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’**

A problemática geradora desta pesquisa em relação ao Conhecimento Matemático e sua constituição pretende investigar *o que significa o fato de o conceito axioma, até o século XIX, ser tomado como antônimo de hipótese e hoje em dia ser considerado como sinônimo de hipótese*. Esta questão foi-nos apresentada pelo professor Dr. Michael F. Otte em momentos de orientação e estudo sobre temas que se relacionam aos fundamentos do Conhecimento Matemático.

Nosso professor Michael F. Otte tem dedicado mais de 40 anos no desenvolvimento de pesquisas direcionadas à Epistemologia da Matemática e Semiótica, com ênfase em Educação e Filosofia Matemática. Seu interesse especial gira em torno das questões sobre o movimento da algebrização e rigor na relação existente na Matemática, entre intuição – que diz respeito à subjetividade e à criatividade - e proposição – com respeito à objetividade e à Linguagem. Ele é, internacionalmente, um dos mais experientes e respeitados pesquisadores da área. E, reconhecidamente, foi um dos precursores, na Alemanha, no início de trabalhos que buscavam embasamento para uma ‘nova’ disciplina de Educação Matemática, trabalhando como docente e pesquisador no IDM (*Institut für Didaktik der Mathematik*).

Nosso primeiro encontro com o Professor Otte efetivou-se na seleção para este processo de doutoramento. Muito recentemente (em 2010), havíamos concluído o mestrado, tempo esse dedicado à temática ‘Avaliação em Matemática’. Um dos resultados apontados pela pesquisa no mestrado assinalava a uma carência que se destacava na fala dos sujeitos, Educadores em Matemática, quando sua argumentação se dirigia a questões concernentes à gênese e historicidade do Conhecimento Matemático. E este aspecto, no processo avaliativo e ao projeto educativo como um todo, figurava como elemento depreciativo no processo avaliativo e na promoção de aprendizagens em Matemática. Também ficava evidente, no posicionamento dos professores, o indicativo de um tratamento mecânico, prescritivo e desprovido de sentido, dispensado à Matemática em sala de aula. Os professores, na maioria das vezes, eram evasivos ao se posicionarem sobre a metodologia ou abordagem mais adequada à organização didática do Conhecimento Matemático. E, especificamente, relacionado ao processo avaliativo, os professores não sabiam se posicionar sobre quais

aspectos, no comportamento do aluno, quando estes regiam diante das situações operacionalizadas em sala de aula, seriam importantes, relevantes e reveladores sobre o desenvolvimento do pensamento matemático.

Assim, observamos que as questões instigantes e inquietantes no pensamento do Professor Otte contemplavam e complementavam o sentido da nossa investigação anterior, possibilitando ampliação e aprofundamento sobre os aspectos teóricos, filosóficos, sociais e culturais do Conhecimento Matemático e, mais apropriadamente, sobre os fundamentos desse conhecimento e, conseqüentemente, constituindo-se em uma reflexão necessária aos Educadores em Matemática a qual entendemos que deva anteceder qualquer propositura de tratamento didático num projeto educativo.

Deste modo, vislumbramos a potencial relevância de se pesquisar esta problemática que procura investigar o significado e oscilações de significado do termo *axioma*, de Platão à Modernidade. Através deste trabalho, poderíamos ter, efetivamente, a oportunidade ímpar e diferencial para aprofundamento sobre os aspectos destacados em nosso mestrado, especialmente, referentes às questões concernentes à natureza e fundamentos do Conhecimento Matemático.

Como tese inicial neste nosso estudo e pesquisa partimos do pressuposto de que o significado do termo *axioma* tenha se deslocado dos aspectos descritivos para os aspectos operativos. Isso corresponde ao fato de que a objetividade da Matemática passa a se revelar na atividade e nas suas aplicações e não quanto a fundamentos, *a priori* (OTTE, 2011). Assim, o sentido desse termo se deslocou, passando a encontrar-se nas deduções formais e na teoria desenvolvida como uma entidade em si e o significado nas aplicações dessa teoria. Em nosso entendimento tais mudanças, e, especialmente a mudança de sentido interpretativo do termo *axioma*, são operacionalizadas por variações que se processam na relação entre a Linguagem e a Matemática, promovidas pelo exercício do pensamento filosófico ao exercício do pensamento matemático. Isto implica que dentre os resultados da Filosofia da Matemática, destaca-se a descoberta de necessitarmos reconhecer que uma análise semântica de seus conceitos, como é costume nas Ciências Humanas, não é suficiente na Matemática e por isso precisamos tomar conta dos aspectos pragmáticos das representações.

Buscando verificar a adequação de nossa tese apresentamos a seguir filósofos e matemáticos que elegemos para nossa análise. Na realização desta investigação, que teve

início em março de 2011 e com previsão de término para março de 2015, pudemos destacar 04 fases:

- na primeira fase, realizamos pesquisa empírica em diversas bibliotecas (UFMT, UNESP, CAPES) em busca de trabalhos que compartilhassem conosco esta problemática (análise de conceitos em Matemática, tomando como foco a relação entre Linguagem e Matemática). Esta etapa teve início em abril de 2011, encerrando-se em junho de 2011 e, como resultado, não foi encontrado nenhum trabalho compatível;

- na segunda fase, em dicionários filosóficos, gramaticais, epistemológicos, de ciências da Natureza e de Matemática, passamos à procura dos significados atribuídos ao termo *axioma*. Foi esta fase que nos possibilitou identificar e efetuar uma seleção dos matemáticos e filósofos sobre os quais aprofundaríamos nossa pesquisa na análise do uso da terminologia *axioma*. Não havia um critério ou intenção anterior neste sentido, mas, conforme fomos identificando os personagens em cujos pensamentos mais se fazia presente a terminologia *axioma*, eles foram selecionados para nossa análise. Os Filósofos e Matemáticos selecionados foram: Platão, Aristóteles, Euclides, Locke, Leibniz, Kant, Dedekind, Peano e Hilbert. . A seleção desses autores abordados também esteve pautada em ser, por nós, considerada como portadores de elementos indispensáveis ao estudo sobre a constituição do Conhecimento Matemático. Sempre estivemos cientes da impossibilidade de se escrever um caminho detalhado, e que, contemplasse todos os contexto e personagens que fizeram uso desse termo. Deste modo, buscamos tecer um quadro que pudesse, ainda que de uma perspectiva particular, da melhor maneira possível traçar um percurso interpretativo coerente.

Como resultado desta fase, também detectamos as dimensões que se sobressaíam numa pesquisa desta envergadura, sejam elas: a histórica e a filosófica. Somamos a essas duas, a perspectiva semiótica que fundamenta o Pensamento sobre Complementaridade em desenvolvimento pelo Professor Otte e que seu grupo já adota no estudo e abordagem sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático;

- a terceira fase compreendeu a busca de referencial teórico que aglutinasse as três dimensões destacadas anteriormente e nos conduzisse e possibilitasse maior entendimento do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre a relação entre a Filosofia e a Matemática. Também foram estudados os trabalhos desenvolvidos no grupo de pesquisa orientados pelo professor Otte que tiveram, como foco de análise a relação entre Linguagem e Conhecimento. Apresentamos, dirigidos pelo professor Otte, dois seminários temáticos: um

relacionado à construção do projeto de pesquisa e outro para aprofundamento e socialização dos estudos e reflexões envolvidos no estabelecimento de aporte teórico à análise interpretativa;

- a quarta fase apresentou três momentos dinâmicos e inter-relacionados: o primeiro tratando da sistematização, em forma de texto (que se configuraram em capítulos), dos resultados das reflexões sobre as leituras do material selecionado como aporte teórico e dos momentos de orientação; o segundo abordando as reflexões sobre o direcionamento e/ou necessidade de redirecionamento na abordagem interpretativa metodológica, que aconteceram nos encontros de orientação, nos quais apresentamos (ao orientador) como estava se processando a pesquisa, os resultados que começavam a se delinear e avaliamos se o aporte teórico se sustentava diante dos dados e respectivos resultados; o terceiro momento tratou da sistematização e apresentação dos dados em filósofos e matemáticos sobre o significado do termo *axioma*.

Mesmo realçando, nesta pesquisa, as dimensões históricas e filosóficas, não priorizamos obedecer a uma ordem cronológica rígida, mas respeitamos uma linha imaginária que, ao apresentar o significado do termo *axioma* de acordo com alguns filósofos e matemáticos, buscou avançar sempre do passado para o presente.

Estamos cientes, sobretudo, de que nossas escolhas não representam ou resultam em um extrato que possa contemplar todos os fundamentos de um conhecimento tão especialíssimo como o da Matemática em sua abrangência, limites e expressões mais características. Nossa intenção, na escolha, procurou montar, de certa forma, um ‘catálogo’ com figuras ou personagens importantes e significativas no processo de desenvolvimento desse conhecimento e no processo de significação e oscilação na significação do termo *axioma*, mesmo que fosse partindo de um ponto de vista particular.

Buscamos empreender estudo teórico-bibliográfico; desse modo, assumimos que, na interpretação dos dados, pode ser encontrada mais de uma hipótese que os explique; assim, tomamos nossa interpretação sempre como provisória. Como destacada em suas dimensões, trata-se de uma pesquisa de caráter histórico-filosófico bibliográfico e de abordagem semiótica que pretende interpretar, em diversos momentos e em personalidades escolhidos, o significado do termo *axioma*, tentando compreender, ao olharmos para os significados assumidos e para os aspectos imbricados ao/no processo de significação, sobre o próprio desenvolvimento do Conhecimento Matemático, do ponto de vista da relação entre a

Linguagem e a Matemática, permeado e delineado no e pelo relacionamento entre a Filosofia e a Matemática.

### 6.1 Conjecturas sobre o significado de *Axioma* anteriores a Platão (~429 – 347 a.C.)

Temos muitas indicações de que, nos primórdios de nossa História, a Matemática comparece culturalmente como uma técnica de fazer cálculos aritméticos e geométricos elementares. Podemos, de acordo com Heródoto<sup>127</sup> (~500 a.C.), atribuir, aos egípcios, babilônio, hindus e chineses, o prelúdio da Geometria. No entanto, a Geometria desses povos antigos tratava-se de uma coleção de regras sem qualquer motivação ou justificativa, que eram obtidas a partir da experiência e referiam-se à resolução de problemas práticos do cotidiano.

Foram as necessidades práticas que impulsionaram a busca de respostas às questões geométricas, mesmo que só de forma aproximada. Assim, para os babilônios, no período de 2000 a 1600 a.C., a área do círculo era calculada tomando três vezes o quadrado do raio (isto é, eles tomavam como 3 o valor  $\pi$ ; este também era o valor de  $\pi$  para os chineses naquela época). Os egípcios de 1800 a.C., de acordo com o papiro de Rhind, usavam  $(16/9)^2 \approx 3.1604$  como valor aproximado de  $\pi$ . Muitas vezes, os egípcios tinham cálculos corretos; por exemplo, conheciam a fórmula correta para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada. Por outro lado, a fórmula correta para o cálculo da área do retângulo, era por eles aplicada também a qualquer quadrilátero.

A matemática babilônica foi mais avançada que a dos egípcios na aritmética e álgebra; além disso, eles conheciam o tradicional teorema de Pitágoras, “num triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos”, bem antes mesmo do que Pitágoras (PENEIREIRO, 2008. P.10).

Faltava, sobretudo, à Matemática desses povos, o caráter sistemático, rigoroso, puro e eram as práticas imediatas (caráter empirista) que caracterizavam o Conhecimento Matemático.

Assim, Tales de Mileto<sup>128</sup> (~ 625 - 546 a.C.), havendo visitado o Egito e a Babilônia, traz para a Grécia esses Conhecimentos Matemáticos. Tales com seus contemporâneos Anaximandro e Anaxímenes empreendem um tratamento específico e diferenciado a esse tipo de conhecimento, sendo a direção da pura especulação desvinculada de interesses práticos

<sup>127</sup> Foi um geógrafo e historiador grego, continuador de Hecateu de Mileto, nascido no século V a.C.

<sup>128</sup> Foi um filósofo da Grécia Antiga, o primeiro filósofo ocidental de que se tem notícia. Tales é apontado como um dos sete sábios da Grécia Antiga. Além disso, foi o fundador da Escola Jônica.

imediatos, um método que se fundava no debate racional, de modo que podemos situá-los como criadores do que se entende hoje por Filosofia da Ciência.

São os gregos que, ao incorporarem o Conhecimento Matemático de até então, começam a imprimir, nele, mudanças significativas, e, a matemática adquire uma caráter mais filosófico que prático. Uma primeira modificação, relacionada diretamente à organização desse conhecimento, opera-se na sua divisão, reunindo, de um lado, a teoria dos números que estuda as entidades discretas e ordenadas e, de outro lado, a Geometria, que trata do contínuo. Os gregos, então, debruçam-se, a seguir, na tarefa de verificar a correção dos resultados matemáticos executados até então, cuja época passou a se caracterizar pelo esforço a demonstrações rigorosas desse conhecimento. Outra mudança impulsionada pelo pensamento grego relaciona-se ao critério de ‘verdade’ é que esta deixa de ser a experiência, uma vez que, para o povo grego, a razão suplanta a empiria.

É nesse cenário que Tales desenvolve a primeira Geometria Lógica. Um desenvolvimento organizado de teoremas, através de provas (demonstrações), que começam a caracterizar a Matemática grega. Para Silva (2007, p. 31):

Certamente os babilônios conheciam o teorema de Pitágoras – segundo o qual o quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo tem área igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os outros dois lados -, pelo menos em casos particulares, como atestam documentos arqueológicos, mas faltava-lhes uma demonstração rigorosa desse teorema, se por isso se entende uma argumentação irrefutável de caráter puramente racional da validade universal do fato enunciado. Essa é uma invenção grega e caracteriza a matemática produzida por esta civilização.

Deste modo, são aos gregos que iniciam, efetivamente, o tratamento investigativo às questões geométricas, estabelecendo a necessidade de se empregar um método dedutivo ao conhecimento, no lugar do método de tentativa e erro, empreendido até então.

A Geometria e, conseqüentemente, a Matemática, são impactadas, na Grécia, segundo Szabó (EUCLIDES, 2009, p.78), pela filosofia eleática<sup>129</sup>. Os termos como *hipótese*, *postulado* e *axioma* eram comuns na dialética pré-platônica, relacionando-se tanto à filosofia quanto à retórica, mas não ao Conhecimento Matemático.

---

<sup>129</sup> (EUCLIDES, 2009, p.85) “A filosofia eleática, falando perfunctoriamente, foi preparada por Xenófanes, estabelecida por Parmênides, seguida e defendida por Zenão e Melisso, e tem como fundamentos: (i) a unidade, a imutabilidade e a necessidade do ser – Em *Teeteto* I 81 a 6-7, Platão refere-se aos eleatas como [...] “os partidários do todo”, e Aristóteles, *Metafísica* 986 B 24, escreve “[Xenófanes], tendo contemplado o céu todo, disse o um ser Deus.” (ii) a acessibilidade do ser somente ao pensamento racional e a condenação do mundo sensível e do conhecimento sensível como aparência.

Em especial, o termo *axioma*, de acordo com Szabó (1960) (*apud* JAHNKE, 2010), tem suas origens na filosofia estóica<sup>130</sup> (desde 300 a.C.), denotando a proposição da qual não podemos duvidar de forma justificada, não sendo possível sua demonstração. Ele nos aponta que, em uma tradução literal do grego, *axioma* tratava de ‘as ideias comuns a todos os seres humanos’.

Os filósofos gregos entendiam a dialética como sendo a arte de trocar argumentos e contra-argumentos em um diálogo a respeito de uma proposição. Sobretudo, esses três conceitos assumiam, na dialética, significados muito semelhantes, designando todos eles proposições iniciais sobre as quais os participantes deveriam acordar. Com diferenças sutis, o termo *hipótese* referia-se a uma proposição que tivesse sido pactuada por todos, os *postulados* aludiam-se às proposições sobre as quais os participantes não acordavam e os *axiomas*, aquelas sobre as quais eles não se declaravam a respeito. Também, o termo *hipótese* era comumente usado como sinônimo de *definição* na dialética. Neste caso, a *hipótese* designava o fato com que os participantes de um diálogo teriam de concordar inicialmente sobre uma definição conjunta antes de entrar no discurso argumentativo sobre determinado assunto. A diferença que podemos destacar entre *axioma* e *postulados* residia na possibilidade de apenas os *postulados* serem demonstráveis.

Em especial, observamos que, na fase inicial e estreitamente ligada ao pensamento filosófico, o termo *axioma* assume *status* epistemológico indefinido, podendo ser tomado verdadeiro ou provável e/ou até mesmo errado, mas ainda não era efetivamente empregado na Matemática, nem mesmo no sentido estritamente hipotético.

De acordo com Osvaldo Pessoa (2010, p.10):

Na segunda metade do séc. V (a. C.), três fatores influenciaram o desenvolvimento do pensamento grego: **1) A expansão da educação, associada ao movimento dos sofistas, que ensinavam qualquer matéria, além das já tradicionais gramática, música e poesia, em troca de dinheiro.** 2) Uma virada das preocupações com a filosofia da natureza para a *ética*, feita por Sócrates e por muitos sofistas, como Protágoras. 3) Atenas tornou-se o principal centro intelectual da Grécia. Platão de Atenas (428-347 a.C.) herdou a preocupação moral de seu mestre, Sócrates, mas também fez contribuições importantes para a ciência [grifo nosso].

<sup>130</sup> O *estoicismo* (do grego: *Στωικισμός*) é uma escola de filosofia helenística fundada em Atenas por Zenão de Cítio, no início do século III a.C. Os estóicos acreditavam que o conhecimento pode ser atingido através do uso da razão. A verdade pode ser distinguida da falácia, mesmo que, na prática, apenas uma aproximação possa ser efetuada. De acordo com os estóicos, os sentidos recebem constantemente sensações: pulsações que passam dos objetos através dos sentidos em direção à mente, onde deixam uma impressão na imaginação (*phantasia*).

Platão, em aproximadamente 380 a.C., funda sua academia próximo a Atenas, onde passa a se relacionar com vários matemáticos, astrônomos e filósofos importantes. Ao atuar como formador de filósofos e matemáticos, ele impõe força e profundidade a um processo de simbiose entre pensamento matemático e pensamento filosófico, que teve seu início na Escola Pitagórica. A doutrina de Platão contribui, de maneira significativa, ao processo de estabelecimento de um ‘novo’ método à ciência.

Interpretamos ser a partir de Platão<sup>131</sup> (e seu discípulo Aristóteles<sup>132</sup>) que os termos *axioma*, *postulados* e *hipóteses* passam a ser aplicados mais especifica e significativamente, não somente na Filosofia, mas também na Geometria, ao Conhecimento Matemático.

## 6.2 Axioma em Platão (~ 429 – 347 a. C.)

As primeiras teorias sobre o método científico, sem sombra de dúvida, começam a ser elaboradas na Grécia. Como também é a partir do pensamento grego que o Conhecimento Matemático começa a ser apresentado e caracterizado pelo pensamento dedutivo, sistemático e com rigor demonstrativo.

O ponto de destaque sobre esse ‘novo’ caminho tem suas reflexões iniciais no pensamento platônico. Notadamente, Platão promove um processo de simbiose entre a

---

<sup>131</sup> Platão (em grego: Πλάτων, transl. *Plátōn*, "amplo") Platão nasceu em Atenas, provavelmente em 427 a.C. e morreu em 347 a.C. Foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da Academia em Atenas, a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental. Juntamente com seu mentor, Sócrates, e seu pupilo, Aristóteles, Platão ajudou a construir os alicerces da filosofia natural, da ciência e da filosofia ocidental. Em linhas gerais, Platão desenvolveu a noção de que o homem está em contato permanente com dois tipos de realidade: a inteligível e a sensível. A primeira é a realidade imutável, igual a si mesma. A segunda são todas as coisas que nos afetam os sentidos, são realidades dependentes, mutáveis e são imagens da realidade inteligível. Tal concepção de Platão também é conhecida por *Teoria das Ideias* ou *Teoria das Formas*.

<sup>132</sup> Aristóteles (em grego: Ἀριστοτέλης, transl. *Aristotélēs*; Estagira, 384 a.C. – Atenas, 322 a.C.) foi um filósofo grego, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande. Aluno de Platão, Aristóteles discorda de uma parte fundamental da sua filosofia. Platão concebia dois mundos existentes: aquele que é apreendido por nossos sentidos, o mundo concreto -, em constante mutação; e outro mundo - abstrato -, o das ideias, acessível somente pelo intelecto, imutável e independente do tempo e do espaço material. Aristóteles, ao contrário, defende a existência de um único mundo: este em que vivemos. O que está além de nossa experiência sensível não pode ser nada para nós. Seus escritos abrangem diversos assuntos, como a física, a metafísica, as leis da poesia e do drama, a música, a lógica, a retórica, o governo, a ética, a biologia e a zoologia. Juntamente com Platão e Sócrates (professor de Platão), Aristóteles é visto como um dos fundadores, da filosofia ocidental. Para Aristóteles (pai da Lógica), a Lógica é um instrumento, uma introdução para as ciências e para o conhecimento e baseia-se no silogismo, o raciocínio formalmente estruturado que supõe certas premissas colocadas previamente para que haja uma conclusão necessária.



Filosofia (dialética) - fundamentada na raiz socrática – e a Matemática<sup>133</sup> e esse aspecto tem significância ímpar neste trabalho que se propõe a investigar o significado do termo *axioma*. Isso por identificarmos ser, a partir de Platão, que termos antes de uso exclusivo da Filosofia começam a ser empregados na Matemática.

Observamos no diálogo em Mênon (PLATÃO, 2001, p.34, 87e-b) destacado ponto evidente dessa convergência entre pensamento filosófico e pensamento matemático, quando Platão, tentando chegar a uma definição sobre o que vem a ser a virtude, assume, diferentemente da propositura dialética socrática (até então), uma postura que agrega, à dialética, o modo de proceder dos geômetras, informando que:

[...] consente que se examine a partir de **hipótese** se ela [a virtude] é coisa que ensina ou se < é > como quer que seja. Por “**a partir de uma hipótese**” **quero dizer a maneira como os geômetras frequentemente conduzem suas investigações**. Quando alguém lhes pergunta, por exemplo, sobre uma superfície, se é possível *esta superfície aqui* ser inscrita *como triângulo* neste círculo aqui, um geômetra diria: “Ainda não sei se é assim, mas creio ter para essa questão como que uma **hipótese útil** qual seja: se *esta superfície* for tal que, *aplicando-a* alguém sobre uma dada *linha* do círculo, ela *fique em falta* de uma superfície *tal como* for aquela que foi aplicada, outra < consequência >, se é impossível que < a superfície > seja passível disso. **Fazendo então uma hipótese, estou disposto a dizer-te o que resulta a propósito de sua inscrição no círculo: se é impossível ou não**”. (Mênon, PLATÃO, 2001, p.34,87e-b) [grifo nosso].

O movimento que o pensamento de Platão inicia trata de uma abordagem reflexiva e investigativa que veio contribuir de forma decisiva para o desenvolvimento da ciência, especialmente, no que se refere ao seu método, à sua sistematização e aos seus fundamentos e, mesmo sem ter sido um matemático, ao estabelecimento de uma estruturação à matemática grega (EUCLIDES, p.79, 2009).

Conforme Bicudo (EUCLIDES, 2009, p.85), uma marca característica imputada na Grécia, àquela época, tratava que

[...] o pensamento filosófico grego do século V a.C. é ser ele dominado por um esforço mais e mais consistente para estender, a todo o campo do pensamento, os procedimentos de articulação do discurso empregados com tanto sucesso pelas retórica e matemática contemporâneas – em outras palavras, para criar a lógica, no sentido mais geral da palavra. O tom dos escritos filosóficos sofre, nessa época, uma mudança básica: ao passo que, nos séculos VII e VI, os filósofos afirmam ou vaticinam [...], a partir de Parmênides e, sobretudo, de Zenão, **argumentam e**

<sup>133</sup> As matemáticas nesse tempo perfiguravam como a aritmética (Platão foi estudioso das teorias aritméticas dos pitagóricos), a geometria plana e a estereometria. Assim, eram considerados matemáticos os homens que se dedicavam a essas artes.

**procuram resgatar princípios gerais que possam servir a base à sua dialética”**  
[...] [grifo nosso].

Neste cenário, de acordo com J. A. Gow (*apud* EUCLIDES, p.80, 2009) em *A Short History of Greek Mathematics*, é que o filósofo Platão funda sua escola<sup>134</sup>, que configurou um espaço tanto de formação ético-política, herdeira do espírito socrático, como um centro de atividades científicas em todos os campos. Platão também passa a atuar como um formador de filósofos e matemáticos. A aproximação mais estreita e complexa que promove, entre pensamento matemático e pensamento filosófico, contribui, efetiva e especialmente, para a Geometria na melhoria do seu método, referendando o desenho de um caminho dedutivo-sistemático a ela do que a fazer, propriamente, adições ao seu conteúdo.

Reforça Bicudo (2009) ser a partir de Platão que, “aparentemente, começaram aquelas *definições* de termos geométricos, aquele enunciado distinto de *postulado* e os *axiomas* que Euclides adotou” (EUCLIDES, p.80, 2009). Todavia, não encontramos que Platão faça uso nominalmente do termo *axioma* no estabelecimento de sua ontologia, ou referindo-se ao Conhecimento Matemático.

Platão amava a Matemática, tanto pela evidência e certeza de suas razões, quanto também pela beleza que prefigurava das essências eternas e do seu princípio, a ideia do Bem. A Matemática, na visão realista<sup>135</sup> sobre o entendimento em Platão, trata de uma das *technai* genuínas que exploram a realidade e, de acordo com a teoria das Formas, ela conduz ao entendimento adequado correspondente a estruturas abstratas, complexas cuja existência é tão independente da mente humana quanto a existência de qualquer outra coisa externa a nós (MORAVCSIK, 2006, p.32).

Neste sentido, Platão enxergava na Matemática, ou melhor, no modo como ela atuava, como podendo ser tomada no sentido de configurar-se como a prova e a justificativa da ontologia que ele construía, ou seja, da própria existência do mundo das ideias. Sobretudo, ele não considerava as matemáticas como propriamente ‘ciências’.

<sup>134</sup> A Academia de Platão foi considerada, desde a sua fundação, um centro extremamente importante de pesquisa e estudos matemáticos. Eudoxo de Cnido, Menecmo, Dinostrato, Espêusipo, Amiclas de Heracléia, Filipe de Opono foram matemáticos ilustres que frequentaram a academia. Euclides, que meio século mais tarde reuniria em um tratado metódico as descobertas geométricas de seus predecessores, é qualificado por Proclo de filósofo platônico.

<sup>135</sup> De acordo com a noção realista platônica, o entendimento é uma série de descobertas, em vez de construções ou criações ou disposições pragmáticas. À medida que vamos entendendo algo, cada vez mais, descobrimos mais de suas partes ou aspectos.

Ele estabelece uma distinção na forma de conhecimento do inteligível, apontando para dois tipos distintos de conhecimentos, no entanto conhecimentos tido para ele como complementares. O primeiro tipo de conhecimento do inteligível trata do mais alto conhecimento e nos dá a ideia do Bem, o do Ser e só o atingimos pelo poder da Dialética. O segundo é o das outras ciências, ou artes, como as matemáticas e teriam o caráter de ciências intermediárias para Platão. O sentido de Complementaridade em Platão entre elas, diz respeito a que ciências ou artes intermediárias (do segundo tipo) são aquelas que preparam a alma para o conhecimento do primeiro tipo.

Nesta perspectiva platônica, um aspecto comum entre a Dialética (conhecimento do primeiro tipo) e a Matemática (conhecimento do segundo tipo), situar-se-ia no fato de ambas partirem de *hipóteses*; entretanto, logo a seguir, cada qual toma um caminho diverso, no acesso ao inteligível.

O caminho da Matemática diferencia-se, primeiramente, por tratar-se de uma Ciência que “[...] para atingir uma de suas partes [do mundo inteligível] a alma seja obrigada a servir-se, como de outras tantas imagens, dos originais do mundo visível, **procedendo a partir de hipóteses, não rumo a um princípio, mas a uma conclusão**; (PLATÃO, 1965, p.100) [grifo nosso]”. A dialética, de outro modo, parte de hipóteses, mas rumo a um princípio, então seria ela o caminho que conduz à verdade.

Diferentemente, os que se aplicam à Geometria, à Aritmética, ou ciências desse gênero supõem o par, o ímpar, três espécies de ângulos, as figuras em geral e admitindo-as como conhecidas, não se dignam a dar razão delas por si próprios aos outros. Partem delas, deduzem o que segue e acabam por atingir, de maneira consequente, o objeto a que sua indicação visava. De modo

[...] que os objetos deste gênero são do domínio inteligível, mas que, para chegar a conhecê-los, a alma é forçada a recorrer a hipóteses: que não procede então rumo a um princípio, porquanto não pode remontar além de suas hipóteses, mas emprega, como outras tantas imagens, os originais do mundo visível, cujas cópias se encontram na secção inferior, e que, relativamente a estas cópias, são encaradas e apreciadas como claras e distintas (PLATÃO, 1965, p.102-3).

Por não remontarem a um princípio e ainda partirem de hipóteses, o conhecimento a que remonta é denominado, por Platão, de conhecimento discursivo e não de inteligência; deste modo, por essa razão, sendo considerado como um conhecimento intermediário entre a opinião e a inteligência.

Sobretudo, juntamente com sua escola, Platão tinha a Matemática como uma disciplina possuidora de alto grau de abstração e rigor lógico, de um arquétipo privilegiado, considerado rigorosamente científico e do modelo de ciência que ele desejava instituir. A Matemática repousava como possuidora de uma existência autônoma, fato objetivo à pré-existência dos seus objetos, sendo eles caracterizados como independentes do nosso conhecimento e imutáveis (fora do espaço e do tempo).

E, mesmo sendo uma ciência possuidora de objetos com existência real, embora não física e nem material, a atividade matemática consistiria na descrição e descoberta (pelo espírito, intuitivamente) desses objetos, bem como das relações que se estabeleciam entre eles e que os uniam. Deste modo, mesmo como ‘ciência’ que trata de objetos do domínio do inteligível, uma vez que, para chegar a eles, a alma é forçada a recorrer a **hipóteses**, não procedendo de um princípio, porquanto não pode remontar além de suas hipóteses, apresenta-se desta maneira com *status* de uma ciência intermediária.

No entanto, ele faz observar que a Matemática toma suas *hipóteses* como *princípios autoevidentes*. Mas, para Platão, *princípios* e *hipóteses* tratavam de conceitos filosoficamente diferentes. Sobretudo, ele não considera os *princípios autoevidentes* que se apresentavam na Matemática, como que assumindo reais características de *princípios*, como no entendimento filosófico.

Para Platão, de acordo com James (*apud* MELO, 2010, p.68-9), os matemáticos tratam suas *hipóteses*:

[...] **desde o princípio como verdadeiras**, deduzindo suas conclusões delas, e fazendo uso de imagens em seu trajeto. O matemático, portanto, propõe um objetivo que, para alcançá-lo, fundamenta toda a sua **argumentação numa hipótese que não justifica nem para si mesmo, nem para ninguém, por considerá-las por si mesmas claras e evidentes, sem necessidade de especulações. Essa hipótese não obteria a qualidade de irrefutável, não-hipotética, como um princípio deve pressupor**, de acordo com Platão. Por não ser trabalhada por uma sistematização de ideias até que se estabelecesse um princípio isento de dúvidas, a hipótese dos matemáticos se torna incerta e destituída do devido valor. Eis aí a impossibilidade de a matemática assumir o patamar de ciência elevada, assim como a dialética, além de também a matemática se valer de figuras observadas no mundo sensível, que por vezes se valem, para representar os objetos de seu estudo, que são, por natureza, dotados de características inteligíveis [grifo nosso].

Neste sentido, observamos que os *princípios* de que tratavam os matemáticos, para Platão, revelavam-se com características próprias de *hipóteses* e não *princípios*. Deste modo, seu entendimento é que, na Matemática, o caminho perseguido seria o hipotético-dedutivo e

os seus pensadores, por não se preocuparem em dar razão a suas hipóteses, aceitavam-nas, ao contrário, com o título usurpado de *princípios*.

Bicudo (EUCLIDES, 2009) nos apresenta que a perspectiva platônica tende a indicar que o trabalho, na Matemática, deve operar-se partindo da procura pelo (EUCLIDES, 2009, p.89):

[...] “*axioma* fundamental, que não tem que pedir a alguém para aceitá-lo; é algo que deve ser aceito por qualquer um (...). É por essa razão que Platão sugere que deve ser aceito o ideal axiomático: que deveríamos tentar e desenvolver o todo da nossa matemática por raciocínio dedutivo, (...), com base em alguns princípios que (erradamente) pensou poderiam ser estabelecidos além de toda questão possível. Platão apresentou o seu programa, os seus discípulos realizaram-no em grande parte. Temos o resultado final codificado por Euclides.”

Uma segunda característica que interpretamos em Platão, assinala que a Matemática, em seu método, não alcança seus objetos de forma sintética. Ela, por exemplo, parte do triângulo que supõe dado e, daí, deduz as suas propriedades. O recurso da Matemática é a análise; tudo o que demonstra está, implicitamente, contido na **hipótese** que lhe serve de ponto de partida. Ao definir, com maior rigor possível, o processo de análise, Platão dotou a Matemática de seu principal instrumento. Através de regressão analítica, é possível reduzir o problema todo a lemas básicos, dos quais partimos para resolvê-los.

É assim que este caráter estritamente analítico, somado à natureza de suas hipóteses, reforça a posição platônica de que as Matemáticas ocupam o segundo lugar no domínio do conhecimento racional; o primeiro, sendo a Dialética.

E ainda, sobretudo, para Platão, a Matemática se ocupa das Formas e não das Ideias, que são objetos da Filosofia. As formas teriam, assim, posição intermediária entre as Ideias e as coisas do mundo físico, o mundo imperfeito acessível aos sentidos. As Formas, objetos matemáticos por excelência, habitariam um lugar fora do mundo imperfeito, fora do espaço e do tempo, sendo imunes à geração e à degradação, pré-existindo à atividade matemática, à qual cabe apenas o papel de ascender a elas e estudá-las. Aqui, neste ponto do pensamento platônico é que começa a ser impresso o sentido de “verdade” aos *axiomas*. Desta forma, Platão criticava a Linguagem construtivista dos geômetras que faziam, e ainda fazem, uso irrestrito dos termos: prolongar, construir, traçar, estender etc.

Em Platão, tanto os objetos quanto hipóteses que os matemáticos tratam como verdades matemáticas, seus princípios, os *axiomas*, em suas Formas têm existência

independente da existência humana. Um ponto de vista realista ontológico e epistemologicamente.

### **6.2.1 O olhar de Platão para a Matemática – o pensamento analítico: uma reflexão fundamentada no *Diálogo em Mênon***

Segundo Otte (2011), a arte analítica é um procedimento especialmente adaptado para se descobrir a verdade e Platão parece ter sido o primeiro a perceber isso na/da Matemática, inclusive, ele intenta transpor esse modo de proceder à sua dialética. Platão observa, na Matemática, um procedimento pelo qual se começa, assumindo que aquele que a gente procura já fosse dado (já fosse concebido) – o modo de proceder analítico. De forma que vamos assumir ‘algo’ como ‘verdadeiro’ e procurar por sua consequência.

Desse modo, ele afirma ter tanto a Matemática como a Dialética o mesmo modo de proceder, partindo de hipóteses. Entretanto, a partir de suas hipóteses, tomam caminhos distintos: a Matemática rumo a uma conclusão, enquanto a Dialética rumo a um princípio.

A reflexão platônica sobre esse particular procedimento matemático pode ser destacada no Diálogo, em *Mênon*, tanto observável em determinados momentos na sua estruturação, no modo como Sócrates conduz a conversação em busca da definição da ‘virtude’, quanto em exemplos que Sócrates utiliza da Matemática, ao defender sua ontologia.

No diálogo com Sócrates, em determinado momento, *Mênon* (PLATÃO, 2001, p.49, 80 d-e) cai em aporia:

E de que modo procurarás, Sócrates, **aquilo que não sabes absolutamente o que é?** Pois procurarás propondo-te <procurar> que tipo de coisa, entre as coisas que não conheces? Ou ainda que no melhor dos casos, a encontres, como saberás que isso <que encontraste> é aquilo que não conhecias?

Esse conflito sobre como conhecer algo sobre o qual ainda nada sabemos, Platão resolve, apresentando como exemplo um modo particular de proceder que ‘frequentemente’ os geômetras utilizam na Matemática, revelando, deste modo, o processo analítico da/na Matemática. A reflexão de Platão não exclui do procedimento matemático o processo sintético, pois ele também reconhece que, em grande parte, a Geometria é sintética. Isto é, parte de objeto(s) dado e fica construindo novos objetos.

Apresentando sua tese sobre a memorização no interrogatório do escravo, ao tempo em que tenta esclarecer, a *Mênon*, questões relacionadas à como aprendemos algo totalmente (aparentemente) novo, temos revelado na sua estruturação, de outro modo, a apresentação do processo (arte) analítico, neste caso direcionado pelo pensamento matemático, representado no procedimento geométrico da duplicação do quadrado.

Sócrates pede que se chame um servidor (que fale grego) de modo que seja garantido ser uma pessoa que não tenha muito (ou nenhum) conhecimento sobre o assunto de que irá tratar; deste modo, demonstrará como se adquirem conhecimentos novos. Sócrates pede ao escravo:

SO. Dize-me, aí menino: reconheces que uma superfície quadrada é deste tipo? – ESC. Reconheço. – SO. A superfície quadrada então é <uma superfície> que iguais todas as linhas, que são quatro? – ESC. Perfeitamente. – SO. E também não é <uma superfície> que tem iguais estas <linhas> aqui, que atravessam pelo meio? – ESC. Sim. – SO. E não é verdade que pode haver uma superfície deste tipo tanto maior quanto menor? – ESC. Perfeitamente. – SO. Se então este lado for de dois pés e este de dois, de quantos pés será o todo? Examina da seguinte maneira. Se <por este lado> fosse de dois e por este de um só pé, a superfície não seria de dois pés? – ESC. Sim. – SO. Mas, uma vez que por este também é de dois pés, <a superfície> não vem a ser duas vezes dois? – ESC. Vem a ser. – SO. Logo, ela vem a ser de duas vezes dois pés. – ESC. Sim. – SO. Quanto é então duas vezes dois pés? Faz o cálculo e diz. – ESC. Quatro, Sócrates. – SO. E não é verdade que pode haver outra superfície deste tipo, que seja o dobro desta, que tenha todas as linhas iguais como <as tem> esta? – ESC. Sim. – SO. De quantos pés então será? – ESC. Oito. – SO. Veja lá, tenta dizer-me de que tamanho será cada linha dessa superfície. A <linha> desta <superfície> aqui é, com efeito, de dois pés. E a <linha> daquela <superfície> que é o dobro? – ESC. Mas é evidente, Sócrates, que será o dobro (PLATÃO, 2001, p.55, 82 c-e).

Observe que o diálogo se inicia, partindo de pontos comuns que o escravo reconhece (o quadrado) e também de seus aspectos característicos (todos os lados iguais, a diagonal, o cálculo de sua área), encerrando com a problematização sobre qual seria a medida (a linha) que nos daria o dobro de um quadrado. A seguir, é tomado como exemplo um quadrado de quatro pés e, de acordo com suas características, conclui-se que um quadrado que seja o dobro do de quatro pés, terá, no total de sua superfície, oito pés. Podemos identificar que, até então, tudo que o escravo pode constatar foi deduzido, encontra-se implícito no conceito de ‘quadrado’. Não é posta em dúvida a existência do quadrado de quatro pés com que ambos acordaram nem tampouco que, ao duplicá-lo, teremos um que seja de oito pés. E eles, ainda, argumentam sobre a hipótese de que cada linha da superfície, que é o dobro desse quadrado, será exatamente o dobro de cada linha do quadrado.

Deste modo, Sócrates, partindo desse caso hipotético inicial junto ao escravo, analisa sobre as consequências dele decorrentes. Como já destacamos, uma característica identificada por Platão, relacionada ao pensamento matemático, trata de que ele parte de hipóteses rumo a uma conclusão, não a um princípio. O que é evidenciado no seguinte trecho:

SO. [...] Tu, pois, dize-me. Afirmas que é a partir da linha que é o dobro <desta> que se forma a superfície que é o dobro <desta>? Quero dizer <uma superfície> do seguinte tipo: não que seja longa quanto a esta <linha> e curta quanto a esta, mas sim que seja igual por toda a parte, como esta aqui, porém do dobro desta, <isto é,> de oito pés. Mas vê se ainda te parece que, <formada> a partir da <linha> que é o dobro ela vai ser <assim>. – ESC. A mim, parece-me. – SO. Não é verdade que esta linha se torna o dobro desta, se lhe acrescentamos outra deste tamanho, a partir daqui? – ESC. Perfeitamente. – SO. A partir desta, pois afirmas, formar-se-á a superfície de oito pés, se houver quatro linhas deste tamanho. – ESC. Sim. – SO. Tracemos, pois, a partir desta, quatro linhas iguais. Não seria desta aqui a superfície que afirmas ser de oito pés? – ESC. Perfeitamente. – SO. Não é verdade que nesta <superfície> há quatro <superfícies> aqui, cada uma das quais é igual a esta que é de quatro pés? – ESC. SIM – SO. De que tamanho então vem a ser ela? Não é de quatro vezes o tamanho desta? – ESC. Como não? – SO. Então a superfície que é quatro vezes maior que esta é o dobro desta? – ESC. Não, por Zeus! – SO. É, antes quantas vezes este tamanho? – ESC. O quádruplo. – SO. Logo, menino, a partir da linha que é o dobro não se forma uma superfície que é o dobro, mas sim que é o quádruplo (PLATÃO, 2001, p.56, 83 b-c).

Sobretudo, assumindo como verdadeira a hipótese inicial e indo à sua aplicação, verificamos que, em suas consequências, aponta uma inadequação, levando-nos a refutá-la. Entretanto Sócrates analisa o que foi obtido, compara aos dados iniciais e ainda aponta para outras possíveis relações entre os dados iniciais e o que foi obtido. Deste modo, notamos que o escravo já começa a ter uma ideia mais próxima de qual possa ser a medida da linha da superfície que dá o dobro de um quadrado, conduzindo-o, neste caso particular, a estabelecer uma nova hipótese, qual seja: partir de uma superfície de três pés. Observemos a passagem:

SO. Com efeito, quatro vezes <uma superfície de> quatro <pés> é <uma superfície de> dezesseis <pés>, não é? – ESC. Sim. – SO. E a <superfície> de oito pés se forma a partir de uma linha de que tamanho? Não é a partir desta <que se forma> a <superfície> que é o quádruplo? – ESC. Concordo. – SO. E esta aqui que tem quatro pés, a partir desta aqui, que é a metade? – ESC. Sim – SO. Pois seja. E a superfície de oito pés não é dobro desta aqui, e metade desta? – ESC. Sim. – SO. E não será formada a partir de uma linha maior que um deste tamanho, mas menor que uma deste tamanho aqui? Ou não? – ESC. Assim me parece. – SO. Ótimo. Responde, com efeito, aquilo que te parece. E dize-me. Esta <linha> aqui não é, como dissemos, de dois pés, e esta, de quatro? – ESC. Sim. – SO. Logo, é preciso que a linha da superfície de oito pés seja maior que esta de dois pés, mas menor que a de quatro. – ESC. É preciso. – SO. Tenta pois dizer: uma <linha> de que tamanho afirmas que ela é. – ESC. Três Pés (PLATÃO, 2001, p.58-9,83c-d).



Procedendo deste modo, a partir da observação sobre as relações obtidas e consequências de novas inferências, somos (e o escravo) conduzidos a novas conclusões (descobertas). De acordo com OTTE (2011), o pensamento analítico é um pensamento relacional, Neste, nós não conhecemos o objeto a que nos referimos (ou procuramos), mas só algumas relações entre esse objeto desconhecido com objetos conhecidos. Deste modo, observamos que o escravo vai tendo, a cada vez, uma ideia mais aproximada de como pode ser a medida da linha da superfície que dará o dobro de um quadrado (qualquer). Sócrates parte para verificar as consequências relacionadas a essa nova hipótese:

– SO. Então, se realmente for de três pés, tomaremos a metade desta <linha> em acréscimo e terá três pés, não é? Pois estes aqui são dois pés e este, um. E a partir daqui, da mesma maneira, estes aqui são dois, e este, um; e forma-se esta superfície de que falas. – ESC. Sim. – SO. E não é verdade que, se for de três pés quanto a esta <linha> aqui, e de três quanto a esta, a superfície total vem a ser de três vezes três pés? – ESC. É evidente que sim. – SO. E três vezes três pés são quantos pés? – ESC. Nove. – SO. E <a superfície que é> o dobro devia ser de quantos pés? – ESC. Oito. – SO. Logo, não é ainda tampouco a partir da linha de três pés que se forma a superfície de oito pés. – ESC. Certamente não. – SO. Mas a partir de qual (PLATÃO, 2001, p.59,83d-e)?

Embora sendo a nova hipótese também refutada, Sócrates verifica que o processo desencadeado (levantamento de hipóteses, testes e análise das consequências) é de todo benéfico ao promover ‘as recordações’. No transcorrer desse processo, o escravo torna-se cada vez melhor a respeito do assunto que antes nada conhecia, e completa afirmando que, muito embora não se tenha chegado à solução para a problemática inicial: “De qualquer forma, fizemos algo proveitoso, ao que parece, em relação a ele descobrir de que maneira <são as coisas que tratamos> (PLATÃO, 2001, p.61, 84 c)”.

E, dessa maneira, tomando todas as consequências, relacionando-as, analisando os indicativos que essas relações possam fornecer, podemos caminhar à solução da problemática, desvelá-la; neste caso, para Platão, vir a ser ‘recordada’. Vejamos como se passa o último momento do diálogo entre Sócrates e o escravo:

SO. Pois dize-me tu. Não temos esta superfície aqui de quatro pés? Estás entendendo? – ESC. Sim, estou. – SO. E poderíamos acrescentar-lhe esta outra aqui, igual? – ESC. Sim. – SO. E esta terceira aqui, igual a cada uma dessas duas? – ESC. Sim. – SO. E não deveríamos completar com esta aqui o <espaço> no canto? – ESC. Perfeitamente. – SO. Então, não é assim que ficariam estas quatro superfícies iguais? – ESC. Sim. – SO. E então? Este todo vem a ser quantas vezes maior que esta <superfície> aqui? – ESC. Quatro vezes. – SO. Mas era-nos preciso uma que fosse o dobro; ou não te lembras? – ESC. Perfeitamente. – SO. E esta, que se

estende de canto a canto, não é uma linha que corta em dois cada uma das superfícies? – ESC. Sim. – SO. E estas quatro, não são linhas iguais, que circunscrevem esta superfície? – ESC. Com efeito, são. – SO. Examina pois. De que tamanho é esta superfície? – ESC. Não estou compreendendo. – SO. Estamos aqui estas quatro superfícies, cada linha não separou uma metade dentro de cada uma delas? OU não? – ESC. Sim, separou. – SO. Então, quantas superfícies desse tamanho há dentro desta? – ESC. Quatro. – SO. E quantas nesta aqui? – ESC. DUAS. – SO. E quatro <superfícies> são o quê de duas? – ESC. O dobro. – SO. Então, de quantos pés é esta superfície aqui? – ESC. De oito pés. – SO. Desta que se estende de canto a canto da <superfície> de quatro pés? – ESC. Sim. – SO. Ora, esta linha, chamam os sofistas de diagonal. De modo que, se o nome dela é diagonal, é a partir da diagonal, como afirmas, escravo de Mênon, que se formaria a superfície que é o dobro. – ESC. Perfeitamente, Sócrates (PLATÃO, 2001, p. 61-2, 84 e 85 a-b).

E assim interpretamos que, ao demonstrar sua tese da memorização, Platão nos apresenta o processo da análise, que ele decodifica do modo como procedem ‘frequentemente’ os geômetras. Inferindo ainda ao final que, por esse caminho de se investigar sobre algo desconhecido: “naquele que não sabe, sobre as coisas que por ventura não sabia [...] essas opiniões acabam de erguer-se nele. E se alguém lhe puser essas mesmas questões frequentemente e de diversas maneiras, bem sabes que ele acabará por ter ciência sobre estas coisas não menos exatamente que ninguém [...] recuperando ele mesmo, de si mesmo, a ciência [...]” (PLATÃO, 2001, p. 64, 85 c-d).

Neste sentido, temos em Platão um destaque ao pensamento relacional (de relações extrínsecas), do qual a análise surge. Se estivermos empenhados em conhecer um objeto totalmente desconhecido, tudo o que temos são relações ‘possíveis’ que podemos estabelecer entre este objeto desconhecido e outros conhecidos. De modo que os pontos de partida da investigação serão sempre hipóteses, que se confirmarão ou não através das suas consequências. Deste modo, também segundo Jacob Klein (1992, p.254-255), surge, da análise de Platão, o outro sentido da palavra *axioma*, no sentido de *hipótese*.

### 6.2.2 A Matemática e a Dialética em Platão

Como já refletimos e apresentamos, para Platão, o Conhecimento Matemático e outras artes, sozinhas, não conseguiam se ocupar do Inteligível propriamente dito, dos seres inteligíveis superiores, tal seja: das Ideias. Estas só poderiam ser acessíveis mediante o ‘poder dialético da razão’ (MARIE, 1966, p.35). Uma vez que, para Platão, o primeiro lugar, a Ciência completa e perfeita é a Dialética.

O caminho dialético platônico trata da faculdade de ir, por regressão, de hipótese em hipótese ao princípio fundamental. Para chegar à ideia do Bem e mais alto conhecimento “que leva a um princípio an-hipotético (sic), ela deverá, partindo de uma hipótese e sem o auxílio das imagens utilizadas no primeiro caso, desenvolver sua pesquisa por meio exclusivo das ideias tomadas em si próprias (PLATÃO, 1965, p.100)”.

A Dialética é que expressa, para Platão, o método por excelência de ciência. Nas palavras de Marie (1966, p.34), para Platão, a Matemática relacionar-se-ia a essa ciência suprema do seguinte modo:

[a ciência suprema é aquela que trata do] Saber verdadeiro ou racional. Pode-se distinguir nele dois troços (sic): o primeiro é o daqueles <<seres inteligíveis inferiores>>, que são os seres matemáticos, o par e o ímpar, as figuras, etc.; eles são inferiores, bem que inteligíveis e despojados de qualquer elemento sensível, porque são colocados sem que qualquer justificação desta posta posição seja dada, enquanto <<hipóteses>> (*Rep.* VI, 510 c); o conhecimento que lhe corresponde chama-se <<conhecimento discursivo>> [...]: consiste num desenvolvimento do pensamento que, partindo dos seres postos no princípio, tira deles as consequências, o que se chama demonstração (*Ibid.*, 510 d). Estamos agora em condições de determinar a natureza e a função das matemáticas, às quais, sabe-se Platão atribuía uma grande importância: elas apreendem incontestavelmente um sector do inteligível (510 e); elas constituem, assim, a disciplina que permite adquirir os hábitos de pensamento convenientes, e apresentam-se, portanto, como uma <<propedêutica>> [...]; por conseguinte, não existe filosofia possível para aquele que não passou pela prática da matemática. [...] O último troço [...] é o dos <<seres inteligíveis superiores>>, quer dizer, das ideias; a diligência do conhecimento que lhe corresponde, [...], remonta de hipótese em hipótese, tendo cada uma delas a sua condição numa hipótese superior de que é consequência, até o momento em que o pensamento atinge, nesta regressão, aquilo que é o <<princípio de tudo>>, já não sendo ele mesmo hipotético [...].

Para Platão, a Matemática representa uma ‘ciência propedêutica’, o primeiro acesso ao mundo inteligível, situando-se, dentre as outras artes, como aquela que mais se aproxima da Dialética, a que melhor preparava o homem para ela e tendo seus pontos de partida, enquanto hipóteses. Para ele, a Matemática ocupa-se das Formas<sup>136</sup>; das Ideias quem se ocupa é a Dialética. Na perspectiva platônica, o que falta ao Conhecimento Matemático, para que possa ser rigorosamente científico, trata precisamente de um fundamento independente (anhipotético), aquele que não seja colocado.

Falta, à Matemática, uma compreensão adequada de seus elementos básicos, o que inclui o estado ontológico dessas entidades. Para Platão, por mais que uma pessoa conheça

---

<sup>136</sup> As Formas tratariam de exemplos perfeitos que habitam o mundo transcendente das Ideias. As Formas perfeitas que correspondem à ideia de triangularidade, por exemplo, são os triângulos perfeitos. As Formas ocupariam uma posição intermediária entre as ideias e as coisas do mundo físico.

Matemática ou Geometria, se ela não entender o estado ontológico das entidades em questão, ela não terá um entendimento real. E, não podendo defini-las, não consegue tecer afirmações existenciais e nem a caracterização ontológica adequada sobre elas.

O olhar crítico de Platão à Matemática está em estender, a ela, um entendimento sobre certas entidades abstratas complexas que fundamentam e explicam elementos de ampla variedade de coisas, mas não a compreensão ontológica, só proporcionada pela Dialética. À Matemática, de acordo com Platão, não se exige somente competência técnica, mas discernimento ontológico e a capacidade de ver como todo o domínio com que suas entidades trabalham se está inter-relacionada e tem relações com os domínios de outras disciplinas genuínas (MORAVCSKI, 2006, p.54-7).

Somente quando a alma eleva-se até a Dialética, apreendendo esse fundamento supremo e retorna a descer até as noções matemáticas, é que as verdades lhe são comunicadas. Para tanto, a verdade dessa ciência propedêutica, a Matemática, reside numa ciência superior: a Dialética. Deste modo, podemos inferir que os *princípios* da Matemática apresentarão um caráter puramente hipotético, na perspectiva platônica, mostrando que não podem explicar-se por si próprios e que devem vincular-se sempre a um princípio supremo que os justifique em certeza.

Nas palavras de Brunschvicg (2009), a função da Dialética consistiria em

[...] retomar as hipóteses das técnicas particulares e conduzi-las até seu princípio, toma posse do incondicional; e daí, por uma marcha que é inversa à da análise, forja uma cadeia ininterrupta de ideias que, suspensa no princípio absoluto, constituirá um mundo completamente independente do sensível, o mundo da *νόησις*. A filosofia da matemática de Platão, no seu grau mais alto e sob a sua forma definitiva será então a dialética (BRUNSCHVICG *apud* EUCLIDES, 2009, p.88).

Entendemos, a partir daí, que o método dialético toma, por auxiliares e ajudantes (o que pode ser assumido no sentido de Complementaridade), as Matemáticas e todas as artes, que Platão denomina de conhecimento discursivo, para a conversão da alma. Assim, inferimos, por exemplo, que a Geometria é do domínio da *διάνοια*<sup>137</sup> somente pelo lado prático se não iluminarmos os seus princípios à luz da Dialética. A partir desta percepção, Platão expõe seu entendimento sobre um novo caminho à Filosofia e à Filosofia Matemática e o incentivo à estruturação dedutiva sistemática que a ela devesse ser aplicada.

---

<sup>137</sup> É um termo usado por Platão para designar um tipo de conhecimento, particularmente conhecimento de assuntos matemáticos e técnicos. É o resultado, o processo ou a capacidade para o pensamento discursivo.

Integrando Filosofia e Matemática, num processo dinâmico e complementar que conduz ao conhecimento verdadeiro, Platão tenta instituir o seu método à ciência. De todo, Platão apresenta a Dialética dividindo-se em dois momentos sucessivos e complementares:

[...] por um lado, a <<dialéctica ascendente>> [...] que atinge as Ideias e remonta, pouco a pouco, até o Bem que, pela sua unidade e transcendência absoluta, é o fundamento de tudo (*Rep.*, VII, 510b; *Rep.* VII, 532 b-535 a ; *Fedro*, 265 d; *Sofista*, 253 b); por outro lado, a <<dialéctica descendente>> [...]; que deduz na qualidade de consequência do Bem a multitude de Ideias hierarquizadas, o dialéctico torna-se então comparável a um açougueiro capaz de cortar segundo as articulações naturais (*Fedro*, 265 d-e; *Político*, 262 a, 285 a; *Filebo*, 16c) (MARIE, 1966, p.36).

O sentido é de uma dupla marcha aplicada à Dialética, ascendente e descendente, sintética e analítica. No primeiro momento, o ponto culminante da síntese, as hipóteses se transformam em certezas. No segundo, o momento analítico, de onde parte, pois, de verdadeiros princípios e não de hipóteses erigidas em princípios.

Ademais, cabe destacar que,

O princípio último que a dialética deve intuir não pode ser o termo de *um* processo discursivo, visto que ele é o termo de *todos* os processos discursivos. Portanto, não há continuidade entre o remonte das hipóteses e a intuição do anhipotético; há uma ruptura tanto do procedimento como do conteúdo considerado. Não apenas se passa da ordem do discurso para a ordem da intuição, **mas a necessidade do que é intuído transcende a contingência das hipóteses particulares que levaram a ela.** Vemos, assim, aparecer claramente que o que preside a intuição do anhipotético é a descoberta, a partir de um caso que permanece sempre particular, de um tipo de ordem universal (ROGUE, 2007, p.105-6) [grifo nosso].

De todo, como já anunciamos, observamos que Platão não emprega diretamente o conceito *axioma* em sua reflexão quer sobre Dialética quer sobre o Conhecimento Matemático até então. Destacamos, sobretudo, que, ao referir-se ao *modus* operatório do pensamento matemático, em especial à Geometria, o que em nossa interpretação mais tarde vai assumir nomeadamente a terminologia *axioma*, no pensamento platônico tem o sentido interpretativo de *hipóteses* e não *princípios* como os matemáticos consideravam ou, de certo modo, passaram a considerar.

### 6.2.3 Reflexão sobre o significado de *axioma* em Platão

Em Platão, não temos dois, mas três planos a considerar: o primeiro, o da realidade sensível; segundo, o mundo das ideias; e terceiro, o mundo das leis ou princípios (relações matemáticas, basicamente, mas no sentido não quantitativo das matemáticas; isto é, lógica pura). É sobre este último que empreendemos uma interpretação do termo *axioma*, embora não haja citação explícita em Platão sobre esses planos.

Embora tenhamos interpretado, nos diálogos de Platão, um sentido indicativo de que os *axiomas* (da Matemática) tratam de *hipóteses*, principalmente quando ele expõe suas reflexões e crítica à Matemática, ao voltarmos nossa análise à teoria platônica das Formas (das ideias), em seus fundamentos e relacionamento com o próprio Conhecimento Matemático, começamos a evidenciar o que nos parece uma tensão relacionada a essa significação, conduzindo-nos, de outro modo, à interpretação indicativa de *axiomas*, assumindo o sentido de ‘verdades’. A reflexão que fazemos, a seguir, tenta elucidar melhor esse ponto de tensão.

O primeiro aspecto que nos chama a atenção refere-se a como era concebida a Matemática na Grécia e para Platão. Ela era admitida como ‘o’ modelo de ciência, inclusive para Platão. Ele tinha-a como exemplo de ciência, cujos objetos são elementos genuínos da realidade. Sobretudo, Platão combate a visão de que todas as ciências são meros conhecimentos práticos e de que elas tratariam apenas de fenômenos sensivelmente acessíveis. Platão observa que os matemáticos não questionavam a natureza de seus *princípios*. No entanto, ele, de certa forma, contesta essa natureza, embora conceba a Matemática como uma ciência que nos provê um entendimento genuíno (e a que melhor prepara para a Dialética), posicionando-a sempre num nível anterior (ou inferior) à Dialética.

Platão admira a Matemática e seu interesse centra-se na natureza de seus objetos. Daí sua crítica direcionada aos *princípios* que ela apresenta. Ele questiona esses *princípios*, seus ‘pontos de partida’ e identifica-os como *hipóteses*. No entanto, a crítica de Platão direciona-se à falta de explicação ontológica dos elementos do domínio que compõe a Matemática e a Geometria o que, desse ponto de vista, invalida que os matemáticos ‘conheçam’ verdadeiramente seus *princípios* e a ausência desses ‘conhecimentos’ inviabiliza tomar seus pontos de partida como *princípios*. Isso reafirma uma posição que atribui, aos *princípios* dos matemáticos, seus pontos de partida e, em nossa interpretação, aos seus *axiomas*, cujo sentido, para Platão, seria o de *hipóteses*.

Sobretudo, essa característica, de acordo com Platão, não prejudica qualquer tipo de trabalho com a Matemática, no entanto, neste aspecto, ela só nos é útil em sentido prático. Especialmente, para nós, é na explicação platônica sobre este ponto que se revela a tensão no significado do conceito *axioma*.

Platão, em sua teoria das Formas, afirma que os objetos matemáticos são entidades pré-existentes e independentes da nossa mente humana. Segundo Moravcsik (2006, p.276), “com essa concepção a matemática seria verdadeira e estaria relacionada ao funcionamento das entidades no espaço e no tempo mesmo que não houvesse nenhum sujeito cognoscente”.

Ele também entende que nós descobrimos essas entidades, teoremas e provas matemáticas e não as inventamos e nem são construções humanas. E as verdades matemáticas, em particular, expressam simplesmente relações universais e imutáveis entre as formas matemáticas. Neste sentido, elas já estão ‘lá’, esperando para serem descobertas por nós. Sobretudo, esse processo de descoberta que, em Platão, trata de memorização, não é tão simples.

Nossas descobertas são como descobertas empíricas, no sentido de que tomamos consciência de objetos que antes não sabíamos existir; por outro lado, tal descoberta só é possível depois de muito treinamento. Não é como um ato comum de travar um conhecimento direto. É mais como o discernimento da natureza de uma substância que não é diretamente acessível à experiência dos sentidos, mas sobre a qual ganhamos muitas informações, com respeito tanto à sua relação com o empírico como à sua relação com outras coisas reais que estão além da superfície da observação (MORAVCSKI, 2006, p.276).

Essa memorização só é possível com muito treinamento (somente possível ao ‘olho da mente’ adequadamente treinado). Entendemos que, se há a possibilidade dessa memorização, independentemente de entendimento ontológico, sobre os elementos e entidades matemáticas, como podemos negar que tais recordações de proposições sejam verdadeiras à matemáticas, (ou) sobre os *princípios* como a que se referem os matemáticos, (ou) sobre suas *hipóteses* de acordo com a crítica de Platão, enfim, que o sentido dos *axiomas*, na Matemática, seja o de verdade?

Se a Matemática já existe idealizada num plano distinto, se, de acordo com Platão, ela trata de elementos genuínos ou mais fundamentais da realidade e, se ela explica, indiretamente (mas explica quando recordados), os aspectos inteligíveis salientes das entidades no espaço e no tempo, de certo modo, esse aspecto lhe atribui, fortemente, uma característica atrelada às noções verdadeiras. Neste sentido, Platão, ao dizer que as ‘verdades

matemáticas' existem e podemos acessá-las, estando elas, segundo ele, num primeiro (outro) nível do entendimento humano, observamos que ele tende a interpretar os *axiomas* como verdades.

E, assim, o acesso a esse nível de conhecimento nos seria útil. De outro modo, porém, de acordo com Platão, mesmo utilizando, de modo prático, esse entendimento, não compreendemos plenamente o que estamos fazendo e como estamos trabalhando com a Matemática, sem que esse conhecimento seja suplementado pelo trabalho ontológico, pelo trabalho da Dialética. O sentido de verdades está, então, atrelado e condicionado (agora) a ela.

Observamos que, se, de um lado, Platão efetua uma análise reflexiva e crítica sobre o método matemático, atribuindo a este uma característica inusitada à época sobre o modo operatório (partindo de *hipóteses*) que revela, de certa maneira, uma crítica sobre suas 'verdades' e seus *princípios*, de outro lado, ao postular sua Teoria das Formas, sobre um processo de aprendizagem como resultado de reminiscência, ao defender uma perspectiva essencialista, esta, quando especialmente aplicada à Matemática, tende a reforçar a interpretação no sentido de 'verdades' aos seus pontos de partidas, seus *princípios*, por fim, aos *axiomas*.

Assim, podemos inferir que, em Platão, o sentido de *axiomas*, interpretado como *hipóteses*, refere-se ao vínculo do entendimento atrelado a não compreensão ontológica dos seus elementos genuínos (que ele não atribui como possuídos pela Matemática), mas ele também entende que a ausência dessa compreensão ontológica das entidades e formas matemáticas não inviabiliza o Conhecimento Matemático, não invalidando que os 'pontos de partida' da Matemática sejam tomados (principalmente, pelos matemáticos da época) numa perspectiva de 'verdades', enfim, que os *princípios* ou *axiomas fundamentais* da Matemática tratem de conhecimentos verdadeiros já que, para Platão, isso só coloca o Conhecimento Matemático em um nível distinto de entendimento.

De acordo com Silva (2007, p.37), para Platão, "o mundo real apenas reflete imperfeitamente um mundo puro de entidades perfeitas, imutáveis e eternas - os conceitos e termos matemáticos entre elas". Seguindo esta orientação de pensamento, os conceitos e termos têm o sentido de verdades, de conhecimento verdadeiro e, portanto, o significado de *axiomas* teria o sentido de verdades em Platão.

Como apontamos inicialmente, Platão inova ao promover um processo de simbiose entre o pensamento filosófico e o pensamento matemático, pois, sem dúvida, esse movimento



trouxe consequências tanto aos fundamentos da Matemática como para a Filosofia, gerando, inclusive, um processo tensional o qual tentamos destacar.

Não entendemos que esse movimento de simbiose entre a Filosofia e Matemática possa ter sido transposto, ou tenha promovido tão intensa e intencionalmente no pensamento platônico, no mesmo sentido de uma simbiose entre a Linguagem e a Matemática, ao pensamento platônico. Mesmo porque a pretensão que dominava Platão, enquanto sujeito ontológico, era uma disputa com os sofistas. Neste sentido, no pensamento de Platão, havia sempre a necessidade de mostrar a existência de um conhecimento verdadeiro, anterior à mente humana. Evidenciamos a teoria de Platão como resultado de um processo tensional entre o sujeito ontológico e o sujeito epistemológico platônico.

No diálogo *Crátilo*, Platão questiona se a língua é um sistema de signos arbitrários (convencionalismo) ou se as palavras têm uma relação intrínseca (naturalismo) com as coisas que elas significam e não toma claramente partido entre os convencionalistas e os naturalistas. O interesse essencial de Platão era ver se a Linguagem serve para fins, principalmente, de comunicação e retórica, como os sofistas acreditavam e tentaram argumentar ou se a Linguagem era essencial para a cognição e conhecimento objetivo.

O aspecto que nos interessa em *Crátilo* trata que Sócrates conduz a Hermógenes (convencionalista) admitir que qualquer atividade proposital - mesmo os esforços de um retórico ou de um simples mentiroso - é objetivamente limitada se quisermos ser bem sucedidos. Platão diz, nesta direção, que a Forma do nome (*onomatos eidos*) ou essa ideia é o que permite superar as diferenças de denominação de língua para língua. Essa Forma da palavra pertence a cada coisa e será, pois, definida em relação à Forma da Coisa em questão. E, ainda, ele traça a relação do nome com as coisas em *Crátilo* por analogia com a pintura – a representação.

Podemos distinguir, no diálogo em *Crátilo*, o esboço de uma semântica platônica que repousa no conceito de nome ideal. Nesse diálogo, Platão estabelece uma analogia com o artesão de uma tecelagem, que tem a ideia da lançadeira ideal e propõe a ele um tipo ideal de nome. Ele ainda conjectura entre nomes particulares e o nome Ideal:

A analogia compara modelo em um trabalho artesanal e modelo para um nome, no ato de nomear as coisas. O tipo ideal é o legislador, que, na origem, fixaria os nomes. Assim como o artesão que quer produzir um objeto, deve escolher as ferramentas adequadas, também o legislador deve, por um lado, contemplar o nome ideal, e por outro, escolher o nome mais conveniente, em relação ao nome ideal. O

conceito de nome ideal (aquele que o legislador contempla) é solidário da teoria das formas (NEF, 1995, p.15).

Nef (1995, p.17) informa que “até se disse que o *Crátilo* apresentava explicitamente a questão do laço entre o significante (o nome ideal) e o significado (a ideia da coisa)”. De modo que esse diálogo conteria os prolegômenos à procura da essência da Linguagem e, em nosso estudo, entendemos os prolegômenos no sentido de uma interpretação semiótica, mas, ainda muito remota, do ponto de vista do Conhecimento Matemático. Sobretudo, é o olhar filosófico de Platão que instiga a reflexão sobre aspectos que dizem respeito à relação entre Linguagem e Conhecimento. Mas é, sem dúvida, relevante que ele busca e estabelece, de certa forma e implicitamente, um programa de filosofia racional da Linguagem.

O máximo que podemos extrair de Platão é que, como as realidades sensíveis são compostas de cópias de objetos ideias, a Linguagem, em uma óptica platônica, trataria de um misto composto de objetos ideias, como nome ideal (NEF, 1995, p.14). O platonismo conduziria ao entendimento de que devemos buscar a exatidão da denominação, a correção da relação entre as palavras e as coisas.

Temos a semântica da palavra ideal, fundada simultaneamente com base na teoria das Formas e na concepção referencial dos nomes. De modo que, no campo matemático, seria uma Dialética ascendente que nos permitiria atravessar as cópias dos seres matemáticos, para se elevar até a contemplação dos números ideias. “A Forma da palavra que pertence a cada coisa será, pois, sempre, definida em relação à Forma da Coisa em questão” (BACON *apud* NEF, 1995, p.16).

É no *Sofista* que observamos três progressos importantes no que se refere à Filosofia da Linguagem em Platão. Temos, nesse diálogo, a análise da proposição (*logos*), o esboço de uma teoria da referência e uma doutrina das relações entre pensamento e Linguagem. E, como no *Crátilo*, a pesquisa sobre os nomes tem um alcance epistemológico. O diferencial em Platão e ponto sobre o qual a linguística moderna lhe dá razão trata de ele admitir uma oposição entre ‘verbo’ e entre ‘nome’ no enunciado, agindo diferentemente de Aristóteles. De acordo com Nef, essa oposição entre as duas doutrinas foi evidenciada por Geach (*apud* NEF, 1995, p.19).

A passagem à teoria dos dois termos [sujeito e predicado] por Aristóteles foi um desastre comparável apenas à Queda de Adão. Ele perdeu a intuição platônica de que toda proposição predicativa se decompõe em duas partes

heterogêneas; ao contrário, ele trata a predição como um apego (*horos*) de um termo a um outro termo.

Sobretudo, em Platão, vemos que o caráter de verdade ou de falsidade não é das coisas, mas do discurso. Um discurso nunca será sobre nada e sempre terá uma qualidade, este de ser verdadeiro ou falso. Desse modo, extraímos de Platão que tanto pensamento como discurso passa a ser a mesma coisa, exceto que é um diálogo interior e silencioso da alma consigo mesma. Neste ponto, o pensamento platônico faz em certa medida uma aproximação da Linguagem ao processo cognitivo, mas ele não realiza ou não caminha no sentido de uma reflexão que busque conexões entre a Linguagem, a Matemática e o desenvolvimento do nosso pensamento. Esses tratam de aspecto que reacenderão na Modernidade questionamentos e desencadearão novas interpretações. Acima de tudo, mesmo Platão desenvolvendo no *Sofista* uma definição de *logos*, concebida como discurso da alma, ainda a Linguagem figura como instrumento deficiente ao fator conhecimento, ao processo cognitivo.

E, talvez, também seja por isto e com base nestas considerações que perpassasse no pensamento de Platão uma possibilidade de interpretarmos os *axiomas* enquanto possibilidades de serem hipóteses à Matemática, inclusive, encontramos inferência em *Crátilo* de que a Matemática não explica o mundo, mas constrói teorias. Todavia não podemos afirmar que intencionalmente possa ser encontrada, no pensamento platônico, uma interpretação e apresentação mais apropriada sobre a relação entre a Linguagem e a Matemática. Por isso nos atrevemos a dizer ter identificado um movimento de tensão no próprio entendimento de Platão sobre esta relação. Mas interpretamos que sem dúvida foi o processo de simbiose entre a Filosofia e a Matemática que conduz à essa possibilidade interpretativa de hipótese ao termo *axioma*.

O estranho (OTTE, 2014)<sup>138</sup> é que a própria Matemática foi, desde os tempos de Platão, fortemente associada com a Filosofia e com uma noção de verdade metafísica. E Platão não considerava a Matemática como sendo meramente instrumental ou apenas uma maneira conveniente de apresentar as coisas. Para Platão, as entidades matemáticas constituem um domínio objetivo independentemente e autossuficiente, ao qual temos acesso pelo entendimento e, como o mundo real apenas reflete imperfeitamente um mundo puro das entidades perfeitas, imutáveis e eternas, semioticamente falando, precisamos de sinais indiciais, diretamente apontando para as coisas para garantir a objetividade do raciocínio

---

<sup>138</sup> Manuscrito *Axiomas, Leis naturais, Regularidades e Pensamento hipotético-dedutivo* não publicado, de 17/01/2014.

matemático. Este nos parece já era o ponto de vista de Platão ao situar as Formas ocupando uma posição intermediária entre as Ideias e as coisas do mundo físico. E, para Platão, a Matemática se ocupa das Formas e não das Ideias.

Sobretudo, Otte (2014)<sup>139</sup> nos diz que

O Platonismo é a crença de que a matemática reflete a natureza íntima do universo em termos de verdades absolutas e imutáveis. O mundo é, e sempre foi, violento, sujo e em permanente mudança. Em contraste: Os seres humanos estão à procura de clareza, estabilidade, orientação e auto-identidade. O Platonismo foi uma primeira reação a essas situações contrastantes. O Platonismo ensina que a diversidade, a mudança e movimento não são reais, são apenas aparências.

Platão não foi um matemático, mas seu pensamento foi de fundamental importância ao estereótipo que a Matemática veio a assumir historicamente. Muito embora poucos aceitem seriamente a teoria de um reino puro de Ideias, ou a teoria de reminiscência, a imagem da Matemática como ciência de um domínio, fora desse mundo ao qual ascendemos pelo pensamento, é ainda uma ‘filosofia’ ou crença, natural entre alguns matemáticos. Infelizmente!

### 6.3 Axioma em Aristóteles (~384 – 322 a.C.)

Aristóteles (~384- 322 a.C.) é considerado um dos maiores discípulos de Platão; no entanto, Cassin (1997) nos informa que só podemos compreender Aristóteles no triângulo formado por sua dupla oposição a Platão e aos sofistas. É nesse confronto que se constitui o ponto de partida da investigação sobre este filósofo e sua teoria. De modo que ele se opõe tanto a um mundo e verdade transcendentem quanto ao relativismo.

Seu pensamento rejeita a concepção da Dialética e da Retórica, postas de lado em Filosofia, ou reduzida a ser apenas instrumento a serviço dela. Em Aristóteles, a Dialética perde o *status* (de prover o conhecimento verdadeiro) adquirido em Platão, sendo definida, em *Tópicos* (I, 100a18), como “um método que permitirá fazer silogismos a partir de opiniões aceitas sobre qualquer tema proposto e também não dizer nada de contrário a uma afirmação que temos que defender”.

Se Platão prioriza a busca pelo conhecimento e pela verdade como elevação divina, uma aproximação com Deus, podemos dizer que, em Aristóteles, o conhecimento e a verdade

---

<sup>139</sup> Manuscrito orientativo *Piaget as a Platonist?* Não publicado, de 19, abril, 2014.

se humanizam, tornando-se ‘demasiadamente humanos’. Em Aristóteles, o conhecimento é manifesto por proposições e a condição de verdade ou falsidade do conhecimento pertence à proposição, ou seja, à Linguagem ou ao discurso. Mas o critério que estabelece os valores de verdade ou falsidade de uma proposição está em seu caráter de correspondência ou não do que é afirmado sobre o estado das coisas. Assim, a medida da verdade, ou sua verificação, é exterior a ela; estaria presente no ser, na ação, no objeto e não no pensamento ou discurso produzidos sobre eles. Em *Categorias* (14b 16-23), encontramos a definição aristotélica de verdade:

Se, com efeito, o homem existe, a proposição pela qual nós dizemos que o homem existe é verdadeira e, reciprocamente, se a proposição pela qual nós dizemos que o homem existe é verdadeira, o homem existe. Contudo, a proposição verdadeira não é de modo algum causa da existência da coisa; ao contrário, é a coisa que parece ser, de algum modo, a causa da verdade da proposição, pois é da existência da coisa ou da sua não existência que dependem a verdade ou a falsidade da proposição (*apud* BARBOSA FILHO, 2003, p. 234).

Nesta análise sobre a verdade, repousa sua posição empirista ao conceber o nosso conhecimento e sobre o sentido da verdade. Na constatação da verdade aristotélica, é exigida a verificabilidade empírica. Segundo esse filósofo, primeiro deve existir o sentido de equivalência entre o Ser – objeto - e o verdadeiro. E segundo, o Ser – objeto – é sempre primeiro em relação à proposição. Isso quer dizer que não é a verdade de uma proposição que seja a causa da realidade, mas, justamente, a realidade é a causa da verdade de uma proposição.

Para Aristóteles, não é mais a Dialética que estabelece os princípios primeiros das Ciências; no entanto, cabe-lhe a função de ‘examinadora’ desses princípios já que cada Ciência nada pode dizer sobre seus princípios indemonstráveis, a partir dos quais, ela comprova seus teoremas.

Contrariando o ponto de vista platônico, Aristóteles refuta o dualismo entre sensível e inteligível, entre corpo e alma, a ideia da imortalidade da alma, de um Bem absoluto e transcendente. Não admite a existência de um reino excelso de Ideias e Formas matemáticas como defendido por Platão. Por exemplo, Aristóteles toma a felicidade como fim imanente, substituindo a dualidade sensível-inteligível pela distinção entre forma e matéria. A Matemática, deste modo, não teria o domínio distinto de qualquer ciência empírica. O que a distingue dessas ciências é o modo de tratar os objetos do mundo, haja vista que ela os

considera, exclusivamente, sob o aspecto formal matemático (a forma geométrica ou aritmética).

De fato, a matemática se ocupa apenas com as formas: ela não tem a ver com os substratos; pois ainda que as propriedades geométricas sejam propriedades de um certo substrato, não é enquanto pertencentes ao substrato que ela se mostra (*Segundo Analíticos*, I, 13, *apud* SILVA, 2007, p.44).

Os objetos matemáticos seriam entendidos como um tipo de abstração, não possuindo existência separada dos seus objetos empíricos, tratando especificamente dos aspectos destes. Entretanto, tal como Platão, de acordo com Stirn (2011), no plano epistemológico, admite que o Conhecimento só possa ter como objeto o imutável; caso contrário, seríamos arrastados nas águas do rio heraclítico e, simultaneamente, dissolvidos pelo relativismo dos sofistas. E, ao defender as Formas imanentes como substitutos das Ideias transcendentais de Platão, observamos que estas figuram (como em Platão) invariantes, estáticas, representam o que há de permanente na natureza em incessante mudança.

Aristóteles utiliza, pela primeira vez, a expressão lógica ou expressão semântica da verdade. A relação aristotélica entre enunciado e coisa, proposição e Ser, é caracterizada como de correspondência, embora também traga embutidos os conceitos de adequação e conveniência.

O nosso conhecimento, para este filósofo, forma-se e vai se enriquecendo por acúmulo de informações advindas de todos os graus, sejam eles: sensação, percepção, imaginação, memória, linguagem, raciocínio e intuição. Não existe uma ruptura entre o conhecimento sensível e o intelectual, o que temos é uma continuidade entre eles.

Ao desenvolvimento do nosso conhecimento, Aristóteles irá destacar o silogismo e este é o que fundamenta a Lógica aristotélica, o método pelo qual conhecemos. Para Aristóteles, a Lógica era denominada com o termo ‘analítica’ e explica o método com que, partindo de uma conclusão dada, esta se resolve justamente nos elementos de que deriva, isto é, nas premissas de que procede e que, portanto, constituem o seu fundamento e a justificam. Vejamos um exemplo clássico de silogismo:

- (1) Se todos os homens são mortais
- (2) E, se Sócrates é homem
- (3) Então, Sócrates é mortal

Assim, a analítica concebe, basicamente, a doutrina do silogismo o qual constitui, de fato, o núcleo fundamental e o eixo em torno do qual giram todas as outras figuras do que chamamos de Lógica aristotélica.

Para esse filósofo, toda ciência trata de um corpo de conhecimentos que possui certas propriedades e certa estrutura. O conhecimento científico vai diferir dos outros tipos de conhecimento por dois aspectos: ser demonstrativo e por fornecer a causa das coisas que conhece. Assim, uma ciência é, portanto, “um sistema dedutivo de proposições que repousam sobre princípios indemonstrados, que exhibe as causas dos objetos de estudo, os quais pertencem a um mesmo gênero” (PELLEGRIN, 2010, p.22).

Desta maneira, Aristóteles atribui à ciência uma intenção explicativa, na qual o conhecimento científico figura como o conhecimento da causa, do ‘porquê’. De modo que “não dizemos conhecer cada coisa a não ser quando consideramos saber aquilo que é a sua causa primeira” (*Phys.*, II, 192b). E um conhecimento só é verdadeiramente científico se, ao se descobrir sua causa, ele mostrar a necessidade da sua ação, ou seja, a causa como sendo a razão do efeito, ou então seria o mesmo que não explicar nada em absoluto (STIRN, 2011, p.27).

Em sua preocupação com a constituição de conhecimentos seguros à ciência, ele elabora seu *Órganon*<sup>140</sup> e é absolutamente certo de que a Lógica ocidental, no seu conjunto, tem nele suas raízes.

Nele, Aristóteles classifica três gêneros de ciências: as teóricas, as da ação e as da produção (aqui situa a Matemática). Entretanto, através delas, só chegamos a princípios secundários e derivados. Elas servem como meios e estão subordinadas aos fins de outras duas ciências que ele denomina ‘arquitônicas’, sejam elas: a metafísica (para as ciências teóricas) e a política (para as ciências da ação e da produção); que, por sua vez, dão-nos os primeiros princípios e as primeiras causas que a elas estão subordinadas.

Ele classifica a Matemática como ciência teórica e, ao dirigir sua crítica a ela, embora o pensamento de Aristóteles respeite a ideia de um processo de simbiose entre a Matemática e a Filosofia que interpretamos começar em Platão e, principalmente,

---

<sup>140</sup> *Órganon* - é o nome tradicionalmente dado ao conjunto das obras de lógica do filósofo antigo Aristóteles (384 ou 383 - 322 a.C.). Significa "instrumento", porque os aristotélicos consideravam que o raciocínio (principal assunto da lógica) era um instrumento para a filosofia, ou seja, algo que precisava ser dominado antes de se poder produzir conhecimento ou ter uma prática de vida filosófica.

expressando-se também numa simbiose entre Matemática e metafísica, em certa medida, ele promove uma ruptura com esta perspectiva. Para Cattanei (2005, p. 39):

Aristóteles rompe *um* dos elos da cadeia que, até ele, tinha ligado matemática e filosofia. Um elo de ouro, que unia uma a outra *in excelsis*, na esfera mais digna e alta da realidade: mas não, decerto, o único elo. Em outro lugar, mais embaixo, permanecem fragmentos da antiga corrente, que continua a ligar os dois mundos põe ele separado no campo da substância supra-sensível.

Sobretudo, para Aristóteles, os entes matemáticos não existem separados dos sensíveis (como em Platão). Os entes matemáticos seriam mais do tipo ‘intermediários’, são criaturas livres “de alguma forma capazes de sobreviver à contradição de ser um pouco mais do que entes físicos, um pouco menos do que realidades metafísicas (CATTANEI, 2005, p. 461)”. Sobretudo, ele é convicto de sua existência, contudo o ser dos entes matemáticos não é autônomo, ‘separado’ daquele a que se refere. Este é o contraponto mais forte do pensamento de Aristóteles em relação aos que o sucederam. Aristóteles faz nascer, nos entes matemáticos, a necessidade de ancorar-se na própria realidade, em alguma coisa que, indubitavelmente, exista, seja ela a substância sensível.

Neste sentido, destacamos que todo o trabalho de Aristóteles se desenvolveu em busca de uma terceira via de pensamento, que pudesse situar-se entre o fluxo heraclídico e a ideia platônica imutável, demasiadamente separada do sensível (STIRN, 2011).

Segundo ele, obtemos os entes matemáticos ‘por abstração’ dos sensíveis. Abstração que diz respeito a um processo de ‘separação’ lógica, certamente, operada pelo pensamento: “que não comporta, porém, a produção, por parte do pensamento, do ser daquilo que é separado (CATTANEI, 2005, p.462)”. Os entes matemáticos, neste sentido, existem *em potência* nas coisas sensíveis, passando ao ato, devido à ação ‘abstrativa’ do pensamento.

De forma que, em seu entendimento, reforça a ideia de que a ciência difere da percepção e da experiência na medida em que se move na esfera do universal, não do particular. Mas, por outro lado, a ciência supõe a percepção e, portanto, o corpo. E, por mais admirável que ela seja, é, sobretudo, humana. “Humana, demasiado humana, a matemática necessita de objetos à altura de suas operações e mensurações” (CATTANEI, 2005, p.45).

De acordo com E. W. Beth (1950, p.27), “foi Aristóteles [...] quem apresentou uma teoria da ciência que, nos séculos posteriores, veio a orientar e até dominar o pensamento filosófico e científico”. E, sobretudo, é a partir do pensamento aristotélico que, ao termo



*axioma*, será consolidado o sentido interpretativo de ‘verdades’ inquestionáveis e indemonstráveis.

### 6.3.1 A produção de conhecimento e sua relação com os *axiomas* em Aristóteles

São traços fundamentais na constituição do pensamento de Aristóteles, para as ciências, o espírito de observação e a sua índole classificatória, haja vista seu interesse natural pelas pesquisas biológicas. Fato destacado quando, em *Sobre a Filosofia* (PESSANHA, 1987, p. 13-14)

[...] apresenta uma concepção cosmológica de cunho finalista e teológico; mas, ao contrário do que propunha Platão, o universo é aí explicado não à semelhança de uma obra de arte — resultado da ação de um divino artesão, o demiurgo —, e sim **como um organismo que se desenvolve graças a um dinamismo interior, um princípio imanente que Aristóteles denomina "natureza"** [grifo nosso].

Deste modo, seu pensamento se contrapõe ao matematismo que dominava a academia de Platão. Contudo, sua epistemologia, apresentada no livro I, *Segundo Analíticos*, é uma descrição normativa de ciência como um corpo organizado de saberes, deve muitíssimo ao modelo da ordem geométrica.

Em *Segundo Analíticos*, ele nos aponta que o modo pelo qual o homem produz conhecimento das coisas trata-se de um processo indutivo-dedutivo, no qual:

O método propriamente científico proposto por Aristóteles é constituído de duas etapas: [1] o cientista induziria princípios explicativos dos fenômenos e objetos observados; e [2] deduziria afirmações a partir de premissas que incluem esses princípios. À primeira etapa dá-se o nome de indução, enquanto que a segunda chamamos dedução (PELLEGRIN, 2010, p.52).

O primeiro momento, o da indução, possibilita remontar aos princípios e, contrariamente ao pensamento platônico, nós não possuímos conhecimento inato desses princípios. Refere-se a um processo que vai de constatações particulares a conclusões gerais (quase que um silogismo invertido), mas a generalidade obtida não tem caráter necessário e não apresenta a razão daquilo que ela enuncia (não sendo, assim, demonstrativa). O processo indutivo mostra-se indispensável para preparar o silogismo demonstrativo. “É impossível conhecer o universal de outro modo a não ser pela indução” (*Anal. Seg.*, I, 18, 81a).

Certamente, a sensação, que tem por referência o individual, não é ciência, que se refere ao universal. Mas os *Segundos analíticos* descrevem as etapas que permitem passar da sensação ao conhecimento universal. Pela memória, e assim de modo diferente dos outros animais, os homens chegam a imagens que persistem, se superpõem, e acabam formando noções cada vez mais gerais, até os princípios indemonstráveis de toda a demonstração (STIRN, 2011, p.34).

O momento da indução, em nossa interpretação, tem relevância ímpar para compreendermos o sentido dos *axiomas* e como chegamos a eles, princípios primeiros e indemonstráveis, de acordo com Aristóteles.

Já no segundo momento desse processo, temos revelada a importância que Aristóteles dá à demonstração, pois, para ele, toda ciência é silogística. O silogismo é, para Aristóteles, “um discurso pelo qual, estabelecida certas coisas, outra coisa resulta necessariamente devido a esses dados apenas” (*Primeiros analíticos* I, 1, 24b18).

Para Aristóteles, quando afirmamos ou negamos alguma coisa, quando estamos a julgar e formar proposições, ainda não estamos raciocinando. Nem mesmo quando formulamos uma série de juízos ou ao classificarmos uma série de proposições desligadas entre si, não estamos raciocinando. Também na definição de uma proposição e tendo em mente o sentido que Aristóteles atribui à verdade, observamos três características dessa definição (SCHIMDT, 2009, s.p):

- a) Deve-se levar em conta a separação entre os níveis proposicional e ontológico;
- b) A prioridade do nível ontológico sobre o lógico ou discursivo;
- c) A possibilidade de colocar os dois níveis em correspondência.

Só estamos raciocinando quando passamos de juízos ou de proposições a proposições entre as quais haja determinados nexos e são, de certo modo, umas as causas das outras, com as primeiras sendo antecedentes e as outras consequentes. De maneira que não temos raciocínio se não houver umnexo, uma consequência. Seria o silogismo, para Aristóteles, o raciocínio perfeito, em que a conclusão a que chegamos é, de fato, a consequência que brota, necessariamente, do antecedente (REALE, 1997).

O silogismo enquanto tal mostra a própria essência do raciocínio, a estrutura da dedução, prescindindo, sobretudo, do conteúdo de verdade das premissas. Desse modo, ele destaca a forma de silogismo que, além da correção formal da dedução, considera também o valor de verdade das premissas: o silogismo ‘científico’ ou ‘demonstrativo’.

Ele via no silogismo um instrumento científico por excelência uma vez que nele a explicação é possibilitada pela demonstração. Ele observa que:

O que torna um silogismo demonstrativo é, além de sua validade formal, as qualidades de suas premissas: se as premissas forem simplesmente opiniões aceitas por todo o mundo ou por algumas pessoas notáveis, teremos um silogismo dialético. Para que o silogismo seja científico, **as premissas têm de ser verdadeiras**, anteriores à conclusão, mais bem conhecidas que ela e causas da conclusão (PELLEGRIN, 2010, p.60) [grifo nosso].

Reforça, deste modo, nossa interpretação de que os *axiomas*, enquanto premissas primeiras, tratariam de verdades. Relacionado ao conhecimento científico, ele está tratando de um tipo bem específico de silogismo, que nomeia de **silogismo científico**, cuja característica está em ser demonstrativo. E só é demonstrativo, visto que **parte sempre de premissas verdadeiras e primeiras** ou, ainda, de premissas tais que o conhecimento que temos delas tem, ele mesmo, sua origem em premissas primeiras e verdadeiras (*Top.*, I, 1). Sobre isso nos aponta Mignucci (*apud* REALE, 1997, p. 126):

O procedimento silogístico próprio da ciência chama-se demonstração; trata-se de uma classe particular de silogismo, que se diferencia deste não pela forma, pois, de outro modo não se lhe poderia aplicar com verdade o nome de silogismo, mas pelo conteúdo das premissas utilizadas. Na demonstração, as premissas devem ser sempre verdadeiras, ao passo que não é necessário que assim seja o silogismo como tal, porque neste último só interessa determinar se certo conseqüente deriva ou não das premissas estabelecidas, pelo simples facto de terem sido estabelecidas, independentemente do valor de verdade que possam ter. Em contrapartida, na demonstração, por esta ser o procedimento que conduz à ciência do conseqüente, a saber, se o conseqüente é verdadeiramente tal ou não, há que empregar um antecedente verdadeiro, pois só do verdadeiro se deriva necessariamente o verdadeiro.

A ciência compreenderia, para Aristóteles, além da correção do procedimento formal, a verdade do conteúdo das suas premissas. Por ‘verdade’, Aristóteles entende a adequação ou acordo do discurso e de seu referente, do conhecimento e de seu objeto, da inteligência e da coisa. De modo que “o falso e o verdadeiro não estão nas coisas, mas no pensamento” (*Metafísica*, 1027 b).

Nesta perspectiva, explica-nos Pellegrin (2011, p.59) que

Aristóteles deixa claro (cf., por exemplo, *Segundos analíticos* I, 2) que possuir a ciência de alguma coisa é, a um só tempo, possuir a demonstração e conhecer a causa dessa coisa, duas descrições que convergem, porque no silogismo o termo médio é a causa da conclusão. Aristóteles dá o exemplo dos dois seguintes

silogismos: tudo o que não cintila é próximo, os planetas não cintilam, os planetas são próximos (isto é, mais próximos que outros corpos celestes e sobretudo que as estrelas fixas). Esse silogismo não é científico, porque o termo médio – não cintilar – não é a causa da proximidade dos planetas, já que não é porque os planetas não cintilam que eles estão próximos, mas é porque são próximos que não cintilam. O silogismo científico seria: Tudo o que é próximo não cintila, os planetas não cintilam, os planetas são próximos. O termo médio – ser próximo – é a causa do fato de que os planetas não cintilam: eles não cintilam porque são próximos (*Segundo analíticos* I, 13).

Ainda observamos, sobre esta questão fundamental em *Analíticos Segundos* (A 2, 71 b 9-25), a seguinte reflexão:

Pensamos que temos ciência de alguma coisa [...] quando julgamos conhecer a causa em virtude da qual é a coisa, que aquela é justamente causa desta coisa e que não é possível que isto seja de outra maneira. Por conseguinte, é impossível que aquilo de que há ciência em sentido próprio se apresente de maneira diferente de como é. Ora se há outra maneira de ter ciência depois [alusão ao conhecimento intuitivo com que apreendemos os primeiros princípios]; por agora, diremos que ‘ter ciência é saber mediante demonstração’. Chamo demonstração ao ‘silogismo científico’; entendo por científico o silogismo em virtude do qual, pelo simples facto de o possuir, temos ciência. Ora se nos propusermos ter ciência (isto é, conhecer a causa), ‘é necessário que a ciência demonstrativa dimanhe de *prótases* verdadeiras, primeiras, imediatas, mais conhecidas e anteriores, e causas das conclusões’. Desta maneira os princípios corresponderão também ao demonstrado. Na realidade, o silogismo subsiste também nestas condições, ao passo que a demonstração não pode sem elas existir, pois não geraria ciência (REALE, 1997, p.126-7).

Deste modo, também podemos destacar que o aspecto característico ao silogismo científico refere-se a que este deve produzir um resultado ‘verdadeiro’. A própria concepção aristotélica de ciência impõe um sentido de verdade aos *axiomas*.

As ciências teóricas divididas em teologia, matemáticas e física são, de acordo com Aristóteles, as que irão satisfazer mais completamente as condições de ciência apresentada por Aristóteles.

Dentre as três ciências teóricas, ele tece algumas reflexões sobre as especificidades do Conhecimento Matemático. Para ele, a Matemática é assunto de especialistas (*Metafísica*, Λ, 8, 1073 b 1-17). E, de acordo com Stirn (2011, p.45), em oposição a Platão

[...] que havia colocado na entrada de sua Academia esta advertência – “Não entre aqui se não for geometra” – é flagrante: as matemáticas não possuem um papel central, ou iniciático (preparar a alma, encerrada na caverna das coisas sensíveis e prisioneira do corpo, para ascender até as ideias supra-sensíveis). As matemáticas são apenas uma das três grandes ciências teóricas, sendo a teologia “a mais alta”.

Aponta, neste sentido, para a existência da Matemática aplicada (óptica, harmonia, astronomia) cujos objetos estão aludidos na matéria em movimento e a da Matemática pura, que tem por objeto seres imóveis e imutáveis (números e figuras). Relacionado a esta última, sobretudo, opõe-se a Platão, por rejeitar uma concepção de números ou de grandezas geométricas que tenham existência própria e independente do sujeito cognoscente. Os objetos desta Matemática não são separados a não ser por abstração. E, neste ponto, destacamos que Aristóteles, em certa medida, introduz ao que compreendemos como pensamento diagramático à Matemática.

Segundo este filósofo, na Matemática pura, abstraímos, do sensível, figuras e corpos, qualidades e quantidades; entretanto, tal abstração não implica que esses objetos sejam reduzidos a uma representação psicológica. E, embora a abstração resulte de uma operação intelectual, o Conhecimento Matemático obtido converge sempre do conhecimento do real. Para Stirn (2011, p.45)

O lugar preponderante concedido à abstração (*aphaire*) faz Aristóteles distanciar-se do inatismo platônico. “Os físicos falam da figura do Sol, perguntam-se se a Terra e o Sol são esféricos ou não” (*Phys.*, II, 2193 b). A diferença entre os matemáticos e os físicos vem do fato de estes separarem (abstrair, isto é separar) as figuras dos corpos e do movimento, enquanto aqueles consideram as propriedades geométricas como atributo de um corpo particular.

Dentre as ciências teoréticas, temos no processo de abstração uma especificidade que se aplica à Matemática. O ponto de partida desse conhecimento repousa em *princípios* que, para ele, referem-se a verdades cuja existência é impossível demonstrar (*Anal. Seg.*, I, 10, 76 a), sendo que, a partir desses, são desencadeadas todas as proposições. Ele, segundo Stirn (2011), distingue como princípios: as *definições*, as *hipóteses* e os *axiomas* comuns a toda ciência.

No entanto, destacamos que, em determinadas passagens, Aristóteles nos conduz a entender os *axiomas*, no sentido de *postulados*, como premissas que sejam colocadas de início. Informam-nos que, para ele, diferentemente das *definições* e *hipóteses*, os *axiomas* nada nos ensinam sobre a realidade em si, diriam apenas a condição do discurso dotado de sentido e do diálogo.

Temos de dizer se cabe a uma ciência ou a diferentes ciências a investigação das verdades na matemática de axiomas e das substâncias. É manifesto que a investigação delas cabe a uma ciência, a saber, a ciência do filósofo; pois essas

verdades valem para tudo o que é, e não para algum tipo especial de coisa em separado dos outros – todos os homens as usam, pois elas são verdadeiras do ente enquanto ente (Γ 3, 1 005a 19-24) (ARISTÓTELES *apud* BARNES, 2009, p.109).

Indicam, de certo modo, que os *axiomas* possam ser investigados ou demonstrados. Segundo Aristóteles, “não se pode falar, opor-se no debate, a não ser que se esteja de acordo quanto a este assunto, bem como quanto ao significado dos termos empregados” (STIRN, 2011, p.46). Assim, *axiomas* teriam o mesmo sentido de *postulados*. No entanto, ao analisar mais aprofundadamente os *axiomas*, ele deixa claro o atributo de ‘verdade’ que atribui a eles.

Observamos que, para ele, o princípio da não-contradição<sup>141</sup>, em particular e as leis da Lógica (e para Aristóteles no Livro Gama, a metafísica é descrita como sendo lógica), em geral, são *axiomas* e não estariam ligados a nenhum tópico em particular. Ele entende que *axiomas* seriam estudados pela metafísica e esta trataria do estudo de conceitos e ‘verdades’, indiferentes ao tema, de conceitos inteiramente abstratos que pudessem ser aplicados a todo e qualquer assunto e de verdades inteiramente gerais.

Ao expor sua teoria, Aristóteles figura como um dos primeiros a proceder à análise mais específica sobre o termo *axioma*. Em sua obra, ele fala, em primeiro plano, dos ‘*axiomas comuns*’ que são válidos para várias ciências.

Os *axiomas* tratariam de *princípios* estabelecidos na primeira etapa do processo de conhecimento, num movimento indutivo, **que se processa tanto por enumeração simples como pela intuição**, de onde passamos do particular para o universal (PELLEGRIN, 2010, p. 52), constituindo-se de generalizações dos fenômenos e objetos observados. Eis um exemplo de *axioma*: “se de coisas iguais se tiram partes iguais, aquelas permanecerão iguais”. Deste modo, os *axiomas* são definidos por Aristóteles como proposições primeiras e não demonstráveis. Proposições gerais que nada nos ensinam sobre a realidade em si.

Losee (2001, p.10-3) explica-nos que, em Aristóteles, os *axiomas*,

(...) por sua vez, são as **declarações verdadeiras mais gerais** que são feitas sobre os predicados próprios de cada ciência. Como tais, os primeiros princípios são o ponto de partida para toda demonstração em ciência. Sua função enquanto premissa é servir de base para a dedução das correlações que são encontradas nos níveis mais baixos de generalidade [grifo nosso].

---

<sup>141</sup> A não-contradição diz respeito a não ser possível obter, a partir de inferência lógica, uma afirmação que contradiga a que foi apresentada.

Desse modo, em Aristóteles, os *axiomas* são tomados como *princípios* que o ser humano deve interiorizar para aprender sobre qualquer coisa. Característica esta por ele justificável, pois, de outro modo, teríamos uma cadeia infinita de demonstrações.

Complementando esta interpretação, Bunt (1988) amplia-a, revelando que Aristóteles aponta para a relevância dos *axiomas* na sistematização metodológica do conhecimento e estes se apresentando de dois tipos:

- a) as *noções comuns*, que são verdades gerais válidas em qualquer ciência dedutiva;
- b) as *noções especiais*, que estão na base de uma particular ciência dedutiva e podem subdividir-se, ainda em dois tipos: b.1 – as que estabelecem o significado dos conceitos fundamentais dessa ciência - definições; (e) b.2 – as que estabelecem a existência dos conceitos fundamentais - hipóteses. As definições, ainda segundo o ponto de vista aristotélico, devem ser estabelecidas a partir dos conceitos fundamentais.

De todo, podemos inferir que, em Aristóteles, os *axiomas* são o que de mais geral existe e, todas as ciências demonstrativas se valem de *axiomas*. Para Cattanei (2005, p.169):

Com efeito, os princípios “que em matemática são chamados de axiomas” (*Metaph.* B2, 997<sup>a</sup> 12-13) são “os princípios da demonstração” e “princípios da demonstração aquelas **convicções comuns** de que todos partem para demonstrar, por exemplo, que cada coisa deve ser afirmada ou negada e que é impossível ser e não ser ao mesmo tempo, e as outras premissas desse tipo” (*Methaph.*, B 2, 996 b 26-31) [grifo nosso].

No entendimento de *axiomas* como ‘proposições comuns’ e ‘primeiras’, cabe ressaltar que é ‘ser comum’ em virtude de uma analogia que se faz uma vez que todas as ciências se servem desses *axiomas*, porém cada qual à medida que lhe convém, ou seja, na medida em que estende o gênero sobre o qual versam as suas demonstrações (CATTANEI, 2005).

‘Através de’ e ‘por’ essas proposições primeiras, como vimos anteriormente, é que se faz desencadear a segunda fase do processo de conhecimento na qual, dedutivamente, são processadas as demonstrações: os silogismos. Para Aristóteles, o conhecimento demonstrativo pressupõe um conhecimento não demonstrativo, que são ‘verdades’ conhecidas ‘imediatamente’ as quais enquanto princípios são destacadas em nosso estudo e reflexão: os *axiomas*.

### 6.3.2 Os *axiomas* para Aristóteles: o processo de abstração lógica

Encontramos citações significativas de Aristóteles que o posicionam contra a concepção dos entes matemáticos como substância suprassensível (*Metaph.*, M 2,1076 a 38, b 1, 5,7,1077 12,13; 1080 B 35-36; 9,1085 B 35; 1076 B 28, N 3, 1091 a 11-12; M 7, 1082 b 37). A primeira observação importante a destacar trata que, na realidade, Aristóteles expulsa, do âmbito da metafísica, o campo dos objetos matemáticos. E, ao estabelecer uma relação entre entes matemáticos e realidade sensível, de certo modo, ele consegue o suporte que, em seu pensamento, toma como necessário para reforçar (ou garantir o *status*) a interpretação de *axiomas* no sentido de ‘verdades’. Parece-nos que ele já teria percebido que a Dialética platônica só se comprometia com a certeza e com a verdade, em última instância.

Para Aristóteles, a Matemática se ocupa apenas com as formas, não tendo nada a ver com os substratos; ainda que as propriedades geométricas sejam propriedades de certo substrato, não são como pertencentes aos substratos que ela se mostra. Os objetos matemáticos são abstrações<sup>142</sup> apenas ou, como afirma Silva (2007, p.44), “na pior das hipóteses, uma ficção útil. Eles não têm existência separada dos objetos empíricos, são apenas aspectos deles, e, se às vezes os pensamos como independentes, é apenas um modo de pensar sem maiores consequências práticas”.

Tomando a Matemática em nossa reflexão, observamos que, para Aristóteles, existe uma ‘matemática universal’ que é comum a todas e a cada uma das disciplinas matemáticas e às matemáticas particulares. De modo que, em todas elas, os matemáticos formulam e, como ele diria, ‘escrevem’ ‘leis’ que coincidem com o que os matemáticos chamam de *axiomas*.

Os *axiomas* figuram as bases para deduções, ou seja, as provas. Sobretudo, segundo Otte, devemos observar que, na Matemática grega, ocorriam dois tipos diferentes de provas. "Durante a primeira fase da matemática grega, existir uma prova consistia em mostrar ou tornar visível a verdade de uma afirmação". Este foi o método *epagógic* - indução. "Esta primeira fase foi seguida por uma fase *apagógic* ou dedutiva. Durante esta segunda fase, a evidência visual foi rejeitada e matemática grega tornou-se um sistema dedutivo" (KOETSIER, 1991, 180f, *apud* OTTE, 2011-b). A Prova *epagógic* primariamente verifica e a

---

<sup>142</sup> Esse processo de abstração aristotélica é muito mais complexo de que mera separação em pensamento, ou seja, do que uma separação lógica mesmo que no nível das representações, mas tão somente um modo de tratar o objeto sob um aspecto e não sob outros. Ele compreende um elemento de idealização, onde desconsideramos as diferenças entre o objeto e a forma perfeita (determinada pela sua *definição*).



prova *epagógic* - dedutiva também generaliza no sentido de que o significado de uma declaração é avaliado em relação a todo um sistema de declarações.

*Epagoge* é, geralmente, traduzida como "indução". Mas, talvez, não seja exatamente o que nós pensamos como indução, todavia é suficiente tomar um indivíduo/coisa/algo/fenômeno particular como protótipo de todo o tipo. Aristóteles escreve com relação à *epagoge*: "A consideração da semelhança é útil tanto para os argumentos indutivos e para o raciocínio hipotético [...] É útil para o raciocínio hipotético, porque é uma opinião aceita de que tudo o que é válido, por um ou vários similares, também é válida para o resto" (*Tópicos* 108b 7 *apud* OTTE, 2011b).

A atenção de Aristóteles está mais sobre o que é ser de certo tipo A (algo dado como certo na nossa indução padrão). Pode-se dizer que a investigação de uma (nova) espécie é uma questão de olhar atentamente para um número de espécimes, verificando se os recursos são, de fato, comuns à espécie, possivelmente, descontando alguma variação como acidental, até mesmo decidindo reclassificar alguns espécimes como puramente uma espécie diferente. Então, alguém ilustra a verdade da (provisoriamente) declaração final classificatória, pelo apelo a exemplos indiscutíveis e representativos da espécie em questão. A prova *epagógic* depende de alguma lei de uniformidade da natureza ou algum princípio de continuidade. Pontos de partida fundamentais, como os *axiomas* na Geometria, têm que ser compreendidos através do processo *epagógic* por uma faculdade que Aristóteles chama *nous*. Não existe apenas generalidade predicativa em nosso pensamento, mas também generalidade que não pode ser definida (*Metafísica* 1048 A 25 *apud* OTTE, 2011b).

De acordo com Aristóteles, os *axiomas* da Matemática universal são 'convicções comuns'. Esta Matemática universal é privada de gênero, ou de determinada natureza a que se referir, figurando como uma disciplina autônoma em relação às Matemáticas particulares. Como exemplo de um *axioma*, podemos considerar: se de iguais se tiram iguais, os restos são iguais. E, em especial, o que se estabelece como 'leis' não é possível de demonstração.

*Axiomas* deste tipo, para Aristóteles, tratam de proposições 'universais', ou seja, proposições que têm por sujeito e predicado 'conceitos universais', aplicáveis a diferentes espécies de entes matemáticos e não, exclusivamente, a eles (CATTANEI, 2005, p.165). De modo que os *axiomas*, ou proposições comuns, são 'comuns' por analogia, sendo aplicáveis quando e do modo que lhes for útil. Assim,

é, todavia, suficiente assumir cada uma dessas proposições comuns, porquanto se aplica a certo gênero: a eficácia da proposição será, com efeito, idêntica, mesmo no caso em que, na esfera da geometria, ela seja aplicada somente às grandezas espaciais e não mais à totalidade dos objetos, ou em que, no campo da aritmética, ela seja aplicada aos números (*Ant. Post.*, 76 a 37 b 2).

Sobretudo, quando Aristóteles fala que, na Matemática, há ‘universais’ indemonstráveis e postos como válidos, os seus *axiomas*, as ‘noções comuns’, segundo Cattanei (2005, p.166-7):

Os “universais matemáticos” são quer “princípios”, quer “elementos”, ou melhor, “princípios” e “alguns” dos elementos, os de mais ampla validade. Abarcam “os axiomas que se dizem comuns, ou seja, as proposições primeiras donde parte a demonstração” [...] Com efeito, em geral, é impossível que haja demonstração de tudo, nesse caso proceder-se-ia ao infinito, e desse modo, conseqüentemente, não haveria demonstração alguma.

Tomados como princípios e proposições do tipo comum, *axiomas* seriam para Aristóteles o que de mais universal existe e todas as ciências demonstrativas se valem sempre deles.

Assim, ele nos aponta dizendo que cada ciência demonstrativa é feita de: 1º) um gênero em torno do qual versa a prova; 2º) de afecções cuja referência é demonstrada; 3º) de proposições primeiras de onde parte a demonstração, ou seja, os *axiomas*, que se dizem comuns, porque a demonstração deve, necessariamente, partir *de* alguma coisa, versar *em torno* de alguma coisa e ser demonstração *de* alguma coisa (*Metaph.*, B 2 997 a 8-9).

Entretanto, os *axiomas* não se restringem a este tipo. Aristóteles também nos fala de ‘proposições próprias’, que seriam *axiomas* específicos a cada ciência – as Matemáticas particulares (como exemplo a Geometria e a Aritmética). No entanto, cada qual se serve dos *axiomas* da Matemática universal à medida que lhes convém, ou seja, à medida que se estendem ao gênero específico sobre o qual versam suas demonstrações.

E, “cada uma das ciências matemáticas, cada qual concentrada em seu ‘gênero’ e nas afecções que lhe competem por si, vai até a ‘matemática geral’, para encontrar seu ponto de partida” (CATTANEI, 2005, p.173). Mas, como Aristóteles nos explica que chegamos aos *axiomas* da Matemática? De onde os matemáticos ‘formulam’, ‘escrevem’ esses *axiomas*?

Aristóteles é convicto de que a Matemática se funda em determinadas premissas que são verdadeiras, em princípios não ulteriormente demonstráveis, cuja verdade deve ser

imediate (*Ant. Post.*, I 2). Uma vez que aquilo que é a causa de serem verdadeiras as coisas que dele dependem, estes devem ser mais verdadeiros que todas as outras.

Para ele, as Matemáticas como ciências tratam de um saber verdadeiro que, portanto, têm por objeto ‘coisas que são’. Em certo modo, concorda com Platão, com a ideia de uma substância imóvel e eterna cognoscível, mas, embora esta se relacione de modo peculiar às ‘coisas que são’, Cattanei (2005, p.344) explica que:

A aritmética e a geometria, assim como a física, se dirigem às coisas sensíveis “escolhendo” delas algumas propriedades objetivas. Trata-se porém das coisas sensíveis segundo Aristóteles de Estagira: trata-se de “substâncias”, não supra-sensíveis com certeza, porém ontologicamente consistentes, não arrastadas no nada, na contradição, na ilogicidade do rio de Crátilo. E trata-se de propriedades “que são”, “que existem”, que não tem sentido “separar” ontologicamente daquilo que são propriedades, porque aquilo a que são inerentes existe num sentido forte, e é *per se* compreensível.

Ao olharmos para a ‘Teoria da Abstração’ (a abstração sendo simplesmente uma operação lógica, não real) que Aristóteles elabora para explicar a não-sensibilidade dos objetos matemáticos – a qual assume um caráter específico e uma forma particular - de modo similar, nossa interpretação nos indica que ele também, indiretamente, aponta ao modo como chegamos aos *axiomas* e este, especificamente, relacionado à etapa da indução no processo de conhecimento, conforme inferimos anteriormente. Neste sentido, partindo do particular ao geral, chegando ao universal - as noções comuns – aos *axiomas*.

Aristóteles nos aponta que o silogismo é um processo substancialmente dedutivo uma vez que obtém verdades particulares a partir das verdades universais. Assim, o processo pelo qual chegamos às verdades universais seria oposto ao silogístico, embora pressuposto por este. Ele também destaca a ‘indução’ e ‘intuição’ como processos aos quais chegamos às verdades universais, aos *axiomas*.

Aristóteles não reconhece a indução (*epagogê*) como um raciocínio, mas uma ‘condução’ do particular ao universal, em virtude de uma espécie de apreensão imediata ou de intuição. Basicamente, a indução é o processo abstrativo. A intuição (*nous*) é a apreensão pura e simples dos primeiros princípios. Para a intuição, ele admite um tipo de intelecto e, em *Analíticos Segundo* (B 19, 100b 5-17), vemos a explicação que segue:

Visto que alguns dos hábitos racionais com que apreendemos a verdade são sempre verdadeiros, enquanto outros admitem o falso, como a opinião e o cálculo, sendo o conhecimento científico e a intuição sempre verdadeiros, e visto ‘que

nenhum outro gênero de conhecimento é mais exato do que o científico excetuando a intuição' e, por outro lado, os princípios são mais conhecidos do que as demonstrações, e uma vez que todo o conhecimento científico dos princípios, e porque 'não pode haver nada mais verdadeiro do que o conhecimento científico exceto a intuição, esta deve ter por objeto os princípios'. A este resultado se chega na inquirição realizando estas considerações ou também em virtude do fato de que o princípio da demonstração não é outra demonstração; por conseguinte, o princípio do conhecimento científico não é o conhecimento científico. Neste caso, se não temos nenhum outro gênero de conhecimento verdadeiro além da ciência, a 'intuição será princípio da ciência'. Por outro lado, a intuição pode considerar-se como 'princípio do princípio', ao passo que a ciência no seu conjunto se encontra na mesma relação com a totalidade das coisas que tem por objeto (ARISTÓTELES *apud* REALE, 1997, p.128).

Então, segundo Aristóteles, chegamos às premissas e aos princípios por meio da indução ou por intuição. Cada uma das ciências assumirá seus próprios princípios e premissas, isto é, que são peculiares a ela e a só ela. Entendemos que, como a Geometria e as outras ciências 'separam' as propriedades matemáticas dos sensíveis, os *axiomas* seriam 'separados', 'abstraídos' de nossa observação e inferência no e com os sensíveis. Da mesma forma em que obtemos 'por abstração' os entes matemáticos dos sensíveis, também 'chegamos' ou 'escrevemos' os *axiomas*.

De acordo com Reale (1997, p.129), conclui Aristóteles (*Na. Post. A 10, 76b 11-16*): "toda ciência demonstrativa é relativa a três elementos, ou seja, ao que se estabeleceu que é (a saber, o gênero cujas afecções *per se* [-as características essenciais] a ciência considera), aos *axiomas* chamados comuns, a partir do primeiro dos quais se procede nas demonstrações e, finalmente, às afecções a cujo respeito se supõe o que é que significa cada uma delas".

No pensamento aristotélico, os *axiomas* não existem *a priori*, não tratam de memorizações como afirmava Platão; de outro modo, para Aristóteles, eles resultam de uma operação lógica de nosso pensamento, um tipo de silogismo invertido.

A partir dessa realidade — isto é, a partir do conhecimento empírico — é que a ciência deve tentar estabelecer definições essenciais e atingir o universal, que é seu objeto próprio. Toda a teoria aristotélica do conhecimento constitui, assim, uma explicação de como o sujeito pode partir de dados sensíveis que lhe mostram sempre o individual e o concreto, para chegar finalmente a formulações científicas, que são verdadeiramente científicas na medida em que são necessárias e universais (PESSANHA, 1987, p.25).

É por um processo abstrativo conduzido pela intuição que chegamos aos *axiomas*. De modo que o *axioma* será sempre o enunciado num cálculo lógico ao início das deduções futuras. E, um *axioma*, em Aristóteles, podemos dizer que assumiria uma forma geral do tipo:

Se um predicado P se predica dos entes A, B, C..., então para este predicado P, os entes A, B, C... pertencem à mesma classe de objetos.

Exemplificando, se tomamos homem, gato, rosa, samambaia, podemos dizer que todos têm vida. Ser um ser vivo é um predicado de todos os enunciados, assim todos estão num mesmo grupo de objetos. Reorganizando-os, podemos ainda proceder à separação:

Homem, gato, rosa, samambaias  
(animais) e (vegetais)

O que esses grupos teriam em comum? Vida. De acordo com o *axioma* geral, temos um teorema, seja ele: dado que animal e vegetal têm vida, podemos dizer que ambos pertencem à mesma classe de objetos – a dos objetos que têm vida, opondo-se aos que não têm vida. De modo que ainda podemos dividir os entes entre os que têm vida e não-vida. Se aplicarmos essa regra, recorrentemente, dentre os vivos, os vertebrados e os invertebrados, os que têm movimento e os que não têm movimento, ou então todos os que são animais e os que não são animais, o predicado, neste caso, deixaria de ser ‘ter vida’ e passaria a ‘ser animal’. Ainda dentro do subnível de animais, podemos classificar em vertebrados e invertebrados. Se continuarmos a aplicação recursiva desse método, chegaremos à conclusão de que apenas o homem tem racionalidade e somente ele é um animal racional. Por uma regra lógica, do tipo:

Se P, então Q.

Este é, elementarmente, o método de abstração de Aristóteles. Razoavelmente simples e a Ciência usa até hoje, o método sintético de Filosofia. Basicamente, uma regra chamada *modus ponens*, que significa ‘por afirmar’. Refere-se a que, tendo afirmado o antecedente, o consequente deverá ser afirmado. Dessa maneira, temos um método, que é a abstração, mas usa uma regra do método que, dada a recursividade do método sintético, podemos aplicar quantas vezes forem necessárias até chegarmos ao resultado, no caso exemplificado: ‘o homem é um animal racional’.

Sobretudo, de acordo com Aristóteles, os matemáticos miram a verdade e, em seu campo, chegam lá. Ele defende que os domínios sempre verídicos são a ciência e a intuição e

não subsiste nenhum gênero de conhecimento superior à ciência, tirante a intuição (*Anal. Post.*, II 19, 100 b 5 – 9). De acordo com Aristóteles:

[...] Está claro, então, que tem que ser por indução que adquirimos conhecimento das **premissas primárias**, porque é este também o modo no qual os conceitos gerais nos são transmitidos pela percepção sensorial.

Bem, das faculdades intelectuais que utilizamos na busca da verdade, algumas (por exemplo, o conhecimento científico e a intuição) **são sempre verdadeiras**, enquanto outras (por exemplo, a opinião e o cálculo) admitem a falsidade. E nenhum outro tipo de conhecimento, exceto a intuição, é mais exato do que o conhecimento científico. Primeiros princípios são mais cognoscíveis do que as demonstrações, e todo o conhecimento científico envolve o discurso racional. Conclui-se que não pode haver conhecimento científico dos primeiros princípios; e uma vez que nada pode ser mais infalível do que o conhecimento científico, salvo a **intuição, é forçosamente esta que apreende os primeiros princípios**. [...] o princípio da demonstração não é ele próprio demonstração, e assim o princípio do conhecimento científico não é ele próprio conhecimento científico. Portanto, como não dispomos de outra faculdade infalível além do conhecimento científico, a fonte de tal conhecimento deve ser a intuição. Assim, será a fonte primária do conhecimento científico que apreende os primeiros princípios, ao passo que o conhecimento científico como um todo está analogamente relacionado à esfera total dos fatos (*Anal. Post.*, Livro II § 19, 100b1 – 100b17, p. 344-5) [grifo nosso].

Apesar de seu pensamento situar tendencioso à interpretação apriorista, ele sempre retoma a ênfase à realidade dos fatos, à experiência. E justifica as verdades matemáticas, pois elas, ao aplicar-se ao mundo sensível, constituem-se uma (especial) maneira de falar dele. Aristóteles, apesar de situar-se empirista em questões de ontologia – aquelas concernentes aos objetos da Matemática – ele comparece e admite um misto de racionalismo e empirismo em questões epistemológicas – especialmente às que dizem respeito à verdade matemática (SILVA, 2007, p.48).

À sua maneira, ao expor sua teoria, Aristóteles, atribui um valor de ‘verdade’ aos pressupostos dos raciocínios matemáticos, conseqüentemente, aos seus *axiomas*. Silva (2007, p.37) entende desta mesma forma o pensamento Aristotélico, ao destacar que, para este, ‘o mundo sensível é a realidade fundamental’, de onde os entes matemáticos seriam ‘extraídos’, apreendidos dos objetos sensíveis por meio de operações do pensamento; nesse sentido, os conceitos matemáticos versariam os modos de se tratar o mundo real.

Além de que, para Aristóteles, o modelo para uma ciência eram as disciplinas matemáticas da Aritmética e da Geometria que, naquele tempo, já estavam sendo apresentadas como séries sistemáticas de deduções que partiam de princípios primeiros básicos. Sobretudo, por serem seus princípios sempre verdadeiros, nossa interpretação nos conduz ao entendimento do significado de *axiomas* no sentido contrário ao de hipóteses.

### 6.3.3 Reflexões sobre o significado de *axiomas* em Aristóteles

Aristóteles é considerado o Pai da Lógica, o codificador da Retórica, sendo estas baseadas na suposição da possibilidade de divisões claras e classificação rigorosa da realidade sensível. Ele parece formar seus conceitos por abstração empírica. E tentou conciliar o conceito puro e a *empíria*, mas não foi bem sucedido por causa da incompatibilidade estrutural do universal com o individual. O indivíduo seria para Aristóteles a verdadeira substância e esta seria, definitivamente, incognoscível, pois somente o universal é verdadeiramente cognoscível.

Ele não estabelece uma ligação direta da Linguagem ao processo cognitivo e cada vez que faz inferência à Linguagem, ele tem em vista algo que não é a Linguagem, mas o que ele pretende é fazer a introdução à Lógica, à sua analítica. Mas a Lógica, desde sua origem em Aristóteles, esteve intimamente ligada à Retórica. Sobretudo, no pensamento aristotélico, observamos uma confusão entre sentido e referência, mas relevância e destaque aos aspectos da dimensão semântica.

Segundo Silva (2007, p.25), “Aristóteles estabelece uma separação nítida em seu instrumento da ciência, colocando, de um lado, o *Organon*, e de outro a *Poética* e a *Retórica* – sendo que somente nestas últimas é que relativamente o contexto desempenharia um papel de definir a verdade ou falsidade, enquanto que, na primeira, o contexto é o potencial definidor”. A Linguagem é tomada apenas como um auxílio ao conhecimento científico da realidade no sentido de nomear, mas não tem firme indicativo-operativo no processo cognitivo.

Entretanto observamos que a essência da Lógica aristotélica é o silogismo. Ele distingue, por exemplo, entre silogismos dialéticos e silogismos apodícticos. Essa concepção dele, no século XIX, conduzirá a duas concepções diferentes de Lógica e de Matemática: a Lógica do cálculo e a Lógica como Linguagem, apontando ao estabelecimento de uma dicotomia entre a Linguagem e a Matemática no processo cognitivo.

Como tecemos em nossas reflexões até aqui, a diferença fundamental, entre o pensamento de Aristóteles e o pensamento de Platão, consiste em que, para aquele, não há distinção entre mundo concreto e mundo das Ideias, o que temos é um único mundo e é este em que vivemos. E é neste ponto do pensamento aristotélico que teremos o direcionamento à

interpretação sobre o significado de *axiomas* que irá, definitivamente, conduzir ao sentido de verdades.

O pensamento platônico, especificamente relacionado ao Conhecimento Matemático, aponta para a emancipação pautada na experiência e no mundo sensível, e o acesso às noções comuns (*axiomas*) dar-se-ia (somente) pela razão, especificamente por um processo de memorização. Aristóteles irá retomar uma ligação com o mundo sensível e, para ele, as noções comuns (*axiomas*) se tornam perceptíveis a nós, através de nossa experiência sensível (num processo de abstração pela intuição), pois, para além dela, não existe nada para nós.

A realidade fundamental para Aristóteles é o mundo sensível, os entes matemáticos seriam, deste modo, extraídos dos objetos sensíveis por meio de operações do pensamento, operações de abstração que tratariam de uma operação lógica, não real. Assume, como em Platão, que os objetos matemáticos têm existência independentemente do sujeito cognoscente, mas, e agora, diferentemente de Platão, que eles não seriam independentes dos objetos do mundo empírico. Os conceitos matemáticos seriam apenas modos de tratar o mundo real.

Platão, ao refletir sobre o Conhecimento Matemático, posiciona-o em um plano ‘inferior’ – denominando-o ‘conhecimento discursivo’ – e, relacionado à Dialética, cabe somente a esta última o acesso à verdade e ao conhecimento verdadeiro. E, assim, ele promove contribuições ao conhecimento científico, ao resgatá-lo de um sentido que o mantinha numa ligação estreita com a experiência, onde a essência e característica do Conhecimento Matemático seriam basicamente empíricas e que, de certa forma, não possibilitavam avanço sobre seus fundamentos, além de provocar em seu tempo, de forma singular, um movimento de simbiose entre Matemática e conhecimento filosófico.

Já Aristóteles, de acordo com Hegel, supera Platão com a sua profundidade especulativa, pois conheceu a mais profunda das especulações: o idealismo, à qual parece aderir apesar da ampliadíssima parte concedida ao empirismo. Talvez, por isso, a partir de Aristóteles, tenha-se iniciado um marcante processo de desenvolvimento ao Conhecimento Científico e Matemático.

Aristóteles também apresentou um elenco exaustivo de formas válidas de inferência que seriam as bases do conhecimento científico. E,

Uma forma de inferência é (logicamente) ‘válida’ se a veracidade das conclusões depender ‘apenas’ da veracidade dos pressupostos; ela será ‘formal’ se depender do conteúdo (do ‘que’ é dito), mas apenas da forma lógica das asserções (de ‘como’ isso é dito). Por exemplo, se assumo como premissas que todo homem é



mortal e que Sócrates é um homem, segue que Sócrates é mortal. A validade dessa inferência não depende em nada dos conceitos de mortalidade e de humanidade, ou de Sócrates em particular, mas apenas da forma das asserções envolvidas. Se nessa inferência substituirmos os termos por variáveis, teremos a seguinte forma válida de inferência; se todo A é B, e se  $x$  é uma A, então  $x$  é um B. A silogística aristotélica é um estudo de formas concretas de inferência de um tipo especial, chamadas ‘silogismo’ (SILVA, 2007, p.49).

Observamos que essa lógica formal foi imprescindível ao desenvolvimento da Matemática, ampliando-se e sofisticando-se enormemente quando foi necessário refletir, matematicamente, sobre as teorias matemáticas formalizadas. Só que, em Aristóteles, a Matemática não tinha um domínio distinto do que de qualquer ciência empírica e ela tratava dos objetos deste mundo, diferindo das outras apenas no modo de tratá-las. A Matemática considera-os, exclusivamente, sob o aspecto formal; por exemplo, vê nelas apenas a sua forma geométrica ou aritmética.

A concepção aristotélica de ciência dedutiva é um aspecto especialmente relevante de sua contribuição ao desenvolvimento da ciência em geral e da Matemática. Ele entendia a ciência como um edifício logicamente estruturado de verdades encadeadas em relações de consequência lógica, a partir de pressupostos fundamentais não demonstrados. *Os Elementos* de Euclides, em certo aspecto, é uma resposta ao ideal aristotélico de ciência dedutiva, apontando para um modelo axiomático-dedutivo que viria a se constituir, ao longo da História, no paradigma de uma teoria científica não apenas para a Matemática.

Sobretudo, em Aristóteles, não identificamos espaço para interpretação dúbia entre ‘verdade’ ou ‘hipótese’ aos *axiomas* (com interpretamos em Platão), uma vez que sua teoria da abstração – separação – dos entes matemáticos virá reforçar, aos *axiomas*, o sentido de ‘verdades’.

Mesmo conforme indica Mignucci (1965), o silogismo caracteriza-se por derivar o consequente, necessariamente, do antecedente, em virtude de mero fato de este ter sido estabelecido. E, nesse sentido, suas premissas são causa não da verdade ou da falsidade de seu conteúdo, do consequente em si mesmo, mas o são da consequência, de maneira que suposto o antecedente não pode deixar de se derivar dele o consequente. De modo que o silogismo, ao basear-se na coerência do raciocínio, deve deixar fora toda a dúvida sobre o conteúdo verdade. Aristóteles resolve a possibilidade de uma questão dúbia e impasse, especial e especificamente, destacando o silogismo científico, ou demonstração, sendo que, neste, o valor de verdade é sempre uma condição das premissas primeiras.

Assim, acordamos com Jahnke (2010), ao informar como sendo, a partir do pensamento de Aristóteles (desde 400 a.C.), que uma mudança significativa começa a se delinear no estatuto epistemológico do termo *axioma* como também de *postulados*, sendo que estes, anteriormente, podiam até ser tomados no mesmo sentido. Segundo Otte (2014)<sup>143</sup>, “Szabo (1960, p 399) e Jahnke (2010, p 19), seguindo-o, também escreve: se os participantes não concordaram ou se não declaram nenhuma decisão, a proposição foi então declarada *aitema* (postulado) ou *axioma*”.

Observamos que os *axiomas*, especialmente, deixam de designar uma proposição que, no início de um debate, poderia ou não ser aceita e, mais claramente na Matemática, passam a designar uma declaração que, em si, não pode ser provada, mas são tomadas como ‘absolutamente certas’, ‘absolutamente verdadeiras’ e servindo como fundamento a uma teoria dedutivamente organizada. Assim, uma diferença que se estabelecerá entre postulados e *axiomas* é que os *axiomas* passam a ser considerados verdades certas, de maneira que se podem tirar tantas consequências deles quantas forem possíveis.

Observamos que Aristóteles, definitivamente, traz a objetividade do conhecimento aos fundamentos do conhecimento que, necessariamente, têm de ser verdadeiros. Entendidos como princípios primeiros ou supremos (que tratariam daquilo que funda – estrutura - o nosso conhecimento), para esse filósofo, quem os investiga deve, fundamentalmente, de se encontrar com Deus, este Deus que é puro Conhecimento. Podemos dizer que Aristóteles é um empirista em questões de ontologia concernentes aos objetos matemáticos, mas admite um misto de racionalismo e empirismo em questões epistemológicas, especialmente, relacionadas à verdade matemática, conseqüentemente, aos seus *axiomas*.

Segundo Otte (2013), a Lógica aristotélica sempre esteve intimamente ligada à Retórica; assim, para Aristóteles, haveria uma arte da Retórica que visa à persuasão e, de outro modo, na medida em que é uma técnica ou uma arte, estuda deduções, estuda a Lógica. Sobre isto, Aristóteles (*apud* BARNES, 2009, p.331) nos diz:

É manifesto, então, que o estudo técnico da retórica diz respeito aos modos de persuasão. Ora, a persuasão é uma espécie de prova (já que somos mais persuadidos quando consideramos que uma coisa foi provada); as provas do orador são entimemas, e um entimema é uma espécie de dedução [...] (I 1, 1355a 4-8).

---

<sup>143</sup> Comentário de Otte em momento de orientação, em julho de 2014.

Neste sentido, podemos ser conduzidos a interpretar o destaque à relação aproximativa entre a Linguagem e conhecimento científico, mas, sobretudo, é minimizado o função cognitiva da Linguagem: “[...] Desse modo, as artes da linguagem têm de ter uma pequena, mas genuína importância... Mas não tanta importância quanto algumas pessoas pensam (III 1, 1404a 4-11)”. E, ainda dentro de uma perspectiva aproximativa entre a Linguagem e a Matemática, Aristóteles entende que a “matemática aplica-se ao mundo sensível simplesmente na medida em que é só uma maneira de falar dele” (SILVA, 2007, p. 48).

Assim, entendemos como Thom (*apud* BROLEZZI, 1996, p. 42) que podemos encontrar em Aristóteles o prelúdio de uma inserção da Linguagem no processo cognitivo, principalmente, quando observamos que ele soube introduzir plenamente a qualidade (minimizando o aspecto quantitativo) no pensamento matemático, possivelmente vislumbrando já o poder da atividade linguística à nossa apreensão do mundo real. E segundo Machado (1995, p.199):

Aristóteles restaura em parte a dignidade do mundo empírico, revigorando o significado do predicado, da qualidade, como contraponto para certa superestimação das relações numéricas, do quantitativo, presente em muitos deuses antecessores.

Reale (1997) informa que, em relação à interpretação da Lógica, difundiu-se entre os séculos XIX e XX uma tendência para entender o *Organon*, baseando-se nos cânones da moderna Lógica formal ou logística. Uma tendência, em particular, nos países de língua inglesa, para se estudar a *Retórica* e, em geral, Aristóteles, do ponto de vista da linguística moderna.

O pensamento filosófico de Aristóteles influenciou sobremaneira o modo como os matemáticos desenvolveram a sua ciência e sobre toda a história da Matemática. E, sobretudo, Otte (2013) aponta que teria sido Aristóteles o responsável pela introdução do princípio da continuidade na história natural, haja vista que ele foi o primeiro a sugerir as limitações e os perigos da classificação e a não-conformidade das profundas divisões que são indispensáveis à Linguagem com a natureza das coisas.

Em suma, figura inquestionável na análise de nossa problemática, que Aristóteles reconhece sem reservas, a condição de ‘verdade’ às premissas, aos *axiomas* das ciências matemáticas como também sobre a existência de seus objetos e estes, diferentemente de Platão, sendo de natureza não suprassensível.

Observamos que tal sentido vai efetivar-se definitivamente quando da compilação explícita das demonstrações lideradas pela terminologia *axioma*, que acontece no início do período de construção de *Os Elementos*, na Geometria de Euclides. Este *status* epistêmico aos *axiomas* “seguiu-se bastante naturalmente porque naquele momento os matemáticos tinham começado a construção de teorias” (JAHNKE, 2010, p.20). Conseqüentemente, a Matemática passa a ser tomada como uma ‘ciência normal’ e a consistência interna das teorias derivadas a partir desses *axiomas* vieram reforçar o estatuto de ‘verdades’ atribuído aos *axiomas*.

Ainda para Jahnke (2010), outro ponto de destaque são as demonstrações empreendidas e sistematizadas nesse período que ainda estavam motivadas pela intenção de rejeitar as críticas de Zenão<sup>144</sup> e a escola Eleática (séc V a.C.) que, naquele momento, ainda duvidavam da perspectiva de atribuir aos *axiomas* a condição de ‘verdades’. E é essa visão de *axiomas*, como verdades fundamentais, evidentes e indemonstráveis, que vai estabelecer-se como dominante na ciência e Filosofia ocidental até o séc. XIX.

A construção de teorias com base em um conjunto de *axiomas* passa a constituir-se numa prática e num método familiar entre aos geômetras, seguidores de Aristóteles. Por isso, ele considerava que esse método podia ser amplamente aplicado a outros contextos. Considerado o Pai da Lógica formal, Aristóteles dizia, ainda, que a Lógica forneceria as regras para a derivação de teoremas a partir de *axiomas* e que cada ciência teria o seu próprio conjunto especial de *axiomas*.

No entanto, a Lógica Aristotélica estava longe de conseguir prover um meio ideal para o que se tornou a Lógica formal no século XIX, principalmente porque, na Antiguidade, o pensamento filosófico e matemático estava preso a concepções muito limitantes. Entendemos que, neste sentido, a admissão e a tomada da Linguagem como constituinte ao processo cognitivo foram fundamentais, como também a mudança e ampliação do entendimento da Lógica, ou seja, esta passando a ser entendida para além do movimento de se fazerem somente inferências válidas e a ser percebida como uma estrutura dedutiva de contextos linguísticos. Este aspecto esteve muito longe de ser encontrado em Aristóteles, mas, certamente, podemos inferir que tivemos, nele, os germes dessa ideia, mesmo porque ele

---

<sup>144</sup> Zenão de Eleia (490/485 a.C.- 430 a.C.) foi um filósofo pré-socrático da escola eleática que nasceu em Eleia, hoje Vélia, Itália. Discípulo de Parmênides de Eleia, defendeu de modo apaixonado a filosofia do mestre. Seu método consistia na elaboração de paradoxos. Deste modo, não pretendia refutar diretamente as teses que combatia, mas sim mostrar os absurdos daquelas teses (e, portanto, sua falsidade).

entendia que “a matemática aplica-se ao mundo sensível simplesmente na medida em que é só uma maneira de falar dele” (SILVA, 2007, p. 48).

Otte (2014)<sup>145</sup> ainda afirma que:

Aristóteles é mais frequentemente considerado como o grande representante de uma lógica, que se baseia na suposição da possibilidade de divisões claras e classificação rigorosa. "Mas isso é apenas metade da história sobre Aristóteles. E é questionável se é a metade mais importante para ele é igualmente verdade que ele sugeriu pela primeira vez as limitações e os perigos de classificação, e a não-conformidade da natureza para essas divisões nítidas que são tão indispensáveis para a linguagem [...] "(Lovejoy, A. 1964/1936, *A Grande Cadeia do Ser*, Harvard University Press, p 58). Aristóteles tornou-se, assim, responsável pela introdução do princípio da continuidade na história natural. "E os próprios termos e ilustrações usadas por uma centena de escritores posteriores até Locke e Leibniz e além, mostram que eles estavam era repetindo expressões dessa idéia de Aristóteles" (Lovejoy loc. Cit.).

Sobretudo, foi somente em meados do século XIX que a Lógica formal sofisticou-se enormemente, privilegiando Linguagens simbólicas e ampliando o seu repertório de modos válidos de inferência, tornando-se, assim, capaz de fornecer um meio ideal de expressão e articulação para as teorias matemáticas e inaugurando um novo domínio da Matemática.

De um modo, o pensamento aristotélico irá se personificar em Euclides no processo de formalização e estabelecimento da ciência em geral e da Matemática, em particular, como uma ciência dedutiva. Especialmente, na imagem de ciência enquanto edifício logicamente estruturado de verdades encadeadas, em relação de consequência lógica e a partir de pressupostos fundamentais e não demonstrados.

#### **6.4 Axiomas em Euclides (~325 – 265 a.C)**

O apogeu da Matemática grega deu-se no período helenista, posterior a Platão e Aristóteles, sendo que se destacam, nessa época, entre os maiores pensadores: Euclides, Arquimedes e Apolônio, todos ligados à famosa biblioteca de Alexandria, cidade grega no Egito. Euclides foi, antes de tudo, acima e entre todos, considerado o genial sistematizador do conhecimento acumulado tradicionalmente. De acordo com Proclo, *Os Elementos* do século V d.C. foi a coletânea mais sistemática e um tipo modelar de ciência.

---

<sup>145</sup> Comentário de Otte em orientação, em julho de 2014.

Otte (2014) informa-nos que Max Dehn (1878-1952), um dos alunos mais proeminentes de Hilbert, apresentou a hipótese de que o rigor de Euclides foi uma reação à ‘crise fundamental’, causada pela descoberta de Pitágoras da irracionalidade da raiz quadrada de dois (M. Dehn ,1900, *Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* , Math. Annalen , 53 , pp 404-439 ).

Dada à relevância que se institui, a partir de Euclides, ao modo de organização do Conhecimento Matemático, especialmente aplicado à Geometria e à forte ênfase e impulso no sentido de institucionalização do método axiomático às ciências em geral, é que se torna especialmente pertinente (diríamos, imprescindível) refletirmos sobre o significado de *axioma* para ele.

Em Euclides, tomaremos, como base deste estudo, análise e interpretação, o livro *Os Elementos*. Escrito aproximadamente em 300 a.C., representa, entre as obras de caráter filosófico/científico, em particular para a Matemática, um dos mais bem sucedidos e influentes trabalhos registrados. Nele, encontramos o mais tradicional e antigo tratamento *axiomático-dedutivo* dado à Matemática e à Geometria.

#### **6.4.1 A apresentação dos *axiomas* por Euclides em *Os Elementos*: instituindo o método *axiomático* às Ciências**

Egípcios, babilônios, chineses e mesmo os gregos, antes da época de Euclides, já tinham conhecimentos importantes sobre Aritmética e Geometria, surgidas de necessidades práticas na agricultura, astrologia, astronomia e arquitetura, só que dispersos e não sistematizados. Euclides estudou todo esse conhecimento e, com perspicácia e habilidade didática, organizou-os numa estrutura lógico-dedutiva o que, a partir de então, passou a conferir à Geometria (e à Matemática) um estatuto de ciência.

Esta obra compõe-se de 13 livros os quais apresentam uma coleção de definições, postulados (*axiomas*), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas dessas proposições. E, embora Euclides não tenha se destacado realizando conquistas matemáticas, esse trabalho conferiu-lhe papel de destaque e *status* de matemático e toda a ‘Geometria Euclidiana’ está explícita em *Os Elementos*.

Nessa sistematização do conhecimento, Euclides parte de um corpo pequeno de *axiomas* para chegar a profundos resultados, demonstrando impecável consistência em sua

abordagem, com provas reconhecidamente válidas até hoje. Isso fez com que seu trabalho fosse utilizado como livro didático por mais de 2000 anos, influenciando, inclusive, livros modernos de Geometria.

Não identificamos se Euclides, ao escrever *Os Elementos*, tivesse somente como objetivo reunir, até então, o Conhecimento Matemático da época ou, de outro modo, estivesse focado na sistematização desse conhecimento direcionado ao ensino; de qualquer modo, ao se empreender em sua elaboração, ele atingiu a ambos.

Sobretudo, nessa obra de Euclides, encontramos que as ‘noções comuns’ ou *axiomas* têm sentido bem distintos, por exemplo, do termo hipótese, além de que esse trabalho adquire relevância no contexto de produção de conhecimento. E, nesse sentido, podemos dizer que também é inaugurada (materializada oficialmente) uma maneira diferente de organização das ideias e do Conhecimento que passa a ser conhecida como tratamento/método *axiomático-dedutivo*. *Os Elementos* é assumido como uma obra-prima da aplicação da Lógica à Matemática, influenciando cientistas e filósofos que passariam, a partir de então, a utilizar estruturas dedutivas *axiomatizadas* às suas teorias.

Não podemos atribuir a Euclides o mérito de ter inventado o método de abordagem *axiomática*, mas, sobretudo, é em sua obra e a partir dela que esse enfoque ganha notoriedade na construção da Lógica e da Ciência Moderna. Como exemplos importantes de aplicação desse método, citamos as Leis de Newton (datadas do século XVII), das quais ainda podemos deduzir as Leis de Kepler sobre as órbitas planetárias (SANT’ANNA, 2003, p. 2). Na Filosofia, destacamos a relevante influência, por exemplo, a Spinoza<sup>146</sup>. Este filósofo escreveu o livro: *Ética demonstrada pelo método geométrico*, numa estrutura clássica baseada no modelo de tratamento científico apresentado em *Os Elementos* de Euclides e, com esse método, Spinoza intentava refutar todos os outros. No seu livro, Spinoza apresenta um tratado de moral, escrito assumidamente em estilo euclidiano, no qual o autor parte de alguns *axiomas* e definições, dos quais deduz proposições cada vez mais complexas.

Especialmente, destacamos que, em *Os Elementos* de Euclides, não encontramos aplicação ou referência direta e específica ao termo *axioma*. Nessa obra, são apresentadas

---

<sup>146</sup> Baruch Spinoza ou Espinosa, ou Espinoza (1632-1677) nasceu em Amsterdã, Holanda. Suas principais obras são: *Tratado Político*, inacabado; *Tratado da Correção do Intelecto*; *Princípios da Filosofia Cartesiana*; *Pensamentos Metafísicos*; que veio de curso particular que deu sobre Descartes, e sua obra-prima *Ética Demonstrada pelo Método Geométrico*. Foi preso sob acusação religiosa e morreu na prisão, aos quarenta e quatro anos.

algumas *definições*, *postulados* e *noções comuns* que constituem a base de referência às demonstrações seguintes e não há distinção clara sobre o que Euclides entende por *definição*, *postulados* e *noções comuns*. A diferença que interpretamos e chega-nos pelo modo de apresentação, pelo tratamento dado a esses termos e pelo tipo de abordagem empreendida a cada um deles.

O livro começa com a apresentação de algumas *definições* de termos geométricos cujas *definições*<sup>147</sup> não são mais do que descrições que se pretendem compreensíveis. Têm o intuito de que se saiba do que se está a falar. De acordo com Sant'Anna (2003, p. 2), estabelecer explicações precisas era uma dificuldade para Euclides, parecendo que as *definições* tinham a simples pretensão de oferecer uma visão intuitiva dos conceitos matemáticos, diferentemente do entendimento que temos hoje de *definições*<sup>148</sup>.

Depois, são introduzidos os *postulados*. No entanto, existem posições interpretativas diferentes sobre se os *axiomas* em Euclides dizem respeito ao que ele aponta como sendo *postulados* ou como *noções comuns* uma vez que ele não utiliza, especificamente, esse termo.

De acordo com Garciadiego (2007), os *postulados* e *axiomas* são sinônimos em Euclides. Segundo esse autor, Euclides não discute o que é um *postulado*; no entanto, o leitor pode interpretar esse conceito associado a um princípio que é indemonstrável e que se aceita como certo. Pela análise de Bicudo (EUCLIDES, 2009), na introdução de *Os Elementos*, os *postulados* não são apresentados como sinônimos de *axiomas*. Para Bicudo, os *postulados* referem-se a suposições fundamentais sobre os objetos geométricos que anteriormente já foram definidos, tratando de sentenças que estabeleceriam relações entre os conceitos fundamentais na Geometria.

Em ambas as interpretações, podemos inferir que os *postulados* figuram com o mesmo sentido atribuído a eles no período pré-platônico e pré-aristotélico, como sendo premissas assumidas como verdadeiras (suposições). Os *postulados* apresentados em Euclides são:

1. (É possível) traçar uma e uma só linha reta de qualquer ponto a qualquer outro ponto.

---

<sup>147</sup> Exemplos de definições em Euclides: (1) Ponto é aquilo de que nada é parte; (2) E linha é comprimento sem largura; (3) E extremidade de uma linha são pontos; (4) E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

<sup>148</sup> Segundo Richard Robinson, existem hoje dois modos de classificar as 'definições da definição'; segundo o propósito e segundo o método. Limitar-nos-emos a resumir a sua classificação segundo o propósito – a mais difundida entre todos os autores. Antes de mais nada, a definição pode ser real ou nominal. A definição nominal pode ser de 'palavra a palavra' (correlação de um termo ou uma frase) ou de 'palavra-coisa' (correlação de um termo ou frase com uma coisa ou acontecimento). Por sua vez, a definição nominal de 'palavra-coisa' pode ser léxica ou estipulativa, segundo se refira aos usos de um termo dado na história, ou então à significação que o definidor confira ao termo ou expressão (MORA, 2001).



2. (É possível) prolongar continuamente um segmento, a partir de qualquer das suas extremidades numa linha reta [tanto quanto se queira]
3. (É possível) traçar uma circunferência com qualquer centro e raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma linha reta cai sobre outras duas de modo que os dois ângulos internos de um mesmo lado sejam, no seu conjunto [isto é, na sua soma], menores que dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se num ponto do mesmo lado em que os dois ângulos sejam inferiores a dois retos.

Seguidamente, Euclides nos apresenta suas *noções comuns*. No entendimento de Proclus<sup>149</sup>, em seu *Comentário ao livro I dos Elementos*, as *noções comuns* a que Euclides faz referência e que realmente tratariam de *axiomas*. Acordamos com Proclus por ser ele considerado um dos maiores comentaristas da obra de Euclides. Ainda, de acordo com Szabó (1960) (*apud* JAHNKE, 2010), o termo *axioma* teria suas origens na Filosofia estóica<sup>150</sup> (desde 300 a.C.), denotando uma proposição da qual não podemos duvidar de forma justificada, não sendo possível sua demonstração. Em uma tradução literal do grego, o termo *axioma* trata de ‘as ideias comuns a todos os seres humanos’, de modo que referendamos esta posição e assumimos que as *noções comuns*, em Euclides, referem-se a *axiomas* e não a *postulados* como afirma Graciadeigo (2007).

As *noções comuns* apresentadas em *Os Elementos* de Euclides são (EUCLIDES, p.99, 2009):

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades das mesmas coisas são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

<sup>149</sup> Proclus (412-485 ac): filósofo neoplatônico grego do século V. Escreveu um comentário ao primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, uma fonte essencial sobre a história da matemática grega.

<sup>150</sup> O *estoicismo* (do grego: *Στωικισμός*) é uma escola de Filosofia helenística fundada em Atenas por Zenão de Cítio, no início do século III a.C. Os estóicos acreditavam que o conhecimento pode ser atingido através do uso da razão. A verdade pode ser distinguida da falácia, mesmo que, na prática, apenas uma aproximação possa ser efetuada. De acordo com os estóicos, os sentidos recebem constantemente sensações: pulsações que passam dos objetos através dos sentidos em direção à mente, onde deixam uma impressão na imaginação (*phantasia*).

E, mesmo que Euclides não faça distinção mais clara entre os *postulados* e suas *noções comuns*, podemos interpretar, pelo modo como estes nos são apresentados, que haveria uma diferença embora a consideremos muito relativa.

É perceptível que, em Euclides, as *noções comuns* tratam de proposições gerais enquanto que os *postulados* se aplicam especificamente à Geometria. No Livro I (EUCLIDES, p.98, 2009), Euclides apresenta-nos os seguintes *postulados*

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, como todo centro e distância descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Notadamente, as *noções comuns* dizem respeito a relações gerais e elementares, simples, fixas e que, dentro de um sistema, irão figurar como fundamento a uma estrutura dedutiva inerente. Também podemos dizer que conseguem ser aplicáveis não somente a toda Matemática como às outras ciências, efetivando-se numa pré-condição aplicável a todo raciocínio dedutivo correspondente. Como dizem Pagliuca e Campos (2003), como se fossem blocos na construção dessa teoria.

Desta maneira, os *axiomas* (noções comuns) em Euclides figuram como proposições evidentes e verdadeiras, não somente para a Geometria, mas para toda Matemática sendo necessárias às demonstrações posteriores.

Por exemplo, quando se diz que ‘se iguais são adicionados a iguais, as somas são iguais’, podemos tomá-la como uma proposição verdadeira e autoevidente na Aritmética, na Álgebra e na Matemática elementar em geral; portanto, estamos diante de um *axioma*. Já a proposição: ‘um círculo pode ser descrito com qualquer ponto dado como um centro e qualquer linha dada como um raio’ trata de um pressuposto especial da Geometria, por conseguinte, um *postulado* geométrico.

Sobretudo, as *noções comuns* em Euclides referem-se a verdades autoevidentes, enquanto que os *postulados* estão para suposições que se assumem (que acordamos como verdadeiras) para deduções posteriores e, apesar de serem demonstráveis, são assumidos e usados sem demonstração.

Não encontramos em *Os Elementos* de Euclides qualquer referência quanto à origem, ou sobre a natureza das *noções comuns/axiomas*. No entanto, como refletimos anteriormente,

o pensamento de Euclides tem suas raízes no pensamento platônico, uma vez que existem especulações de que ele possa ter estudado na academia de Platão, na Grécia. Para os gregos platônicos, as verdades não poderiam ser fornecidas pela observação e/ou através de nossos sentidos. Estes últimos só nos fornecem imagens distorcidas da realidade. Nesta perspectiva, o mundo empírico está em constante mutação, impossibilitando, assim, a percepção de noções comuns, que só serão possíveis de abstrair pelas ideias. De modo que as únicas verdades só podem ser concebidas pela razão, pelo intelecto que é imutável e independente do tempo e do espaço material.

Na perspectiva platônica, tais verdades seriam arquitetadas dentro de uma perspectiva de reminiscência (rememorações). De acordo com nota de Van der Waerden (*apud* EUCLIDES, 2009, p.87): “verdades que significam ideias. São ideias que têm Ser verdadeiro, não as coisas que são observadas pelos sentidos. As ideias podem às vezes ser contempladas em momentos de Graça através da reminiscência do tempo em que a alma vivia mais perto de Deus, no reino da verdade”. Deste modo, as *noções comuns* tratam de conhecimentos elementares, trazidos em nossa mente desde nosso nascimento, evidentes e capazes de reconhecer sem estímulo externo.

A Matemática, ainda do ponto de vista platônico, deve ser livre do mundo material e do conhecimento empírico, resultando, daí, que suas propriedades precisam ser provadas apenas recorrendo ao raciocínio lógico e serem independentes dos objetos (quaisquer figuras). Valer-se deles serve apenas para facilitar qualquer exposição das ideias. Deste modo, como exemplo, para os gregos, o interesse não está no estudo da circunferência (em si), pois ela nada mais é que um desenho imperfeito no papel, mas, sim, no estudo do conceito de circularidade, uma ideia abstrata que pode ser tratada pela mente.

Euclides estudou trabalhos de seus antecessores, como os de Hipócrates de Quios, Teeteto e Eudóxio, ocupando-se da codificação e sistematização da Matemática grega até então e empreendia uma estratégia de intercalar, de modo elegante e simples, teoremas já conhecidos com a demonstração de muitos outros, de forma a completar lacunas e dar coerência e encadeamento lógico ao sistema que ia estabelecendo. Ele coletou, de forma sistemática e segundo um tipo modelar de ciência, mas, sobretudo, seu papel não se resumiu ao de acumulador, coube-lhe também prover demonstrações rigorosas àquela época em que elas faziam falta e corrigir outras menos perfeitas.

Nessas inúmeras leituras e estudos, Euclides parece ter observado aspectos fixos, imutáveis, indemonstráveis que compareciam em todos os casos e dos quais derivavam os *postulados* e teoremas. Então, ele sistematizou, organizou, destacou esses aspectos a que chamou: *noções comuns* (que interpretamos tratar dos *axiomas*).

De todo, faz-se oportuno observar que interpretações díspares sobre o que é um *axioma* em Euclides, se estes são os *postulados* ou se são as *noções comuns*, se têm peso e consequências diversas, quando estamos empreendendo a tarefa de interpretar o significado de *axioma*. Isso porque tratam de posições epistemológicas distintas, para a decisão entre se construir uma teoria sobre conjunto fixo de proposições enquanto que ‘suposições’, no caso dos *postulados* e, de outro modo, a decisão de declarar essas proposições como ‘absolutamente verdadeiras’, no caso das *noções comuns/axiomas*.

Entretanto, é eminente observar que, a partir desse trabalho de Euclides, os *axiomas* passam a assumir *status* de ‘verdades’. Como já observamos, Euclides não estabelece explícita distinção sobre o que para ele representa ser *definição*, *postulado* ou *noções comuns*. Interpretamos que esse novo *status* advém, sobretudo, do peso que essa obra, como um todo organizado de conhecimento, adquiriu pelo seu modo de organização, através da consistência interna das demonstrações geométricas empreendidas (mesmo que ele tenha se valido da imaginação visual, se algumas demonstrações se apoiam em diagramas e na intuição espacial, como no célebre teorema em que se busca mostrar que a soma dos três ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a dois ângulos reto, isto é, 180 graus), figurando como a influência decisiva ao significado epistemológico atribuído ao termo *axioma*, considerado como antônimo à hipótese.

Em *Os Elementos*, onde Euclides parte de um sistema mínimo e supostamente completo de verdades não demonstráveis e indemonstráveis – postulados e *axiomas*- está exposta a criação do método *axiomático*-dedutivo que viria a servir de modelo para toda a Matemática (e outras ciências) a partir de então.

Um método que respondia ao ideal aristotélico de ciência dedutiva, consistindo na redução racional (preferivelmente, lógica) de todas as verdades de teoria a uma base mínima e completa de ‘verdades’ evidentes ou simplesmente pressupostas (SILVA, 2007, p.34). Em nosso entendimento, àquela época, não existia nada remotamente similar na Matemática grega e alguns historiadores indicam que Hipócrates tenha escrito, dois séculos antes, também, uma obra intitulada *Elementos*, mas desconhecemos seu conteúdo e, neste sentido, Euclides figura,

em nossa interpretação, como um mestre exemplar de referencial importância em nosso estudo.

#### 6.4.2 Reflexões sobre o significado de *axioma* em Euclides

Observamos que a primeira grande conquista para a sistematização da Matemática, àquela época, foi a elaboração, por Euclides, de sua obra *Os Elementos*. O método que ele utilizou para expor a Geometria por ele reunida e organizada se estabeleceu por milênios, consagrando-se como poderosa ferramenta de sistematização para significativa parte do conhecimento científico. Além de que, até hoje, é também utilizada por alguns educadores que a consideram excelente instrumento didático.

Euclides organizou uma estrutura que muitos estudiosos entendem como sendo lógico-dedutiva e permite a obtenção de centenas de resultados a partir de poucos ‘princípios’, por ele chamados de *noções comuns* ou *postulados*. Tanto as *noções comuns*, como os *postulados* teria, para Euclides, um significado bastante intuitivo, referindo-se a princípios fundamentais, a partir dos quais deduzimos outros princípios, chamados derivados.

No entendimento de Otte (2014)<sup>151</sup>, “Euclides divide seus princípios em *definições*, *postulados* e *noções comuns*. As *definições* e *noções comuns* não poderiam ser contestados, *axiomas* ou *postulados* podem, ou assim parece! As *definições* explicam o significado dos termos”. Ele ainda complementa dizendo que: “os axiomas admitem coisas que são imediatamente evidentes para nosso conhecimento e facilmente compreendidos por nossa compreensão impensada, enquanto que em um postulado pedimos licença para assumir algo que pode ser facilmente provocado ou legados, não necessitando de qualquer trabalho [...]. (*Proclo Commentary*, Princeton UP 1970, p. 140)”. Otte (2014)<sup>152</sup> entende que é relativa a diferença entre *axiomas* e *postulados*. De modo geral, em Euclides, podemos dizer que os *axiomas* são sempre dirigidos para o geral e imutável – à construção de teorias, enquanto os *postulados*, ao particular – à resolução de problemas, e os *postulados* são tomados em um processo construtivo, cuja construção é uma atividade.

Sobretudo, o sentido de *axiomas* para Euclides e para todos, àquele tempo, é o de verdades e se referiam a fatos evidentes por si. Em nosso entendimento e respaldando-nos

<sup>151</sup> Comentário de Otte em momento de orientação, em julho de 2014.

<sup>152</sup> Comentário de Otte em momento de orientação, em julho de 2014.

neste sentido, no pensamento de Ian Muller, o sistema de Euclides não trata de uma estrutura lógico-dedutiva. Quando observamos, percebemos que as *noções comuns* em Euclides não são proposições iniciais que desencadeiam esse sentido ‘lógico dedutivo’- consequentes -, porém estão mais apropriadamente para ‘regras de construções’.

Também notamos que alguns estudiosos identificam o sistema de Euclides com o sistema *axiomático* dos Modernos. Julgamos indevida esta interpretação. Euclides não procede, como Hilbert (como veremos mais adiante) de proposições de deduções lógicas, ele procede de termos e a base de experimentos com diagramas, experimentos mentais (OTTE)<sup>153</sup>.

De modo que há uma distinção a destacar entre o sistema de Euclides e o sistema *axiomático* moderno. Na Modernidade, *axiomas* são proposições tomadas como premissas de uma dedução lógica, através da qual podemos chegar a uma conclusão que são outras proposições e/ou teoremas. Otte<sup>154</sup> considera que, desse ponto de vista, Euclides não foi representativo para a ciência, nem no sentido platônico nem no sentido aristotélico.

Podemos observar que Euclides, no sentido que interpretamos, definindo ‘regras’ às construções, ao organizar o conhecimento geométrico, ele procede expulsando o momento da indução (*epagoge*) – que existia em Aristóteles - o que deixava a metodologia mais empobrecida. Essa dimensão da indução será recuperada somente a partir do século XVI (com Bacon) e mais explicitamente com a *axiomática* moderna.

No entanto, em *Os Elementos* de Euclides, destacamos que seu método de organização e exposição da Matemática é revelador das concepções e do pensamento Grego, principalmente no que trata da relação entre discreto e contínuo. Ele é revelador de uma dicotomia entre esses aspectos no pensamento grego cuja obra veio reforçar e oficializar, de certo modo, tal dicotomia. Segundo Zeno (BOYER, 1974, p. 87), nessa obra, percebemos que

As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em *Os Elementos* os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas (e esse continha a maior parte da Matemática pré-helênica e pitagórica) era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos.

Sobretudo, ressaltamos que a Geometria busca ‘refúgio’ na Álgebra, numa tentativa de enfrentamento à tensão entre esses dois aspectos (discreto e contínuo) mais evidentemente

---

<sup>153</sup> Observação de Otte em momento de orientação, em 12 de abril de 2012.

<sup>154</sup> Observação de Otte em momento de orientação, em 12 de abril de 2012.

constatados no Livro II. E, isso é muito interessante observar, pois, nesse sentido, essa obra representa o início de uma busca que resultará na elaboração do Cálculo Diferencial e Integral, pois Euclides faz o registro do momento em que pesquisadores daquele tempo se voltavam para a possibilidade de explorar a continuidade e esta, na Geometria, em termos de análise algébrica. Não será por acaso que Arquimedes, bem como todos os outros pesquisadores e criadores do Cálculo, no século XVII, voltam-se para o pensamento de Euclides.

Euclides não traça em seu trabalho nenhuma especulação ou reflexão sobre a Linguagem ao processo cognitivo, nem ao desenvolvimento da Geometria ou da Aritmética; entretanto, um ponto em que possa haver perspectiva de inserção da Linguagem refere-se ao que citamos ser uma disposição da Geometria ser trabalhada em termos da análise algébrica. Para Brolezzi (1996, p. 24):

No mundo grego se estabelece a grande divisão entre as noções de discreto e contínuo, em termos de concepção filosófica, marcando profundamente a evolução da Matemática. É Euclides quem melhor registra essa dicotomia que caracterizava a mentalidade grega, dividindo em livros diferentes aquilo que se referia à *geometria* daquilo que se referia aos *números*. A Geometria seria o “reino da continuidade”, enquanto a Aritmética seria o “reino do discreto”.

Otte (2014)<sup>155</sup> também destaca, ao momento, em especial, vivenciado e relacionado ao Conhecimento Matemático: a queda do programa de Pitágoras da aritmetização. Este fato teria conduzido e delineado ao “desenvolvimento do método axiomático de Euclides, ou seja, de um novo método, o qual tem de um lado que resgatar, o que pode ser resgatado (incluindo o método da prova racional) e, por outro lado, aceitar a irredutibilidade da geometria à aritmética (POPPER, K., a sociedade aberta e seus inimigos, capítulo 6, Notes)”.

Assim, revelada a dicotomia entre o reino da continuidade e do discreto, temos desvendado um ponto nodal que permeia a relação entre a Linguagem e o processo cognitivo. De outro modo, ao espelhar a estratégia de resolução da tensão provocada por esses aspectos dicotômicos, especialmente, empreendida à Geometria, vislumbramos o ensaio de aproximação da Linguagem à Matemática (essa entendida como a Geometria). Sobretudo, os gregos não avançaram devido à concepção de número e de razão àquele tempo. A Matemática grega não incluía um conceito geral de número e, conseqüentemente, nenhuma noção de

---

<sup>155</sup> Comentário de Otte em momento de orientação, em julho de 2014..

variável contínua algébrica sobre a qual a teoria do Cálculo ou de Diferencial pudesse ser logicamente baseada, naquela época.

Quando observamos os *Elementos* de Euclides, destacamos que ele busca reduzir suas 465 proposições a apenas 10 enunciados básicos, sendo estes compostos de 5 *axiomas* e 5 *postulados*. Assim, pode-se inferir que tal desenvolvimento seria da forma sintética, no sentido de que se procura derivar o desconhecido e complexo do que é conhecido ou mais simples, o que se assemelha a um processo de construção metafórica, se tomarmos que a construção de uma nova ideia ou conceito se firma sobre ideias ou conceitos já estabelecidos.

Entendemos assim que, uma concepção de Matemática, a partir de um ponto de vista semiótico, pode não valer apenas para a Matemática contemporânea, cuja característica forte é a absoluta abstração, mas se aplica a teorias matemáticas em todos os tempos, de modo que, como salienta Otte (2008), sendo possível que toda exposição de teorias matemáticas desde *Os Elementos* de Euclides, com sua estrutura *teorema-prova*, tenha sido essencialmente metafórica.

Também fica evidente nessa obra e podemos dizer que, em Euclides, caracteriza-se uma dicotomia existente também na mentalidade grega, espelhada na divisão de uma estrutura fechada, compondo-se em livros diferentes do que se refere à Geometria daquilo que diz respeito aos números: a Geometria como reino da continuidade e a Aritmética como o reino do discreto.

Muito interessante é a observação de Silva (2007, p.14) sobre o empreendimento de Euclides. Ele observa que Euclides utilizava uma Linguagem construtiva em Matemática. Por exemplo: quando no seu *Livro I*, em *Os Elementos*, ele pede na proposição *I - construir* um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada, ou na proposição *45 – Construir*, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual à retilínea dada. Vejamos como ele procede na proposição *I* (EUCLIDES, 2009, p. 99):



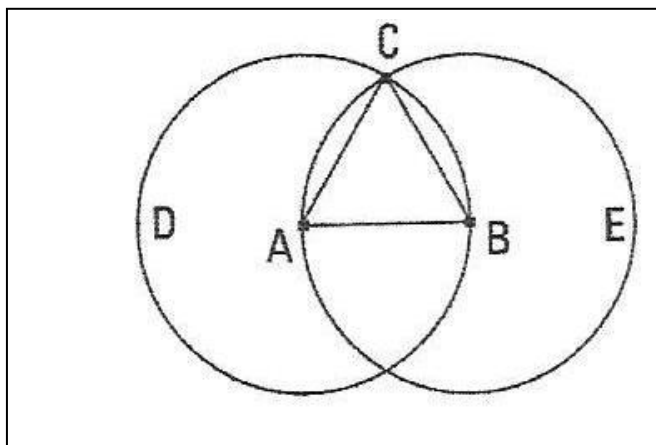


Figura 5: Proposição 1

Demonstração:

Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB **construir** um triângulo equilátero.

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.

E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.

[Portanto, sobre a reta limitada dada, **foi construído** um triângulo equilátero; o que era preciso fazer] [grifo nosso].

Respeitando o que determinam seus *postulados* e *axiomas*, Euclides procede de modo intuitivo-constutivo para provar que é possível efetuar tal construção do triângulo equilátero sobre a reta AB e não dentro de uma estratégia de pensamento lógico-dedutivo. Observamos que, nesse sentido, seus *postulados* e *axiomas* funcionam como regras determinantes de um contexto que se deve respeitar ao proceder à construção desejada e atingir seu objetivo.

Segundo esse autor, agindo deste modo, contrariava a perspectiva platônica (de reminiscências) uma vez que, nesta, os objetos matemáticos, como triângulos, círculos, pré-existem e são independentes de nossa atividade, não tratando de construções.

Mas, retomando os *axiomas*, Szabó, ao analisar Euclides, observa uma especificidade sobre seus princípios:

Explicaremos o arranjo todo das proposições nele [o livro Os Elementos] por esta maneira. Por essa ciência, a geometria, ser de hipóteses, dizemos, e demonstrar as coisas na sequência a partir dos princípios de partida – pois uma única é a não hipotética, e as outras recebem de junto daquela os princípios – é necessário, de algum modo, o organizador dos elementos na geometria transmitir, por um lado, separadamente os princípios da ciência, e, por outro lado, separadamente as conclusões a partir dos princípios, e não dar uma razão para os princípios, mas para as consequências pelos princípios. Pois, nenhuma ciência demonstra os princípios dela própria, nem faz discurso sobre eles, mas tem-nos como autoconfiáveis, e, para ela, são mais evidentes do que os na sequência. E sabemos-nos por causa deles próprios, ao passo que as coisas depois dessas, por causa daquelas. (EUCLIDES 75.5-18, 2009, p. 86).

Desse ponto de vista, em certa medida, podemos interpretar que houvesse a possibilidade de, àquela época, os matemáticos terem uma nova/outra concepção de Matemática como sendo uma ciência hipotética dedutiva (interpretação que observamos em Platão), principalmente evidenciada por Sabó, segundo o qual, mesmo Euclides entenderia que não necessitavam demonstrar seus princípios, nem tampouco pela prática da Dialética. De modo que ele agiria, limitando-se a partir do que já estava “convencionado como verdadeiro” por todos os participantes. Este modo de proceder à mudança de paradigma (a uma ciência hipotético dedutiva) estava associada a um caráter idealista, antiempírico da filosofia eleática. Assim procedendo, interpretamos que os *axiomas* poderiam ser entendidos, assumindo o sentido de hipóteses. O que não ocorre, sobretudo, no pensamento de Euclides.

No entanto, fica-nos mais nítido que, por razões mais ontológicas que epistemológicas, os *axiomas* eram utilizados e tomados como ‘verdades’. E eles procuravam justificar o caráter de “verdade” dos *axiomas* (princípios), visto que estes seriam daquele tipo de ideias que “deveriam ter que ser verdadeiras” e estas podem ser contempladas em momentos de graça, através de reminiscência do tempo em que a alma vivia mais perto de Deus e aqui temos a influência do essencialismo platônico.

Sobremaneira, é relevante que Euclides, ao partir de um sistema mínimo e supostamente completo de verdades não demonstradas e/ou indemonstráveis, seus *axiomas* somados aos seus *postulados*, demonstrava racionalmente todos os enunciados de *Os Elementos*. Então, isso fez com que grande parte de estudiosos passasse a ser considerado como criador do método *axiomático-dedutivo* que, posteriormente, serviria de modelo para toda a Matemática. Esse método consistia na redução racional, preferencialmente lógica, de todas as verdades, de uma teoria à base mínima e completa de verdades evidentes ou simplesmente pressupostas. Mas ressaltamos que, sobre este último ponto, discordamos da

interpretação, pois entendemos que o método não é do tipo lógico-dedutivo, como se configura, a partir da Modernidade, o método *axiomático*. O Método axiomático de Euclides é construtivo. Sobretudo, reconhecemos o mérito da elaboração da obra de Euclides, pois até ele não havia, na história da Matemática, nada remotamente similar.

### 6.5 Axiomas em John Locke (1632-1704)

Este filósofo inglês, especialmente interessado em Filosofia política, é o principal representante do empirismo britânico e considerado o ideólogo do liberalismo. É amplamente conhecido por defender que não existem *ideias*<sup>156</sup> nem princípios inatos, que o nosso conhecimento é determinado pela experiência.

Mas Otte afirma que, até o empirista Locke, acreditava-se na capacidade intelectual da mente. Nós sempre ouvimos dizer que os empiristas concebiam a nossa mente como uma ‘tábula rasa’ (e Locke utiliza explicitamente esta expressão) e todo conhecimento viria de fora. Mas, segundo Otte (2013), para Locke, as *ideias* e as formas não seriam bem assim. Para Locke (e ele tem um capítulo inteiro que fala disso), de certo modo, as *ideias* já estavam em nossa mente e eram instrumentos para organizarmos a experiência empírica. Ele mesmo disse que uma dessas *ideias* seriam as leis da Natureza e tratariam de *ideias* que economizam nosso confronto com o mundo. Somente esse aspecto peculiar do pensamento em Locke, no tratamento dado à perspectiva empirista, já justificaria o nosso interesse à reflexão sobre o sentido interpretativo que ele empreende ao termo *axioma*.

Mas, ainda, podemos acrescentar a esse aspecto o fato de seu pensamento ter influenciado, em grande parte, o pensamento de Jean-Jacques Rousseau, Kant e Leibniz (que publicará em resposta a Locke, o livro *Novos ensaios sobre o entendimento humano*), dentre outros.

Locke escreveu o livro *Ensaio sobre o entendimento*<sup>157</sup> humano, que foi publicado oficialmente em 1690. Neste, Locke apresenta e desenvolve sua teoria sobre a origem e natureza do conhecimento. Também, outro ponto que nos chama especial interesse é ele dedicar um capítulo (o terceiro) inteiramente a reflexões sobre a Linguagem, denotando, em

---

<sup>156</sup> Ao referir-se à “ideia” Locke está tratando de uma *imagem, noção, espécie*, etc., ou seja, aquilo do que a mente se ocupa ao pensar.

<sup>157</sup> Para Locke, chama-se “entendimento” o nosso poder de pensar.

nossa interpretação, um interesse peculiar e diferenciado em seu pensamento sobre o papel da Linguagem no processo cognitivo. Locke (2012, p.13) evidencia que:

Há muito que abusos de linguagem e formas de discurso vagas e insignificantes passam por mistérios de ciência. Palavras difíceis e mal-aplicadas, que pouco ou nada significam, adquiriram, por prescrição, o direito de se confundirem com profunda erudição e alta especulação; e não é fácil persuadir, quem fala e quem ouve, de que não passam essas palavras de abrigos da ignorância, de entrave para o verdadeiro conhecimento.

Segundo Otte (2013), parece ser a partir do pensamento de Locke que evidenciamos o prelúdio da tendência que conduzirá à transformação do discurso mental (embora ainda em Locke se privilegie uma interpretação no sentido de discurso mental) para o discurso explícito e isso se conferirá por uma aproximação da Linguagem ao processo de desenvolvimento cognitivo, nas consequentes reflexões que sua teoria propiciará.

Nossas reflexões foram referendadas no livro acima citado de Locke, numa tradução da 4ª edição original, feita por Peter H. Nidditch, para o português, de Pedro Paulo G. Pimenta, sendo que o primeiro é referência mundial aos estudos *lockeanos*.

Locke atribui a Deus nossa capacidade intelectual e esta capacidade é o que nos diferencia dos outros seres vivos. Para Locke, o homem é essencialmente um ser racional e, em seu trabalho, dedicou-se a investigar como as *ideias* “entram na mente” (LOCKE, 2012, p.27). Locke chama de *ideia* tudo aquilo que a mente percebe em si mesma, ou que seja objeto imediato de percepção, seja de pensamento, seja de entendimento. Uma *ideia* é distinta da causa, ou objeto, que a produz. O objeto, ou causa que produz uma *ideia*, tem o que Locke chama de *qualidade*, ou seja, o poder de produzir tal *ideia* em nossa mente. E, enquanto sensações e percepções em nosso entendimento, tais poderes chamam-se *ideias*.

Mas ele buscou mostrar que não existem, em nossa mente, princípios especulativos inatos, nem tampouco noções primárias que nossa alma receberia em sua primeira existência e traria consigo ao mundo. Como não é inata a própria *ideia* de Deus. Para Locke, inata é nossa “capacidade de conhecer”; no entanto, o conhecimento é, por nós, adquirido. E ele diz que todos os argumentos até então utilizados para garantirem a evidência de qualquer tipo de conhecimento inato só nos servem para evidenciar o contrário: que é impossível um conhecimento inato. Ele afiança dizendo:

Estou de acordo com aqueles que defendem a existência de princípios inatos, que não há na mente nenhum conhecimento dessas máximas, gerais e

evidentes em si mesmas, antes do exercício da razão<sup>158</sup>; mas nego que a razão comece a ser usada no tempo preciso em que elas são primeiro notadas. E, mesmo que fosse assim, isso não provaria que tais máximas são inatas. Tudo que pode significar de verdadeiro com a proposição *os homens assentem a elas quando começam a usar a razão* é que, como a criação de *ideias* gerais abstratas e a compreensão dos nomes gerais são concomitantes à faculdade racional e crescem junto com ela, é comum que as crianças não adquiram *ideias* gerais, nem aprendam o nome que as representam, antes de exercitarem a razão por um bom tempo, com *ideias* mais familiares e particulares, antes que sua fala e as ações cotidianas permitam que se reconheça nessas a capacidade de conversação racional. Se assentir a máximas em questão quando os homens começam a usar a razão pode ter outro sentido verdadeiro, eu gostaria que me mostrassem como isso provaria, em qualquer sentido, serem elas inatas (LOCKE, 2012, p.35).

Segundo Locke, a mente é fornecida de *ideias* e de Linguagem, que são os materiais do exercício de sua faculdade discursiva. Quando neste ponto observamos Locke enfatizar a Linguagem, parece querer dar-lhe destaque enquanto papel de constituinte da nossa mente e, inclusive, podendo ela ser tomada no sentido operante e constituinte no desenvolvimento do nosso conhecimento. Mas, ainda é muito cedo para qualquer conclusão neste sentido.

Locke, afirma que o uso da razão vai se tornando mais visível na medida em que são incrementados os materiais de que se ocupa. Assim, os sentidos introduzem *ideias* particulares “que ocupam o gabinete vazio” (LOCKE, 2012, p.35). E, conforme a mente vai se familiarizando com essas *ideias*, instala-as com nomes na memória e, dando prosseguimento, abstrai-as e aprende a usar nomes gerais (e neste aspecto e posicionamento podemos dizer que Locke identifica ‘razão’ com faculdade discursiva). Ele afirma que a aquisição de *ideias* gerais é concomitante ao uso da razão e de palavras gerais, mas isso não implica, de forma alguma, entender que as *ideias* sejam inatas. O conhecimento é sempre de *ideias* adquiridas e não inatas.

Ele aponta que “a *ideia* antecede a palavra” (LOCKE, 2012, p.38), denotando, em seu pensamento, haver uma dicotomia entre Linguagem e *ideias* e isto nos direciona a interpretar que ele, de certa maneira, admite essa dicotomia entre a Linguagem e o processo cognitivo. Em nossa perspectiva interpretativa semiótica, sempre é relativa a distinção entre *ideia* (pensamento) e representação (palavra). De modo que não fica muito claro, no pensamento de Locke, como se processa essa relação envolvendo *ideias* e Linguagem, no desenvolvimento do nosso conhecimento.

Ele ainda observa sobre seu interesse investigativo:

---

<sup>158</sup> Para Locke, ‘razão’ é a faculdade do homem que o distingue dos animais, e a qual o coloca acima deles.

Eu presumo que me será concedido que existem *ideias* na mente dos homens: cada um tem consciência delas em si mesmo; e as palavras e ações de outros homens provam que também estão neles. Nós investigaremos, em primeiro lugar, como elas entram na mente (LOCKE, 2012, p. 27).

Para Locke, *Ideias* são objetos do pensar que “entram” em nossa mente. Mas, o que significa esse “entrar” em nossa mente?

Interessante observar que, para explicar sobre este aspecto das *ideias* e do conhecimento, Locke parte de uma suposição, dizendo: “supomos que a mente seja, por assim dizer, uma tela em branco, sem nenhum caractere, sem nenhuma *ideia* inata [...]” (LOCKE, 2012, p.97). Desse modo, notamos que o sentido de “em branco” reside na defesa da ausência de uma forma de conhecimento inato.

E para esse filósofo, todo e qualquer conhecimento, os materiais de nossa razão se fundam na experiência. Segundo ele, temos duas fontes de conhecimento: ‘sensação’ e ‘reflexão’. Dessas duas fontes, fluem todas as *ideias* que vêm da “nossa observação, seja de objetos externos sensíveis, seja de operações internas de nossa mente que percebemos e refletimos em nós mesmos, eis aquilo que supre nosso entendimento de todo material do pensar (LOCKE, 2012, p.98)”.

As origens de todo nosso Conhecimento estão na ‘sensação’ e ‘reflexão’, de impressões ou de movimento numa parte do corpo. É a partir dessas impressões de objetos externos (reais ou não) em nossos sentidos que a mente primeiro se ocupa em operações como percepção, lembrança, consideração, raciocínio etc. (LOCKE, 2012, p.113).

Com o tempo, a mente reflete sobre suas *operações* em *ideias* de *sensação* e supre-se de um novo conjunto de *ideias* que chamo de *ideias* de *reflexão*. As *origens de nosso conhecimento* são, portanto, como eu já disse, *impressões*, nos *sentidos*, de objetos externos, extrínsecos à mente, e *operações desta*, procedentes de poderes intrínsecos a ela, e que, refletidas por ela mesma, se tornam objetos de sua própria contemplação. A primeira faculdade do intelecto humano é a disposição da mente para receber impressões, seja de objetos externos, por meio dos *sentidos*, seja de suas próprias operações, por meio de *reflexão*. Esse é o primeiro passo do homem rumo a toda descoberta, o solo onde constrói todas as noções naturalmente adquiridas neste mundo (LOCKE, 2012, p.113).

E, para Locke, nesta parte inicial, nosso entendimento tem o caráter de passivo aos materiais do conhecimento e tratam, especificamente, da fase em que adquirimos *ideias simples*, já que os pontos de partida não estão em seu poder (mas exteriores).

As *ideias simples* seriam o material de todo nosso conhecimento, “sugerem-se e oferecem-se à mente apenas numa das vias anteriormente mencionadas, *sensação* e *reflexão*” (LOCKE, 2012, p.115). Uma vez que o entendimento se equipa dessas ideias, aí então pode repeti-las, compará-las e uni-las, com uma gama quase infinita de variedade, passando a possibilitar-nos criar *ideias complexas*.

Locke concebe que os corpos possuem *qualidades* e estas, por sua vez, produzem *ideias* em nós por *impulso*. Esse *impulso* gera o movimento de nossa *percepção*, que é o primeiro passo (ao qual somos passivos), ou seja, a primeira operação ou degrau de nossas faculdades intelectuais, à entrada de todo material do conhecimento em nossa mente. Somente a partir daí, é dado início o nosso processo de conhecimento humano. Mas ele complementa que outros variados degraus também operam nesse processo até chegarmos às *ideias simples*, sejam eles: *retenção*, *memória*, *discernimento* e *composição*.

Na explicação de Locke, não fica tão explícito esse sentido de passividade especialmente quando ele exemplifica dizendo que, de todas as nossas *ideias*, nenhuma é tão simples e sugerida à mente por tantas vias com a de *unidade*. Para ele, “a *ideia* de *unidade* é de todas a mais íntima de nosso pensamento e, por concordar com todas as coisas, é também a mais universal: números aplicam-se a homens, anjos, ações, pensamentos e tudo aquilo que existe ou que é imaginável (LOCKE, 2012, p.209)”. Com esse posicionamento e, por considerar que a *ideia* de *unidade* esteja envolvida em cada objeto de nossos sentidos, mas também estando em cada *ideia* do nosso entendimento, Locke nos conduz a interpretá-la quase como resultado de uma Complementaridade entre esses elementos externos como elementos internos, não se tratando, assim, de uma forma tão passiva como destacava anteriormente, mas como resultado de um movimento que aciona, de certa forma, a capacidade inata.

Os números, no entendimento de Locke (2012), seriam de todos os *modos simples*, os *mais distintos*. Assim, ao repetir na mente a *ideia* de *unidade*, ao adicionar uma repetição na outra, encontramos as *ideias complexas* dos seus *modos* de número, por exemplo: dois, de número par etc. Os muitos modos de números existiriam em nossa mente em muitas combinações invariáveis de unidades, podendo ser apenas maiores ou menores. Observamos que ele explica:

O poder de receber *ideias* ou pensamentos a partir da operação de uma substância externa chama-se *poder de pensar*, e é um *poder passivo*, uma capacidade. Mas a

habilidade de considerar *ideias* ausentes segundo nossa própria escolha e de compará-las para ver quais concordam entre si é um *poder ativo* (LOCKE, 2012, p.295).

Para Locke, a etapa no processo cognitivo através da qual somos conduzidos à formação de *ideias complexas* seria a *abstração*. Também evidenciamos no pensamento de Locke, especificamente quando é introduzido o processo pelo qual chegamos a *ideias complexas*, ficar evidente o aspecto de um direcionamento mais estreito e significativo do papel da Linguagem. Para Locke, a mente só começa a ter papel ativo a partir do momento em que toma as *ideias simples* como matéria e fundação de *ideias complexas*. E identificamos ser nesse ponto que a Linguagem, no pensamento de Locke, irá adquirir um *status* diferenciado no processo de desenvolvimento cognitivo e desenvolvimento do nosso conhecimento e esse é um aspecto importante e singular em sua teoria.

Locke nos diz que:

Como o uso das palavras é representar, em marcas externas, nossas *ideias* internas, e como cada *ideia* é tomada como coisa particular, se cada *ideia* particular recebesse um nome distinto, o número destes seria infinito. Para evitá-lo, a mente torna gerais *ideias* particulares recebidas de objetos particulares e considera-as em si mesmas, ou seja, como aparições separadas de toda circunstância de existência real, como tempo, lugar e outras. Isso se chama *ABSTRAÇÃO*, pela qual *ideias* tomadas de seres particulares tornam-se representantes gerais de todos os seres do mesmo gênero, e os nomes dessas *ideias*, representantes de nomes gerais aplicáveis a tudo o que se conforme com elas (LOCKE, 2012, p.158-159).

E, neste posicionamento, verificamos o destaque que esse filósofo começa a empreender sobre o papel da Linguagem ao desenvolvimento cognitivo, mas, sobretudo, que os conceitos irão privilegiar o sentido classificatório e descritivo. Nesta direção, ele ainda complementa, dizendo:

O entendimento parte da *ideia* de um ser particular e, anexando a ela um nome, toma-a como padrão para classificar existências reais em sortes, segundo concordem com o parâmetro, e para *denominá-las*, de acordo com ele. Observamos hoje na neve a mesma cor que ontem recebi do leite, a mente considera somente a aparição, faz dela representante de todas do mesmo gênero e dá a ela o nome *branco*, significando com esse som a mesma qualidade, onde quer que a imagine ou a encontre. Criam-se assim universais, sejam *ideias*, sejam termos (LOCKE, 2012, p.159).

Desse modo, Locke introduz seu entendimento sobre o papel da Linguagem no qual pesará uma variedade de *ideias* que requerem, mais do que qualquer outra, ‘nomes’ e/ou ‘marcas’ para distinguir cada combinação. Sobretudo, como podemos observar nesta



explanação sobre *unidade* e *número*, embora ele acene para um papel mais significativo da Linguagem no processo cognitivo, esta participação é ainda minimista, priorizando somente o sentido de tornar mais inteligível uma classificação, tão somente, como ele diz: “nomear para distinguir”. “Se menciono isso de passagem, não é para introduzir novos nomes, mas apenas para mostrar como, para numerar, precisamos de nomes distintos” (LOCKE, 2012, p.212).

Para Locke, todo esse processo indica como se dá a “única via para conceber a possibilidade de descobrir como *ideias* de coisas são trazidas ao entendimento” (LOCKE, 2012, p.162).

Sobretudo, Locke sempre insiste em destacar que, na parte do processo que conduz até às *ideias simples*, a mente humana assumiria um papel de passividade, justificando que ela não as cria nem as constitui por si mesma, somente ‘recebe-as’, inclusive, dizendo que, para se chegar a *ideias complexas*: “[...] por mais distante que pareça [por exemplo, a *ideia* de infinito] de toda percepção sensível, não tem nada que não venha de *ideias simples* que a mente recebe dos sentidos e junta por meio da faculdade de repetição” (LOCKE, 2012, p.230).

Locke estabelece que, independente de sua composição ou decomposição, da infinidade e infindável capacidade de preencher e entreter o pensamento humano, as *ideias complexas* podem ser distinguidas por três pontos: *modos (simples e mistos)*, *substâncias* e *relações*.

As *modificações* de *ideias simples* que chamamos de *modo simples* são, para a mente, *ideias* tão diferentes e distintas da *ideia* simples mesma quanto de duas *ideias* separadas contrárias. *Um* e *dois* são *ideias* tão distintas entre si quanto *azul* e *calor*, e distinguem-se, igualmente, de *ideias* de outros números, Mas todas as *ideias* de números são criadas a partir da repetição de uma mesma *ideia* simples de unidade: juntando-se repetições do mesmo gênero, criam-se *modos simples* distintos, como uma *dúzia*, uma *grosa*, um *milhão* (LOCKE, 2012, p. 167).

Mas Locke também percebe e destaca que há conexão muito íntima entre *ideias* e palavras, mesmo após indicar uma distinção. Ele dirá que é tão constante a relação entre *ideias* abstratas e palavras gerais que dedicará um capítulo inteiro no seu *Ensaio* para refletir e explicar sobre o uso da Linguagem e sua função diante do processo do desenvolvimento do nosso conhecimento e, para ele, ‘conhecimento’ consiste em proposições.

Todo nosso conhecimento versa apenas de *verdades, particulares ou gerais* e é evidente que, por maior que sejam, as *verdades gerais* que a razão tanto busca não se dão a conhecer, e dificilmente se *apreendem*, senão concebidas e expressas

em palavras. Está em nosso caminho, faz parte do exame de nosso conhecimento investigar a verdade e a certeza de proposições universais (LOCKE, 2012, p.636).

Só esse fato revela existir, em seu entendimento, uma compreensão diferenciada sobre o papel e função da Linguagem, mas à qual ele seja impedido de avançar, devido a concepções ontológicas. Para Locke, não há como falar de como o nosso entendimento faria uso das *ideias*, sem conjecturar (compreender melhor) sobre o papel da Linguagem. Assim, identificamos em Locke um processo tensional entre sujeito ontológico e o epistemológico.

### 6.5.1 Locke e o papel da Linguagem no uso que nosso entendimento faz das *ideias*

Para Locke, não há dúvidas sobre a importância da Linguagem no processo de nosso desenvolvimento cognitivo e de nosso conhecimento, principalmente, por entender que:

Tendo Deus designado o homem como criatura sociável, não apenas incutiu nele a necessidade de relações com seus congêneres, e a inclinação para tal, como também forneceu-lhe a linguagem, principal instrumento e laço comum de associação. O *homem* tem assim, por natureza, órgãos confeccionados para a *disposição de moldar sons articulados* que chamamos palavras. [...] além de moldar sons articulados, o homem [... tem...] *habilidade de usá-los como signos de concepções internas* que representem, como marcas, *ideias* dentro de sua própria mente, seja para dá-las ao conhecimento de outros, seja para transmitir pensamentos de uma mente para outra (LOCKE, 2012, p.433).

Pensando desse modo, ele aponta que é “impossível discutir o conhecimento, que, versando de proposições, e comumente universais, tem com as palavras uma conexão mais íntima do que se suspeita” (LOCKE, 2012, p. 436).

Locke desencadeará, a partir de suas reflexões, um destaque direcionado ao aspecto singular da generalização, que se sobressai tanto no processo linguístico como no desenvolvimento de nosso conhecimento. Até então, a Linguagem era tomada, de um lado, numa relação mais estreita com a Lógica e não relacionada especialmente a inferências válidas. Ou, de outro lado, envolvendo o aspecto classificatório e descritivo da/na conceitualização. Já Locke, ampliará o destaque dado à Linguagem, afirmando que esses aspectos não seriam suficientes para responder sobre a utilidade necessária da Linguagem.

Além de significar *ideias*, a perfeição da linguagem requer o uso de sons como *signos que compreendam muitas coisas particulares*: se cada particular fosse significado por um nome distinto, a multiplicação de palavras embotaria o uso da

linguagem. Para evitar essa inconveniência é necessário aprimorar o uso de termos gerais na linguagem; estes, com uma única palavra, marcam inúmeras existências particulares. Esse vantajoso uso de sons adquire-se pela diferenciação entre as *ideias* que significam. Tornam-se gerais os nomes criados para representar *ideias* gerais; permanecem particulares aqueles usados para *ideias* particulares (LOCKE, 2012, p. 434).

Locke informa que, relacionado ao papel da Linguagem, seria sempre conveniente considerar: primeiro aquilo a que se aplicam imediatamente os nomes no uso da Linguagem, indicando, deste modo, um destaque à dimensão referencial (extensão); e, segundo, como todos os nomes, exceto os nomes próprios, seriam gerais e não representariam particularmente esta ou aquela coisa particular, mas uma sorte de arranjos de coisas, tal aspecto poderíamos inferir como a possibilidade de destaque à dimensão intencional.

No entanto, embora atribua ênfase especial à Linguagem no processo de conhecimento, de outro modo, ele a situará como tendo papel de “subserviência à instrução e ao conhecimento” (LOCKE, 2012, p.435). Ele procede, em seu entendimento, à distinção nítida entre o que sejam *ideias* e *palavras*, que podemos destacar em sua explicação abaixo:

[...] e o homem precisa encontrar signos externos que deem ao conhecimento alheio as *ideias* invisíveis que perfazem o pensamento de cada um. [...] as *palavras* [...] passaram a ser usadas pelos homens como *signos* de suas *ideias* [...] pela imposição voluntária mediante a qual uma palavra se torna marca arbitrária de uma *ideia*. As palavras são então usadas como marcas sensíveis de *ideias*: as *ideias* que representam são sua significação própria e imediata. [...] Assim, em sua significação primária ou originária, as palavras somente representam *ideias* na mente do homem que as usa (LOCKE, 2012, p.436-437).

De modo que, nestes últimos pontos, seu pensamento destoa do nosso entendimento dentro de uma perspectiva no sentido da Complementaridade ‘otteana’ e abordagem semiótica. Para Locke, no desenvolvimento de nosso conhecimento, podem existir palavras sem *ideias*. Entretanto, acontece de as palavras representarem algo para uma pessoa e nada para outra; isso se explica pelo fato de as palavras serem signos voluntários. Mas, quando falamos de ‘entendimento’, as palavras só podem ser impostas ao que se conhece; do contrário, são signos de nada, sons sem significação. Ao indicar que, para ele, é possível existir palavra sem significação ou mesmo com significado obscuro, ele reconhecerá essa como uma característica da imperfeição das palavras. Daí a subserviência dela sob o nosso entendimento.

Palavras (com significado) são signos imediatos de *ideias* dos homens. “Por mais que um homem use palavras diferentemente de outro a quem se dirige – seja no significado geral,

seja no sentido particular -, certo é que a significação de suas palavras se limita às suas *ideias*, e que elas não podem significar nada mais” (LOCKE, 2012, p.441).

Locke ainda aponta ressalvas relacionadas à Linguagem e à imperfeição das palavras. As palavras serão mais ou menos perfeitas somente na medida em que se predisponham ao seu uso e fim.

O conhecimento remete a coisas; mas concerne à verdade, e, assim a proposições. O conhecimento se dá, no mais das vezes, pela intervenção de palavras; que mal se separam, portanto, do conhecimento em geral. Entre nosso conhecimento e a verdade que ele quer contemplar e aprender interpõem-se as palavras, como *médium* através do qual entram os objetos sensíveis, e, assim, se há nas palavras obscuridade ou desordem, desce uma névoa diante dos olhos e paralisa o entendimento. [...] E sou dado a imaginar que, fossem levadas a sério as imperfeições da linguagem enquanto instrumento de conhecimento, boa parte das controvérsias que tanta balbúrdia causam no mundo desapareceriam, limpando caminho para o conhecimento e para a paz (LOCKE, 2012, p.532).

Mesmo dando destaque às palavras como elemento mediador entre mundo sensível e mente cognoscente, para esse filósofo existiriam dois usos e fins para as palavras: primeiro, para registrarmos nossos próprios pensamentos (em prol da memória, ou seja, a conversa do homem consigo mesmo) e, segundo, para comunicarmos nossos pensamentos aos outros, com tanta facilidade e celeridade quanto possível (LOCKE, 2012, p.518). Locke não atribui uma função operativa à Linguagem, ou seja, a *palavra* no processo de nosso desenvolvimento cognitivo.

Indicando que a imperfeição das palavras seria a significação dúbia e incerta, ou seja, uma diferença entre as *ideias* que elas representariam se, de um modo, Locke traz a Linguagem numa relação mais especial e íntima com nosso entendimento e ao processo de desenvolvimento do conhecimento, sobretudo, identificamos que ele ainda a situa com uma função essencialmente comunicativa e nominativa, relacionada à inteligibilidade.

Para que as palavras sirvam ao fim da comunicação é necessário que excitem no ouvido exatamente a mesma *ideia* que representam na mente de quem fala. Sem isso, os homens encheriam a cabeça de ruído e sons e não transmitiriam pensamento nem apresentariam *ideias* uns para os outros, como exige o fim do discurso e da linguagem (LOCKE, 2012, p.520).

Para Locke, ‘conhecer’ consiste na percepção de concordância ou discordância entre *ideias*. Sendo que, para ele, a ‘verdade’ implica a “apropriada reunião ou separação de signos

(ideias ou palavras) segundo concordem ou discordem as coisas que eles significam” (LOCKE, 2012, p.629-630). Segundo ele:

Para melhor entendermos o que consiste concordância ou discordância podemos compreendê-las em quatro sortes: 1. Identidade ou diversidade; 2. Relação; 3. Coexistência ou conexão necessária; 4. Existência real. [...] o primeiro ato da mente diante de sentimentos ou *ideias* é percebê-las, e, conquanto as perceba, conhecer cada uma delas percebendo que uma não é igual a outra, mas sim diferentes. [...] e eventuais dúvidas devem-se antes a nomes de ideias que a elas mesmas, cuja identidade ou diversidade é claramente percebida tão logo sejam percebidas [...]. [...] Como todas as *ideias* distintas devem ser sempre conhecidas como desiguais, negando universal e constantemente umas as outras, não haveria nenhum conhecimento positivo se não percebêssemos relações entre nossas *ideias* nem encontrássemos concordância e discordância entre elas nos muitos aspectos em que a mente as compara. [...]. A terceira sorte de concordância ou discordância entre *ideias* percebidas pela mente é sua coexistência ou não coexistência num mesmo objeto; e vale especialmente para substâncias. [...]. A quarta e última [...] é a existência atual e real em acordo com uma *ideia* (LOCKE, 2012, p.576-577).

Só valeria e mereceria estima, para Locke, o conhecimento que se refere às coisas, pois só ele dá valor a nossos raciocínios. Nossa mente não conhece as coisas imediatamente, mas sempre por intermédio de suas *ideias*. Ele nos diz que nosso conhecimento é *real* na medida em que há conformidade entre nossas *ideias* e a realidade das coisas.

[...] todas as *ideias simples* são, necessariamente, produto de coisas que operam na mente por vias naturais e produzem as percepções que a sabedoria e a vontade de nosso criador ordenou e adaptou a elas. Segue-se que *ideias simples não são ficções* de nossa fantasia, mas produções naturais e regulares de coisas fora de nós e embutem toda conformidade pretendida ou requerida por nosso estado (LOCKE, 2012, p.618).

Observamos, desse modo, destacar-se a forte posição empirista no pensamento desse filósofo, inclusive, ao justificar sobre a certeza de nosso conhecimento. Para Locke, a conformidade entre as nossas *ideias simples* e a existência das coisas seria suficiente ao conhecimento real.

Mas, sobretudo, ainda temos as *ideias complexas* – exceto as de substâncias - que figuram como *arquétipos* criados pela nossa mente sem a intenção de copiar qualquer ou uma coisa, nem mesmo a referir-se a uma existência como seu original e só podem ser, necessariamente, conforme um *conhecimento real*. E, *ideias complexas* enquanto,

[...] arquétipo de si mesmas [...]. [...] não é suscetível de erro na representação [...]. E assim nós temos infalível certeza de que todo nosso conhecimento de ideias complexas é real e alcança as coisas mesmas: em todos os nossos pensamentos,

raciocínios e discursos no gênero, só nos dirigimos às coisas enquanto conformes a nossas *ideias*, de cuja realidade temos indubitável certeza (LOCKE, 2012, p.619).

Conhecimento e certeza requerem *ideias* determinadas e *conhecimento real* requer correspondência entre *ideias* e seus *arquétipos*. E, a certeza de nosso conhecimento reside na consideração de nossas *ideias* sem ponderar a existência real das coisas. Poderíamos entender e interpretar, ao referir-se a “arquétipos”, o prelúdio à abordagem semiótica no pensamento de Locke.

E ele, ainda, reforça uma interpretação semiótica em sua interessante reflexão direcionada ao Conhecimento Matemático. A este, ele indica como, indubitavelmente, seja o nosso conhecimento possível de *verdades matemáticas* e estas sendo tão certas quanto reais, mesmo restringindo-se às nossas próprias *ideias*. Para Locke,

O matemático considera que verdades ou propriedades pertencem ao retângulo e ao círculo, apenas enquanto estão em ideia, em sua própria mente. Possivelmente, jamais em sua vida os encontrará existindo matematicamente, ou seja, precisamente verdadeiros. E, no entanto, seu conhecimento de verdades ou de propriedades pertencentes a um círculo, ou a outra figura matemática qualquer, é verdadeiro e certo, de coisas realmente existentes e reais que só lhe dizem respeito na enunciação de proposições, na medida em que realmente concordam com os *arquétipos* ou ideias inteiramente completas e adequadas. Sendo assim toda a concordância e discordância que nelas encontramos produz um conhecimento tão real, quanto o de figuras matemáticas. [...] Os discursos dos matemáticos acerca do enquadramento do círculo, de seções cônicas e outras partes de sua ciência não concernem a existência de nenhuma dessas figuras; ao contrário, suas demonstrações, que dependem de suas ideias, são sempre iguais, existam ou não no mundo um quadrado ou um círculo (LOCKE, 2012, p.620-621).

A verdade significa, para Locke, a apropriada reunião ou separação de signos segundo concordem ou discordem as coisas que eles significam. De modo que reunir e separar signos é o que se chama, em outras palavras, de *proposição*. E a verdade estaria nas proposições que poderiam ser mentais ou verbais (teríamos também verdades mentais e verbais), conforme correspondendo aos dois tipos de signos mais usados, *ideias* e *palavras*. De fato, entendemos que, no pensamento de Locke, existe uma tendência de transformação do discurso mental para o discurso explícito.

Percebemos que a verdade – do conhecimento – surge de uma conjunção, ou convergência que se opera das *ideias* às palavras e falseabilidade ou engano e, quando acontecem, têm a ver mais com o tipo do emprego ou com uso que operamos as palavras, ao relacioná-las com nossas *ideias*.

Todavia, não podemos deixar de destacar que, mesmo procedendo a uma distinção entre *ideias* e palavras, ele as compreende como representações sígnicas, e esse fato abrirá espaço para um direcionamento que iniciará reflexões e especulações filosóficas a uma virada à Linguística, sobre o desenvolvimento do nosso conhecimento.

Locke reconhece e distingue dois graus de conhecimentos: *intuição* e *demonstração*. E tudo aquilo que deles se afastem, por mais confidentes que sejam, seriam opinião ou fé, mas não conhecimento de verdades gerais.

Quando nossa mente percebe a concordância e discordância entre duas *ideias* por si mesmas, sem intervenção de nenhuma outra via, Locke chama este tipo de conhecimento de *intuitivo*. E, da *intuição*, depende toda a certeza e evidência de nosso inteiro conhecimento. Outro grau de conhecimento é denominado por Locke de *demonstrativo* e, neste, a concordância e a discordância não se dão imediatamente. Mas, a certeza é tão inteiramente dependente da intuição que, nesse segundo grau de conhecimento, ela é necessária em todas as conexões de *ideias* intermediárias: “sem ela não alcançaríamos nem conhecimento nem certeza” (LOCKE, 2012, p.582).

A Matemática, por exemplo, seria um tipo de conhecimento discursivo:

A razão de a mente nem sempre perceber presentemente concordância e/ou discordância entre duas *ideias* é a impossibilidade de reunir as *ideias* investigadas de tal maneira a descobrir concordância ou discordância. Ora, se a mente não pode reuni-las, nem por comparação imediata, justaposição ou aplicação de uma à outra, [...] ela é constringida a descobrir a concordância ou discordância por intermédio de outras *ideias*. Essa intervenção chama-se *raciocínio*. Se a mente quer saber de concordância ou discordância de grandeza entre três ângulos de um triângulo e dois ângulos retos, ela não tem nenhuma visão imediata nem pode compará-los, pois os três ângulos de um triângulo não se apresentam de uma só vez, e falta-lhe conhecimento imediato e intuitivo. Sendo assim, ela procura outros ângulos em relação de igualdade com os três ângulos do triângulo para, sendo eles iguais a dois ângulos retos, conhecer a igualdade entre os três ângulos e os dois retos (LOCKE, 2012, p.582-583).

Em cada passo do conhecimento demonstrativo, há sempre conhecimento intuitivo que é requerido pela razão entre uma ideia intermediária e sua próxima e a garante. É a certeza intuitiva a cada passo do raciocínio que produz conhecimento. Segundo Locke, foi este fato, ou seja, a necessidade de conhecimento intuitivo em cada passo do raciocínio científico ou demonstrativo, que levou ao equívoco de se conceber as *máximas* ou *axiomas* como fundação de todos os nossos conhecimentos e raciocínios.

Locke também destaca outro grau do nosso conhecimento, que tem a ver com a certeza da existência de objetos externos particulares pela percepção e pela consciência da atual aquisição de *ideias*, vindas deles: trata-se do conhecimento *sensível*. E este tipo de conhecimento não carece de nenhum grau de certeza.

Outro ponto que nos atrai interesse particular nas reflexões desse filósofo é ele compreender que “nomear distintamente cada coisa não seria muito útil para aprimorar o conhecimento” (LOCKE, 2012, p.442). Assim, interpretamos que, para ele, ‘nomear’ e ‘conhecer’ tratariam de ações bem distintas e, desse modo, a Linguagem é apartada do processo cognitivo. Entretanto, uma ênfase diferenciada aos nomes será por ele empreendida quando de sua explanação sobre os *nomes gerais*, a generalização, dizendo que:

A próxima coisa a considerar é como se criam palavras gerais. [...] Palavras são gerais se usadas como signos de *ideias* gerais; *ideias* são gerais se depuradas de circunstâncias de tempo e de lugar e de toda outra *ideia* que as determine a esta ou aquela existência particular. Nesta via de abstração, *ideias* são capazes de representar mais de um indivíduo; que, se for em si mesmo conforme à *ideia* abstrata, é dito de uma sorte (LOCKE, 2012, p.443).

Locke também dirá que tanto *geral* como *universal* não pertencem à existência real das coisas, mas tratam de “invenção e criação do entendimento para uso próprio e dizem respeito apenas a signos – palavras ou *ideias*” (LOCKE, 2012, p.447). E que o significado de um geral ou universal seria uma mera relação que a mente adiciona a esses nomes.

É interessante observar a explanação de Locke sobre o processo de nosso Conhecimento espelhado em proposições:

O que leva a mente a assentir a proposições como essas é a mera percepção de concordância ou discordância entre *ideias* segundo se confirme ou se neguem em palavras compreensíveis. Estando a mente ciente de que cada *ideia* é o que é, e de que duas *ideias* distintas não são iguais, segue-se que as primeiras verdades evidentes em si mesmas que conhece são as feitas com as primeiras ideias presentes na mente. Ora, é evidente que as primeiras *ideias* da mente são coisas particulares a partir das quais o entendimento procede gradualmente até *ideias* gerais que, tomadas de objetos comuns, familiares aos sentidos, são consolidadas na mente com nomes gerais, ou específicas, enquanto as mais próximas das particulares. [...]. Se refletirmos sobre elas constataremos que *ideias gerais* são ficções, artifícios da mente que embutem dificuldades e não se oferecem com facilidade que geralmente se supõe. Por exemplo, para formar a *ideia geral* de um triângulo, que não é das mais abstratas, compreensivas e difíceis, requer-se alguma habilidade, uma vez que a ideia não é de triângulo oblíquo, retângulo, equilátero ou escaleno, mas de todos e de nenhuma ao mesmo tempo. Trata-se, com efeito, de uma imperfeição, de algo que não pode existir, de uma *ideia* que junta partes de muitas *ideias* diferentes e inconsistentes entre si. É verdade que a mente, sendo imperfeita, precisa delas, e lança-se ao seu encaixo tanto quanto pode, em nome da conveniência da



comunicação e do alargamento do conhecimento, para os quais se inclina naturalmente (LOCKE, 2012, p.654-655).

Identificamos que Locke destaca ao papel da generalização, não somente à nossa comunicação, mas também ao “alargamento” do nosso conhecimento e, neste ponto, a Linguagem funcionaria como ‘incorporando’ um objeto que não é real, e o evidenciando, caracterizado como resultado de uma perspectiva relacional-estruturalista.

No entanto, Locke não avança de uma perspectiva meramente descritiva a uma perspectiva operativa/relacional especialmente direcionada aos nomes gerais, pois ele os toma ainda num sentido de classificação, tanto que indica se tratarem de *gêneros* ou *espécies*. Para ele, *gênero* e *espécies* seriam criações do entendimento humano, mas fundam-se na similitude entre as coisas. Assim, Locke compreende que nosso entendimento cumpriria uma função organizadora do nosso mundo empírico.

Para Locke, a grande vantagem da generalização pode ser resumida no pensamento a seguir:

Para concluir, eu direi que toda a questão de gêneros e espécies e de suas *essências* se resume a isto: os homens, ao criarem *ideias* abstratas e a erigirem na mente com nomes anexados, são capazes de considerar coisas e de falar sobre elas, como que aos montes, para o pronto e fácil aprimoramento e comunicação de conhecimento; que avançaria lentamente se palavras e pensamentos se confinassem apenas a particulares (LOCKE, 2012, p. 454).

De forma que, relacionado à Linguagem, observamos que o direcionamento, em especial ao processo de generalização no sentido de aprimoramento, tem a ver com o aprimoramento comunicativo do nosso conhecimento, no sentido de classificação e ordenação do mundo.

Sobre a certeza das proposições gerais, Locke nos diz que essas somente podem ser certas se os seus termos representarem ideias que nos permitam descobrir expressa concordância ou discordância recíproca. De forma que só sabemos da certeza de sua verdade ou sua falsidade quando percebemos concordância ou discordância entre as *ideias* representadas pelos termos, na medida em que se afirmem ou se neguem umas as outras. A *certeza geral* seria, portanto, um atributo de nossas *ideias* (Locke, 2012, p. 649), pois que, buscando-a em experimento e observações fora de nós, o nosso conhecimento não irá além do particular. E, somente a contemplação de nossas próprias ideias abstratas pode fornecer-nos *conhecimento geral*.

Tal aspecto terá singular destaque no pensamento desse filósofo e influenciará as reflexões a partir de então. Mas, sobretudo, Locke não assume nem toma o direcionamento de uma abordagem que entende a Linguagem como operativa no nosso desenvolvimento cognitivo e do nosso conhecimento.

Para Locke, a Linguagem, as palavras, como as proposições, têm forte laço extensional, ou seja, referencial. As ideias devem ser bem determinadas aos seus objetos referenciais para que tenhamos conhecimento.

O conhecimento remete às coisas, mas concerne à verdade, e, assim, a proposições. O conhecimento se dá, no mais das vezes, pela intervenção das palavras; que mal se separam, portanto, do conhecimento em geral. Entre o nosso entendimento e a verdade que ele quer contemplar e aprender interpõem-se as palavras como *médium* através do qual entram os objetos sensíveis; e, assim, se há nas palavras obscuridade ou desordem, desce uma névoa diante dos olhos e paralisa-se o entendimento. Para ver como palavras podem ser um obstáculo no caminho para o conhecimento, basta considerar o quanto as falácias que os homens impõem uns aos outros dependem, assim como os mal-entendidos em suas disputas, de palavras de significação incerta ou equivocada. [...] Estou dado a imaginar que, fossem levadas a sério as imperfeições da linguagem enquanto instrumento de conhecimento, boa parte das controvérsias que tanta balbúrdia causa no mundo desapareceria, limpando o caminho para o conhecimento e para a paz (LOCKE, 2012, p. 532).

De forma que, embora traga a Linguagem às suas reflexões, identificando a conexão desta com a produção de conhecimento e nossa cognição, Locke ainda destaca certo receio quanto ao seu (mal) uso no processo de comunicação de nosso conhecimento, e, principalmente, relacionado à Linguagem figurada, ou pensamento metafórico.

### 6.5.2 Os *axiomas* em John Locke

A interpretação de Locke sobre *axiomas* muito nos surpreendeu, pois, como será destacado, não trataria de ‘verdades’ (pelo menos, não no sentido de verdades que era usualmente atribuído aos *axiomas* até então - imanescentes ou memorizações). Como também interpreta que por mais guardiões que sejam os *axiomas* da ‘verdade’, eles não nos asseguram quanto a cometer erros se o uso das palavras é descuidado. Afirma que os *axiomas* não servem como base ou fundamentos de nosso conhecimento, não são inatos, mas, concorda que são evidentes por si sós.

Esse filósofo assegura que existe, sim, diversidade de proposições denominadas de máximas ou *axiomas*, que estas tratariam, basicamente, de ‘Princípios da Ciência’,

explicando, de forma inédita, como se estabelecem e sobre o ‘sentido de verdades’ que passou a ser imperativo para eles.

De início, observamos que não se encontra em Locke uma diferenciação mais específica entre *axiomas*, princípios, noções comuns ou *máximas*, conduzindo-nos ao entendimento de tratamento como sinônimo entre essas nomenclaturas; os *axiomas* com uma peculiaridade seriam evidentes por si sós. Mas, notamos que ele tende a tomar os *axiomas*, usualmente, como *máximas* e *máximas gerais*.

Em sua reflexão no seu *Ensaio*, ele cita e exemplifica como sendo *máximas* – *axiomas* (LOCKE, 2012, p.649-669):

‘Tudo que é é.’

‘É impossível que uma mesma coisa seja e não seja.’

‘O todo é maior que as partes.’

‘O todo é igual às partes.’

No parágrafo abaixo, ele toma, por exemplo: ‘o todo é maior que a parte’, como sendo um princípio matemático, especialmente, refletindo que este não trataria de um princípio inato:

Examinemos agora o princípio matemático segundo o qual *o todo é maior que a parte*, que conta entre os supostamente inatos. Estou certo de que merece esse título, tanto quanto qualquer outro; mas, para não pensar que é esse o caso, basta considerar que as *ideias* que compreendem *todo* e *parte*, são inteiramente relativas: as *ideias* positivas a que pertencem, própria e imediatamente, são extensão e número, dos quais *todo* e *parte* são meras relações. De tal maneira que, se *todo* e *parte* são *ideias* inatas, extensão e número também devem sê-lo, pois é impossível ter uma *ideia* de uma relação sem que se tenha *ideia* daquilo a que ela pertence e no que é fundada. Aqueles que patrocinam princípios inatos poderão considerar se há na mente, por impressão natural, *ideias* de extensão e de número (LOCKE, 2012, p.75).

Indica Locke que *todo* e *parte* não são ideias inatas, ambas referindo-se a ideias relativas, resultado de meras relações de extensão e de número.

Como antecipamos, Locke nos chamará a atenção e, de um modo muito especial e inédito até então, sobre o sentido de ‘verdades’, atribuído aos *axiomas*, princípios primeiros ou *máximas*, sempre contrariando que, de qualquer forma, sejam inatos.

É inegável que muitos homens só se dão conta dessas verdades, supostamente evidentes em si mesmas, quando lhes são propostas. É claro que, quem quer que se dê conta delas, percebe em si mesmo que passou a conhecer uma proposição que antes desconhecia e que não mais questiona; mas não porque sejam inatas, e sim porque a consideração da natureza das coisas contidas nessas palavras não lhe pede que pense de outra maneira ao refletir sobre elas (LOCKE, 2012, p.41).

Ele também reflete se seria o caso de tê-los como verdades inquestionáveis e indemonstráveis. Seu entendimento é que, por serem proposições evidentes, tratam de ‘suposições aceitas como verdadeiras’ e não certezas inquestionáveis. Isso nos remete a entender que os *axiomas* assumiriam o sentido de *postulados*. E o que nos garante o caráter de certeza de um conhecimento é o bom uso das palavras de acordo com a ideia em conformidade com o mundo empírico.

Locke concorda que os *axiomas* sejam evidentes por si mesmos, e eles não seriam as únicas proposições deste tipo, pois existe um infinito número de proposições que também são evidentes por si mesmas. De modo que não seria uma prerrogativa adequada para se definir um *axioma* o caráter de tratar de uma proposição evidente por si mesma. Vejamos que

[...] quanto à *relação* entre modos, os matemáticos concebem, na relação de igualdade, inúmeros *axiomas* como ‘iguais subtraídos de iguais resultam em iguais’. Por mais que esses *axiomas* sejam, para o matemático, máximas, ou verdades inquestionáveis, sua consideração parece mostrar que são em si mesmas tão evidentes quanto outras proposições, como ‘um mais um é igual a dois’, ou ‘se extrair dois dedos de uma mão e dois de outra os restos são iguais’. A respeito de números, há milhares de proposições que, como essa, comandam assentimento ao serem ouvidas, tão ou mais claras que *axiomas* matemáticos (LOCKE, 2012, p.653).

Podemos ter inúmeras proposições evidentes por si mesmas de outras *relações*, principalmente, na Matemática. Segundo Locke, a Matemática é exemplar no que diz respeito ao tipo de conhecimento claro e certo. Segundo ele, a Matemática espelha a via e arte de se encontrarem *ideias intermediárias* (LOCKE, 2012, p.713), que nos mostram concordância ou oposição entre ideias que não temos pela imediata comparação. De forma que seria nessa via e não pela confiança em máximas, ou descrição de consequências a partir de proposições gerais, que se encontra o método correto para aprimorarmos nosso conhecimento.

Observamos que, ao inferir sobre as *ideias intermediárias*, interpretamos que Locke aponta para a perspectiva semiótica e, mesmo sem explicitar, reforça que encontramos, em seu pensamento, a aproximação (não intencional) da Linguagem ao processo cognitivo, ao indicar a álgebra como um método da/na Matemática. Ele afirma sobre o método correto que independe de *axiomas*, para encontrarmos ideias claras e distintas:

Para ver que é assim basta considerar o conhecimento matemático. Observa-se que o homem sem ideias perfeitas dos ângulos das figuras que quer conhecer é inteiramente incapaz de qualquer conhecimento delas: sem uma perfeita e exata ideia de ângulo reto, de triângulo, escaleno, de trapézio, é vão tentar demonstrar algo dessas figuras. É evidente que a influência das máximas, que na matemática passam por princípios, não foi o que levou os mestres dessa ciência a tão maravilhosas descobertas. Por mais que o homem conheça perfeitamente as máximas usadas em matemática e contemple seus desdobramentos e consequências, dificilmente o ajudaria a saber que o quadrado da hipotenusa é, no triângulo reto, igual ao quadrado dos dois outros lados. Saber que *o todo é igual a todas as suas partes, que se extraídos iguais de iguais, o restante é igual*, de nada serve em demonstrações dessa sorte: pode-se passar um bom tempo com esses axiomas, sem que se velem mais verdades matemáticas do que antes. A descoberta destas deve-se à aplicação do pensamento de outra via (LOCKE, 2012, p.713).

Locke começa a demonstrar, em nossa interpretação, referindo-se a ‘outra via’, uma compreensão sobre a importância do pensamento diagramático (ideias intermediárias) da atividade matemática. Ele complementa dizendo que:

Os objetos e vistas da mente eram bem diferentes dessas máximas quando os homens começaram a adquirir esse gênero de verdade: que, mesmo os mais familiarizados com axiomas consagrados, mas ignorantes do método usado pelos pioneiros nessas demonstrações, nunca cessam de admirar. Quem poderia saber quais métodos não poderiam ser inventados, para alargar nosso conhecimento em outras ciências, correspondentes aos da *álgebra* matemática, que tão prontamente encontra ideias de quantidade para medir outras quantidades, cuja igualdade ou proporção, não fossem assim, dificilmente ou jamais conheceríamos (LOCKE, 2012, p.713-714)?

Entretanto, o seu objetivo está em mostrar que os *axiomas*, mesmo sendo evidentes por si sós, uma *máxima* teria pouca ou nenhuma influência em outros conhecimentos. Locke, contrariando uma posição aristotélica, defende que os *axiomas* não seriam as primeiras verdades conhecidas e tampouco aquelas das quais dependeriam outras partes de nosso conhecimento. E a base de seu entendimento está alicerçada em sua compreensão sobre conhecimento: que todo nosso saber consiste na percepção de concordância ou discordância entre *ideias*, conforme se confirmem ou se neguem em palavras compreensíveis (LOCKE, 2012, p.649). Esta perspectiva sobre o que seja conhecimento, distancia-se tanto do pensamento aristotélico (concordância com o objeto – iminência) quanto do pensamento platônico (reminiscência ou memorizações).

Assim é que, segundo ele, “estando a mente ciente de que cada *ideia* é o que é, e de que duas *ideias* distintas não são iguais, segue-se que as *primeiras* verdades evidentes em si mesmas que se conhecem são as feitas com as primeiras ideias presentes na mente” (LOCKE,

2012, p.654). Inclusive, afirmando que: “[...] Quantas verdades acerca dos números a mente conhece e das quais está convencida, sem nunca ter pensado nas máximas gerais às quais os matemáticos referem os seus argumentos (LOCKE, 2012, p.654)”? Por exemplo: ‘Um mais um é igual a dois’.

Locke busca destacar que as *máximas* ou *axiomas* não seriam nem princípio tampouco alicerce de nosso conhecimento, pois, de acordo com seu entendimento de conhecimento, temos outras verdades tão evidentes quanto elas ou que conhecemos antes delas (as *ideias simples*). Dessa maneira, ele questiona se seria verdade que só é possível saber que *um mais dois é igual a três* em virtude do *axioma*: ‘o todo é igual a todas as suas partes juntas’. Respondendo que não! Pois muitos sabem que isso é uma verdade “sem nunca terem ouvido ou pensado nesse ou outro *axioma* que o provasse; e com tanta certeza quanto tem aquele que o todo é igual às partes” (LOCKE, 2012, p.655).

Locke também afirma que os *axiomas* não servem para provar nem para confirmar proposições menos gerais evidentes por si mesmas, como nunca foram em tempo algum ‘fundação’ de qualquer Ciência. Ele diz:

Estou ciente de que, graças aos escolásticos, muito se fala de *máximas* e de ciências erguidas a partir delas; mas talvez por azar eu nunca tenha encontrado ciências erguidas com base nas *máximas tudo que é, é impossível que uma mesma coisa seja e não seja*. Eu gostaria de saber onde se encontraria uma ciência erigida nesses ou em outros *axiomas*, e agradecida a quem me apresentasse o molde e o sistema de uma ciência que dependeria de *máximas* como essas para se manter (LOCKE, 2012, p.657).

E, neste ponto, começa a tornar-se muito interessante o seu posicionamento. Ele continua explicando que:

Máximas não ajudam a promover as ciências nem a descobrir verdades desconhecidas. O *Sr. Newton* demonstrou, em seu admirável livro, muitas proposições verdadeiras antes desconhecidas que contribuem para o avanço do conhecimento matemático. Para o conhecimento dessas verdades não pôde contar, entretanto, com o auxílio de nenhuma máxima como *tudo o que é, é* ou *o todo é maior que a parte*. Não foram essas as pistas que o levaram à descoberta da verdade e da certeza de suas proposições, nem foi por elas que chegou ao conhecimento demonstrativo – que depende de que se encontrem *ideias intermediárias* que mostrem concordância ou discordância entre as *ideias* expressadas nas proposições. Esse é o principal exercício, o maior aprimoramento do entendimento humano na ampliação do conhecimento humano e avanço das ciências; nele não recebe ajuda da contemplação dessas e de outras magníficas *máximas* (LOCKE, 2012, p.658).

Assim, para nós, a ‘ajuda’ ao aprimoramento do entendimento humano e para a ampliação do nosso conhecimento e das ciências (matemáticas) compreenderia um processo simbólico, especialmente relacionado à função da generalização e ao pensamento estruturalista-diagramático. O processo pelo qual se processa o desenvolvimento cognitivo e nosso conhecimento poderia ser, fundamentalmente, interpretado como sendo semiótico. Compreendemos que Locke esteve a um passo da interpretação que podia conduzir à interpretação semiótica, mas ele não a alcançou. Em nosso entendimento, as *ideias intermediárias* se baseariam, no caso da Matemática, no apoio ao raciocínio diagramático.

Sobretudo, Locke procederá a uma distinção entre método de comunicação do conhecimento e método de produção do conhecimento, entre método de construção da ciência e método de seu ensino para explicar o ‘uso’ que se faz habitualmente dos *axiomas*, desvinculando dos *axiomas* um papel ou função proativa no processo de desenvolvimento do nosso conhecimento. Percebemos que esse fato se vincula a ele não empreender uma reflexão no sentido de um estreitamento da Linguagem ao processo cognitivo e evidenciando-a e minimizando-a ao processo comunicativo – de ensino - ele não avançará à visão semiótica epistemológica. Ele segue afirmando que

Se pensam os admiradores de tais proposições que não se dá nenhum passo no conhecimento sem o suporte de um *axioma*, que não se acrescenta nenhum tijolo ao edifício das ciências sem uma *máxima* geral, é porque não se dignam a distinguir entre o método de aquisição de conhecimento e o método de sua comunicação, entre o método de construção de uma ciência e o método de seu ensino para os outros à medida que ele avança. Se o fizessem, veriam que *máximas* gerais não são a fundação onde as primeiras descobertas ergueram as admiráveis estruturas das ciências, nem a chave que destrancou e expôs os segredos do conhecimento (LOCKE, 2012, p.658-659).

Esta observação de Locke é muito importante, pois, de um lado, ele é coerente em sua reflexão ao perceber o papel do *axioma* na constituição de uma teoria e, em especial, neste estudo, a teoria que está a caminho de se tornar o que será entendido como teoria *axiomatizada*. Ele recua, sobretudo, quanto à Linguagem e coloca o papel do *axioma* especificadamente relacionado ao que ele designa como método da comunicação do conhecimento. Neste sentido, os *axiomas* tratariam de premissas iniciais, na organização de um (ou qualquer outro) conhecimento que já fora elaborado e constituído.

Ele não situa o *axioma* no sentido operativo na constituição do nosso conhecimento. Mesmo porque, como exemplificamos anteriormente, o que Locke entendia como *axiomas*

tratava de proposições descritivas e meramente contemplativas. Os *axiomas* que ele abordava e tomava para sua análise não tinham o sentido de abstração e operatividade na constituição de um conceito. Ele, deste modo, empreende uma interpretação que dicotomiza o método e objeto e, neste ponto específico, distancia a Linguagem do processo de desenvolvimento cognitivo. Evidentemente, como foi dito, ele minimiza o papel da Linguagem à função comunicativa.

E, ainda, justifica e explica o uso que é feito dos *axiomas* enquanto verdades inquestionáveis afirmando que:

O uso de *máximas* tornou-se frequente no decorrer do tempo com o surgimento de escolas e a instituição de professores que ensinam aos outros as descobertas das ciências; destacam-se certas proposições, evidentes em si mesmas ou consagradas como verdades, que, uma vez consolidadas na mente dos pupilos como verdades inquestionáveis, eram usadas nas devidas ocasiões para convencê-los da verdade de instâncias particulares, não tão familiares para sua mente quanto os *axiomas* gerais previamente inculcados e cuidadosamente consolidados (LOCKE, 2012, p.659).

Sua reflexão para nós é, de certa maneira, inédita. Locke deixa explícito o papel da escola (do social) na consolidação do sentido de ‘verdade’ que se atribuiu ao termo *axioma*, de modo que esse sentido surgiu gerado e ampliado dentro de um contexto sócio-educativo e não ontológico como o fora entendido até então. Um contexto sócio-educativo que será reforçado posteriormente pelo contexto científico e político (Revolução Científica, a Revolução Industrial e o movimento Iluminista).

Observando um ‘novo’ sentido de ‘verdades’ - sócio-educativo -, um sentido convencionalizado, ele se posiciona destacando sua interpretação sobre a real utilidade dos *axiomas* ou *máximas*:

1. Máximas são úteis, conforme o observado, nos métodos comuns de ensino das ciências, à medida que estas avançam; mas pouco ou nada servem para promover esse avanço;
2. Máximas são úteis em disputas para silenciar polemistas obstinados e encerrar a contenda. [...]. As escolas transformam a disputa em pedra de toque da habilidade dos homens, no *critério* de todo conhecimento, julgando vitorioso quem defende seu território; a última palavra é o melhor argumento, mesmo que sua causa não seja justa. [...] para evitar, tanto quanto possível, que as disputas se perdessem numa interminável sequência de silogismos, introduziu-se nas escolas algumas proposições, muitas delas evidentes em si mesmas, que, consagradas e assentidas por todos, ganharam a estima de medidas gerais de verdade. E, caso não tenham uma mesma proposição comum a ambos, usam essas proposições como princípios que ambos os lados devem observar como limites intransponíveis. **Essas máximas, que os disputantes chamam princípios irrevogáveis, foram, por um mal-entendido, tomadas como origem e nascente de todo conhecimento, como fundação onde se ergueriam todas as ciências.** Uma vez que se deparem em



disputas com essas máximas, os homens não vão além, mas consideram resolvida a questão (LOCKE, 2012, p. 659-660). [grifo nosso]

De modo que fica evidente, no posicionamento de Locke, o sentido interpretativo de ‘verdade’ – um sentido de ‘assentimento’ de *postulado* - que é atribuído aos *axiomas*. Mas evidenciamos que tal interpretação denota um movimento tensional entre o sujeito ontológico e o sujeito epistemológico, que pode direcionar ao receio de assumir uma posição relativista e, sobretudo, não podemos esquecer que Locke defendia a existência de Deus. Nossa interpretação a respeito dessa tensão se reforça quando o observamos afirmar sobre nossa certeza da existência de Deus, dizendo que:

Deus, embora não nos tenha dado nenhuma ideia inata de si mesmo nem tenha estampado em nossa mente caracteres originais que permitissem ler o seu ser, não ficou sem testemunho, mas forneceu-nos as faculdades de que é dotada nossa mente. E nós, que temos sentidos, percepção e razão, não poderíamos querer dele uma prova mais clara, enquanto estivermos presos em nós mesmos. Nem é justo nos queixarmos de nossa ignorância de um ponto tão importante, dada a abundante provisão de meios para descobri-lo e conhecê-lo, suficientes para os fins de nosso ser e o interesse de nossa felicidade. Mas, mesmo sendo essa mais óbvia descoberta que pode a razão, e apesar de sua evidência – igual, se não me engano à certeza matemática -, ele requer pensamento e atenção: para obtê-la, é preciso que a mente se dedique a uma dedução regular, a partir de um ponto do nosso conhecimento intuitivo, ou então nossa ignorância e incerteza dessa proposição serão tão grandes quanto de outras em si mesmas capazes de clara demonstração (LOCKE, 2012, p.680).

Nesse posicionamento, fica explícita a necessidade de reforçar o sentido de uma ‘verdade’, inclusive, sobre a verdade do próprio Conhecimento Matemático. Assim, para Locke, o caminho que nos conduz a uma proposição e garante saber se é verdadeira ou não é ‘o uso cuidadoso das faculdades’ que ‘pode mostrar, com clareza e evidência, se a opinião é verdadeira ou não’, uma capacidade que herdamos de Deus. Isso reforça também quanto o nosso conhecimento depende, para ser dirigido, do uso correto dos poderes que a natureza nos concedeu, e quão pouco dependeria de princípios inatos, supostamente encontrados em todos os homens, pois foi Deus quem dispôs nos homens faculdades e meios para, conforme o seu uso, “descobrirem, receberem e reterem verdades” (LOCKE, 2012, p.90 -91).

Sobretudo, em outra passagem, vemos Locke afirmar que “a busca da verdade é como uma caçada onde grande parte do prazer está na perseguição. Cada passo da mente rumo ao entendimento é não apenas uma nova descoberta, como também, por ora, a melhor” (LOCKE, 2012, p.7). Neste sentido, entendemos que existiria, sim, no pensamento de Locke um

posicionamento em certa medida relativista ou mesmo subjetivo que se direciona e é empreendida à sua noção de ‘verdade’.

De forma que, para nós, em Locke, os *axiomas* não tratariam de ‘verdades’, ou seja, de ‘verdades’ no sentido inato ou imanente como até então poderia ser. Locke interpreta de outro modo o próprio sentido de ‘verdades’, uma verdade que tem o sentido de ‘postulado’, de ‘assentido’, de posto e acordado como princípio, o que, em nossa interpretação, teria maior proximidade com o sinônimo de ‘hipóteses’.

### 6.5.3 Reflexões sobre o significado de *axioma* em Locke

Locke, no desenvolvimento de *Ensaio*, chama de *máximas* aos *axiomas*. Foi-nos surpreendente identificar que Locke toma os *axiomas* no sentido de *postulados*, isto é, coisas que são postas de início, ou assentidas. Ele identifica que, equivocadamente, sempre foram tomados os *axiomas* como ‘verdades’ – certas inquestionáveis e indemonstráveis – e fundamento da ciência, mas isso se deu devido à confusão que se efetua na compreensão entre método de comunicação do conhecimento e método de produção do conhecimento, entre método de construção da ciência e método de seu ensino. Locke destaca, inclusive, que esse sentido de ‘verdades’ aos *axiomas* veio e foi reforçado pelo contexto sócio-educativo e comunicativo do nosso conhecimento.

Em nosso entendimento, epistemologicamente, a compreensão de Locke indica *axiomas* mais no sentido de ‘hipóteses’; entretanto, quando de uma abordagem ontológica, podemos dizer que Locke os assume mais no sentido de ‘verdades’. De modo que as reflexões de Locke indicam um movimento tensional no que trata do objetivo papel da Linguagem no processo cognitivo.

Para não assumir uma posição relativista concernente aos fundamentos do nosso conhecimento, ele é muito delicado ao questionar o caráter de ‘verdade’ de nosso conhecimento e ainda repousa sua explicação de nossa capacidade intelectual em um dom divino.

Para Locke, verdades tratam de relações entre *ideias* e *ideias e*, segundo esse filósofo, nós temos dentro de nossa cabeça, mas, evidentemente, para ele, não no sentido inato. Neste sentido, a verdade tem a ver mais com as formulações proposicionais da concordância e

discordância entre as *ideias*, sendo que o critério de verdade ou falsidade está no mundo empírico – caráter da verificabilidade.

Evidenciamos que Locke empreende, em suas reflexões, um destaque maior ao papel da Linguagem, especificamente relacionada aos nomes gerais e universais, no processo de desenvolvimento do nosso conhecimento, principalmente quando vemos pela primeira vez, em uma obra de caráter epistemológico, um capítulo inteiro (volume III) sendo dedicado à Linguagem.

Mas, conforme Otte (2014), se acreditarmos como Locke que a Linguagem é tão somente “o grande instrumento e o laço comum da sociedade” (LOCKE, 1975, p. 254, *apud* OTTE, 2014)<sup>159</sup>, somos conduzidos a segui-lo na visão de que os signos são, essencialmente, determinados pelo ser humano, que os emprega para representar as *ideias* que têm em mente. Assim, por um lado, isso pode conduzir-nos a assumir o posicionamento de que a Matemática é uma Linguagem e esse parece ser o sentido que se acentuou a partir do pensamento de Locke, especialmente no tratamento didático no espaço educativo e processo de escolarização.

Mas, compreendemos, por outro lado, que há uma perspectiva no processo representacional, envolvendo e tratando da Linguagem que é fruto da interação dos indivíduos com o mundo objetivo. Desta compreensão, podemos admitir que os signos, assim, sejam de certa forma determinados pelos objetos, como a fumaça que indica a presença de fogo, ou como as pegadas na praia, que informaram a Robinson Crusóe a presença de outro ser humano na sua solitária ilha.

De maneira que, se, de um lado, o símbolo ou a palavra convencional é um signo paradigmático, por outro lado, ele aparece como um índice. Otte (2014)<sup>160</sup> nos revela, sobretudo, que, como a Matemática não pode ser feita sem signos indexais, como Kant enfatiza na sua *Crítica da Razão Pura* (B 742), deste modo, parece-nos plausível aceitar a Matemática como sendo essencialmente uma atividade. Mas,

Mesmo que estivéssemos inclinados, como Kant, a considerar a matemática como uma atividade, mais do que uma linguagem, teríamos que admitir que a atividade matemática não é só um processo simples, que ocorre *hic et nunc*, mas um sistema de relações entre temas (problemas) e meios. E essa noção de “meios” de

---

<sup>159</sup> Texto em apêndice intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no colóquio internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012.

<sup>160</sup> Texto em apêndice intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no Colóquio Internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, maio 2012.

atividade deve ser vista num contexto social mais amplo e como mutante e variável através da história (OTTE, 2014)<sup>161</sup>.

Nesse sentido, vemos como fundamental empreendermos uma abordagem na perspectiva do pensamento de Complementaridade ‘Otteano’ e, deste modo, considerarmos a Matemática como atividade cognitiva que se revela na e pela atividade humana, envolvendo ambas as dimensões, tanto comunicativa como de produção de conhecimento. E entendemos que tenha sido assim desde sempre na História da humanidade.

Sobretudo, de Platão até Locke, identificamos a abordagem epistemológica do Conhecimento Matemático que, frequentemente, indica um processo tensional muito forte e, principalmente, posicionando-se de modo a negar que a Linguagem pudesse assumir papel ou função mais complexa e diretamente relacionada ao nosso desenvolvimento cognitivo (resultando sempre num posicionamento que a minimiza à função simplesmente classificatória e/ou comunicativa) e no processo do desenvolvimento do nosso conhecimento. Entendemos que tal posicionamento também estivesse ancorado numa característica sócio-intelectual e cultural que situava sempre em primeiro plano o sujeito ontológico e este, sobrepondo-se ao sujeito epistemológico. Certamente tal situação não nos permitiu avançar no sentido da interpretação semiótica.

Mas, devemos reconhecer que, a partir das reflexões de Locke e com o rompimento definitivo das amarras que prendem sujeito ontológico ao sujeito epistemológico, mais especificamente relacionado ao Conhecimento Matemático, a Linguagem incorpora papel mais significativo, de modo a ampliar nosso entendimento sobre o seu espaço no nosso desenvolvimento cognitivo. Neste sentido, é singular a interpretação de Locke da *palavra* (e sobre a Linguagem) enquanto signo mediador e, como ele diz: *arquétipo* entre *ideias* e mundo objetivo, inclusive, destacando que não devemos tomar os nomes pelas coisas nomeadas. Ele contesta Platão e Aristóteles, dizendo:

Em Platão a palavra *anqrwpoz* representa a *ideia* complexa de corpo com certo aspecto e outros indícios aparentes; com a mesma propriedade em Aristóteles a *ideia* complexa chamada *anqrwpoz* reúne corpo e faculdade de raciocínio. Em ambos o nome *anqrwpoz* é posto no lugar de outra coisa que não a *ideia* que se professa expressar por ele, e pressupõe-se que o nome representaria algo além daquilo que significa (LOCKE, 2012, p.545).

---

<sup>161</sup> Texto em apêndice intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no Colóquio Internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, maio 2012.

Locke, decididamente, começa a chamar nossa atenção para a função sógnica ao processo de desenvolvimento cognitivo, sobre a função representacional- instrumental do nome, no processo de desenvolvimento do nosso conhecimento e, mesmo que ele não a assuma completamente, identificamos o limiar da perspectiva interpretativa semiótica que poderia ser empreendida a partir de seu pensamento. Sobretudo, entendemos que, em Locke, haja um conflito entre o sujeito ontológico e o sujeito epistemológico – um movimento tensional. Sem dúvida que o posicionamento e a publicação da teoria de Locke produzirão consequências frutíferas nas posteriores reflexões e interpretações, inclusive, direcionadas à perspectiva semiótica, que se consolida, especialmente, a partir pensamento kantiano (ao qual ele influenciou) no qual verificamos a promoção de uma virada epistemológica à linguística no desenvolvimento do nosso conhecimento.

### **6.6 Axiomas em Leibniz (1646-1716)**

A Matemática para Leibniz é parte integrante da Filosofia e ele a toma como campo de teste das suas ideias e métodos filosóficos. É interessante observar que Leibniz filosofava a partir da Matemática, de modo que ele a ajuda a enriquecer, sendo, inclusive, considerado um dos Pais da Matemática Moderna. Mas, devemos tem muita sutileza ao analisar o pensamento de Leibniz, pois embora seja considerado o pai do formalismo, não interpretamos que Leibniz concebesse um formalismo no sentido Moderno, por exemplo, que pode ser destacado no pensamento de Newton. Para Leibniz a metafísica esteve sempre em primeiro plano, e, neste sentido ele foi um platonista, a visão do cosmos era sempre mais importante. Embora observemos que ele de um tratamento aos *axiomas* como sendo equações, o sentido interpretativo é o de verdade.

Entre 1701 e 1704, Gottfried Wilhelm Leibniz redige os *Novos Ensaio Sobre o Entendimento Humano* que viriam a ser publicados somente em 1765. Admirador do trabalho de Locke, Leibniz toma o trabalho deste como base e ponto de partida para o seu.

Ele nos informa que, embora o autor do livro *Ensaio Sobre o Entendimento Humano* nos apresente e afirme uma infinidade de coisas belas, estas eram um sistema que diferia do agora proposto por ele ao apresentar nesse “novo” ensaio e aprofundamento. Se, de um lado, Locke se relaciona mais aproximadamente com Aristóteles, o pensamento de Leibniz enraíza

do pensamento de Platão e Descartes, embora ambos se distanciem, em muitos aspectos, das doutrinas.

Leibniz, desde muito cedo, teve contato com os escritos antigos de Platão (428-347 a.C.) (384-322 a. C.), Aristóteles e com a Filosofia e a Teologia escolásticas. Aos quinze anos, já lia Bacon (1561-1626), Hobbes (1588-1679), Galileu (1564-1642) e Descartes (1596-1650) e, desde então, passou a dedicar-se às matemáticas. Observamos que a filosofia de Leibniz nasceu de duas fontes distintas: de Descartes, ele toma o ideal da explicação matemática do mundo e, de Aristóteles e da Escolástica, ele conservou a concepção segundo a qual o universo estaria organizado de maneira teleológica, ou seja, onde tudo aquilo que acontece, acontece para cumprir determinados fins.

Essas duas fontes foram sintetizadas por Leibniz e aparecem unificadas em sua concepção de Deus. Para Leibniz, o finalismo fundamenta-se na vontade do Criador, que não age sem razões, uma vez que estas constituem sua natureza imutável. As leis da natureza têm sua origem em princípios superiores à matéria, pressupõem a harmonia pré-estabelecida. Como consequência, o mundo criado por Deus estaria impregnado de racionalidade e cumprindo objetivos que seriam propostos pela mente divina.

Na universidade, ele começou a preocupar-se em vincular a Filosofia (esta compreendendo a Lógica e a Linguagem) às Matemáticas. Trabalhando nesse sentido, de um lado, escreveu a *Dissertação Sobre a Arte Combinatória* na qual procurou encontrar, para a Filosofia, leis tão certas quanto as da Matemática; de outro modo, no estudo da Lógica aristotélica, encontrou elementos que o levaram à ideia de uma análise combinatória filosófica, em que vislumbrou a possibilidade de criar um alfabeto dos pensamentos humanos, com o qual tudo poderia ser descoberto.

O racionalista Leibniz sempre rejeitou a tese empirista de Locke (1632-1704), pela qual a origem das ideias encontra-se na experiência. Para Leibniz, a experiência só fornece a ocasião para conhecimento dos princípios inatos ao intelecto, sejam eles: princípio do melhor, da não-contradição, da razão suficiente, da continuidade e dos indiscerníveis. Esses princípios seriam constitutivos da própria razão humana. Para ele, os empiristas teriam razão em afirmar que as ideias surgem do contato com o mundo sensível, mas eles estariam errados, pois se esqueciam do espírito. Assim, ele refaz e complementa a frase de Locke: “Nada há no intelecto que não tenha passado primeiro pelos sentidos – com o adendo – *a não ser o próprio intelecto*” (LEIBNIZ, 1999, p.9).

Leibniz não concebe nossa alma, ou nosso intelecto, como lousas nas quais nada está escrito e que tudo que é nela impresso provenha, exclusivamente, dos sentidos e da experiência, conforme Aristóteles ou o autor do *Ensaio*. Na esteira do pensamento platônico, para ele, a alma contém originariamente princípios de várias noções e doutrinas, cujos objetos externos os fariam apenas despertar no momento oportuno. Tal posicionamento nos conduz à interpretar que tais princípios se referem a pressupostos fundamentais, os *axiomas* e, sobretudo, assumem em Leibniz o sentido de verdades fundamentais e necessárias.

Os princípios para Leibniz tratam, em nossa interpretação, dos *axiomas*, por ele denominados inatos e, sendo “verdades necessárias”, dentre as quais, como exemplo, cita os que encontramos na Matemática pura e, principalmente, na Aritmética e na Geometria. São princípios cuja demonstração independe de exemplos e do testemunho dos sentidos, embora ele admita que, sem os sentidos, eles não poderiam jamais vir à tona em nossas mentes. Ele afirma que:

[...] parece dever-se concluir que as **verdades necessárias**, quais as encontramos na matemática pura e sobretudo na aritmética e na geometria, devem ter princípios cuja demonstração independe dos exemplos, e conseqüentemente também do testemunho dos sentidos, embora se deva admitir que sem os sentidos jamais teria vindo à mente pensar neles. E, o que se deve distinguir bem é o que compreendeu tão bem Euclides, o qual demonstra muitas vezes pela razão o que se observa suficientemente pela experiência e pelas imagens sensíveis. Também a lógica, a metafísica e a moral, uma das quais forma a teologia e a outra a jurisprudência, todas as duas naturais, estão repletas de tais **verdades necessárias**, e por conseguinte a sua demonstração não pode provir senão de princípios internos que se denominam inatos. É verdade que não se deve imaginar que possamos ler na alma estas leis eternas da razão a livro aberto, como se lê o edito do pretor no seu livro sem trabalho e sem pesquisa; basta, porém, que possamos descobri-los em nós em virtude da atenção, sendo que a ocasião é fornecida pelos sentidos, e a seqüência das experiências serve ainda como a confirmação à razão, mais ou menos como as provas servem na aritmética para melhor evitar o erro do cálculo quando o raciocínio é longo. (LEIBNIZ, 1999, p.23) [grifo nosso].

Observamos por diversas vezes, no posicionamento de Leibniz, uma inclinação em entender e a reconhecer, em certa medida, duas fontes para nossos conhecimentos: os sentidos e a reflexão.

O primeiro ponto nesta obra, defendido por Leibniz é herdado do pensamento de Descartes, e, trata das ideias e princípios inatos. Embora acreditasse que todos os pensamentos e ações da nossa alma procediam do seu próprio fundo, sem que pudessem ser fornecidos à alma pelos sentidos, ele não concordava, sobretudo, com a imediata disponibilidade do nosso conhecimento. Todavia considerava que os sentidos têm seu papel,

constituíam, em parte, a causa de nosso pensamento, afirmando: “existem ideias e princípios que não vêm dos sentidos, e que encontramos em nós sem formá-los nós mesmos, embora sejam os sentidos que nos dão ocasião para percebê-los” (LEIBNIZ, 1999, p.48).

Sobretudo, ressaltamos que ele atribuía total independência do sujeito cognoscente em relação às noções e às entidades matemáticas, resolvendo, como um bom cristão, o problema do *locus* dessas noções e entidades ao colocá-las, em primeiro lugar, na mente de Deus. Acreditava que já nascemos providos de uma série de noções comuns das quais destacamos as noções matemáticas, garantindo, assim, o caráter inato, como platonista, do Conhecimento Matemático.

Os princípios inatos, também denominados de ‘noções comuns’ (*koinai énnoi*), os *axiomas*, constituem elementos que recebemos, ou a eles chegaremos com a nossa própria existência. O fato de serem inatos, não são somente justificáveis por se tratarem de princípios com os quais todo o gênero humano concorde, mas conclui “que o consentimento bastante geral entre os homens constitui um indício, e não uma demonstração de um princípio inato; a prova exata e decisiva desses princípios consiste em mostrar que a sua certeza só provém do que está em nós” (LEIBNIZ, 1999, p.50).

Leibniz entende haver uma distinção entre as ideias e os pensamentos, “pois temos sempre todas as ideias puras ou distintas independentemente dos sentidos; ao passo que os pensamentos correspondem sempre a alguma sensação” (LEIBNIZ, 1999, p.89). E, o conhecimento nos é fornecido, exclusivamente, pelas ideias e elas constituem os objetos internos dos pensamentos.

Ele indica que as ideias de espaço, figura, movimento, repouso são ideias do entendimento puro, sendo inatas, sobretudo, porém têm relação com o exterior, de forma que os nossos sentidos as fazem perceber, sendo elas também capazes de definições e demonstrações. E, mesmo as ideias que nos vêm pela sensação necessitam do auxílio da razão, de modo que os sentidos não podem convencer-nos da existência das coisas sensíveis; a consideração da própria existência provém da reflexão (LEIBNIZ, 1999, p.101 -5).

Muito interessante é perceber que o entendimento de ‘inato’, para Leibniz, difere do sentido das reminiscências do pensamento platônico. No discernimento de Leibniz, ser inato não toma o sentido de ‘já estar em nós’, mas, de outro modo, ter uma ‘predisposição a’, tratando-se de uma predisposição para formarmos as ideias e os princípios que se encontram em nós como veios numa tábua de mármore, mas sem estarem já formados. Ideias e princípios



inatos que, muito embora não venham dos sentidos, estes se fazem necessários, pois nos dão a ocasião de percebê-los. De tal modo que este aspecto figura uma característica de nossa humanidade, qualidade esta que herdamos de Deus.

Leibniz também opera, na apresentação de seu inatismo, uma distinção entre dois tipos de verdades: as 'verdades necessárias' ou 'verdades da razão' que são, *a priori*, analíticas cuja fonte é o entendimento e podemos conhecê-las apenas com as ferramentas da Lógica, cujas negações são contradições lógicas, sendo as verdades matemáticas exemplos típicos; e as 'verdade de fato' (dos sentidos) que podemos negar sem infração à Lógica e não são conhecidas *a priori*. De maneira que nós chegamos ao entendimento quando temos, das coisas, ideias distintas, com o poder de refletir sobre elas e de concluir delas verdades necessárias. Na opinião de Leibniz:

[...] o *entendimento* corresponde, portanto, àquilo que entre os latinos se chama *intellectus*, sendo que o exercício desta faculdade se denomina *intelecção*, a qual constitui uma percepção distinta associada à faculdade de refletir [...]. Toda percepção associada a esta faculdade é um pensamento, [...], de maneira que podemos dizer que a *intelecção* se verifica quando o pensamento é distinto (1999, p.156).

O entendimento também nos conduz às 'verdades de fato', as quais obtemos através da experiência dos sentidos. Entretanto, a verdade das coisas sensíveis se justificam pela sua ligação, que depende das verdades intelectuais (*axiomas*), fundadas na razão e nas observações constantes nas próprias coisas sensíveis, mesmo quando a razão não apareça (LEIBNIZ, 1999, p.446). Assim, destacamos que Leibniz não abre mão totalmente dos sentidos, como pode ser interpretado por alguns estudiosos. Para nós, no entendimento de Leibniz, os nossos sentidos operam tanto no caminho às verdades de fato como no caminho às verdades necessárias.

É o discernimento que distingue as verdades necessárias e ele nada mais é que uma forma de julgamento o qual examina as proposições segundo a nossa razão. Sendo que a condição de verdade ou falsidade de uma ideia está condicionada à sua possibilidade. E não adquirimos todos os nossos conhecimentos sem necessitarmos de impressões inatas.

A demonstração originária das verdades necessárias vem exclusivamente do entendimento, ao passo que as demais verdades procedem das experiências ou das observações dos sentidos. O nosso espírito é capaz de conhecer umas e outras, mas é a fonte das primeiras; e qualquer que seja o número de experiências particulares que possamos ter de uma verdade universal. Não podemos ter certeza

dela pela indução, sem conhecer pela razão a sua necessidade (LEIBNIZ, 1999, p.54).

Assim, no pensamento de Leibniz, o sentido de ‘inatas’ é justificado por figurar uma faculdade do espírito humano, ou seja, uma disposição, uma aptidão, uma pré-formação, determinante de nossa alma, fazendo com que as verdades possam ser hauridas dele. Para Leibniz (1999, p.58), “isto deve significar apenas que existe a faculdade de conhecê-las; pois observei que, além disso, existe a faculdade de detectá-las em si mesmo, e a disposição a aprová-las quando pensamos nelas como se deve”.

Já o sentido do conhecimento como sendo verdade, ‘certeza’, vincula-se ordinariamente à razão e não podemos dela duvidar com base na prática. A verdade, a nossa evidência, trataria de uma certeza luminosa, ou seja, onde não se duvida, devido à causa da conexão que se enxerga entre as ideias (LEIBNIZ, 1999, p. 447). Uma asserção, universal ou particular, afirmativa ou negativa, é sempre analisada como a atribuição de um predicado a um sujeito. Esta asserção é *verdadeira* na forma  $S$  e  $p$  quando o predicado  $p$  está sempre contido no sujeito  $S$ , sendo este o critério de verdade para Leibniz, assim como o seu tribunal é a Lógica.

É fundamentalmente relevante observarmos o posicionamento de Leibniz ao proceder a sua análise da Linguagem e da palavra, relacionada com as ideias, e neste sentido interpretarmos que ele promove a aproximação da Linguagem ao processo cognitivo. O ponto que nos conduz a esta interpretação se destaca por ele acreditar “realmente que as línguas constituem o melhor espelho do espírito humano, e que uma análise exata da significação das palavras ajudaria, melhor que qualquer outra coisa, a conhecer as operações do entendimento” (LEIBNIZ, 1999, p. 324).

De forma que lhe chamava a atenção o fato de que a Linguagem servia ao homem, para além da comunicação, também ao raciocínio, seja pela sua capacidade de lembrar-nos dos pensamentos abstratos, como também da sua utilidade no raciocínio ao servir-nos de caracteres e pensamentos surdos.

Em seus estudos sobre alguns idiomas e línguas, pôde observar que a significação das palavras se dava somente, em parte, de forma arbitrária, como convenções arbitrárias, pois destacou aspectos apontando que muitas das significações tinham, como determinação, causas naturais. Dizia haver uma infinidade de apelações “que demonstram haver algo natural na origem das palavras, origem que estabelece uma relação entre as coisas e os sons e

movimentos dos órgãos da voz” (LEIBNIZ, 1999, p.272). Defendia, inclusive, a tese de uma origem comum de todas as nações e de uma língua radical e primitiva.

No entanto, entende que o caráter de arbitrariedade reside somente nas palavras e não nas ideias, uma vez que estas últimas exprimem apenas possibilidades, mesmo reconhecendo que

[...] as palavras se interpõem de tal maneira entre o nosso espírito e a verdade das coisas, que se podem comparar as palavras com o meio pelo qual passam os raios dos objetos visíveis, que muitas vezes espalha nuvens sobre os nossos olhos; estou tentado a crer que, se examinássemos mais a fundo as imperfeições da linguagem, desapareceria por si mesma a maior parte dos discursos, sendo que o caminho do conhecimento, e talvez também da paz, estaria mais aberto aos homens (LEIBNIZ, 1999, p.331).

Ademais, concebia, aprioristicamente, que as ideias residem em Deus desde toda a eternidade e, mesmo em nós, elas estão antes de pensarmos nelas. Também, observamos, em seu pensamento, ressalvas ao uso das palavras, salientando a elas aspectos referentes a certos abusos e imperfeições, aos quais deveriam ser aplicados ‘remédios’ para que pudessem, mais efetivamente, contribuir para o avanço à conhecimentos sólidos. Sobretudo, é relevante destacar em Leibniz um tipo de defeito concebido à linguagem, tratando como abusos, os termos figurados e alusões. Assim ele recomenda moderação nesta consideração, observando que

[...] certos ornamentos da eloquência são como vasos dos egípcios, dos quais as pessoas podiam servir-se no culto do verdadeiro Deus. Acontece o mesmo que com a pintura e música, das quais se abusa, e das quais uma representa muitas vezes imaginação grotesca e mesmo prejudiciais, e a outra amolece o coração, e ambas divertem de maneira vã. Todavia, ambas podem ser usadas com utilidade, uma para tornar a verdade clara, e outra para torná-la tocante, efeito que deve ser também o da poesia, que tem algo da retórica e da música (LEIBNIZ, 1999, p.343).

No entanto, mesmo com esse comentário, Leibniz foca na busca por uma autêntica eloquência ao processo cognitivo e, neste sentido, exatamente aí repousava para ele a importância da Linguagem no desenvolvimento de conhecimentos sólidos.

Otte (2014)<sup>162</sup> nos informa que o problema em Leibniz vai se destacar na sua teoria da referência (isso falando no sentido de Peirce), pois Leibniz não conhece índices e o papel desses no desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Leibniz, por exemplo, não acredita que o mundo seja um conjunto de pontos ( como já é o entendimento na época de Kant). Para

---

<sup>162</sup> Fala de Otte em momento de orientação.

Leibniz objetos possuem características. E, Leibniz não tem claro em seu pensamento sobre a relação entre objetos e conceitos, mesmo entendendo que signos sejam arbitrários e as palavras convenções.

### 6.6.1 O conhecimento e os *axiomas* em Leibniz

Para Leibniz, não devemos entender como se existissem diferentes ciências; ele acredita que divisões atribuídas às ciências nada mais são que disposições diferentes das mesmas verdades. Assim, ele assinala somente uma possível divisão: as *sintéticas e teóricas* e as ciências *analíticas e práticas* e uma terceira como sendo a ciência conforme os *Termos*. Uma divisão equivalente à antiga já formulada às ciências: *física, moral e lógica* (LEIBNIZ, 1999, p.537).

Ele aponta que uma divisão é sempre difícil, pois, de um lado:

Com efeito, a ciência de raciocinar, de julgar e de inventar parece muito diferente do conhecimento das etimologias das palavras e do uso das línguas, que constitui algo de indefinido e arbitrário. Além disso, ao explicar as palavras, estamos obrigados a entrar nas próprias ciências, como se vê pelos dicionários; de outro lado, não se pode tratar a ciência sem dar ao mesmo tempo as definições dos termos.

Acrescentando que:

Entretanto, a principal dificuldade existente na divisão proposta das ciências consiste no fato de que cada parte engolir o todo: primeiramente a moral e a lógica cairão na física, se esta for tomada de maneira tão genérica como se acaba de expor; pois ao falar dos espíritos, isto é, das substâncias que têm inteligência e vontade, e ao explicar esta inteligência a fundo, fareis com que entre nela toda a lógica; e, ao explicar na doutrina sobre os espíritos aquilo que concerne à vontade, seria necessário falar do bem e do mal, da felicidade e da infelicidade, e só a vós competirá levar esta doutrina até o ponto de fazer entrar nela toda a filosofia prática. Em contrapartida tudo poderia entrar na filosofia como estando a serviço da felicidade (LEIBNIZ, 1999, p.534).

Por não defender uma rígida divisão, observamos que ele acena para o processo simbiótico (o que acreditamos ter o sentido de Complementaridade Otteano) entre os diversos conhecimentos científicos. Leibniz também não procede a uma reflexão mais aprofundada sobre o sentido de sintético e analítico, como iremos observar no pensamento kantiano.

Leibniz formula, em 1676, o princípio de equipolência entre a causa plena e o efeito integral. Este trata de uma máxima ou *axioma* que, proveniente da metafísica, fundamenta a Física: assim como a proposição de que “o todo é maior do que a parte” constitui o *axioma* da

Geometria, o da equipolência é o *axioma* de Leibniz que está na base da Filosofia da natureza. Leibniz se opõe a Descartes, por meio desse *axioma*, pois Descartes erra, ao afirmar a conservação da quantidade do movimento no lugar da força, como ele expõe numa carta a Bayle em 1687:

Creio que, no lugar do princípio cartesiano, poder-se-ia estabelecer uma outra lei da natureza que considero a mais universal e a mais inviolável, a saber, que há sempre uma **perfeita equação** entre a causa plena e o efeito inteiro. Ela não diz apenas que os efeitos são proporcionais às causas, mas mais ainda, que cada efeito inteiro é equivalente à sua causa. E ainda que **este axioma** seja inteiramente metafísico, ele não deixa de ser um dos mais úteis que se pode empregar em física e dá os meios de reduzir as forças a um cálculo de geometria (A Bayle de 1687, GP III, 45-6) [grifo nosso].

Observamos que Leibniz dá um tratamento de equação aos *axioma*. Leibniz concebe que a relação entre a causa e o efeito é de equação, na qual a causa determina matematicamente, isto é, de maneira exata o seu efeito, afastando-se, assim, de Descartes. Observamos que fica nítido, no pensamento leibniziano, o caráter inato, de verdades e de equações em que como ele toma e utiliza o sentido do termo *axioma*.

De acordo com este filósofo, o homem adquire conhecimentos, pois é dotado de *razão* e ser um animal racional é o que o diferencia dos outros animais. A *razão* é o conhecimento da verdade, cuja conexão com outra menos conhecida faz dar nossa aceitação a esta última. As ideias são, para Leibniz, a fonte e veículo de nosso conhecimento e são representadas pelas palavras. Esse conhecimento vem da conexão e concordância, ou da oposição e discordância que encontramos entre duas de nossas ideias (verdades categóricas), nas quais existem o sujeito e o predicado ou entre mais ideias (verdades hipotéticas) em uma ligação - que se refira a uma relação - entre a proposição antecedente e a proposição consequente. Mas não é sempre que o nosso conhecimento da verdade constitui uma percepção desta concordância ou discordância (LEIBNIZ, 1999, p.354).

Leibniz evidencia a dois graus de conhecimentos: intuitivos e demonstrativos. Ambos, sobretudo, tratam do ‘conhecimento certo’, pois a prova termina na certeza. Pelo conhecimento intuitivo, temos a possibilidade de chegar às verdades *primitivas*, que englobam tanto as verdades necessárias (da razão) quanto as verdades de fato (dos sentidos, e que são contingentes).

Os *axiomas* tratariam de um tipo de princípio ao conhecimento intuitivo, seriam verdades necessárias inatas, de acordo com Leibniz, um ‘conhecimento certo’ e todas as

verdades necessárias (da razão) são imediatas e de uma imediação das ideias. Já as verdades de fato são experiências imediatas internas e de uma imediação dos sentimentos e, ainda, sempre dependentes dos *axiomas* primitivos.

O conhecimento demonstrativo é resultado de um encadeamento dos conhecimentos intuitivos em todas as possíveis conexões das ideias imediatas.

Por muitas vezes o espírito não pode juntar, comparar ou aplicar imediatamente as ideias uma à outra, o que obriga a servir-se de outras ideias intermédias (uma ou mais) para descobrir a concordância ou discordância que se procura, e é isto que se denomina *raciocinar* (LEIBNIZ, 1999, p.364).

Esse raciocinar na direção de verdades demonstrativas, envolvendo a arte de encontrar as ideias intermediárias, é designado em Leibniz por *análise*. Neste sentido, o Conhecimento Matemático, como podemos observar na Lógica dos geômetras e na Lógica geral, trataria de um tipo de conhecimento que envolve um momento analítico. Por vezes, a *síntese* pode nos fornecer alguns atalhos neste empreendimento, indo do mais simples ao composto. Mas é a *análise* que nos fornece um fio no ‘labirinto’ (das ideias) quando possível, uma vez que existem casos em que a própria natureza da questão exige que sigamos Tateando por toda parte, pois os atalhos nem sempre são possíveis (LEIBNIZ, 1999, p. 366).

Sobretudo, Leibniz acredita numa grandiosa e infinita possibilidade relacionada ao desenvolvimento de nossa capacidade intelectual. Todavia, estaríamos ‘ainda’ sujeitos a fatores que limitam nosso conhecimento e são a causa de nossa ignorância em algumas matérias. Neste ponto, chamamos a atenção ao pensamento de Leibniz e sua compreensão e entendimento sobre a natureza de um *axioma*, pois parece tender a um sentido oposto ao de verdades.

Ao destacar e defender um aspecto criativo e a infinita possibilidade que atribui ao intelecto humano, sobretudo, ele destaca que os matemáticos, em grande parte, conseguem evitar dificuldades operacionalizadas pela nossa ignorância em algumas matérias. E ele passa a observar que as demonstrações matemáticas apresentam quatro graus de demonstração:

- 1) Descobrir provas.
- 2) Colocá-las numa ordem que revele sua conexão.
- 3) Perceber a conexão em cada parte da dedução.
- 4) Tirar daí a(s) conclusão (ões) necessária (s).

Assim, via de regra, o primeiro (1), geralmente, não aparece, são sínteses que, por vezes, foram encontradas sem análise ou então em que a análise foi suprimida. Primeiramente, nas suas demonstrações, os geômetras colocam a proposição que se quer demonstrar e, para caminhar à demonstração, expõem alguma figura do que é dado. Depois disso, chegam à preparação e traçam novas linhas de que necessita o raciocínio; na maioria das vezes, a arte maior consiste nesta preparação. Assim feito, seguem o próprio raciocínio, tirando as consequências daquilo que foi dado na preparação e também acrescentado. De modo que, empregando para isso as verdades já conhecidas ou demonstradas, eles atingem a conclusão. Em alguns casos, pode ser dispensada a exposição em alguma figura do que é dado e também sua preparação.

A causa de nossa ignorância é que, muitas vezes, não seguimos as ideias que temos (ao descobrir provas) ou que podemos ter, e não procuramos encontrar as ideias médias (conexões possíveis). E neste sentido, podemos agir conforme os matemáticos, pois não existe nenhuma imperfeição na nossa faculdade agir desse modo. Os matemáticos procedem ‘estabelecendo’ suas definições e *axiomas* (não primitivos) que teriam o sentido de “verdades hipotéticas” para, assim, por deduções analíticas, atingirem a confirmação ou negação, chegando às suas conclusões.

Leibniz observa que deste modo, as ciências matemáticas são capazes de oferecer uma certeza demonstrativa, e que

Ora, com a concordância e a discordância que podem ser conhecidas intuitivamente não constituem um privilégio ligado exclusivamente às ideias dos números e das figuras, é talvez por falta de aplicação de nossa parte que só a matemática chegou a apresentar demonstrações (LEIBNIZ, 1999, p.366-367).

Tal posicionamento nos faz entender que para Leibniz uma característica da matemática seria essencialmente a síntese, e parece-nos que ele entenda a matemática como um tipo de conhecimento sintético, mas como destacamos anteriormente ele ressalta também a dimensão analítica do desenvolvimento matemático.

Não podemos afirmar com segurança, mas, especulativamente, entendemos que este posicionamento de Leibniz seja direcionado pela associação que ele opera da Linguagem, de um ponto de vista particular, ao Conhecimento Matemático, pois sua interpretação nos conduz a situá-la, de modo significativo, como promotora no/do processo de desenvolvimento (aumento) do nosso conhecimento. Observemos o que ele nos diz a seguir:

[...] estou convencido de que a invenção dos silogismos constitui uma das mais belas do espírito humano, e até uma das mais consideráveis. É uma espécie de *matemática universal*, cuja importância não é suficientemente conhecida. Pode-se dizer que o silogismo encerra uma arte de *infallibilidade*, desde que se saiba e se tenha capacidade para bem usá-lo, o que nem sempre acontece.

Entretanto, é necessário saber que, ao falar dos *argumentos em forma*, não entendo exclusivamente esta maneira escolástica de raciocinar que se utiliza nos colégios, mas todo o raciocínio que conclui pela força da forma, e onde não há necessidade de suprir ponto algum [...], um silogismo que evite a repetição, um cálculo de álgebra, uma análise de infinitesimais serão para mim mais ou menos argumentos em forma, porque a sua forma de raciocinar foi pré-demonstrada, de maneira que estamos seguros de não os enganar. Pouco falta para que as demonstrações de Euclides sejam, na maioria dos casos, argumentos em forma, pois quando ele faz *entimemas* na aparência, a proposição suprimida e que parece faltar é suprimida pela citação na margem, onde se indica o meio de encontrá-la já demonstrada, o que dá um grande resumo, sem nada sacrificar da força de convicção. Essas invenções, composições e divisões das razões, das quais se serve Euclides, não passam de formas de argumentar particulares e próprias aos matemáticos e à matéria com a qual se ocupam, e demonstram essas formas com o auxílio das formas universais da lógica (LEIBNIZ, 1999, p.486-7).

Leibniz interpreta e operacionaliza um processo de simbiose entre a Matemática e a Lógica (Linguagem). E, em especial, interessa-se pelas propriedades da Linguagem, ligadas à inclinação natural do espírito em abreviar, que aparecem, em parte, no uso de partículas e se constituiriam num conjunto de raciocínio que pode representar qualquer argumentação, mesmo de um orador, mas que, despojada de seus ornamentos, é reduzida à forma lógica. Neste sentido, a álgebra corresponderia a uma demonstração de como os matemáticos e nós também podemos fazer grandes descobertas sem recorrer às próprias ideias das coisas.

No entanto, destacando que existem ressalvas no pensamento leibniziano a serem imputadas à Linguagem, ele afirma que “é o mau uso das palavras que mais contribui para impedir de encontrar a concordância ou discordância das ideias” (LEIBNIZ, 1999, p.386) e assinala que os matemáticos tentam agir prontamente para superar esta dificuldade, formando os seus pensamentos independente dos nomes e se habitua a apresentar ao espírito *as próprias ideias*. Leibniz procura, nesta aproximação da Linguagem, ‘da Lógica’, com a Matemática, encontrar ou construir uma Lógica mais sublime, procura encontrar “os verdadeiros meios do saber e da arte de raciocinar”. E reconhece que os meios para tal empreendimento encontram-se tanto do lado da Matemática como da Linguagem. Por este pressuposto, Leibniz irá iniciar sua busca no sentido de encontrar uma autêntica eloquência, uma Linguagem universal à ciência.



### 6.6.2 Reflexões sobre o significado de *axioma* em Leibniz

Leibniz atribui ao termo *axioma* o sentido de verdade inatas, e, diferentemente de até então observamos que ele dá um tratamento de equação aos *axiomas*. Por exemplo, como indicamos, Leibniz entende que a relação entre a causa e o efeito é de equação, na qual a causa determina matematicamente, isto é, de maneira exata o seu efeito, afastando-se, assim, de Descartes.

Observamos que pode haver em Leibniz uma tendência a interpretar que para Leibniz a matemática seja analítica, essencialmente por ele fala que *axiomas* são igualdades. Mas, devemos estar atentos a que para Leibniz “analítico” significa identidade com o objeto, não trata de um jogo formal de símbolos. Assim não seria o entendimento de analítico que temos atualmente.

O pensamento de Leibniz sobre o desenvolvimento do nosso intelecto está alicerçado em sua concepção de Deus e do divino. Para ele, nossa capacidade intelectual está essencialmente vinculada a um dom divino que caracteriza a nossa humanidade. Como defende a harmonia pré-estabelecida do universo e como Deus cria sempre o ‘melhor dos mundos possíveis’, Deus nos provê (imprimiu em nós), certamente, condições para que caminhemos no sentido desse mesmo mundo. Um ponto que se destaca em nossa interpretação acentua-se quando ele (LEIBNIZ, 1999, p.414) afirma, exemplificando que:

É como se eu dissesse: a medicina está fundada na experiência, portanto a razão de nada serve. A teologia cristã, que constitui a verdadeira medicina das almas, está fundada na revelação, que corresponde à experiência; todavia, para fazer um todo completo, é necessário acrescentar a teologia natural, que é tirada dos *axiomas* da razão eterna. O próprio princípio de que a *veracidade constitui um atributo de Deus* – sobre o qual reconheceis estar fundada a revelação – não é porventura uma máxima tomada da teologia natural?

Deus forneceu, aos homens, faculdades próprias, porém o homem não pode se dar conta delas. E são essas próprias faculdades, nossa inteligência, nossa razão e sentidos que nos abastecem de provas manifestas de Sua existência. Assim, para este filósofo mesmo a verdade da existência de Deus é, em nós, inata. A metafísica sempre esteve em primeiro plano para Leibniz. Como em Platão a visão do Cosmo era o mais importante. Também a Lógica

para Leibniz representaria a ordem das coisas, se orientando pela ontologia, como também ela não era formal.

Ao desenvolvimento do nosso conhecimento, os *axiomas* são equações que podem ser consideradas como princípios das ciências e, pelo fato de tê-las como evidentes por si mesmas e imediatas, denominou-as inatas. São tão essenciais no desenvolvimento do nosso conhecimento que, em seu *Novo Ensaio sobre o Entendimento Humano*, dedica o capítulo VII a uma análise particular sobre eles.

Nesse livro, ele afirma que a fonte das verdades primitivas, os *axiomas*, já está em nosso espírito e vem das ideias, sendo que é a razão, discernindo pela concordância e/ou discordância entre as ideias – conexão entre as ideias - que sempre nos fornece a certeza de sua necessidade. Como Leibniz entende que a verdade de qualquer conhecimento implica a certeza de sua necessidade, os *axiomas* tratam de verdades inatas e evidentes.

Sobretudo, embora haja diversidade considerável entre ideias inatas e evidentes por si mesmas, os *axiomas* primitivos têm importantes peculiaridades. Por exemplo, Leibniz menciona as proposições primitivas da Aritmética e da Geometria como sendo todas inatas. Mas, conforme ele nos informa, devemos observar que, na Aritmética, por exemplo, a proposição *um mais um são dois* ( $1 + 1 = 2$ ), embora seja evidente, não é propriamente uma verdade, pois se trata da definição de dois, não um *axioma*. *Axiomas* abordariam verdades e verdades universais, por exemplo, ‘que se de coisas iguais se tiram coisas iguais o resto é igual’ e ‘o todo é maior que a parte’ e, ademais, é fácil perceber que toda definição tem em si, implícito, ou seja, tem em si, incorporado, um *axioma*.

Leibniz demonstra seu pensamento ao analisar a proposição *dois mais dois são quatro que*, embora possa parecer uma verdade imediata, não o é, primeiramente se supormos que *quatro* significa *três mais um*. E ainda podemos demonstrar essa hipotética verdade (enquanto, de outro modo admite que os *axiomas* são indemonstráveis) como procederemos a seguir (LEIBNIZ, 1999, p.412):

Primeiro definimos:

- 1) Dois são um mais um.
- 2) Três são dois mais um.
- 3) Quatro são três mais um.

Tomamos o *axioma*, ‘Colocando em lugar dos números coisas iguais, a igualdade permanece’.

Assim, demonstramos:

2 mais 2 são 2 mais 1 mais 1 (em virtude da definição 1)

2 mais 1 mais 1 são 3 mais 1 (em virtude da definição 2)

3 mais 1 são 4 (em virtude da definição 3)

Por conseguinte (em virtude do *axioma*),

2 mais 2 são 4.

Ficando assim demonstrado, realçamos observações importantes, em Leibniz, sobre os *axiomas*: primeiro, os *axiomas* não são demonstráveis e são incapazes de receber uns dos outros qualquer luz de prova e a Geometria, neste sentido, é uma ciência exemplar, pois se baseia em *axiomas* gerais; segundo, as verdades são altamente dependentes das definições e dos *axiomas*.

Os pensamentos são ações, para esse filósofo, e não a essência da alma, já os conhecimentos e as verdades, enquanto estão dentro de nós (mesmo quando não pensamos neles), são hábitos ou disposições. Sobretudo, mesmo estando dentro de nós, Leibniz entende que os nossos sentidos nos fornecem a ocasião para que descubramos, ou cheguemos aos *axiomas*. Ao compreender como sendo necessária a participação dos sentidos no acesso às verdades que são inatas, inclinamo-nos também a interpretar que Leibniz reconhece, como apontamos à duas fontes para nossos conhecimentos: os sentidos e a reflexão.

Entretanto, sua face racionalista é usualmente mais destacada, por ele não defender que o caminho empírico seja suficiente para produção de verdades, uma vez que necessitamos sempre da razão e, embora produtora de verdades de fato, estas são sempre contingentes. Também o entendimento de ‘verdades’, para Leibniz, reforça a perspectiva racionalista, pois ele vincula a evidência de uma verdade à certeza luminosa e não podemos considerar a prática como uma possível censura a esta. É a razão, nosso entendimento, que julga a causa da conexão que se enxerga entre as ideias.

De todo, é muito forte que *axiomas* tenham, essencialmente, em Leibniz, o sentido interpretativo de verdades e a garantia desse pressuposto Leibniz atribui a Deus, Ser Supremo, como podemos destacar quando ele explica:

No que concerne às *verdades eternas*, cumpre observar que no fundo elas são todas condicionais e dizem, com efeito: *Toda figura que tiver três lados terá também três ângulos*, não digo outra coisa senão que, supondo que exista uma figura de três lados, *esta mesma* figura terá três lados. Digo *esta mesma*, e é nisso que as proposições categóricas, que podem ser enunciadas sem condições, embora no fundo sejam condicionais, diferem daquelas que denominamos *hipotéticas*, como seria esta proposição: *Se uma figura tem três lados, seus ângulos são iguais a dois retos*, onde se vê que a proposição antecedente (isto é, a figura de três lados) e a *consequente* (a saber, os ângulos da figura de três lados são iguais a dois retos) não têm o mesmo sujeito, como tinham no caso precedente, onde o antecedente era: *Esta figura é de três lados*, e o consequente: *A mencionada figura é de três ângulos*. Embora ainda a hipotética muitas vezes possa ser tornado em categórica, porém mudando um pouco os termos, como se ao invés da hipotética precedente eu dissesse: *Os ângulos de qualquer figura de três lados são iguais a dois retos*. Os Escolásticos discutiram muito de *Constantia subiecti*, como diziam, isto é, como a proposição feita sobre um sujeito pode ter uma verdade real, se este sujeito não existe. É que a verdade é apenas condicional e diz que, no caso de que o sujeito exista, ele será assim. Todavia, perguntar-se-á ainda em que está fundada esta conexão, visto existir nela uma verdade que não engana. A resposta será que ela está na ligação das ideias. Entretanto, perguntar-se-á, replicando, onde estariam tais ideias, se não existisse nenhum espírito, e qual seria neste caso o fundamento real desta certeza das verdades eternas [...]. [...] cumpre considerar que essas verdades necessárias contêm a razão determinante e o princípio regulador das próprias existências, e, numa palavra, as leis do universo. Assim, uma vez que essas verdades necessárias são anteriores às existências dos seres contingentes, é necessário que elas estejam fundadas na existência de uma substância necessária. É ali que encontro o original das ideias e das verdades que estão gravadas nas nossas almas, não em forma de proposições, mas como fonte da quais a aplicação e as ocasiões darão origem a enunciados atuais (LEIBNIZ, 1999, p.448-9).

Os *axiomas* são razões comuns de verdade particulares que se encontram no espírito dos homens. E, enquanto máximas já conhecidas, constituem os fundamentos de todo o conhecimento, mas Leibniz aponta que o melhor método para aumentá-lo, seria observarmos a Matemática, em cujo o tratamento Leibniz entende ser o de equações. E, neste sentido, entendemos que a teoria de Leibniz tem destaque e relevância ímpar, principalmente ao agregar à sua análise do desenvolvimento cognitivo na Matemática a Linguagem. O resultado dessa visão fará com que Leibniz inicie um trabalho no sentido de encontrar uma Linguagem universal.

Para Leibniz, a construção de uma língua universal supõe a descoberta das noções simples que estão no fundamento de todas as nossas ideias derivadas, a elaboração de uma combinatória que permita, depois da análise, recompô-las racionalmente, Segundo um processo que possa ser expresso em uma característica,

isto é, um conjunto de caracteres, ou signos materiais, manejáveis e reproduzíveis, sobre os quais o pensamento possa exercer, sem risco de erro, Segundo o modelo de computação (NEF, 1995, p.115-6).

No entanto, destacamos que haja um movimento de tensão também no pensamento de Leibniz, sendo na acepção que o *axioma* possa ter um sentido hipotético, especialmente quando ele recorre ao modo de proceder dos matemáticos, que interpretamos vincular-se ao um movimento de aproximação da Linguagem ao processo de desenvolvimento cognitivo em matemática. Verificamos que ele destaca que o método da Matemática comparece, pois, de maneira singular e criativa, ao ‘estabelecer princípios cuja certeza não é completa’ – então podem ser hipóteses -, e este modo de proceder pode ter utilidade, quando sobre esses princípios construímos apenas para efeito de demonstração. “Com efeito, ainda que neste caso todas as conclusões sejam apenas condicionais e valham somente na suposição de que este princípio seja verdadeiro, não obstante esta ligação e esses enunciados condicionais estariam no mínimo demonstrados” (LEIBNIZ, 1999, p.453).

Ele ainda afirma que, no que se refere às ideias, o que importa é ligar as definições através dos *axiomas*. Informa que, assim procedendo, ampliamos nossa percepção, recorrendo a definições e aos *axiomas* por ele denominado de ‘menos primitivos’ – que poderiam ser hipotéticos -, não negligenciando, assim, algumas belas descobertas que podemos encontrar por meio deles.

Vejo bem, igualmente, como é necessário que o método que seguimos nas nossas pesquisas quando se trata de examinar ideias seja regulado conforme os exemplos dos matemáticos, que partindo de certos inícios muito claros e fáceis – que não constituem outras coisas senão os *axiomas* e definições – sobem em pequenos degraus e por encadeamento contínuo de raciocínios até a descoberta e a demonstração das verdades que de início parecem superar a capacidade humana. A arte de encontrar provas e estes métodos admiráveis que inventaram para distinguir e pôr em ordem as ideias médias é o que produziu descobertas tão admiráveis e tão inesperadas (LEIBNIZ, 1999, p.455).

Este entendimento de Leibniz à nossa interpretação do desenvolvimento do termo *axioma* e sobre possíveis oscilações de significado repercute, especialmente, em nossa pesquisa, pois, embora Leibniz venha, até este ponto, desenvolvendo intensa explicação e construção teórica e afirme e destaque o sentido de ‘verdades’ aos *axiomas* e estes, como verdades inatas, evidentes por si, observamos que, relativamente à Matemática, em seu método, ele passa a atribuir uma exceção à constituição de seus *axiomas*. Assim, os *axiomas* da Matemática, neste sentido, poderiam assumir o caráter de suposições (hipóteses).

Sobretudo, ele ainda tenta justificar seu posicionamento e também salvar o sentido de ‘verdades’ aos *axiomas* da Matemática, demonstrando e realçando que, neste caso particular, este estaria resguardado (de certa forma), pois a percepção que resultaria na conexão/ligação das ideias (estabelecida entre definições e *axiomas*) é sempre regida por *axiomas* primitivos ou máximas gerais que herdamos do nosso Criador. Especialmente, interpretamos haver ênfase ao sentido de hipóteses, ainda que não, explicitamente, sendo atribuído aos *axiomas* da Matemática por Leibniz.

No entanto, ele adverte que não devemos regular a prática segundo essas conclusões, a não ser na medida em que a suposição for verificada por outros meios. Sobretudo, embora reconheça o engenhoso procedimento à Matemática, assinala que as hipóteses prováveis:

[...] podem conduzir a novas descobertas e constituem no mínimo um grande auxílio para a memória. Entretanto o nosso espírito está muito inclinado a proceder com pressa demais e a contentar-se com algumas aparências levianas, por não querer dar-se ao trabalho e empregar o tempo necessário para aplicá-las a uma série de fenômenos (LEIBNIZ, 1999, p.457).

Acima de tudo, a arte de descobrir as causas verdadeiras dos fenômenos ou hipóteses verdadeiras, é como a arte de decifrar, na qual, muitas vezes, uma conjectura engenhosa abrevia um longo caminho. O método da Matemática designado, por ele, de *análise* é o que propõe encontrar o desconhecido, uma vez que a análise se serve de definições e outras proposições recíprocas que nos possibilitam fazer o ‘retorno’ e encontrar demonstrações sintéticas, aumentando, assim, nosso conhecimento.

Leibniz defende que o princípio dos princípios consistiria em se fazer bom uso das ideias e das experiências, e isso reforça mais uma vez que ele percebe e reconhece duas fontes para nosso conhecimento (racional/razão e empírica/sentidos). Também defende que, se o método da Matemática pudesse ser estendido a outras disciplinas e matérias, como as grandezas, nossos pensamentos poderiam ir mais além do que podemos imaginar.

Leibniz se empenha no sentido de estabelecer esse método comum às ciências. Segundo Otte (2013), com o advento da álgebra Moderna de Vietá e Descartes (1596-1650), aparece uma nova relação entre a análise e a síntese, de forma que elas quase são interpretadas como idênticas. Este fato foi incorporado no pensamento de Leibniz em sua ideia de prova matemática formal e no sentido de um método universal para se localizar e comunicar as verdades matemáticas e científicas (Hacking, I. 1980, ‘Proof and eternal truth: Descartes and

Leibniz' in: Gaukroger, S. (ed.), *Descartes: Philosophy, Mathematics, Physics*, Harvester, Sussex, UK, pp.169–80.).

Assim, para Leibniz, a distinção entre analítico e sintético torna-se secundária da distinção entre a mente e o raciocínio de Deus e sua vontade. A Matemática, como resultado do nosso raciocínio, foi então chamada por ele de analítica e o resto de conhecimento sintético. Mas, o sentido de analítico em Leibniz não é o sentido de analítico, por exemplo que compreendemos em Peirce e Kant. Para Leibniz analítico significa identidade com o objeto, por causa da harmonia pré-estabelecida, não é um jogo formal só de símbolos (o que tem a ver com analítico em nosso entendimento). Por isso, para Leibniz axiomas são equações básicas, identidades mais básicas. Ainda em Leibniz o conhecimento é conhecimento sobre o mundo mesmo e não sobre uma representação desse mundo. O sentido de relações é um sentido intrínseco.

Segundo Dilthey (1833-1911), devemos reconhecer como mérito de Leibniz ser o primeiro a conceber, no jogo das representações do subconsciente, o princípio da explicação psicológica, sendo um pioneiro nos domínios da investigação histórica e filológica. E Frédéric Nef aponta que

Ao lado dos princípios de razão e de continuidade, a analogia desempenha um papel central na arquitetura da vertente filológica da linguística leibniziana. A analogia como método repousa sobre a analogia como estrutura ontológica: existe uma “conveniência analógica entre a coisa e o signo”, uma “analogia lógico-gramatical”. No ponto em que a linguística cartesiana afirma como necessário o desvio pela ideia [...], nada corresponde, entre a palavra e a coisa, às relações de expressão (palavra/ideia) e de representação (ideia/coisa): Leibniz afirma diretamente uma relação de conveniência analógica, que é o fundamento da expressão e da representação. Essa relação é provavelmente uma espécie de entre-expressão entre os dois aspectos, material e intelectual do signo (NEF, 1995, p. 115).

Para Leibniz, o que realmente importa é a estrutura das relações. De maneira que ele acreditava ser possível se criar conhecimento objetivo à base de símbolos convencionais ou arbitrários. Por exemplo, quando alguém quer mentir para outra pessoa e convencê-la desse fato mentiroso, mesmo neste caso é necessário coerência na argumentação, para isso necessitando escolher, objetivamente, as palavras. Pensando desta maneira, a objetividade repousa nas atividades e em nossas metas. Mas, para Leibniz, que defende uma ‘harmonia pré-estabelecida’ entre o geral e o particular, a objetividade da razão estaria garantida pelo fato de a razão ser o que temos de comum com Deus.

No entanto, mesmo Leibniz destacando o poder criativo da Linguagem ao processo cognitivo, promovendo a aproximação entre esta e a Matemática, sobretudo, ele centrará sua busca circunstanciada na procura de uma Linguagem perfeita e ideal e ao estabelecimento de um método às ciências. Leibniz fracassa, pois acredita que a Matemática deva ser conceitual, ou seja, baseada no sentido dos conceitos. Ele entendia que através da argumentação linguística poderíamos provar a existência das coisas.

E, de acordo com Otte (2013)<sup>163</sup>, mesmo Leibniz insistindo no fato de que todo pensamento ocorre em signos, na construção e aplicação de sistemas de signos, o seu pensamento, embebido de pressupostos racionalistas, entendia os signos e representações como realidades mentais ou subjetivas. E, neste ponto, entendemos que Kant irá avançar consideravelmente, contribuindo à possibilidade de uma inserção de perspectiva interpretativa semiótica ao processo cognitivo e para nossa interpretação sobre a relação entre a Linguagem e a Matemática no processo cognitivo. Em Kant, diferentemente do que ocorre em Leibniz, o mundo já é tomado como um conjunto de pontos. Kant irá empreender uma distinção forte entre objetos e conceito, reforçando a ideia de uma ciência sintética à matemática.

O posicionamento de Leibniz sobre o papel da Linguagem, relacionada ao processo cognitivo, especialmente arrolada à Matemática, será apropriado posteriormente, mas de forma a imprimir à Matemática característica e tratamento que fixam nela o papel de uma Linguagem e, conseqüentemente, a visão tecnicista ao Conhecimento Matemático:

FILALETO – [...] Aquele que descobriu a imprensa, que descobriu o emprego da bússola e descobriu a força da quinquina contribui mais para a propagação do conhecimento e para o progresso das comodidades da vida e salvou mais pessoas da morte que os fundadores dos colégios, dos hospitais e de outros monumentos da mais insigne caridade.

TEÓFILO – Não poderia afirmar nada que fosse mais de acordo com minha opinião. A verdadeira moral ou piedade deve estimular-nos a cultivar as artes [...] (LEIBNIZ, 1999, p.457).

Fundamentados neste posicionamento, até hoje muitos dão mais ênfase à dimensão técnica do que a epistêmica no processo educativo em Matemática e, conseqüentemente, sobre o desenvolvimento humano: uma visão acentuadamente tecnicista da Matemática e do conhecimento.

---

<sup>163</sup> Comentário de Otte em momento de orientação.



Otte (2014) comunga com nossa interpretação de que *axiomas* têm o tratamento de equações em Leibniz e o sentido interpretativo empreendido à eles é o de verdade. Sobretudo quando Leibniz fala que *axiomas* são equações ele está pensando uma coisa totalmente diferente, e, que não tem nada a ver com formalismo. Ele fala de igualdade no sentido de congruência, para ele todo conhecimento é baseado na topologia, ou seja, na estrutura do mundo e não na estrutura do pensamento.

### 6.7 *Axiomas em Kant (1724-1804)*

O pensamento de Immanuel Kant neste estudo figura como um divisor de águas para o pensamento filosófico e para um novo direcionamento à compreensão epistemológica sobre o desenvolvimento do nosso Conhecimento e do Conhecimento Matemático. É, especificamente, por nós, interpretado como desencadeador de uma inserção interpretativa semiótica sobre o nosso desenvolvimento cognitivo.

Destacamos dois pontos como fundamentalmente relevantes neste sentido. O primeiro trata que, até Leibniz, não se fazia Filosofia da Matemática, ou seja, uma Filosofia que fosse questionadora dos fundamentos e domínios matemáticos. Leibniz (assim como Descartes) filosofava a partir da Matemática. Para Leibniz:

[...] a matemática era [...] parte integrante da filosofia e servia como campo de teste de ideias e métodos filosóficos. É notável nesse sentido o contraste com Kant. [...] a natureza do conhecimento matemático é um dos pontos de partida da filosofia kantiana, mas no fim cabe à filosofia *restringir* práticas e métodos matemáticos já de há muito estabelecidos. Contrariamente a Descartes e Leibniz, Kant não busca na matemática comprovação de ideias e métodos filosóficos, mas, inversamente, faz a partir da filosofia a crítica das práticas matemáticas (SILVA, 2007, p. 87).

É a partir de Kant, com sua crítica, que vemos surgir a possibilidade do aparecimento de uma verdadeira Filosofia da Matemática.

E o segundo, porque Kant foi o primeiro pensador, depois dos gregos, a permitir modos radicalmente novos de se conceber os domínios matemáticos, transportando-os do mundo natural ou supranatural para o interior do intelecto humano. Como Copérnico que subverte a ordem do cosmo, Kant promove a sua ‘Revolução Copernicana’ epistemológica, mudando o foco a partir do qual se considera a questão do Conhecimento humano e, em

particular, do Conhecimento Matemático, passando a atribuir ao sujeito (transcendental) papel central no processo cognitivo.

Copérnico havia mostrado que, afastada a hipótese geocêntrica e admitindo que os corpos celestes giram em torno do Sol, os movimentos desses corpos poderiam ser melhor explicados. A seu modo, Kant afirmou na introdução de sua *Crítica da Razão Pura* que: “Se a intuição tiver que se guiar pela natureza dos objetos, não vejo como deles se poderia conhecer algo *a priori*; se, pelo contrário, o objeto (como objeto dos sentidos) se guiar pela natureza da nossa faculdade de intuição, posso perfeitamente representar essa possibilidade” (KANT, 2001, p. XI).

Dessa forma, ele entendia que, para além do saber *a posteriori*, extraído da experiência, haveria um saber de outra ordem, saber *a priori*, que precederia a experiência e cujo objeto não nos pode ser dado pela experiência. E um objeto desta ordem seria o sujeito, sua estrutura e é essa estrutura do sujeito que tornaria possível a experiência. Kant chamou a atenção para que, embora todo o nosso Conhecimento tenha início na experiência, não significa que todo ele provenha daí. O pensamento kantiano é importante em nosso estudo pela particularidade que promove à época, uma vez que ele irá imprimir uma viragem fundamental ao saber metafísico.

Kant busca fundamentar a objetividade do Conhecimento de uma maneira totalmente nova: seu interesse não está mais, como nos racionalistas, em mostrar os alicerces objetivos da passagem do particular para o geral, do empírico para as Leis (OTTE, 2013)<sup>164</sup>; também não aceitará que esta passagem seja garantida pelo fato de que a objetividade da razão esteja em que ela é o que temos de comum com Deus.

Mas, segundo Höffe (2005), podemos observar também que Kant confere um lugar importante à teleologia e desse modo seria falso crer que ele expatria da Filosofia e da Ciência todo o pensamento orientado por finalidades universais.

O objetivo de Kant está em mostrar a objetividade da operação ou atividade mental, segundo a qual o homem chega a verdades gerais com base em verdades particulares. Interpretamos que, neste sentido, ele atribui importância aos diagramas, porque os diagramas não representam, para ele, o empírico ou particular, mas sim a atividade mental, ou seja, o que é realmente objetivo.

---

<sup>164</sup> Carta de Otte aos orientandos.

Diferentemente de uma postura radicalmente racionalista, Kant afirma não ter dúvidas de que todo nosso Conhecimento tem início na experiência. Sobretudo, ele diz que mesmo a possibilidade de experimentação pelo homem está condicionada a um saber de outra ordem, que nos permite extrair e entender sobre toda e qualquer experiência e cujo objeto não pode ser dado pela experiência.

Kant afirmou que, apesar da origem do conhecimento ser a experiência – se alinhando aí com o *empirismo* -, existem certas condições *a priori* para que as impressões sensíveis se convertam em conhecimento – fazendo assim uma concessão ao *racionalismo*. Esta concessão ao racionalismo não deveria ser levada ao extremo, pois “*todo o conhecimento das coisas provenientes só do puro entendimento ou da razão pura não passa de ilusão; só na experiência há verdade*” (KANT apud PASCAL apud SILVEIRA, 2002, p. 35).

Deste modo, ele aponta para a existência de outro tipo de Conhecimento que independe da experiência e de todas as impressões dos nossos sentidos.

Para Otte (2013), depois de Kant, a Filosofia nunca mais será a mesma. Ninguém mais tentará encontrar razões divinas para explicar porque o mundo funciona sempre igual ou do modo que seja. A perspectiva construtiva de Kant foi extremamente importante para Piaget e para a semiótica de Peirce, como também para todos os matemáticos que concebem a Matemática de maneira dinâmica e não estática.

A atividade filosófica de Immanuel Kant divide-se em duas fases. A fase inicial designada pré-crítica, na qual as reflexões se centram, predominantemente, sobre problemas da Física e também sobre questões metafísicas dentro dos cânones racionalistas de Leibniz-Wolf e, a segunda fase, que tem início com a sua *Crítica da Razão Pura* (1781), em que explora e desenvolve sua teoria sobre os limites da sensibilidade e da razão.

Kant afirma sobre a possibilidade e a efetiva existência de conhecimentos verdadeiros o que, inicialmente, pode conduzir-nos a que os *axiomas* possam assumir o sentido interpretativo de ‘verdades’. Ele ainda destaca que a Geometria euclidiana seria uma prova da existência desse tipo de conhecimento verdadeiro. Kant desenvolve sua teoria do Conhecimento em sua *Crítica*, buscando refletir sobre a possibilidade de juízos sintéticos *a priori* e, de certo modo, tentando encontrar uma justificativa para tais Conhecimentos e sobre qual seria a natureza deles.

Mas, o que são juízos *a priori* em Kant? Qual (e de que tipo) é a relação entre juízos *a priori* e *axiomas* na teoria do Conhecimento de Kant? O que é um *axioma* para Kant?

Deste modo, ao estudarmos a *Crítica da Razão Pura*, de Immanuel Kant<sup>165</sup>, na sua 5ª Edição, nosso objetivo foi esclarecer estas questões e, em especial, a relação que envolve juízos *a priori*, *axiomas* e o Conhecimento<sup>166</sup> Matemático em Kant.

### 6.7.1 A teoria do Conhecimento de Kant

O modelo de Ciência da natureza que encontramos na base filosófica de Kant é o de uma época impregnada pelo fervor científico. No pensamento de Kant o que impera é uma ciência exata, emergente na Idade Moderna e que está se impondo progressivamente a todos os domínios da realidade. Para ele, a Matemática e a Lógica, como está afirmado no prefácio da segunda edição de Sua *Crítica*, já no tempo dos gregos, haviam iniciado o caminho seguro da Ciência, caminho este que a Física agora adentrava. Observando essas Ciências, Kant busca empreender, à metafísica, um método, desenvolvendo, nesse percurso, sua teoria.

Sobretudo, o pensamento de Kant é inovador, pois imprime uma virada essencial ao saber metafísico e à epistemologia. Copérnico mostrou, afastada a hipótese geocêntrica e admitindo-se, de outro modo, que os corpos, por sua vez, giravam em torno do Sol, cujos movimentos celestes podiam ser mais bem explicados. Kant promove a sua Revolução Copernicana ao afirmar na introdução à *Crítica da Razão Pura* que: "Se a intuição tiver que se guiar pela natureza dos objectos, não vejo como deles se poderia conhecer algo *a priori*; se, pelo contrário, o objeto (como objeto dos sentidos) se guiar pela natureza da nossa faculdade de intuição, posso perfeitamente representar essa possibilidade" (KANT, 2001, p.10).

Espontaneamente, encontramos-nos voltados para as coisas, para o mundo e a viragem copernicana de Kant nos obriga a reorientar no sentido oposto e que nos voltemos para o

---

<sup>165</sup> Immanuel Kant (1724-1804). Filósofo, considerado como um dos pensadores mais influentes da era Moderna. Nasceu em Königsberg, Prússia Oriental, filho de um artesão humilde, estudou no colégio Fridericianum e na Universidade de Königsberg, na qual foi professor catedrático. Kant promove, na epistemologia, uma síntese entre o racionalismo continental (de René Descartes e Gottfried Leibniz, onde impera a forma de raciocínio dedutivo) e a tradição empírica inglesa (de David Hume, John Locke, ou George Berkeley, que valoriza a indução). Apesar de ter adaptado a ideia de uma filosofia crítica, cujo objectivo primário era "criticar" as limitações das nossas capacidades intelectuais, Kant foi um dos grandes construtores de sistemas, levando a cabo a ideia de crítica nos seus estudos da metafísica, ética e estética. Kant afirma, em síntese, que não somos capazes de conhecer inteiramente os objetos reais e que o nosso conhecimento sobre estes é apenas fruto do que somos capazes de pensar sobre eles.

<sup>166</sup> Kant em sua obra *Crítica da Razão Pura* (1781) expõe sua *teoria do conhecimento* ou, como se diria, sua epistemologia. O conhecimento para Kant tem origem na experiência, mas mesmo a experiência exige de nós certas condições *a priori* para que as impressões sensíveis se convertam em conhecimento. Assim, a reflexão kantiana coloca o que entendemos por conhecimento, como resultado dessa combinação que rompe com a dicotomia empirismo/racionalismo, já que "*pensamentos sem conteúdos são vazios; intuições sem conceitos são cegas*" (SILVEIRA, 2002, p.34).

sujeito, procurando, neste, as faculdades que tornam possível o nosso Conhecimento. Em Kant, a Filosofia deixa de ser uma ontologia, ultrapassa o ceticismo empirista e dogmatismo racionalista e se transforma em Filosofia transcendental, transmuta-se num Conhecimento que, como diz Kant (2001, p.53), “se preocupa menos dos objectos do que do modo de os conhecer, na medida em que este deve ser possível a priori”. Esse conhecimento especial não pode repousar na experiência, nem é redutível à análise. Será o que Kant designa por Conhecimento sintético *a priori*.

Assim, Kant evidencia que existem dois tipos de Conhecimentos: os Conhecimentos *a priori*, que são independentes da experiência e os Conhecimentos *a posteriori* (empírico) cuja origem se dá pela experiência. Para além do saber *a posteriori*, extraído da experiência, haverá um saber de outra ordem, saber *a priori*, que precede a experiência e cujo objeto não nos pode ser dado pela experiência. Um objeto desta ordem será o próprio sujeito, a estrutura do sujeito e é esta estrutura que torna possível a experiência (KANT, 2001, p.11).

E todo nosso Conhecimento é resultado de um processo que resulta da emissão de “juízos”. A nossa capacidade de entendimento, de conhecer, está para nossa capacidade de emissão de juízos que assume um modo lógico e não psicológico. Juízos que resultam de síntese, ou ligação, que buscam uma validade objetiva. Os juízos ou são do tipo *a priori*, ou do tipo *a posteriori*.

Um juízo expressa sempre uma relação entre conceitos e isto quer dizer que um juízo trata de uma proposição em que se atribui um predicado a um sujeito. Kant começa sua teoria, esclarecendo que (KANT, 2001, p.63):

[...] designaremos doravante, por juízos *a priori*, não aqueles que dependem desta ou daquela experiência, mas aqueles em que se verifica qualquer independência de toda e qualquer experiência. Dos conhecimentos *a priori* são puros aqueles em que nada de empírico se mistura. Assim, por exemplo, a proposição, segundo a qual toda mudança tem uma causa, é uma proposição *a priori*, mas não é pura, porque a mudança é um conceito que só pode extrair-se da experiência.

Os juízos *a priori*, além de independem da experiência, referem-se a proposições pensadas como necessárias<sup>167</sup> e que não derivam de outras proposições necessárias. Apresentam rigorosa universalidade (generalidade), de modo que nenhuma exceção se admite como possível, sendo absolutamente válidas *a priori*. Desta forma, necessidade e rigorosa

---

<sup>167</sup> Ser necessário qualifica o que não poderia não ser, ou ser diferente do que é (DUROZOI e ROUSSEL, 1993, p.338).

universalidade são, pois, os sinais seguros de um Conhecimento *a priori* e são condições inseparáveis uma da outra para tal.

Kant afirma que todos os juízos da Matemática são do tipo ‘juízos puros *a priori*’ e, em suas palavras (KANT, 2001, p.65):

É fácil mostrar que há realmente no conhecimento humano juízos necessários e universais, no mais rigoroso sentido, ou seja, juízos puros *a priori*. Se quisermos um exemplo extraído das ciências, basta voltar os olhos **para todos os juízos da matemática** [nosso grifo].

Para ele, os juízos da Matemática, além de extrapolarem toda a experiência possível, são um exemplo brilhante do quanto pode ir longe o Conhecimento *a priori*, entendendo, sobretudo, que essa experiência opera de modo que “se ocupa de objetos e conhecimentos, apenas na medida em que podem se representar na intuição<sup>168</sup>” (KANT, 2001, p.67).

Foi partindo desta afirmação que, inicialmente, interpretamos que os ‘juízos puros *a priori*’, a que Kant faz referência, estejam relacionados aos *axiomas* a que, por exemplo, Euclides menciona em *Os Elementos*. Este pensamento nos foi reforçado, por observarmos que Kant aponta a Geometria euclidiana como uma prova da possibilidade e a efetiva existência de conhecimentos verdadeiros e desenvolve toda uma teoria, buscando demonstrar de que modo isso seria possível (SILVEIRA, 2002, p.37).

Estudando os *axiomas* em Euclides, percebemos que estes satisfazem as características anteriormente atribuídas por Kant aos juízos *a priori*. Eles figuram como proposições que também independem da experiência necessária e com rigorosa universalidade. Além do que os *axiomas* de Euclides tratam de proposições que não são provadas ou demonstradas empiricamente e, sobretudo em Euclides, consideradas como verdadeiras.

Por exemplo, tomemos o primeiro *axioma* em Euclides: as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si. Podemos inferir que sua prova só pode dar-se intuitivamente, sendo impossível fazê-la empiricamente, especialmente espelhada no sentido da ideia de ‘igualdade’. Notamos que se trata de uma proposição necessária, uma vez que ela não pode ser de outro modo. Havendo que, se  $A = C$  e  $B = C$ , logo  $A$  e  $B$  são iguais a  $C$ . Também se

---

<sup>168</sup> A única forma de *intuição* para Kant era a *intuição sensível*. Ele nega a possibilidade de uma *intuição intelectual* ou *racional*. “Intuição designa de uma maneira geral um modo de conhecimento imediato e direto que coloca no mesmo momento o espírito em presença de seu objeto” (DUROZOI e ROUSSEL, 1993, p.251). Tratando da representação imediata que faço de um objeto, pela contemplação ou não desse objeto.

refere a uma proposição com rigorosa universalidade, pois a relação trata de uma generalidade que extrapola o que a experiência pode nos fornecer.

Entretanto, de modo particular e especial, na abordagem euclidiana, quanto à natureza dos *axiomas*, está posto intrinsecamente o aspecto de noções básicas enquanto ‘verdades’ e obedecendo a uma interpretação de sentido platônico e ontológico relacionado a reminiscências. No entanto podemos afirmar que, no pensamento kantiano, este aspecto (de reminiscências) não é o atribuído aos juízos *a priori*.

Quando Kant atribui ao Conhecimento (e, em nossa tese, aos *axiomas*) o sentido de “juízos”, podemos, de súbito, inferir uma dimensão/perspectiva de caráter subjetivo, mesmo que, em seu pensamento, ele tente esquivar-se desse aspecto subjetivo, atribuindo a esses juízos um caráter lógico. Desta maneira, podemos especular que os juízos *a priori*, em Kant, podem comparecer com o indicativo de outro sentido, pelo menos quanto à natureza dos mesmos e até diferentemente do sentido de ideias inatas, como em Euclides. Pensamos que esta diferenciação (se existir realmente) pode influenciar no entendimento e, conseqüentemente, no significado de *axiomas*. Isso implica que o significado de *axiomas* em Kant não seja o mesmo que o tomado em Euclides, ou seja, pelo menos no que se refere a sua natureza, haveria (ou se evidenciaria) uma diferenciação.

Mas temos clareza de que, até o momento, trabalhamos apenas com suposições sobre essa consideração. Sobremaneira, ressaltamos que, neste aspecto, estaríamos já de imediato negando que o significado de *axiomas*, em Kant e Euclides, seja o mesmo. Conseqüentemente, isso implica que nossa interpretação apontaria, pelo pensamento kantiano, o indicativo de uma mudança de entendimento no sentido do significado da palavra *axioma*, tomado até então. Ou, melhor dizendo: entendemos que haja em Kant o limiar a um olhar/interpretação diferenciado sobre a natureza dos *axiomas* da Matemática e, conseqüentemente, do próprio Conhecimento Matemático.

### **6.7.2 Os juízos *a priori* para Kant: o que (e de que tipo) são?**

Otte (2014)<sup>169</sup> informa que, na Antiguidade até Descartes, a distinção entre analítico e sintético foi compreendida como a correlação entre dois métodos; a análise deveria mostrar as possibilidades da solução de um problema e a síntese deveria realizar a solução, ou seja,

---

<sup>169</sup> Manuscrito de Michael F. Otte não publicado, intitulado *Parmêndides*.

mostrar a realidade da solução. Sobretudo, Kant fez da cognição humana a base da sua epistemologia. Ele considerava ‘teoria’ e ‘realidade’ como coisas diferentes. E essa foi a verdadeira base de sua revolução copernicana.

Antes disso, era assumido que todo nosso Conhecimento deveria se conformar aos objetos. Mas, de acordo com Otte (2014)<sup>170</sup>, todas as tentativas de estender o nosso Conhecimento de objetos, estabelecendo alguma coisa em relação a eles, *a priori*, por meio de conceitos, terminou em fracasso com esse pressuposto. Kant, de outro modo, buscando sucesso maior nas tarefas metafísicas, partiu da premissa de que os objetos é que deveriam estar de acordo com nosso Conhecimento.

Kant substituiu a distinção entre ‘pensar’ e ‘ser’ por duas fontes fundamentais da mente e do nosso Conhecimento: conceitos e intuições. Através desta última, um objeto é-nos dado e, através do primeiro, pensamos sobre ele. Semioticamente falando, precisamos de sinais indiciais, diretamente apontando para as coisas para garantir a objetividade do raciocínio matemático. As afirmações ou teoremas matemáticos são universalmente válidos, ao invés de serem apenas declarações, (sobre) de fatos particulares, de modo que a Matemática tem necessidade de construção de modelos ideais ou universais do discurso. E Kant utilizou o conceito de ‘tempo’ e ‘espaço’ para tais fins.

Anteriormente a Kant, admitiam-se somente dois tipos de juízos ou proposições: os juízos *analíticos a priori* e os juízos *sintéticos a posteriori*. Tais juízos teriam a estrutura linguística de sujeito e predicado e daí surgiria a definição de juízos analíticos e juízos sintéticos (HÖFFE, 2005, p.47-48). O juízo, em Kant, é a faculdade de subsumir sobre regras, ou seja, de discernir se algo cai ou não sobre uma regra dada. Ele não entende por juízos um ato de julgar por processos do tipo psicológico, mas – de modo lógico – tratando de afirmações e enunciados, a saber, aquela ligação de síntese de representações que pretendem validade objetiva.

Somos conduzidos a entender que os juízos analíticos tratam das proposições em que o predicado pertence imediatamente ao sujeito, com algo já contido (intrinsecamente) neste. E, de outro modo, que nos juízos sintéticos o predicado não faz parte do sujeito, mas estabelece ligação, uma relação com este. Observando as palavras de Kant (2001, p.69):

---

<sup>170</sup> Manuscrito de Michael F. Otte não publicado, intitulado *Parmêndides*.



Portanto, os juízos (os afirmativos) são analíticos, quando a ligação do sujeito com o predicado é pensada por identidade; aqueles, porém, em que essa ligação é pensada sem identidade, deverão chamar-se juízos sintéticos. Os primeiros poderiam igualmente denominar-se juízos *explicativos*; os segundos, juízo *extensivos*; porque naqueles o predicado nada acrescenta ao conceito do sujeito e apenas pela análise o decompõe nos conceitos parciais, que já nele estavam pensados (embora confusamente); ao passo que os outros juízos, pelo contrário, acrescentam ao conceito de sujeito um predicado que nele não estava pensado e dele não podia ser extraído por qualquer decomposição.

Ainda em sua *Crítica*, Kant nos dá a seguinte descrição sobre uma analítica/sintética distinção:

In all judgments wherein the relation of the subject to the predicate is thought this relation is possible in two different ways. Either the predicate B belongs to the subject A, as something, which is contained (covertly) in this concept A; or B lies completely outside of the concept A, although it stands in connection with it. In the first instance, I term the judgment analytical, in the second synthetical (KANT, B 11).<sup>171</sup>

Sobretudo, Kant apresenta o seguinte exemplo como ilustração:

When I say, *All bodies are extended*, this is an analytical judgment. .... On the other hand, when I say, *All bodies are heavy*, the predicate is something totally different from that which I think in the mere concept of a body. By addition of such a predicate it becomes a synthetical judgment (KANT, B 11).<sup>172</sup>

Para Otte (2014)<sup>173</sup> :

It would be tempting in conclusion to say: In an analytic judgment, the predicate remains an essential property of the object in question. That would represent an Aristotelian way of thinking. For Kant, the Aristotelian view is not quite correct, for two reasons. First, **Kant differentiated sharply between concepts and objects, from whence the whole question about the analytic/synthetic distinction arises.** Second, what Kant wants to say is that it belongs to our human constitution that we cannot perceive or sense or intuit a body without extension. Therefore, the judgment is analytic, because the extension of space belongs to pure intuition and is, therefore, one of the *a priori* conditions of this judgment respective of the intuition on which it is based [grifo nosso].<sup>174</sup>

<sup>171</sup> Em todas as decisões em que a relação do sujeito com o predicado é pensada nesta relação, é possível de duas maneiras diferentes. Ou o predicado B pertence ao sujeito A como algo que está contido (secretamente) neste conceito A; ou B encontra-se completamente fora do conceito, embora se encontre em relação com ele. No primeiro caso, eu chamo de julgamento analítico, na segunda sintético (KANT, B 11) [nossa tradução].

<sup>172</sup> Quando eu digo que todos os corpos são extensos, este é um juízo analítico. .... Por outro lado, quando eu digo que todos os corpos são pesados, o predicado é algo totalmente diferente do que eu acho que está mero conceito de um corpo. Pela adição de um tal predicado, torna-se um juízo sintético (KANT, B 11) [nossa tradução].

<sup>173</sup> Manuscrito não publicado de Michael F. Otte intitulado *Parmênides*.

<sup>174</sup> Seria tentador dizer em conclusão que: em um juízo analítico, o predicado permanece uma propriedade essencial do objeto em questão. Isso representaria uma maneira aristotélica de pensar. Para Kant, a visão aristotélica não é totalmente correta, por duas razões. Em primeiro lugar, Kant diferencia acentuadamente entre conceitos e objetos e é de onde toda a questão sobre a distinção analítico / sintético surge. Em segundo lugar, o

Assim, de acordo com Otte (2014)<sup>175</sup>, a possibilidade de um pensamento se basear no raciocínio analítico, que é o raciocínio a partir de conceitos sozinhos, mas a realidade do Conhecimento objetivo, diz Kant: “can never be proved merely from the fact that its concept is not self-contradictory, but only through its being supported by some corresponding intuition” (KANT, B 308). E, portanto, a afirmação de Kant de que “our knowledge springs from two fundamental sources of the mind; (...) Through the first an object *is given* to us, through the second the object is *thought* in relation to that [given] representation” (Kant, B74) é sua definição correspondente sobre a distinção analítico / sintético.

Desse modo, Kant observou que os juízos da Matemática são do tipo sintético; exemplificando com a Geometria, ele nos diz:

Do mesmo modo, nenhum princípio da Geometria pura é analítico. Que a linha reta seja a mais curta distância entre dois pontos é uma proposição sintética, porque o meu conceito de reta não contém nada de quantitativo, mas sim uma qualidade. O conceito mais curto tem de ser totalmente acrescentado e não pode ser extraído de nenhuma análise do conceito linha reta. Tem de recorrer-se à intuição, mediante a qual unicamente a síntese é possível (KANT, 2001, p.73).

Não é, pois, um juízo do tipo *analítico*, além de que, no exemplo acima, fica claro não se tratar de um juízo empírico (*a posteriori*). Observe que, para Kant, a reta e o ponto são objetos somente intuitivos, o que temos são conceitos (*a priori*) desses objetos e a distância ‘mais curta’ surge de uma relação que se estabelece entre esses conceitos, não pertencendo direta nem exclusivamente ao conceito de linha reta, precisando ser acrescentado a este. Assim, devemos recorrer à intuição, mediante a qual unicamente a síntese é possível. De outro modo, é um juízo necessário e universal, não havendo possibilidade de irmos, deste modo, à experiência para comprovar tal juízo sintético; trata-se de um juízo *a priori*.

No pensamento de Kant, *analítico* é o tipo de raciocínio feito quando nos baseamos somente em um conceito, mas, para ele, o fato de um conceito não ser autocontraditório não produz a realidade do conhecimento objetivo; assim, de qualquer modo, para ser provado, ele irá necessitar do suporte de uma intuição correspondente. Kant não concebia a distinção entre

---

que Kant quer dizer é que pertence a nossa constituição humana que não podemos perceber ou sentir ou intuir um corpo sem extensão. Portanto, o juízo é analítico, pois a extensão do espaço pertence à intuição pura e é, portanto, uma das condições *a priori* um do presente acórdão respectivo da intuição sobre a qual se baseia [Nossa tradução].

<sup>175</sup> Comentário orientativo de OTTE via e-mail, em fevereiro de 2014.

*analítico* e *sintético* em termos de proposições ou frases (é isso que devemos entender melhor), mas em termos de atos de pensamento e juízos, ou seja, ele concebia a distinção entre analítico e sintético, em termos epistemológicos.

Kant, ao estabelecer a existência de juízos *sintéticos a priori* (tomando a Matemática como exemplo disso), informa-nos que estes seriam tão necessários e universais quanto os juízos *analíticos a priori*. Desta maneira, ele afirma que todos os juízos *a priori* da Matemática são do tipo *sintéticos* e não empíricos, pois trazem consigo uma necessidade que não se pode extrair da experiência.

E, ainda, que seriam os juízos *sintéticos a priori* os verdadeiros responsáveis pela ampliação de nosso Conhecimento. Ele reforça tal pensamento e distinção ao afirmar que:

É que uma **grande parte**, talvez a maior parte da atividade da nossa razão, consiste em *análises* dos conceitos que já possuímos de objetos. Isto fornece-nos uma porção de conhecimentos que, não sendo embora mais do que esclarecimentos ou explicações do que já foi pensado nos nossos conceitos (embora ainda confusamente), são apreciados, pelo menos no tocante à forma, como novas intelecções, embora, no tocante à matéria ou ao conteúdo, **não ampliem os conceitos já adquiridos**, apenas os decomponham. Como este procedimento dá um conhecimento real *a priori* e marca um progresso seguro e útil, a razão, sem que disso se aperceba, faz desprevenidamente **afirmações de espécie completamente diferente**, em que acrescenta algo. É certo que um pequeno número de princípios que os geômetras pressupõem são, em verdade, analíticos e assentam sobre o princípio da contradição; mas também apenas servem, como proposições idênticas, para o encadeamento do método e conceitos, dados outros conceitos de todo alheios [e precisamente *a priori*,] ignorando como chegou a esse ponto e nem sequer lhe ocorrendo pôr semelhante questão (KANT, 2001, p.68) [grifo nosso].

Ressalta, em sua observação, uma dupla e distinta forma de juízos *a priori*: os juízos *a priori* analíticos e juízos *a priori* sintéticos. Os *axiomas*, seguindo o raciocínio de Kant, em sua maioria, principal e especialmente relacionados à Matemática, seriam do tipo de juízos *sintéticos a priori*. São *a priori*, pois comportam uma necessidade que não pode ser extraída da experiência. Mas ele indica, por exemplo, que existiriam alguns *axiomas* que poderíamos considerar do tipo de juízo analítico na Geometria:

É certo que um pequeno número de princípios que os geômetras pressupõem são, em verdade, analíticos e assentam sobre o princípio da contradição; mas também apenas servem, como proposições idênticas, para o encadeamento do método e não preenchem as funções de verdadeiros princípios; assim, por exemplo,  $a=a$ , o todo é igual a si mesmo, ou  $(a + b) > a$ , o todo é maior do que a parte. E, contudo, **mesmo estes axiomas, embora extraiam a sua validade de simples conceitos, são admitidos na matemática apenas porque podem ser representados na intuição**. O que geralmente aqui nos faz crer que o predicado destes juízos apodícticos se encontra já no conceito e que, por conseguinte, o juízo seja analítico, é apenas a

ambigüidade da expressão. *Devemos*, com efeito, acrescentar a um dado conceito determinado predicado e essa necessidade está já vinculada aos dois conceitos. **Mas o problema não é saber o que devemos acrescentar pelo pensamento ao conceito dado, é antes o que pensamos efetivamente nele, embora de uma maneira obscura.** Então é manifesto que o predicado está sempre, necessariamente, aderente a esses conceitos, não como pensado no próprio conceito, antes mediante uma intuição que tem de ser acrescentada ao conceito (KANT, 2001, B 17) [grifo nosso].

Tal posicionamento reforça nossa interpretação da distinção entre analítico e sintético em Kant, que era diferente da distinção em termos de proposições (sujeito- predicado), mas se tratava de uma distinção em termos epistemológicos, isto é, na forma de atos de pensamentos e juízos. Se recorrermos à intuição para conceber, nesse sentido, uma ligação/relação que acrescente um predicado a um conceito, então nosso juízo é sintético. E, na Matemática (essencialmente na Matemática pura), todos os juízos são do tipo *sintéticos a priori*.

### **6.7.3 Juízos sintéticos *a priori* e os axiomas para Kant: como são possíveis? Como chegamos a eles?**

Qual a perspectiva de Kant para a natureza dos juízos sintéticos *a priori*, ou seja, aos axiomas? Se axiomas dizem respeito a juízos sintéticos *a priori*, respaldados em que tipo de princípio acrescentamos uma segunda representação a uma primeira, não só com generalidade maior do que a experiência pode conhecer, mas também com a expressão da necessidade, ou seja, totalmente *a priori* e por simples conceitos?

Existem dois troncos do Conhecimento humano, mas oriundos de uma raiz comum que, segundo Kant, ainda é desconhecida para nós. Esses troncos são a ‘sensibilidade’ e o ‘entendimento’; pelo primeiro nos são dados os objetos e o segundo é o meio pelo qual esses objetos são pensados. A sensibilidade, ao nos fornecer os objetos, concede-nos intuições, e o entendimento, quando nos faz pensar tais objetos, fornece-nos conceitos. Assim, as duas fontes de nosso Conhecimento seriam: intuições e conceitos.

Para além das duas faculdades de nossa mente, apontadas anteriormente (sensibilidade e entendimento), Kant apresenta-nos uma terceira: a razão. Kant (2001, p.78) nos aponta que “a razão é a faculdade que nos fornece os princípios do conhecimento *a priori*”, sendo que o verdadeiro problema relacionado a ela (a razão pura) está contido em saber como são possíveis os juízos sintéticos *a priori* que são os fundamentos de todo nosso Conhecimento.

Ele nos explica que os juízos sintéticos são aqueles do tipo em que se conjugam um predicado B a um sujeito A, de modo que B jaz completamente fora do conceito A, embora esteja em relação/ligação intuitiva com este. A relação e/ou ‘ligação intuitiva’ é o que caracteriza os juízos serem sintéticos e *a priori*, isto é, independente de toda experiência, visto que essa mesma relação/ligação traz consigo uma necessidade que não pode ser extraída da realidade. Isto quer dizer que tal necessidade se revela tão somente na relação (intuitiva) do sujeito com o predicado.

Kant (2001, p.74), seguindo esta premissa, informa que “o predicado está sempre, necessariamente aderente a esses conceitos, não como pensado no próprio conceito, antes mediante uma *intuição* que tem de ser acrescentada ao conceito”. E é assim que “a adjunção de tal predicado produz, pois, um juízo sintético (KANT, 2001, p.69)”.

Ele discorre em sua teoria que, embora as coisas tenham uma realidade externa (a *coisa em si*) e independente do sujeito, o nosso Conhecimento não trata das *coisas em si*; o que conhecemos trata sem exceção de representações das *coisas em si*, nossa cognoscibilidade refere-se, então, apenas aos *fenômenos* (como *as coisas em si* se apresentam ao sujeito). Kant (2001, A 30) explica, ao referir-se à *forma* do espaço, que:

Em contrapartida, o conceito transcendental dos fenômenos no espaço é uma advertência crítica de que nada, em suma, do que é intuído no espaço é uma coisa em si, de que o espaço não é uma forma das coisas, forma que lhes seria própria, de certa maneira, em si, mas que nenhum objeto em si mesmo nos é conhecido e que os chamados objetos exteriores são apenas simples representações da nossa sensibilidade, cuja forma é o espaço, mas cujo verdadeiro correlato, isto é, a coisa em si, não é nem pode ser conhecida por seu intermédio; de resto, jamais se pergunta por ela na experiência.

No entanto, ele esclarece que, mesmo permanecendo *as coisas em si* envoltas numa sombra cognitiva (SILVEIRA, 2002), isso não impossibilita que exista um Conhecimento verdadeiro, isto é, válido ‘objetivamente’ dessas mesmas coisas. De forma que o sentido da ‘verdade’, em Kant, tem a ver com uma propriedade regulativa.

Kant, com sua teoria, não tenta demonstrar a verdade, nem para a Geometria euclidiana, nem para as Leis de Newton sobre o movimento. “*Que é a verdade? A definição nominal do que seja a verdade, que consiste na concordância do conhecimento com o seu objeto, admitimo-la e pressupomo-la aqui; pretende-se, porém, saber qual seja o critério geral e seguro da verdade de todo o conhecimento*” (KANT, 2001, A 58). Ele ainda esclarece que

Ora, um critério geral da verdade seria aquele que fosse válido para todos os conhecimentos, sem distinção dos seus objetos. É, porém, claro, que, abstraindo-se nesse critério de todo o conteúdo do conhecimento (da relação ao objeto) e referindo-se a verdade precisamente a esse conteúdo, é completamente impossível e absurdo perguntar por uma característica da verdade desse conteúdo dos conhecimentos e, portanto, é impossível apresentar um índice suficiente e ao mesmo tempo universal da verdade. Como acima já designamos por matéria o conteúdo de um conhecimento, teremos de dizer: não se pode exigir nenhum critério geral da verdade do conhecimento, quanto à matéria, porque tal seria, em si mesmo, contraditório (KANT, 2001, A 59).

Assim, ele pretende destacar e afirmar que o investigador jamais deve procurar leis de modo arbitrário e, pelas suas formulações matemáticas, ele destacará o sentido de ‘objetividade’ enquanto característica da ‘verdade’. E neste sentido seu pensamento é inovador, principalmente, à crítica que direciona à experiência (do ponto de vista do sujeito epistêmico) e, em nossa interpretação, à atividade. Para Kant, as condições da possibilidade da experiência são, ao mesmo tempo, as condições da possibilidade dos objetos da experiência (KANT, B 197) e, a nossa ver, também a expectativa da objetividade de um determinado conhecimento; a constituição dos objetos e a constituição da experiência formam uma unidade essencial. E isso, para nós, é interpretado no sentido da Complementaridade do pensamento ‘Otteano’.

Em linhas gerais, sua teoria nos informa que a matéria de qualquer fenômeno constitui-se de *sensações* (que as coisas em si produzem em nós), que são ordenadas por nossas formas *a priori* da sensibilidade: o tempo e o espaço. Para Kant, espaço e tempo, são propriedades do homem, não das *coisas em si*, e são consideradas como a condição de possibilidade dos fenômenos, e não uma determinação deles. Tratam de representações *a priori* que subjazem necessariamente aos fenômenos externos, são formas puras da intuição sensível, fornecendo-nos a representação dos objetos e não resultam em conceitos discursivos. Kant aponta que essa capacidade humana de formas de sensibilidade *a priori* (tempo e espaço) já justifica, em si, a emissão de juízos sintéticos *a priori*, afirmando que:

Aquí temos uma das partes requeridas para a solução do problema geral da filosofia transcendental: como são possíveis proposições sintéticas *a priori*? – a saber, intuições puras *a priori*, espaço e tempo, nos quais, se no juízo *a priori* quisermos sair do conceito dado, encontramos aquilo que pode ser descoberto *a priori* não no conceito, mas na intuição que lhe corresponde, e ser ligado sinteticamente àquele. Por esta razão, esses juízos jamais alcançam além dos objetos dos sentidos, e só podem valer para objetos de uma experiência possível (KANT *apud* SILVEIRA, 2002, p.12).

O tempo e o espaço constituem as duas fontes de Conhecimento pelas quais podemos extrair, *a priori*, diversos conhecimentos sintéticos. E Kant diz que a Matemática pura nos fornece um brilhante exemplo no que se refere ao Conhecimento do espaço e das suas relações. Tomado conjuntamente,

[...] são formas puras de toda a intuição sensível, possibilitando assim proposições sintéticas *a priori*. Mas estas fontes de conhecimento *a priori* determinamos seus limites precisamente por isso (por serem simples condições da sensibilidade); é que eles dirigem-se somente aos objetos enquanto são considerados como fenômenos, mas não representam coisas em si. Só os fenômenos constituem o campo da sua validade; saindo desse campo já não se pode fazer uso objetivo dessas fontes. Esta realidade do espaço e do tempo deixa, de resto, intacta a certeza do conhecimento por experiência; este é para nós igualmente seguro, quer essas formas sejam necessariamente inerentes às coisas em si mesmas, quer apenas à nossa intuição das coisas (KANT, 2001, A 39 B 56).

Para Kant, essas formas puras da sensibilidade funcionam como garantia da possibilidade do nosso Conhecimento, que se relaciona ao fenômeno, não à coisa em si, à realidade em si. Assim, conexas ao sentido de ‘verdade’, essa garantia tem a ver com certa objetividade relacionada à certeza do nosso modo de conhecer, o que nos conduz a interpretar que, arrolado aos *axiomas*, no pensamento, haja um sentido aproximativo interpretativo ao de hipótese aos *axiomas*.

Outro ponto no pensamento kantiano que imprime um redirecionamento à interpretação dos *axiomas*, este deixando o aspecto descrito e assumindo um aspecto operativo, observamos quando Kant explica sobre a idealidade do nosso sentido interno quanto externo:

[..]tudo o que no nosso conhecimento pertence à intuição (com exceção do sentimento de prazer ou desprazer e a vontade, que não são conhecimentos) contém apenas simples relações; relações de lugares numa intuição (extensão), relações de mudança de lugar (movimento) e leis pelas quais esta mudança é determinada (forças motrizes). O que, porém, está presente no lugar ou age nas próprias coisas, fora da mudança de lugar, não nos é dado pela intuição. Ora, simples relações não fazem conhecer uma coisa em si; eis porque bem se pode avaliar que, se o sentido externo nos dá apenas representações de relações, só poderá conter, na sua representação, a relação de um objeto com o sujeito e não o interior do objeto, o que ele é em si. [...] Ora, aquilo que, enquanto representação, pode preceder qualquer ato de pensar algo, é a intuição e, se esta contiver apenas relações, é a forma da intuição; e esta forma da intuição, como nada representa senão na medida em que qualquer coisa é posta no espírito, só pode ser a maneira pela qual o espírito é afetado pela sua própria atividade, a saber, por esta posição da sua representação, por consequência, por ele mesmo, isto é, um sentido interno considerado na sua forma. Tudo o que é representado por um sentido é sempre, nesta medida, um fenômeno; e, portanto, ou não se deveria admitir um sentido interno, ou então o sujeito, que é o

seu objeto, só poderia ser representado por seu intermédio como fenômeno e não como ele se julgaria a si mesmo se a sua intuição fosse simples espontaneidade, quer dizer, intuição intelectual. Toda a dificuldade consiste aqui em saber como pode um sujeito intuir a si mesmo interiormente; mas esta dificuldade é comum a toda a teoria (KANT, 2001, B 67 B 68).

Claramente observamos que Kant assume uma perspectiva relacional e ainda interpretamos como um sentido operativo atribuído à elaboração proposicional, ou seja, na formação de um juízo e, para nós, na elaboração dos *axiomas*. Quando olhamos para a Matemática pura, podemos deduzir que esse pensamento comunga com o sentido efetivo do raciocínio diagramático por ela espelhado.

Então, para Kant, a primeira condição que nos explica como são possíveis proposições sintéticas *a priori* é possuímos intuições puras *a priori* de espaço e de tempo. Em tais intuições, quando, num juízo *a priori*, queremos sair do conceito dado, encontramos aquilo que pode ser descoberto *a priori*, não neste conceito, mas numa intuição correspondente, a qual pode ser ligada sinteticamente a esse conceito.

Entretanto, não nos basta, ao Conhecimento, formas *a priori* de sensibilidade, pois estas só resultam na *percepção* que nos é fornecida pela intuição. Como Kant afirma:

O nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objeto mediante estas representações (espontaneidade dos conceitos); pela primeira é-nos *dado* um objeto; pela segunda é *pensado* em relação com aquela representação (como simples determinação do espírito). Intuição e conceitos constituem, pois, os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que nem conceitos sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceitos podem dar um conhecimento. [...] Daí que a intuição pura contenha unicamente a forma sob a qual algo é intuído e o conceito puro somente a forma do pensamento de um objeto em geral. Apenas as intuições ou os conceitos puros são possíveis *a priori*, os empíricos só *a posteriori*. (KANT, 2001, B 75 A 51).

Necessitamos da aplicação das formas *a priori* do entendimento pela razão, para chegarmos ao fenômeno e, através dele, como se dão as coisas para nós. “Sem sensibilidade nenhum objeto nos seria dado, e sem entendimento nenhum seria pensado” (KANT, 1987, p.75). Kant chama de *sensibilidade* à *receptividade* do nosso espírito em receber representações na medida em que, de algum modo, somos afetados e, de *entendimento*, a nossa capacidade de produzir representações ou a *espontaneidade* do nosso Conhecimento.

As formas *a priori* de entendimento são as que ordenam nossas representações. Sabendo que nossas percepções são constituídas de uma multiplicidade de dados



desordenados, para que se tornem conhecimento, elas necessitam ser acolhidas, ordenadas e arranjadas; daí a prerrogativa de formas *a priori* de entendimento que se apliquem às ordens de um mundo inteligível.

O entendimento trata, pois, de uma faculdade não sensível do Conhecimento, sendo que as formas *a priori* do entendimento dizem respeito a um modo “de conhecimento mediante conceitos, não intuitivo, mas discursivo” (KANT *apud* SILVEIRA, 2002, p.13). Esses conceitos versam sobre funções e estas são entendidas como a unidade de ação que consiste em ordenar diversas representações sobre uma representação comum. Um conceito não se refere imediatamente a um objeto (como se dá com a intuição), mas a qualquer outra representação (quer seja da intuição ou mesmo outro conceito). De acordo com Kant:

O entendimento não pode fazer outro uso destes conceitos a não ser, por seu intermédio, formular juízos. Como nenhuma representação, exceto a intuição, se refere imediatamente ao objeto, um conceito nunca é referido imediatamente a um objeto, mas a qualquer outra representação (quer seja intuição ou mesmo já conceito). O juízo é, pois, o conhecimento mediato de um objeto, portanto a representação de uma representação desse objeto. Em cada juízo há um conceito válido para diversos conceitos e que, nesta pluralidade, compreende também uma dada representação, referindo-se esta última imediatamente ao objeto. Assim, neste juízo, por exemplo, *todos os corpos são divisíveis*, o conceito de divisível refere-se a diversos outros conceitos; entre eles refere-se aqui, particularmente, ao conceito de corpo, e este, por sua vez, a certos fenômenos <sup>1</sup> que se apresentam a nós. Estes objetos são, pois, apresentados mediatamente pelo conceito de divisibilidade (KANT, 2001, A 69 B 94).

Se a intuição nos dá os objetos, é pelo entendimento que esses são ‘pensados’. O entendimento não pode fazer outro uso dos conceitos que não sejam a formulação de juízos. Mas, como isso se processa? Como chegamos à formulação dos juízos sintéticos *a priori*?

As formas de entendimento puro configuram conceitos aplicáveis *a priori* aos objetos que nos são dados pelas formas de sensibilidade (espaço e tempo). Esses conceitos puros do entendimento (e com eles todo conhecimento teórico *a priori*), por sua vez, estabelecem-se como princípios da possibilidade da experiência. Tomando a experiência como a determinação dos fenômenos em tempo e espaço em geral e tirando-a, enfim, do princípio da unidade sintética primitiva da *apercepção* (esta como forma do entendimento em relação ao espaço e tempo e como formas primitivas da sensibilidade) (KANT, 1987).

Kant apresenta-nos a lógica da verdade que opera no entendimento uma vez que nenhum conhecimento pode contradizê-la sem que perca, ao mesmo tempo, todo o conteúdo, isto é, toda a relação a qualquer objeto e, portanto, toda a verdade (KANT, 2001, A 63).

O entendimento puro é, pois, uma unidade subsistente por si mesma e em si mesma suficiente, que nenhum acréscimo do exterior pode aumentar. Daí que o conjunto do seu conhecimento constitua um sistema, a abranger e determinar por uma idéia, sistema cuja perfeição e articulação possam oferecer, ao mesmo tempo, uma pedra de toque da exatidão e genuinidade de todos os conhecimentos que nele se incluam. Toda esta parte da lógica transcendental é constituída por dois livros, dos quais o primeiro contém os *conceitos* e o outro os *princípios* do entendimento puro (KANT, 2001, A 65 B 90).

A função lógica do pensamento que se aplica a conceitos *a priori* sobre nossas percepções pode ser reunida em quatro classes de conceitos do entendimento ou categorias do pensamento, a saber: 1. *da quantidade*, 2. *da qualidade*, 3. *da relação* e 4. *da modalidade dos juízos*; cada uma dessas subdivide-se em outras três categorias.

E, segundo Kant, a síntese tem o especial papel que o entendimento alcance os conceitos nessas categorias:

Porém, a espontaneidade do nosso pensamento exige que este diverso (que vem da receptividade da nossa intuição) seja percorrido, recebido e ligado de determinado modo para que se converta em conhecimento. A este ato dou o nome de síntese (KANT, 2001, b 102)

Entendo, pois, por síntese, na acepção mais geral da palavra, o ato de juntar, umas às outras, diversas representações e conceber a sua diversidade num conhecimento. Tal síntese é pura quando o diverso não é dado empiricamente, mas *a priori* (como o que é dado no espaço e no tempo). Antes de toda a análise das nossas representações, têm estas de ser dadas primeiramente e nenhum conceito pode ser de origem analítica *quanto ao conteúdo*. Porém, a síntese de um diverso (seja dado empiricamente ou *a priori*) produz primeiro um conhecimento, que pode, aliás, de início ser ainda grosseiro e confuso e portanto carecer da análise; no entanto, é a síntese que, na verdade, reúne os elementos para os conhecimentos e os une num determinado conteúdo; é pois a ela que temos de atender em primeiro lugar, se quisermos julgar sobre a primeira origem do nosso conhecimento. A síntese em geral é, como veremos mais adiante, um simples efeito da imaginação, função cega, embora imprescindível, da alma, sem a qual nunca teríamos conhecimento algum, mas da qual muito raramente temos consciência. Todavia, reportar essa síntese a conceitos é uma função que compete ao entendimento e pela qual ele nos proporciona pela primeira vez conhecimento no sentido próprio da palavra (KANT, 2001, B 103 A 78).

Daí reforça nosso entendimento de que os *axiomas* são juízos sintéticos *a priori*. Em especial, os princípios da Matemática dizem respeito a todos aqueles diretamente ligados às categorias da quantidade (1) e da qualidade (2) e caracterizam-se por necessitar de uma certeza intuitiva e não discursiva como é o que usualmente ocorre com as outras categorias, muito embora, em ambos os casos, estejamos tratando com certezas completas.

As categorias do entendimento humano revelam-se como condição da possibilidade de toda objetividade, sendo objetivamente válidas; o pensamento subjetivo mais puro é um elemento necessário da objetividade dos objetos. Para Kant, subjetividade e objetividade têm a mesma origem na autoconsciência transcendental, que se realiza nas formas puras do conectar, por exemplo, nas categorias.

Deste modo, as categorias tratam de conceitos de um objeto em geral, por intermédio dos quais a intuição desse objeto se considera *determinada* em relação a uma das funções lógicas do juízo. Elas prescrevem leis *a priori* aos fenômenos e, conseqüentemente, à natureza, como conjunto de todos os fenômenos.

Resumidamente, Kant aponta que

O entendimento, falando em geral, é a faculdade dos *conhecimentos*. Estes consistem na relação determinada de representações dadas a um objeto. O *objeto*, porém, é aquilo em cujo conceito está *reunido* o diverso de uma intuição dada. Mas toda a reunião das representações exige a unidade da consciência na respectiva síntese. Por conseqüência, a unidade de consciência é o que por si só constitui a relação das representações a um objeto, a sua validade objetiva, portanto, aquilo que as converte em conhecimentos, e sobre ela assenta, conseqüentemente, a própria possibilidade do entendimento (KANT, 2001, B 137).

Pela aplicação dos conceitos às percepções (intuições) é que chegamos nossos juízos sintéticos *a priori*. De todos os juízos sintéticos *a priori* que elaboramos, os da Matemática, especificadamente, não provêm de conceitos puros, apenas de intuições puras (embora por intermédio do entendimento) e é a aplicação destes à experiência que leva à sua validade objetiva e até mesmo à sua possibilidade. Assim, esses princípios puros *a priori* da Matemática partem da intuição para o conceito e não o contrário, como ocorre em todos os outros.

[...] para conhecer qualquer coisa no espaço, por exemplo, uma linha, é preciso traçá-la e, deste modo, obter sinteticamente uma ligação determinada do diverso dado; de tal modo que a unidade deste ato é, simultaneamente, a unidade da consciência (no conceito de uma linha), só assim se conhecendo primeiramente um objeto (um espaço determinado). A unidade sintética da consciência é, pois, uma condição objetiva de todo o conhecimento, que me não é necessária simplesmente para conhecer um objeto, mas também porque a ela tem de estar submetida toda a intuição, para *se tornar objeto para mim*, porque de outra maneira e sem esta síntese o diverso não se uniria numa consciência (KANT, 2001, B 138).

A Matemática, de acordo com Kant (2001, B 147), só investiga a forma e não a matéria da intuição, proporcionando-nos conhecimentos *a priori* de objetos somente segundo

sua forma. Neste ponto, podemos inferir que Kant se direciona a inferir uma interpretação diagramática na constituição do Conhecimento Matemático. Sobre um aspecto especialmente relacionado a esse Conhecimento e a seus conceitos, Kant (2001, B 147) nos diz que:

A intuição sensível ou é intuição pura (espaço e tempo) ou intuição empírica daquilo que, pela sensação, é imediatamente representado como real, no espaço e no tempo. Pela determinação da primeira, podemos adquirir conhecimentos *a priori* de objetos (na matemática), mas só segundo a sua forma, como fenômenos; se pode haver coisas que tenham de ser intuídas sob esta forma é o que aí ainda não fica decidido. Consequentemente, todos os conceitos matemáticos não são por si mesmos ainda conhecimentos, senão na medida em que se pressupõe que há coisas que não podem ser apresentadas a nós a não ser segundo a forma dessa intuição sensível pura. *Coisas no espaço e no tempo* só nos são dadas, porém, na medida em que são percepções (representações acompanhadas de sensação), por conseguinte graças à representação empírica. Consequentemente, os conceitos puros do entendimento, mesmo quando aplicados a intuições *a priori* (como na matemática) só nos proporcionam conhecimentos na medida em que estas intuições, e portanto também os conceitos do entendimento, por seu intermédio, puderam ser aplicados a intuições empíricas.

Ele afirma que a Matemática em si representaria apenas um saber formal, já que sem a matéria da percepção empírica não existe conhecimento. Höffe (2005, p.107) explica que:

Mas, dado que, para Kant, conhecimento sempre significa conhecimento da realidade objetiva, a matemática não pode ser conhecimento – a não ser que a natureza seja constituída matematicamente. Com isso, Kant não deprecia a autonomia ou valor próprio da matemática, mas constata simplesmente que a matemática por si só não diz nada sobre a realidade. Já que a realidade por si, como mostra Kant possui uma constituição quantitativa e, portanto, matemática, o pressuposto restritivo é correto. A matemática fornece a forma do conhecimento empírico; em consequência, o conhecimento empírico precisa da matemática, e também no caso dela as categorias não têm outro valor cognitivo que para os objetos da experiência possível.

Em suma, “O entendimento, portanto, por si nada conhece, mas apenas liga e ordena a matéria do conhecimento, a intuição, que tem de lhe ser dada pelo objeto” (KANT, 2001, B 145). É pela aplicação das funções do pensamento às nossas percepções, que essas ganham significado e, assim, seguidamente são formulados os juízos. Kant também indica em sua teoria que os juízos figuram como uma terceira faculdade de conhecimento, a saber, a faculdade de subsumir, conceitos do entendimento sobre conceitos – a nossa razão.

Só é possível essa tarefa de subsunção<sup>176</sup> por meio de uma nova classe de representações que Kant denomina de ‘esquemas’ e estes são um produto da imaginação

---

<sup>176</sup> *Subsunção* tem a ver, para Kant, da relação de um material indeterminado com sua forma determinante. “Em todas as subsunções de um objeto num conceito, a representação do primeiro tem de ser *homogênea* à

(KANT, B 179), desempenhando uma função mediadora entre a sensibilidade e o entendimento, mas, sobretudo, existe uma distinção elementar entre uma imagem e um esquema.

O esquema é sempre, em si mesmo, apenas um produto da imaginação; mas, como a síntese da imaginação não tem por objetivo uma intuição singular, mas tão-só a unidade na determinação da sensibilidade, há que distinguir o esquema da imagem. Assim, quando disponho cinco pontos um após o outro ... tenho uma imagem do número cinco. Em contrapartida, quando apenas penso um número em geral, que pode ser cinco ou cem, este pensamento é antes a representação de um método para representar um conjunto, de acordo com certo conceito, por exemplo, mil, numa imagem, do que essa própria imagem, que eu, no último caso, dificilmente poderia abranger com a vista e comparar com o conceito. Ora é esta representação de um processo geral da imaginação para dar a um conceito a sua imagem que designo pelo nome de esquema desse conceito (KANT, 2001, B 180).

Kant informa que a imagem é um produto da faculdade empírica da imaginação produtiva e que, de outro modo, o esquema de conceitos sensíveis, por exemplo, as figuras, no espaço, são produto e, de certo modo, um monograma da imaginação pura *a priori*, pelo qual e através do qual são possíveis imagens, estas por sua vez devem estar sempre ligadas aos conceitos, única e exclusivamente por intermédio do esquema que elas designam e ao qual não são em si mesmas inteiramente adequadas. Já, de outro modo, o esquema de um conceito puro do nosso entendimento não pode ser reduzido a qualquer imagem, pois se trata de uma síntese pura, que é produzida por uma regra da unidade segundo conceitos em geral e que exprime a categoria.

Os nossos juízos sintéticos seguem os conceitos puros do entendimento sob a condição de esquemas, revelando os princípios do entendimento puro (KANT, B 175). É assim que Kant destaca existir em nós (humanos) um nível de análise intermediário e ao qual denomina de ‘esquematismos do entendimento puro’, responsável pela aplicação das classes anteriores elencadas às nossas percepções (intuições *a priori* = representações). Segundo Kant (1987, p.181):

[...] este esquematismo de nosso entendimento **é uma arte oculta nas profundezas da alma humana** cujo verdadeiro manejo dificilmente arrebataremos algum dia à natureza, de modo a poder apresentá-la sem véu. Podemos dizer apenas o seguinte: a

---

representação do segundo, isto é, o conceito tem de incluir aquilo que se representa no objeto a subsumir nele; é o que precisamente significa esta expressão: que um objeto esteja contido num conceito. Assim, possui homogeneidade com o conceito geométrico puro de um *círculo*, o conceito empírico de um *prato*, na medida em que o redondo, que no primeiro é pensado, se pode intuir neste último” (KANT, 2001, B 177).

Imagem é um produto da faculdade empírica da capacidade produtiva de imaginação; **o esquema** dos conceitos sensíveis (como as figuras no espaço) é um produto e como que um monograma da capacidade pura a priori de imaginação pelo qual e segundo o qual as imagens tornam-se primeiramente possíveis, mas as quais têm sempre que ser conectadas ao conceito somente mediante o esquema ao qual designam, e em si não são plenamente congruentes com o conceito. [Grifo nosso]

Podemos inferir que o ‘esquema’ é a condição formal pura da sensibilidade à qual o conceito do entendimento está restringido ao seu uso. O ‘esquematismo’ do entendimento puro refere-se ao processo pelo qual o entendimento opera com os esquemas. “O esquema puro da quantidade (*quantitas*), porém, como conceito do entendimento, é o número, que é uma representação que engloba a adição sucessiva da unidade a unidade” (KANT, 1987, p.210).

Höffe (2005, p.113) explica que os juízos se servem de esquemas:

O juízo decide se a multiplicidade dada da intuição cai ou não sob a regra gerada pelo entendimento. Neste sentido, ele constitui uma faculdade cognitiva própria que desempenha o papel mediador necessário entre as duas faculdades, a sensibilidade e o entendimento. A faculdade do juízo não contribui com o material nem com a forma, i.e., o conceito, mas faz com que os conceitos empregados se ajustem realmente à matéria dada, juntando o material da intuição ao conceito correspondente e identificando o material como algo que pertence a este conceito e a nenhum outro [...]. O juízo possibilita a aplicação correta dos conceitos. [...].

Para que o juízo possa cumprir sua tarefa e combinar corretamente os conceitos com o correspondente material dado na intuição, necessita de uma representação que possua o caráter tanto de intuição quanto de conceito. Kant a denomina *esquema* (em grego, forma, figura); por seu intermédio as intuições são adaptadas a conceitos e estes adaptados a intuições. Mesmo assim não se pode confundir um esquema, por exemplo, o de cão, com uma imagem. [...]. Um esquema não representa nem o aspecto empírico nem o conceito isolado do universal, senão o “repertório’ das regras da formação de imagens” (Heidegger, 1965; Kant B 179 s.).

Kant cita como exemplo de esquema o conceito sensível da Álgebra e da Geometria, o triângulo. Temos uma intuição geral do triângulo e que precede a toda imagem como representação gráfica do mesmo.

Assim, os esquemas, quando ligados à compreensão pura, figuram como regras. Como antecipamos, Kant entende que a capacidade de julgar é a faculdade de subsumir sobre regras, isto é, distinguir se algo está sob uma determinada regra ou não e, assim, a emissão de um juízo.

De tudo isto se depreende claramente que o esquematismo do entendimento, por intermédio da síntese transcendental da imaginação, desemboca tão-somente na unidade de todo o diverso da intuição no sentido interno, e assim, indiretamente, na unidade da apercepção como função que corresponde ao sentido interno (a uma

receptividade). Os esquemas dos conceitos puros do entendimento são, pois, as condições verdadeiras e únicas que conferem a esses conceitos uma relação a objetos, portanto uma *significação*; e as categorias, portanto, no fim de contas, são apenas susceptíveis de um uso empírico possível, servindo unicamente para submeter os fenômenos às regras gerais da síntese, mediante os princípios de uma unidade necessária *a priori* (em virtude da reunião necessária de toda a consciência numa apercepção originária) e, deste modo, torná-los próprios a formar uma ligação universal numa experiência (KANT, 2001, A 146).

Os conceitos *a priori* do entendimento puro da razão trabalham como predicados dos juízos possíveis aos objetos. Assim, o sentido de entendimento está para a capacidade de estabelecer relações entre as representações, uma faculdade de julgar que tem a ver com a submissão a regras, isto é, de emitir juízos (KANT, 1987); sendo, desse modo, que conhecemos as coisas.

De todo, para Kant, observamos que os elementos que constituem nossos Conhecimentos são: intuição e conceitos. Sobretudo, nós só temos Conhecimento quando se unem sensibilidade e entendimento. Isso porque é necessário tornar sensíveis os conceitos (fornecer-lhes um objeto na intuição) bem como tornar inteligíveis as intuições (submetê-las a conceitos).

É através desse mecanismo que chegamos à formulação de juízos e ao nosso Conhecimento da e sobre as coisas (para nós). De qualquer forma, todas as ações de nosso entendimento podem ser reduzidas a juízos, representando-o como uma faculdade de julgar, mas, sobretudo, um julgar que implica um modo lógico. O juízo é, pois, o Conhecimento mediado de um objeto; portanto, a representação de uma representação desse objeto (KANT, 2001, p.128).

Kant apresenta, em sua *Crítica*, o sistema de todos os princípios do entendimento puro, mas informa que, relacionado à Matemática:

Os princípios matemáticos também não fazem parte deste sistema, porque derivam apenas da intuição, não do conceito puro do entendimento; porém, a sua possibilidade terá aqui necessariamente um lugar reservado, porque são também juízos sintéticos *a priori*; não, todavia, para demonstrar a sua **exatidão e certeza apodítica, do que não carecem, mas para se poder compreender e deduzir a possibilidade de tais conhecimentos evidentes *a priori*** (KANT, 2001, B 189) [nosso grifo].

Isso reforça os princípios da Matemática, ou seja, que os *axiomas* sejam tomados por Kant enquanto ‘verdades’, ao indicá-los como certeza apodítica. Da combinação entre uma intuição pura, que contém unicamente a forma pela qual é percebida alguma coisa e o

conceito puro, que se refere à forma do pensamento de um objeto geral, chegamos aos juízos sintéticos *a priori*, haja vista que somente intuições e conceitos puros são possíveis *a priori*. Kant (1987, p.205) destaca que “os juízos sintéticos decorrem *a priori* dos conceitos puros do entendimento e constituem o fundamento de todos os outros conhecimentos *a priori*, ou seja, dos princípios do entendimento puro”.

Não obstante, essa nossa capacidade de formulação de juízos é regida, também, por princípios *a priori* do entendimento puro “que levam este nome não só porque em si contêm os fundamentos de outros juízos, mas porque eles mesmos não se fundam em nenhum conhecimento mais alto e geral” (KANT, 1987, p.188). Em outros termos, a nossa capacidade humana de formulação de juízos é regida por determinadas regras.

O princípio que rege a formulação dos juízos analíticos é o da contradição (mas, para Kant, não são deste tipo os juízos da Matemática). O princípio supremo de todos os juízos sintéticos, muito embora estes também nunca violem o princípio da contradição, é, pois, para Kant (1987, p.221), que: “todo objeto está submetido às condições necessárias da unidade sintética do diverso da intuição numa experiência possível”.

Seguidamente, para dar conta do princípio supremo dos juízos sintéticos *a priori*, Kant propõe quatro grandes categorias de princípios: 1. *Axiomas da intuição*; 2. *Antecipações da percepção*; 3. *Analogias da experiência*; 4. *Postulados do pensamento empírico* (KANT, 1987). Estes, por sua vez, tratariam de regras para o uso objetivo das categorias de entendimento, que direcionam a e na elaboração dos juízos.

Todas as categorias por que Kant opta por estabelecer no desenvolvimento de sua teoria não são por si conhecimentos, mas referem-se a simples *formas de pensamento*, que servem para a formulação dos Conhecimentos a partir de intuições dadas. “Todos os princípios do entendimento puro nada mais são que princípios *a priori* da possibilidade da experiência e que somente a esta se referem também todas as proposições sintéticas *a priori*, e até mesmo a sua possibilidade assenta totalmente nesta relação” (KANT, 2001, p. 281).

De todo, observamos ser, neste ponto da teoria do Conhecimento de Kant, onde são apresentados os princípios (regras do entendimento puro), que ele faz referência direta ao termo *axioma* e especificamente ao nominar a primeira classe de princípios, ou seja, os ‘*Axiomas da intuição*’. Também, observamos que Kant destaca e explica sobre a distinção entre o que seja denominado ‘axioma’ e o que seja ‘postulado’. Relacionado à categoria dos ‘*postulados do pensamento empírico*’, ele explicará que (KANT, 2001, p.277-278):



(...) devo ainda indicar o motivo que justifica a denominação de postulados dada aos princípios da modalidade. Não uso aqui esta expressão no sentido que alguns autores filosóficos modernos lhe atribuem, contrariamente à acepção dos matemáticos, a quem propriamente pertence, segundo o qual postular significa dar uma proposição por imediatamente certa, sem justificação nem prova; se as proposições sintéticas, por mais evidentes que sejam, se devessem admitir sem dedução e apenas em virtude da sua exigência a uma adesão incondicionada, seria a falência de toda a crítica do entendimento; e como não faltam pretensões atrevidas, de que não está isenta a crença vulgar (que não é todavia uma credencial), é inegável que o nosso entendimento estaria exposto a todas as opiniões, sem poder recusar-se a admitir enunciados que, embora legítimos, reclamam ser admitidos com o mesmo tom de segurança de verdadeiros axiomas. Assim, pois, quando se acrescenta, sinteticamente, uma determinação *a priori* ao conceito de uma coisa, deverá, imprescindivelmente, juntar-se-lhe, senão uma prova, pelo menos a dedução da legitimidade da sua afirmação. Porém, os princípios da modalidade não são objetivamente sintéticos, porque os predicados da possibilidade, realidade e necessidade, pelo fato de acrescentarem algo à representação do objeto, não acrescentam, nem minimamente, o conceito a que se referem. São, no entanto, sempre sintéticos, mas apenas subjetivamente, isto é, acrescentam ao conceito de uma coisa (do real), acerca da qual de resto nada dizem, a faculdade de conhecimento de onde tem a sua origem e seu lugar, de tal modo que, se esse estiver apenas, no entendimento, em ligação com as condições formais da experiência, o seu objeto é possível; se estiver articulado à percepção (à sensação como matéria dos sentidos) e por ela for determinado, mediante o entendimento, o objeto é real; se é determinado pelo encadeamento das percepções, segundo conceitos, o objeto é necessário. Os princípios da modalidade apenas exprimem, relativamente ao conceito, a ação da faculdade de conhecimento que o origina. Ora, na matemática, um postulado é uma proposição prática, que apenas contém a síntese pela qual damos a nós próprios um objeto e produzimos o seu conceito; assim, por exemplo, com uma linha dada, a partir de um ponto dado, descrevemos um círculo sobre uma superfície. E semelhante proposição não pode ser demonstrada, porque o processo que ela exige é, precisamente, aquele pelo qual produzimos, antes de mais, o conceito de tal figura. Sendo assim, temos o mesmo direito de postular os princípios da modalidade, porque não alargam o conceito de coisas em geral, somente indicam a maneira como o conceito está ligado em geral à faculdade de conhecer.

Neste sentido, fica evidente que, para Kant, um *axioma* representa, antes de tudo, uma proposição ‘objetivamente’ *sintética*. Kant não especula sobre a veracidade ou falsidade do nosso Conhecimento. Sua reflexão toma a direção do que ele chama de ‘objetividade’ do Conhecimento, entendendo que um *axioma* trataria de uma proposição – juízo ‘objetivamente’ *sintético* e *a priori*. Ele ainda indica que nem toda proposição sintética (mesmo que *a priori*) seja um *axioma*, pois, se elas forem de forma que não alargam o conceito de coisas em geral, mas tão somente contenham uma síntese pela qual nos damos um objeto e produzimos o seu conceito, tratam de proposições ‘subjetivamente’ *sintéticas*, deste modo, figurando como explicado na citação anterior, em que esses juízos são tratados como *postulados*.

Entendemos que, para Kant, os *axiomas* da Matemática são todos do juízo sintético *a priori*, mas, cujo caráter de possibilidade (de sua realização na experiência) se assenta nos *axiomas da intuição*, que figuram uma categoria do sistema de princípios do entendimento puro. Tais princípios são aqueles enunciados fundamentais sobre a realidade, possíveis ainda antes de toda experiência. E, assim, Kant imprime primazia ao conhecimento dos princípios/*axiomas* matemáticos, sendo que, para ele, é a Matemática que representa a forma imprescindível de todo Conhecimento objetivo da natureza. Ainda afirma “que em toda doutrina particular da natureza só se pode encontrar tanta ciência *autêntica* quanto é encontrada nela *matemática*” (MAN, IV 479, *apud* HÖFFE, 2005, p.118).

O princípio da contradição é um princípio universal e plenamente suficiente de todo o Conhecimento analítico, mas sua autoridade e utilidade não vão além como um critério suficiente de verdade. Do mesmo modo, um juízo sintético não deverá jamais ir contra este princípio inviolável, pois senão seria aniquilado; mas mesmo neste tipo de juízo, ele ainda não é fundamento determinante da verdade de nosso Conhecimento. E sobre o princípio supremo de nossos juízos sintéticos nos diz Kant (2001, A 158 B 197):

O princípio supremo de todos os juízos sintéticos é, pois, este: todo o objeto está submetido às condições necessárias da unidade sintética do diverso da intuição numa experiência possível. Deste modo são possíveis os juízos sintéticos *a priori*, quando referimos as condições formais da intuição *a priori*, a síntese da imaginação e a sua unidade necessária numa apercepção transcendental, a um conhecimento da experiência possível em geral e dizemos: as condições da *possibilidade da experiência* em geral são, ao mesmo tempo, condições da *possibilidade dos objetos da experiência* e têm, por isso, validade objetiva num juízo sintético *a priori*.

Sendo assim, é nesse sentido que Kant toma a Matemática como exemplar e, semioticamente falando, os ícones e índices assumem um papel relevante para tomar empírico – real – o objeto de Conhecimento.

Há, porém, princípios puros *a priori*, que nem por isso gostaria de atribuir propriamente ao entendimento puro, porque não provêm de conceitos puros, apenas de intuições puras (embora por intermédio do entendimento); ora, o entendimento é a faculdade dos conceitos. A matemática possui destes princípios, mas a aplicação destes à experiência e, portanto, a sua validade objetiva e até mesmo a possibilidade de tal conhecimento sintético *a priori* (a dedução desses princípios) assenta sempre sobre o entendimento puro (KANT, 2001, A 160).

Os *axiomas* enquanto juízos *sintéticos a priori* ou princípios, de acordo com Kant, só são possíveis pelo fato de que o nosso Conhecimento não se rege pelos objetos, mas é

justamente ao contrário, ou seja, são os objetivos regidos pelo Conhecimento. Pensamento este fundamentado nas bases de sua revolução copernicana.

É o próprio sujeito que implanta na natureza as leis transcendentais formuladas nos princípios  *sintéticos*. De forma que, os objetos da natureza são nossa própria obra; o material a ser conhecido só se torna algo objetivo em virtude da atividade constitutiva apriorística do sujeito; o objeto é  *fenômeno* e não a coisa em si. Neste sentido, Kant situa a atividade do sujeito como ponto central na formulação de juízos do desenvolvimento do nosso Conhecimento, mas, sobretudo, ele ainda busca consagrar o sentido de ‘verdade’ numa objetividade garantida pelo sujeito transcendental, isto é, nos fundamentos do nosso Conhecimento.

Kant, no âmbito teórico, inverte a concepção platônica. Em Platão, o verdadeiro Ser revela-se só ao pensamento puro, enquanto que o saber fornecido pelos sentidos só conhece um ente não autêntico. Para Kant, os  *fenômenos* providos pelos sentidos e pelo entendimento são a única coisa objetiva, o único ente para nós, já o puro pensar não nos fornece Conhecimento algum. Segundo Höffe (2005, p.140), para Kant:

[...] não pode mais haver uma divisão dos objetos em objetos do mundo sensível ( *phaenomena*) e do mundo inteligível ( *noumena*). Ainda que o entendimento, contrariamente ao que afirma o empirismo, limite a sensibilidade, não possui, no entanto, um campo de conhecimento próprio, como supõe o racionalismo.

Kant se opõe também aos céticos, que negam toda a verdade metafísica. Essa verdade existe realmente; mas – isso ele acrescenta, decepcionando a metafísica tradicional – a metafísica nunca ultrapassa a experiência; não dá acesso ao supra-sensível, mas torna claras as condições da possibilidade de toda empiria. Todo conhecimento  *a priori* está a serviço do conhecimento  *a posteriori*, da experiência.

Sobretudo, podemos destacar que existe um esforço no pensamento de Kant em situar a objetividade de nosso Conhecimento em seus fundamentos, principalmente, quando tenta estabelecer um método científico à metafísica e, neste sentido, somos conduzidos a interpretar que esse esforço se estenda à interpretação dos  *axiomas* enquanto verdades o sinônimo a hipóteses. Enfim, Kant dispõe a objetividade, em certa medida, condicionada a um sentido interpretativo de verdade enquanto antônimo de hipóteses. Podemos inferir que encontramos em Kant um processo tensional, mas tendendo à interpretação de  *axiomas* enquanto sinônimo de hipóteses.

Todavia observamos que a revolução copernicana  *kantiana* é mais profunda filosoficamente, pois Kant afirma que a metafísica existe necessariamente, mas, não menos

necessariamente, ela só produz uma verdade ‘aparente’. Inegavelmente, ele mostra na Dialética transcendental que as tentativas da razão pura em conhecer um mundo além dos fenômenos, no sentido de ser o mundo verdadeiro, sempre falham inevitavelmente.

De modo algum, a intenção de Kant é destruir a metafísica em suas raízes, pois, como já dissemos, ele intenta estabelecer um método de cientificidade a esta, exemplarmente extraído da Matemática. Ele explica que a metafísica não deve nascer de uma ideia arbitrária e, ainda menos, de um desejo enganoso, mas ela deve se fundar no interesse da razão em procurar para o condicionado o incondicionado. Mas a razão só consegue pensar o incondicionado e não conhecê-lo. O progresso do conhecimento até o incondicionado não se funda em uma necessidade objetiva, mas sim subjetiva. É deste modo que o conhecimento do incondicionado se revela como um pretense conhecimento e, não, verdadeiro. Ele acentua que:

Na aplicação dos conceitos puros do entendimento à experiência possível, o uso da sua síntese é *matemático* ou *dinâmico*, pois se dirige, em parte, simplesmente à intuição, em parte, à *existência* de um fenômeno em geral. Ora, as condições *a priori* da intuição são absolutamente necessárias em relação a uma experiência possível, enquanto as da existência dos objetos de uma intuição empírica possível são em si apenas contingentes. Daí que os princípios do uso matemático tenham um alcance incondicionalmente necessário, isto é, apodíctico, enquanto os do uso dinâmico implicarão, sem dúvida, também o carácter de necessidade *a priori*, mas só sob a condição do pensamento empírico numa experiência, portanto só mediata e indiretamente, não contendo, por conseguinte, aquela evidência imediata (sem, contudo, nada perderem da sua certeza, universalmente referida à experiência) que é própria daqueles (KANT, 2001, B 200).

Então, Kant aponta para uma solução possível a esse impasse sobre a busca de um conhecimento verdadeiro. Ele nos diz que, enquanto os elementos constitutivos de toda a experiência não estão esclarecidos metodicamente, a razão permanecerá rumo a um interesse pelo incondicionado, levando à ilusão de poder ultrapassar o âmbito da experiência possível.

À razão pura, Kant conferirá um novo sentido metodológico. Nesse sentido, ela tem um significado regulativo:

A experiência nos mostra sempre e necessariamente só partes e aspectos da realidade; a razão procura compor esses fragmentos em um todo, e isso é legítimo. Só que o todo nunca nos é dado como tal, mas sempre como problema a resolver; é o ponto de fuga do processo de investigação sempre progressivo, não de uma ciência particular chamada metafísica. Como toda experiência tem carácter fragmentado e cada nova experiência apenas compõe os fragmentos em fragmentos maiores, mas nunca em um todo completo, a experiência realizada metodicamente, ou seja, a

ciência, é um processo nunca concluído de busca de conhecimento (HÖFFE, 2005, p.145).

De modo que a “verdade” do nosso Conhecimento passa a assumir o sentido interpretativo de relatividade, isto é, mais direcionada ao sentido hipotético. Se ao produto do processo de desenvolvimento cognitivo assumimos esta perspectiva interpretativa, assim, conseqüentemente, compreendemos sobre os fundamentos de nosso Conhecimento. E isso nos conduz a inferir que a *Crítica* de Kant promove um redirecionamento interpretativo ao termo *axiomas* para sinônimo de hipóteses.

#### **6.7.4 Os ‘axiomas da intuição’ na teoria do conhecimento em Kant: princípio da possibilidade de todos os *axiomas***

Kant, efetivamente, nomeia a categoria do entendimento puro de princípio e, em especial, de *axiomas da intuição*. Esses dizem respeito ao princípio do entendimento puro segundo o qual todos os fenômenos, do ponto de vista da sua intuição, são grandezas extensivas (KANT, 2002, p. 224).

Kant explica que todos os fenômenos, todos os objetos da ciência natural contêm, quanto à forma, uma intuição no espaço e no tempo, que é o seu fundamento *a priori*. Tudo que escapa a tal quantificar estaria eliminado do âmbito dos objetos possíveis de uma ciência rigorosa. É deste modo que todos os fenômenos são tidos como grandezas *extensivas*, isto é, em que a representação das partes torna possível a representação do todo. Neste sentido, ele nos diz:

Sobre esta síntese sucessiva da imaginação produtiva na produção das figuras se funda a matemática da extensão (geometria), com seus axiomas, que exprimem as condições da intuição sensível *a priori*, únicas que permitem que se estabeleça, subordinadas a elas, o esquema de um conceito puro do fenômeno externo [...] (KANT, 2001, p.225) [Grifo nosso].

Esse indicativo justifica o nosso entendimento de que, para Kant, a Matemática figure como raciocínio diagramático. Ele indica que a Matemática representa não só o princípio da forma, mas também o do

[...] conteúdo *a priori* de toda objetividade; até a coisidade, a realidade dos objetos da natureza, é determinável matematicamente.[...] Assim, a matemática possui, segundo Kant, validade objetiva em um duplo sentido: todo fato afirmado que deve

ser válido para além das representações meramente subjetivas tem que ser apresentável como magnitude, tanto na sua forma intuitiva, na extensão espaço-temporal, como no seu conteúdo sensorial, nas qualidades ópticas, acústicas e outras (HÖFFE, 2005, p.127)

Situando os *axiomas* da Geometria como condições da intuição sensível *a priori*, interpretamos que Kant os toma no sentido interpretativo de ‘verdades’ apodíticas. Ele também irá apresentar alguns exemplos nos quais podemos realçar qual seja, em seu pensamento, o sentido interpretativo de ‘verdade’ que atribui ao *axioma*. Deste modo, ele nos diz que proposições do tipo: entre dois pontos só é possível uma linha reta e duas linhas retas não circunscrevem um espaço, são *axiomas* referindo-se somente a grandezas.

Sobre esta síntese sucessiva da imaginação produtiva na produção das figuras se funda a matemática da extensão (geometria), com seus axiomas, que exprimem as condições da intuição sensível *a priori*, únicas que permitem que se estabeleça, subordinado a elas, o esquema de um conceito puro do fenômeno externo, como este, por exemplo: entre dois pontos só é possível uma linha reta; ou este: duas linhas retas não circunscrevem um espaço, etc. Trata-se de axiomas que verdadeiramente se referem apenas a grandezas (*quanta*) como tais (KANT, 2001, B 2040).

Porém a juízos que fazem referência à quantidade, ele faz um destaque, informando que alguns tratam de proposições analíticas – não são *axiomas*, e que, muito embora, mesmo havendo em vários casos proposições sintéticas e imediatamente certas, não temos *axiomas* e explica, dizendo:

Que quantidades iguais somadas a quantidades iguais, ou delas subtraídas, dêem quantidades iguais, são proposições analíticas, porque tenho consciência imediata da identidade da produção de uma grandeza e da outra; os axiomas, porém, devem ser proposições sintéticas *a priori*. Em contrapartida, **as proposições evidentes da relação entre números, embora sintéticas, não são gerais como as da geometria e, por isso mesmo, não se podem denominar axiomas, antes fórmulas numéricas.**  $7 + 5 = 12$  não é uma proposição analítica. Pois nem na representação do 7, nem na do 5, nem na reunião de ambos, penso o número 12 (não se põe aqui em questão que o deva pensar na adição de ambos; pois, na proposição analítica, apenas se pergunta se penso realmente o predicado na representação do sujeito). Muito embora sintética, é simplesmente uma proposição individual. Na medida em que aqui se tem em vista somente a síntese do homogêneo (das unidades), esta síntese só pode aqui dar-se de uma única maneira, embora o uso destes números seja depois geral. Quando digo que, com três linhas, das quais duas, tomadas juntamente, são maiores do que a terceira, pode construir-se um triângulo, tenho aqui apenas a simples função da imaginação produtiva, que pode traçar linhas maiores ou menores ou fazê-las encontrar-se segundo os ângulos que lhe aprouver. Pelo contrário, o número 7 só de uma maneira é possível, bem como o número 12, produzido na síntese do primeiro com o número 5. Tais proposições não se deverão, pois, denominar axiomas (nesse caso haveria uma infinidade deles!), mas fórmulas numéricas (KANT, 2001, p.226).

A Aritmética não possui, deste modo, *axiomas*, por se tratar de um saber individual e que somente depois é aplicado de modo geral. Explicitamente para Kant, são somente *axiomas* as proposições *intuitivas sintéticas a priori e gerais* condicionadas a princípios do entendimento puro.

Temos confirmada nossa interpretação neste ponto que os *axiomas* são todos do tipo juízos sintéticos *a priori*, mas Kant também afirma que nem todo juízo sintético *a priori* é um *axioma*; a condição que tornaria um juízo sintético *a priori* ser considerado um *axioma* é que esta seja uma proposição intuitiva ‘objetivamente’ *sintética* (que alarga o conceito das coisas) e, caracteristicamente geral (na generalidade do juízo), isto é, não diz respeito a um caso particular, o que é justificado em Kant, quando na citação anterior ele indica a Aritmética como não possuidora de *axiomas*.

Ademais, mesmo Kant chamando de princípios matemáticos aqueles que englobam as duas primeiras classes de conceitos, a da quantidade e a da qualidade do entendimento puro, sobretudo, ele nomeia somente a primeira classe como *axiomas*. Assim também observamos que ele aplica uma restrição aos *axiomas*, limitando-os à categoria da quantidade, na esfera do espaço e do tempo.

Mesmo o próprio *axioma da intuição*, de acordo com Kant, não se trata de um *axioma* propriamente dito, mas o verdadeiro princípio da possibilidade dos *axiomas* e, conseqüentemente, da formulação de juízos sintéticos *a priori* (como os da Geometria de Euclides). Ademais, tanto esta categoria de princípios quanto o conjunto de “todos os princípios do entendimento puro, não são senão princípios *a priori* da possibilidade da experiência, e unicamente a esta se referem também todas as proposições sintéticas *a priori*, até a sua possibilidade se funda totalmente sobre esta referência” (KANT, 2000, p.201).

É certo que, na Analítica, na tábua dos princípios do entendimento puro, também mencionei certos axiomas da intuição; simplesmente, o princípio aí citado não era ele mesmo um axioma, mas servia unicamente para fornecer o fundamento da possibilidade dos axiomas em geral e era apenas um princípio extraído de conceitos. De fato, a possibilidade da matemática deve ser demonstrada na filosofia transcendental. A filosofia não tem, portanto, axiomas e nunca lhe é permitido impor os seus princípios *a priori* tão absolutamente, mas devei aplicar-se a justificar a autoridade desses princípios relativamente aos axiomas, graças a uma dedução sólida (KANT, B 761, p.604-605),

Sobretudo, identificamos que, ao nomear este princípio como *axioma*, o objetivo de Kant esteve em reforçar o sentido de fundamento ‘objetivo’ e, em nossa interpretação, o

caráter de ‘verdadeiro’, de certeza inquestionável, que até então era atribuído ao termo *axioma*. Tal aspecto é reforçado quando observamos que, específica e diretamente falando do que sejam os *axiomas*, Kant escreve na *Crítica*:

Dos *axiomas*. Estes são princípios sintéticos *a priori* enquanto são imediatamente certos. Ora, não se pode ligar um conceito com outro de uma maneira sintética e contudo imediata, porque, para que possamos sair de um conceito é necessário um terceiro conhecimento mediador. Ora, como a filosofia é simplesmente o conhecimento da razão por conceitos, não se encontrará nela princípio algum que mereça o nome de axioma. A matemática, pelo contrário, é susceptível de axiomas, pois mediante a construção dos conceitos na intuição do objeto, pode ligar *a priori* e imediatamente os predicados desse objeto, por exemplo, I que três pontos se encontram sempre num plano. Porém, nunca um princípio sintético, fundado simplesmente em conceitos, pode ser imediatamente certo; por exemplo, a proposição: tudo o que acontece tem a sua causa; neste caso é preciso que me reporte a um terceiro termo, a saber, à condição da determinação de tempo numa experiência; eu não poderia conhecer direta e imediatamente um tal princípio, apoiando-me apenas sobre os conceitos. Os princípios discursivos são, pois, algo completamente diferente dos princípios intuitivos, isto é, dos axiomas. Os primeiros exigem sempre uma dedução, que os últimos podem inteiramente dispensar; e como por esta mesma razão estes são evidentes, o que os princípios filosóficos, com toda a sua certeza, nunca podem pretender, falta infinitamente a qualquer proposição sintética da razão pura e transcendental, que seja tão manifesta (como obstinadamente se tem o costume de dizer) como a proposição: *dois mais dois igual a quatro* (KANT, B 761, p.604).

Mas, de outro modo, a própria teoria desenvolvida por Kant, na *Crítica*, pode conduzir à interpretação no sentido oposto a esse de ‘verdade’ do termo *axioma*, ademais e não menos, pelos próprios limites que sua crítica impõe implícitos ao nosso processo de desenvolvimento cognitivo. Evidenciamos um movimento tensional neste sentido no pensamento kantiano e entendemos que isto nasce da percepção e pressuposto em tomar o termo *axioma* como verdades inquestionáveis, como era tido e que, conseqüente e decorrente do redirecionamento da sua revolução copernicana, irá conduzir a uma nova interpretação a partir de então. Subvertendo a ordem à interpretação epistemológica, Kant promove uma agitação e redirecionamento à interpretação relacionada a pontos-chaves no desenvolvimento do nosso Conhecimento, dentre eles: método, objeto, verdade e *axiomas*.

### 6.7.5 Reflexões sobre o significado de *axioma* em Kant

Como pudemos destacar em nossa reflexão anterior “*axiomas* são princípios sintéticos *a priori* enquanto são imediatamente certos (KANT, 2001, B 760)”, para Kant. Tal



pensamento justificaria o fato de que para este filósofo a filosofia não possui *axiomas* e a matemática possui os seus, uma vez que a Filosofia é do tipo de conhecimento analítico, operando pela reflexão sobre conceitos, e a matemática é do tipo de conhecimento sintético, operando pela construção de conceitos.

Kant, especialmente, posiciona-se em relação aos *axiomas*, dizendo que:

2. Dos *axiomas*. Estes são princípios sintéticos *a priori* enquanto são imediatamente certos. Ora, não se pode ligar um conceito com outro de uma maneira sintética e contudo imediata, porque, para que possamos sair de um conceito é necessário um terceiro conhecimento mediador. Ora, como a filosofia é simplesmente o conhecimento da razão por conceitos, não se encontrará nela princípio algum que mereça o nome de axioma. A matemática, pelo contrário, é susceptível de *axiomas*, pois mediante a construção dos conceitos na intuição do objeto, pode ligar *a priori* e imediatamente os predicados desse objeto, por exemplo, que três pontos se encontram sempre num plano. Porém, nunca, um princípio sintético, fundado simplesmente em conceitos, pode ser imediatamente certo; por exemplo, a proposição: tudo o que acontece tem a sua causa; neste caso é preciso que me reporte a um terceiro termo, a saber, à condição da determinação de tempo numa experiência; eu não poderia conhecer direta e imediatamente um tal princípio, apoiando-me apenas sobre os conceitos. Os princípios discursivos são, pois, algo completamente diferente dos princípios intuitivos, isto é, dos *axiomas*. Os primeiros exigem sempre uma dedução, que os últimos podem inteiramente dispensar; e como por esta mesma razão estes são evidentes, o que os princípios filosóficos, com toda a sua certeza, nunca podem pretender, falta infinitamente a qualquer proposição sintética da razão pura e transcendental, que seja tão manifesta (como obstinadamente se tem o costume de dizer) como a proposição: *dois mais dois igual a quatro*. É certo que, na Analítica, na tábua dos princípios do entendimento puro, também mencionei certos da intuição; simplesmente, o princípio aí citado não era ele mesmo um axioma, mas servia unicamente para fornecer o fundamento da possibilidade dos *axiomas* em geral e era apenas um princípio extraído de conceitos. De fato, a possibilidade da matemática deve ser demonstrada na filosofia transcendental. A filosofia não tem, portanto, *axiomas* e nunca lhe é permitido impor os seus princípios *a priori* tão absolutamente, mas devei aplicar-se a justificar a autoridade desses princípios relativamente aos *axiomas*, graças a uma dedução sólida (KANT, 2001, A 733 B 761).

Poderíamos observar que os *axiomas*, em Kant, tratam de um tipo de conhecimento mediador que prefiguram princípios sintéticos *a priori* enquanto são ‘imediatamente certos’ e, para ele, a Matemática, especialmente a Geometria, seria exemplar possuidora de *axiomas*. Mas destacamos que, ao refletir sobre Kant, nossa interpretação deve partir mais das entrelinhas do que realmente está posto de imediato.

As ideias de Kant para a epistemologia tiveram um caráter revolucionário e, sem dúvida, o ponto relevante em sua teoria foi a revolução copernicana provocada pelo seu pensamento. Essa reforma foi desencadeada pela busca de Kant em levar a metafísica a um caminho seguro de Ciência e é, neste ponto, por acreditar no estabelecimento de um método ‘seguro’, que destacamos o primeiro ponto tensional que identificamos no pensamento

kantiano à interpretação do termo *axioma*. Pois, em nossa leitura, constatamos tanto o sentido de ‘verdade’ interpretado como inquestionável e certo, quanto, um sentido da ‘verdade’ assumindo o direcionamento de sinônimo de hipótese à interpretação do termo *axioma*.

Ele observava ser necessário que à metafísica fosse estabelecido um consenso sobre o método e pretendeu fornecer, com sua teoria, tal método. Para tanto, ele tomava como exemplares, enquanto ciência, a Lógica, a Matemática e a Ciência Natural.

No entanto, Kant propõe uma verdadeira revolução no modo de pensar metafísica e epistemologia. Ele observava que tal mudança, desde a Antiguidade, já havia se processado na Matemática, numa ideia que se pratica em toda a demonstração geométrica: “para fins da ciência, não basta ver simplesmente uma figura geométrica ou meramente perseguir seu conceito; é preciso construí-lo *a priori* segundo conceitos próprios” (HÖFFE, 2005, p.42).

Tal pensamento foi importantíssimo aos desdobramentos de uma interpretação de *axioma* direcionado à hipótese, pois Kant destaca que só se pode saber com certeza aquilo que se ‘colocou’ em um conceito, em especial, mediante um pensar e um ‘construir criativos’ e que torna possível o Conhecimento Científico. Destaca, pois, à Matemática enquanto Ciência uma condição até então considerada aparentemente impossível, a qual diz respeito a uma dimensão subjetiva que, no entanto, como ele buscará explicar é, sobretudo, “objetivamente válida”. Kant afirma que, para se proceder a uma revolução na metafísica, ela precisa proceder como na Matemática (e na ciência natural), ou seja, que se coloque o sujeito cognoscente numa relação criadora com o objeto, mas essa posição, esse olhar, ao modo de proceder da Matemática, figurará revolucionário em suas consequências.

Kant comparou sua proposta com a descoberta de Copérnico e, daí, seu experimento da razão tornou-se conhecido como a Revolução Copernicana de Kant. Entendemos que ele pretendeu apresentar mais do que uma mera refutação de teorias metafísicas e, em certo sentido, superou, assim, o racionalismo, o empirismo e o ceticismo.

Em sua teoria, há uma recusa tanto do empirismo quanto do racionalismo, de forma que existem, sim, ideias puras da razão, mas meramente como princípios regulativos a serviço da experiência. A hipótese de Kant pressupõe um tipo de mediação entre o empirismo de Locke e o racionalismo de Descartes, em que, “mesmo o nosso conhecimento da experiência seja um composto do que recebemos por meio de impressões e do nosso próprio poder de conhecimento (apenas provocado por impressões sensíveis) fornece de si mesmo” (KANT, B 1).

E, neste ponto, também inferimos começar a despontar um sentido de Complementaridade no sentido ‘Otteano’ no desenvolvimento do nosso Conhecimento, ou seja, na manifestação da nossa razão. Mas, ainda de forma embrionária, pois observamos que Kant indica mais o sentido de uma dualidade.

Com sua revolução copernicana, ele afirmará que nenhuma descrição poderia garantir a existência do nada, nem mesmo de Deus (*Crítica* 620 B) e, felizmente, também sobre a impossibilidade dessa existência. Segundo Otte (2013)<sup>177</sup>, quando Kant desaprovou a garantia da existência de Deus, foi que realmente começava a sua revolução copernicana da epistemologia. Kant (*Crítica*, 622 B) também que escreve:

Até aqui, foi assumido que todo o nosso conhecimento deve conformar-se aos objetos. Mas todas as tentativas de estender o nosso conhecimento de objetos, estabelecendo alguma coisa em relação a eles, a priori, por meio de conceitos, têm, neste pressuposto, terminado em fracasso. Devemos, portanto, fazer julgamento se nós não podemos ter mais sucesso nas tarefas da metafísica, se supusermos que os objetos devem estar de acordo com o nosso conhecimento.

Kant funda, sobretudo, uma nova posição do sujeito em relação à objetividade. O Conhecimento não deve mais regular-se pelo objeto, mas sim o objeto pelo nosso Conhecimento. Ele afirma que a necessidade e a universalidade que pertencem ao conhecimento objetivo não nascem, como nós costumávamos a acreditar e creditar, dos objetos, mas se devem ao sujeito cognoscente.

Segundo Höffe (2005, p.45):

A revolução copernicana de Kant significa que os objetos do conhecimento objetivo não aparecem por si mesmos, mas eles devem ser trazidos à luz pelo sujeito (transcendental). Por isso eles não podem mais ser considerados como coisas que existem em si, mas como fenômenos. Com a mudança do fundamento da objetividade, a teoria do objeto, a ontologia, passa a depender de uma teoria do sujeito, de modo que não pode mais haver uma ontologia autônoma. O mesmo vale para a teoria do conhecimento. O substancial da *Crítica da razão pura* consiste na interligação de ambos os lados; uma teoria filosófica do ente, ou seja, daquilo que um objeto é objetivamente, só pode ser elaborada, segundo Kant, como teoria do conhecimento do ente, e uma teoria do conhecimento apenas como determinação do conceito da objetividade do objeto.

Observamos que em Kant temos o indicativo de um sentido de Complementaridade entre sujeito ontológico e sujeito epistemológico e, dessa Complementaridade, quando traz o sujeito (ainda que transcendental) ao centro do processo cognitivo, daí decorrerão mudanças fundamentais na compreensão sobre os fundamentos de nosso Conhecimento. Entendemos

---

<sup>177</sup> Afirmação de Michael F. Otte em momento de Orientação (2013).

que este ponto, no pensamento de Kant, tem importância vital e desempenha papel fundamental à viragem interpretativa do termo *axioma* do sentido de verdades ao sentido de hipóteses. Em especial, por figurar como pensamento limítrofe e impulsionador às reflexões posteriores para inserção de uma abordagem interpretativa semiótica ao processo de desenvolvimento do nosso Conhecimento (ou seja, uma viragem à linguística).

Kant, quando se refere a *axiomas*, tem em mente e, inclusive, cita como exemplos deles as ‘Leis de Newton’, sejam elas:

I - Todo o corpo permanece no seu estado de repouso, ou de movimento uniforme retilíneo, a não ser que seja compelido a mudar esse estado devido à ação de forças aplicadas.

II - A variação de movimento é proporcional à força motriz aplicada; e dá-se na direção da reta segundo a qual a força está aplicada.

III- A toda a ação sempre se opõe uma reação igual; ou, as ações mútuas de dois corpos são sempre iguais e dirigidas às partes contrárias.

Esses três *axiomas* definem relações entre termos ou grandezas, tais como movimento uniforme retilíneo, variação do movimento, força aplicada, ação e reação. O tratamento a eles empreendido é o de *postulados* ou *leis*, reconhecidamente como as Leis de Newton.

Na Matemática e, especificamente, na Geometria, um *axioma* seria do tipo que a linha reta é a distância mais curta entre dois pontos (KANT, B 6). Em Kant, um *axioma* desse tipo tem o caráter de juízos sintéticos *a priori* e todos os juízos da Matemática seriam, em geral, sintéticos e ‘objetivamente’. Mas nem todos os juízos sintéticos *a priori* são *axiomas*; para que o sejam, necessitam ter o caráter de generalidade e de necessidade e sejam ‘objetivamente’ sintéticos *a priori*. No entanto Kant destaca que a Aritmética não possui *axiomas*, pois ela trata de casos particulares, não retratam juízos apodícticos de caráter geral, sendo um tipo de conhecimento analítico.

Esse filósofo não entende ‘juízos’ como processos psicológicos do ato de julgar, mas, sim, de modo lógico, tratam de enunciados e afirmações resultantes de uma ligação –síntese – de representações que *pretendem* uma validade objetiva.

Os juízos sintéticos, diferentemente dos juízos analíticos, são responsáveis pela ampliação do nosso Conhecimento e anteriores a toda e qualquer experiência. Para Kant, a Matemática representaria um exemplo indubitável de conhecimento ‘objetivo’ e seus juízos do tipo sintético *a priori*. Na *Crítica*, ele afirma que aquele mundo real, que consideramos

‘objetivo’ em oposição a todos os mundos fictícios ou subjetivos, coincide com o mundo da Matemática e da ciência natural matemática.

Mas o fato, indiscutivelmente, interessante do pensamento kantiano trata que, ao promover sua revolução copernicana, ele abre a possibilidade de se colocar em ‘xeque’ o caráter de ‘verdade’ dos *axiomas* e o de ‘verdades eternas’ do Conhecimento Matemático. Mesmo considerando-a exemplarmente como Ciência, ele ao destacar o seu método de abordar a realidade, um problema, e, tomando-a como propositura elementar para alcançar a objetividade e chegarmos ao nosso objeto – o fenômeno, irá de certo modo redirecionar a verdade a um sentido regulativo, mais aproximado de nossa interpretação a hipóteses.

Ao investigar os elementos sintéticos *a priori* – como são possíveis – especialmente partindo da Matemática, sobre como seria possível a metafísica como ciência, serão surpreendentes sua análise e conclusão. A revolução copernicana de Kant irá indicar que existe sempre uma distinção entre fenômeno e a *coisa em si* e, neste mesmo sentido, o nosso conhecimento objetivo está limitado ao âmbito de toda experiência possível. O que Kant está a destacar, para nós, tem o sentido do importante papel da ‘atividade’ que permeia a relação entre sujeito e objeto no movimento do desenvolvimento do nosso Conhecimento.

Kant, em alguns momentos, recorre à definição tradicional de ‘verdade’, entendida no sentido de adequação (correspondência) do pensamento ao objeto. Mas, ao mostrar que o objeto não trata de um *em-si* independente do sujeito, mas é constituído somente pelas condições apriorísticas do sujeito cognoscente, seu pensamento irá redirecionar esse entendimento de ‘verdade’. Já que denota de seu pensamento uma mudança tanto no entendimento sobre a natureza do objeto, conseqüentemente, haverá implicações de outro sentido à verdade. De modo que indicará que todo nosso Conhecimento é situado e condicionado, tanto ao sujeito como ao contexto envolvido, de modo que passa a ser (em certa medida) relativo o sentido de ‘verdades’ e questionável o de ‘verdades eternas’ ou, mais especificamente, para nós, o sentido de ‘verdade’ do termo *axioma*. Sobretudo, ele não tira da Matemática e das Ciências Naturais Matemáticas o caráter de exemplares possibilitadoras de uma ‘objetividade’ do nosso Conhecimento.

Kant compreende a ‘objetividade’, como sendo a verdadeira tarefa de uma Ciência, tendo tal objetividade um duplo sentido que se relacionam entre si.

Por um lado, ‘objetividade’ (no sentido veritativo) designa a propriedade de conhecer o mundo real e, portanto, de ser válido não só para este ou aquele sujeito,

mas universal e necessariamente. Por outro lado, ‘objetividade’ (no sentido referencial) significa a relação do conhecimento com objetos reais, ou seja, com fatos, e não com ficções ou meros produtos da imaginação. Assim, o primeiro significado pressupõe o segundo. Só porque são sabidos os fatos dados (objetos) no conhecimento objetivo, este pode formular enunciados objetivos (HÖFFE, 2005, p.64).

A Matemática é exemplar na busca dessa objetividade. Sobretudo, no pensamento e na teoria de Kant, ‘transcendentais’ são os pressupostos que não possuem nem caráter matemático nem físico, mas estão sempre intervindo quando praticamos Matemática ou Física. Compreender as condições pré-empíricas do conhecimento objetivo, para Kant, está ligado incondicionalmente à compreensão de seus limites. Neste sentido, entendemos que o trabalho de Kant em sua *Crítica* foi mais de purificação de nossa razão e de legitimização de um método científico para a metafísica.

O sentido de transcendental da teoria de Kant refere-se às condições prévias da experiência que ele quer e pretende desvendar. E, no lugar de outro mundo, ele tem em mente o conhecimento originário de nosso mundo e de nosso saber objetivo. Ele busca investigar a estrutura profunda, pré-empírica válida de toda experiência e que, de acordo com a sua revolução copernicana, presume no sujeito. Assim, “no retrocesso reflexivo, a crítica da razão procura os elementos apriorísticos que constituem a subjetividade teórica” (HÖFFE, 2005, p. 59), ao conhecimento objetivamente válido.

Kant mostrou que o espaço e o tempo são formas puras da intuição e são essas formas que possibilitam o conhecimento sintético *a priori* – os *axiomas*. E, a possibilidade de um conhecimento *a priori*, mediante conceitos gerais do entendimento, não foi afirmado unicamente por Kant, mas tanto por seus antecessores como sucessores. Ele assegura que o nosso Conhecimento, considerado de um ponto de vista lógico e não psicológico, deve-se à ação de duas fontes: a sensibilidade e o entendimento, ou seja, da receptividade da nossa intuição e do pensamento através de conceitos. E ambas as faculdades têm o mesmo peso e dependem uma da outra. Kant, diferentemente de Leibniz, nega a existência de uma diferença meramente gradual entre sensibilidade e entendimento, nem que a intuição trata de uma forma de pensar imperfeita; para ele, ambas as fontes de Conhecimento são interdependentes.

Mas é, sem dúvida, a tese de que nossa intuição e, portanto, a sensibilidade implicam também certos elementos não empíricos imprescindíveis para a Matemática e para a Física, sendo, indiscutivelmente, uma original ideia *kantiana*. De todo, temos três faculdades indispensáveis ao Conhecimento humano (intuições, conceitos e juízos) e, em todas elas,

encontramos um elemento não empírico: na sensibilidade, as formas puras da intuição, o espaço e o tempo; no entendimento, os conceitos puros do entendimento, as categorias; no juízo, os esquemas transcendentais e os princípios do entendimento puro (HÖFFE, 2005, p.69).

São as ideias de Kant que conduzirão a uma interpretação da Matemática como raciocínio diagramático e sobre a relevância e especificidade simbólico-estruturalista dessa Ciência.

Kant se posiciona contra uma separação rigorosa entre a Linguagem de observação e Linguagem de teoria, uma vez que todo o Conhecimento, inclusive, o nosso Conhecimento cotidiano, contém elementos teórico-conceituais. Diferentemente de Leibniz, Kant não compreendia ser possível provar a existência de Deus pela argumentação linguística ou lógica, como também não era possível negar essa mesma existência. Para Kant ‘Ser’ não é um predicado real, isto é, um conceito de algo que se possa acrescentar ao conceito de alguma coisa ou de certas determinações em si mesmas. No uso lógico é simplesmente a cópula de um juízo, por exemplo, na proposição ‘Deus é onipotente’. Daí vem sua distinção entre teoria e realidade. A matemática representaria o pensamento estruturalista relacional. E o sentido da relações é o de relações extrínsecas ao objeto. E, de acordo com Otte (2014) Kant parece ter sido o primeiro a perceber a característica da importância do índice no desenvolvimento do conhecimento matemático, pois, a matemática é construtiva, e, neste sentido precisa construir seus objetos para pensar sobre eles. E, por isso, ele considerava a matemática sintética.

Dos gregos até Kant a Filosofia era considerada analítica e a matemática sintética. Só que, temos que observar que, em Kant o caráter *sintético* do conhecimento matemático não trata de um predicado que se venha a somar e acrescentar no sujeito, no sentido de relações intrínsecas, refere-se sobretudo a um tipo de relação extrínsecas.

Existe uma distinção, no pensamento kantiano, entre teorias e realidade, assim como entre objetos e fenômenos. Desse modo, interpretamos que, no pensamento de Kant, os *axiomas*, ao tratarem de juízos sintéticos *a priori*, sobre representações que tratam de construções e que ‘pretendem’ uma validade objetiva, eles estão mais para o sentido de hipóteses do que de verdades, uma vez que Kant tem um direcionamento de verdade no sentido de “objetivamente válido”. Sendo que, para ele, a Matemática e as Ciências Naturais Matemáticas são mais exemplares no sentido do caminhar para esta objetividade, pela generalidade e necessidade do Conhecimento produzido.

Segundo Otte (2013)<sup>178</sup>, a visão aristotélica do ponto de vista metafísico de uma noção de mundo como um cosmo, já na época de Kant havia sido substituída por uma visão do mundo como conjunto de objetos. A revolução científica já havia promovido a visão de um conceito como representação da substância das coisas para que o conceito fosse concebido, primeiro, como um instrumento e, daí, resultava o papel fundamental do conceito de função. Cassirer (1997 apu OTTE, 2013)<sup>179</sup> mostrou que a mudança na Lógica se baseava na análise da proposição enquanto nenhuma mudança na concepção do conceito havia sido realizada.

Desse modo entendemos que o pensamento de Kant veio completar a Revolução Científica de Newton ao conceber o conceito como função da atividade. E isso implicou eliminar da Filosofia todo o questionamento sobre se nossas representações do Conhecimento correspondiam, efetivamente, a um objeto e aceitar o Conhecimento Científico como uma representação que é escolhida.

Otte (2013)<sup>180</sup> ainda completa: “o que eu mais gosto em Kant é que o conhecimento não é um espelho [do mundo empírico] ou uma reflexão passiva [de nossa mente]...a realidade é um processo da atividade... e ... tem objetividade na atividade”.

## **6.8 Axiomas em J. W. R. Dedekind (1831 – 1916)**

Nascido na Alemanha, Julius Wilhelm Richard Dedekind viveu até os oitenta e três anos. Iniciou-se muito cedo na Matemática e aos vinte e dois anos obteve seu doutorado em Göttingen, com uma tese sobre o Cálculo que foi elogiada por Gauss (1777-1855).

Desde 1858, a atenção de Dedekind se volta para o problema de números irracionais, ao dar aulas de Cálculo Diferencial em Zurique, quando toma consciência da necessidade de uma discussão científica acerca do conceito de continuidade e é levado a reconsiderar todo o problema da definição de número real.

Em grande parte de toda a história da Matemática, o problema da relação entre o descontínuo da Aritmética e o contínuo geométrico esteve sempre presente (ou seja, a passagem dos números naturais 1, 2, 3 ... aos pontos, que nas linhas retas se sucedem, sem saltos nem lacunas).

---

<sup>178</sup> Comentário de Otte em discussão via e-mail para seus orientandos, encaminhado em 2013.

<sup>179</sup> Comentário de Otte em discussão via e-mail para seus orientandos, encaminhado em 2013.

<sup>180</sup> Comentário de Otte em momento informal de orientação, em 2012.



Dedekind postulava que a Aritmética se fundamenta nas *leis do pensamento* (que figurava em sua obra *Was sind und was sollen die Zahlen? - O que são e o que significam os números?* - de 1888). É nebulosa a interpretação a que sejam tais ‘leis do pensamento’ para Dedekind, uma vez que ele não deixa claro tampouco o que seja ‘pensamento’. Podemos inferir que a intenção desse matemático foi a de encontrar um fundamento último da Aritmética em sua capacidade de relacionar objetos, *capacidade esta que existe em nós, humanos, de forma totalmente independente de nossas intuições espacio-temporais* (DEDEKIND, 1963, p. 32).

Sobretudo, ao postular que a Aritmética se funda em leis de pensamento, ele se compromete com uma perspectiva logicista, de modo que as verdades aritméticas seriam legitimadas e embasadas em princípios que governariam a atividade racional. Assim como seu contemporâneo Frege, Dedekind é completamente avesso à tese de que a evidência empírica pudesse servir de garantia à legitimidade das proposições aritméticas (sobre o logicismo de Frege e de Dedekind, ver GILLIES, 1982, pp. 66 -70).

Para Dedekind, os objetos matemáticos, aos quais chamamos Números Reais, Números Naturais e Racionais, eram todos invenções do homem. Desse modo, ele foi um dos primeiros proponentes dessa visão criacionista dos conceitos matemáticos. Inclusive, acreditava que isso era válido para os novos conceitos como a da Teoria Algébrica numérica. Tal olhar indicava um abandono total à metafísica tradicional, o que promovia um corte consciente com as ideias de seus antecessores.

Alicerçado nesse pressuposto, ele empreendeu um tratamento distinto e dos mais conhecidos, até então, ao problema dos números irracionais. Revolucionou a versão da propriedade de continuidade, transformando-a num elo entre a Geometria e a Aritmética dos números reais. Esse fato figurará como extremamente relevante à mudança interpretativa do termo *axioma*, atribuindo-lhe o sentido de sinônimo de hipótese.

Dedekind, assim como Cantor (1845-1918), defendia que a noção de quantidade deveria ser substituída por uma rigorosa construção aritmética dos números reais, que fosse baseada na noção de números naturais ou racionais, assumida por ele como menos problemática do que a noção de quantidade contínua. Acrescentou, à questão, o que esta construção deveria fazer com a noção intuitiva de quantidade contínua, ou melhor, com a ideia geométrica dos pontos de uma linha reta. Ele elabora a construção do Sistema dos números reais por cortes na reta ou seções no conjunto dos números racionais, enquanto, por

sua vez, Cantor organiza sua construção do número real como classe de equivalência de sucessões fundamentais de números racionais.

Dedekind publica, em 1872, seu famoso ensaio *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (Continuidade e Números Irracionais). Nesta obra, ele caracteriza a continuidade da reta pela definição que ficará designada por *axioma* ou postulado de Dedekind, qual seja: ‘todo o corte da reta é produzido por um e um só ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) existirá sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)’.

Segundo Dedekind, o conceito deveria ser desenvolvido através da Aritmética somente e não precisaríamos tomar a Geometria como guia. Ele, na realidade, pergunta-se o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais. Sua solução para o problema, segundo Caraça (1998), era buscar um bom ‘reagente’ que permitisse expandir o campo numérico racional e é por esse ‘reagente’ que ele nos apresenta esse grande mestre, no conceito de continuidade:

[...] para perceber a continuidade, com o grau de clareza que tivermos da noção de linha reta; procuremos antes um critério distinto, tão simples quanto possível, que nos permita, em face de um conjunto qualquer, verificar se ele tem ou não a mesma estrutura de reta e, portanto, se pode também atribuir-lhe ou não continuidade. O que vamos procurar é uma espécie de reagente que nos mostre se, num dado conjunto, existe ou não essa propriedade, assim como o químico determina se, numa dada solução existe ou não certo elemento. O reagente pode não dar uma explicação do elemento procurado, mas nem por isso ele será menos útil ao químico no estudo do soluto que tiver entre mãos. É exatamente a situação em que nos encontramos aqui. Tudo está na procura de um bom reagente [...] (Caraça, 1998)

O reagente se revelará no conceito de ‘cortes na reta’ (figura 1) de Dedekind através do qual ele chegará ao *Axioma da Continuidade de Dedekind*.

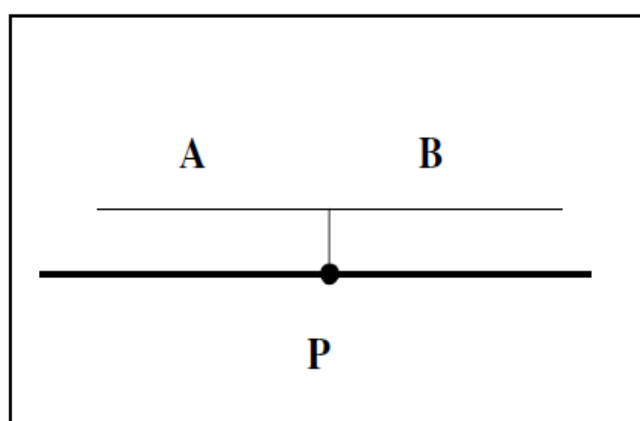


Figura 6: Corte de Dedekind

Todo ‘corte’ da reta é produzido por um ponto dela mesma, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) gerado pelos conjuntos A e B, existe sempre um ponto P da reta que separa as duas classes (A) e (B). Tal afirmação ficou conhecida como o *Postulado da Continuidade de Dedekind – axioma* da continuidade de Dedekind. Os números reais são obtidos, a partir desse postulado, por uma extensão dos racionais para um domínio contínuo. E ele ainda afirma: (...) “chamo Número Real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos Números Racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional.” (Dedekind, *apud* Caraça, 1998).

Dedekind (*apud* CARAÇA, 1998, p.57-8) em sua reflexão nos explica que:

[...] nós atribuímos à recta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? A resposta a esta pergunta deve compreender em si tudo, e somente ela permitirá desenvolver em bases científicas o estudo de todos os campos contínuos. Naturalmente, não se consegue nada quando, para explicar a continuidade, se fala, dum modo vago, de uma conexão ininterrupta nas suas partes mais pequenas; o que se procura é formular uma propriedade característica e precisa de continuidade que possa servir de base a deduções verdadeiras e próprias.

Pensei nisso sem resultado por muito tempo, mas finalmente achei o que procurava. O meu resultado será talvez julgado, por várias pessoas, de vários modos, mas a maior parte, creio, será concorde em considerá-la bastante banal. Consiste ele na consideração seguinte:

Verificou-se que todo o ponto da recta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo o ponto de uma delas está à esquerda de todo o ponto da outra. Ora, eu vejo a essência da continuidade na inversão desta propriedade e, portanto, no princípio seguinte: se uma repartição de todos os pontos da recta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da recta em duas partes.

Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas introduziu a noção de ‘cortes’.

Como já disse, creio não errar admitindo que toda a gente reconhecerá imediatamente a exactidão do princípio enunciado. A maior parte dos meus leitores terá uma grande desilusão ao aprender que é esta banalidade que deve revelar o mistério da continuidade. A este propósito observo o que segue. Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da recta, isso satisfaz-me ao máximo grau, porque nem a mim nem a ninguém é possível dar deste princípio uma demonstração qualquer. A propriedade da recta expressa por este princípio **não é mais que um axioma, e é sob a forma deste**

**axioma que nós pensamos a continuidade da recta, que reconhecemos à recta a sua continuidade** (DEDEKIND *apud* CARAÇA, 1998, p.57-8) [grifo nosso].

Dedekind percebeu que o domínio dos números racionais poderia ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais se supusermos - o que agora se chama o *axioma de Dedekind*<sup>181</sup> - que os pontos sobre a reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais. Isso significaria que, para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B, tais que todo número da primeira classe, A, é menor que todo número da segunda classe, B, existe um e um só número real que produz essa classificação chamada de Dedekind. Se A tem um máximo, ou se B tem mínimo, o corte define um número racional; mas se A não tem máximo e B não tem mínimo, então o corte define um número irracional. Ele observara que os teoremas fundamentais sobre limites poderiam ser provados rigorosamente sem apelo à Geometria. Para ele, o conceito de limite deveria ser desenvolvido através da Aritmética apenas, sem usar a Geometria como guia.

De modo que foi primeiramente através da Geometria que ele iniciou o caminho para uma definição conveniente de continuidade, mas, no fim, ela é excluída da definição aritmética formal do conceito. A noção de *corte de Dedekind*, no sistema de números racionais, ou uma construção equivalente dos números reais, havia, então, substituído a grandeza geométrica como espinha dorsal da análise (BOYER, 1974).

Ao responder a pergunta sobre qual seria a essência da continuidade, Dedekind chegou à construção do seu conceito de número irracional. Tendo chegado ao número real por um caminho puramente lógico, com início no número natural, decidiu a concordância da escala numérica: a dos pontos na reta num postulado, afirmando a correspondência biunívoca entre os seus elementos:

Se todos os pontos numa linha recta caem em duas classes de tal forma que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda, então existe um e um só ponto que produz esta decomposição de todos os pontos em duas classes, esta divisão da linha recta em duas partes (DEDEKIND, 1963, p.11).

Em 1888, Dedekind propôs uma coleção de *axiomas* sobre os números e, em 1889, Peano publica uma versão, mais precisamente formulada das anteriores, em uma coleção de

---

<sup>181</sup> O matemático alemão G. Cantor formulou, contemporaneamente a Dedekind, uma caracterização da continuidade de maneira semelhante, por isso a esse enunciado se chama, como maior propriedade, *axioma da continuidade Dedekind-Cantor*.

*axiomas* no seu livro: "Os princípios da Aritmética apresentados por um novo método" (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*).

Podemos destacar a essência semiótica do raciocínio de Dedekind quando do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática observamos que Dedekind primeiramente toma a reta (geometria) e a situa no nível da Primeiridade, isto é, a toma como um ícone no sentido metafórico. O que na perspectiva de Peirce (1990, p.63) quer dizer que a reta denota o caráter representativo de um *Representâmen* através da analogia de um paralelismo com alguma outra coisa – os números Naturais e Reais. A reta figura como justaposições à esses sistemas colocando ou estabelecendo uma intersecção como o significado convencional deles.

Depois ao observamos a designação dos pontos A, B e P ele utiliza do caráter indicial no desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Todos os pontos tem caráter de índice, uma vez que, o índice é um signo que significa algo somente por meio de seu vínculo existencial com seu objeto. Como já estudamos tal objeto, sobretudo, pode ter ou não existência real, podendo ser um objeto imaginário, uma experiência passada ou do presente. Observemos que ademais, “o que ocorre é que o significado de um índice está baseado sempre na experiência vivenciada pelo interpretador” (CORRÊA, 2008, p.93)- neste caso Dedekind. De forma que, como já adiantamos os índices são imprescindíveis à Matemática, funcionam de modo a dar legitimidade à existência de seus objetos. Haja vista que os índices indicam uma relação, a qual só tem existência quando somos capazes de ter em mente um objeto ou uma experiência que se baseia e funda nesta relação.

De modo que Dedekind chegará a sua designação de números irracionais, que tem o caráter de símbolo. Ao defini-lo ele assume caráter de uma regra geral, de uma lei que determinará seu interpretante. Tal regra ou lei pode ser convencionalizada ou fruto de um acordo coletivo, de modo que, é um símbolo pois não designa ou refere-se a um objeto particular, mas sempre a uma classe. Por referir-se a uma ideia abstrata, o símbolo não é singular, mas representa uma generalidade.

É deste modo que entendemos assumir uma perspectiva semiótica no sentido da Complementaridade do pensamento ‘otiano’ pode nos fornecer bases mais coerentes e significativas sobre como se processa e desenvolve o nosso Conhecimento Matemático.

### 6.8.1 Reflexões sobre o significado de *axioma* em Dedekind

Pudemos observar que os *axiomas* em Dedekind tem o tratamento de hipóteses. O pensamento de Dedekind destacou e denotou um rompimento decisivo com a metafísica tradicional, identificado principalmente pelo fato de considerar os objetos matemáticos como invenções humanas.

Para Dedekind, os números não são objetos nem são nomes de objetos; os números tratam de relações dentro de uma série, de um conjunto. Todas as operações com os números são definidas obedecendo às relações estabelecidas na série, no sistema, no conjunto. Assim, deste modo, medir significa comparar com uma estrutura matemática. Ou seja, comparar um campo de objetos com uma estrutura matemática. Neste sentido, evidenciamos, no pensamento de Dedekind, uma perspectiva relacional-estruturalista. E é nesta visão que é baseada a sua *axiomática* da Aritmética.

Dedekind se direciona à interpretação criacionista dos conceitos matemáticos, o que reforça nosso entendimento de que, para ele, o sentido interpretativo que assume o termo *axioma* seja o de regras estabelecidas (criadas), comungando mais com a interpretação de sinônimo ao de hipóteses e não mais de verdades indemonstráveis.

Para Dedekind, os *axiomas* funcionavam como regras de construções e elaborações humanas, e seu problema esteve focado em alcançar todos os números possíveis ao se contar indefinidamente, sendo que o seu quinto *axioma* garantiria essa possibilidade. Ele discorre sobre a necessidade desse *axioma* ou um postulado que garantisse essa condição. E isso, em nossa interpretação, indica que ele já atribuía aos *axiomas* o sentido interpretativo de postulados. Postulado de modo a estabelecer o tipo de uma regra e, neste sentido, ela não trataria de uma verdade absoluta. Os números, deste modo, versariam sobre construções e podemos organizá-los, mas também eles podem ser arbitrários. De forma que a perspectiva de Dedekind, a nosso ver, impõe o sentido imperativo de sinônimo de hipóteses ao termo *axioma*.

A construção dos números reais por Dedekind, dois mil e quinhentos anos depois da descoberta, pelos gregos, dos incomensuráveis, não trata de uma simples coincidência com a mudança de significado do termo *axioma*, mas é revelador de um processo de construção e evolução do próprio pensamento humano, do desenvolvimento do Conhecimento Matemático e, especificamente, neste trabalho, de um processo que entendemos de simbiose o qual vai se

processando e desenvolvendo, epistemologicamente, entre a Linguagem e a Matemática. Como resultado dessa aproximação, Dedekind constrói a noção de números reais de forma independente da noção de limite, com seu postulado da continuidade, a partir da noção algébrica de corte, uma construção formal do conjunto de números reais.

Neste sentido, há que se destacar, no pensamento de Dedekind, o limiar de um rompimento com a dicotomia entre discreto e contínuo, dicotomia historicamente evidenciada entre a Aritmética e a Geometria. Identificamos que, para caminhar no sentido desse rompimento, foi importante o movimento histórico que direcionou o rompimento também com o distanciamento da Linguagem em relação à Matemática, principalmente, posicionando a Linguagem num sentido operativo e constitutivo do/no desenvolvimento do Conhecimento Matemático.

Dessa maneira, assistimos consolidar-se, em Dedekind, o caminho ao desenvolvimento do conceito geral abstrato do número real. E o termo *axioma*, mesmo ainda sendo considerado como regras para Dedekind, a partir de então, explicitamente, assume o *status* de proposições hipotéticas, não tratando mais de verdades. E, este sentido de hipóteses aos *axiomas* pode ser reconhecido e destacado no tratamento dado por ele, especificamente, ao número, como de construções ou elaborações humanas.

Posteriormente, mas, quase contemporaneamente a Dedekind, o matemático italiano Giuseppe Peano (1857-1932) publica seu livro *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* (1899) no qual desenvolve e elabora os famosos *axiomas* de Peano, considerados até hoje como a *axiomatização* padrão dos Números Naturais. Segundo Otte (2013)<sup>182</sup>, na realidade, Peano haveria roubado a ideia de Dedekind, de forma que até ele mesmo, em determinado momento, admite ter copiado Dedekind.

### **6.9 Axiomas em G. Peano (1858-1932)**

Sobretudo, um ponto de vista que toma os *axiomas* no sentido interpretativo de hipóteses não era amplamente aceito antes do século XX. Parece-nos que uma perspectiva, nesse sentido, ocorreu devido a pressões internas dentro da própria Matemática, as quais incluem, principalmente, a descoberta das geometrias não euclidianas. De acordo com Kennedy (1972, p. 133-136), uma transição do sentido de ver um *axioma* como princípio

---

<sup>182</sup> Comentário informal do Professor Michael F. Otte, em momento de Orientação.

‘auto-evidente’ e geralmente aceito pela visão moderna ocorreu somente na segunda metade do século XIX e pode ser encontrado num período breve de 1882-1889, que vai desde a *Vorlesungen über neuere Geometrie* de Pasch até a *I principii di Geometria logicamente esposti* de Peano.

Pasch desloca o interesse dos teoremas aos *axiomas* por estar sempre preocupado em encontrar um conjunto de *axiomas* completos, ficando conhecido como o Pai de Rigor na Geometria. Peano certamente leu o trabalho de Pasch, mas são evidentes as inovações importantes que ele fez. E, para nós, é de extrema importância constatar que uma dessas inovações é a declaração explícita da atitude moderna em Peano para os termos não definidos de um sistema *axiomático* matemático.

Giuseppe Peano é considerado um dos fundadores da Lógica Matemática e da Teoria dos Conjuntos, como também como o pai da axiomatização padrão dos números naturais, conhecida como *axiomas de Peano* (de 1899). É comumente atribuído a ele que seu centro de interesse estava nos fundamentos da matemática e o desenvolvimento de uma linguagem formal. Sobretudo, entendemos que o interesse primário de Peano sempre esteve na axiomática, e que realmente ele mesmo não utilizava a lógica matemática que foi desenvolvida por ele, inclusive negando a validade de uma redução dos conceitos matemáticos à conceitos lógicos. Temos razões para não delegar à Peano uma postura logiscista e formalista, pois entendemos que ele nunca tentou fundar a matemática em qualquer coisa além de nossa experiência do mundo material. Mas, não nos resta dúvidas de que Peano também fez contribuições fundamentais ao tratamento rigoroso e sistemático moderno método de indução matemática.

Em uma das primeiras linhas de sua exposição, ele diz: ‘O sinal **1** é lido **ponto**’ e no comentário que segue ele explica: "Temos, assim, uma categoria de entidades, chamados de pontos. Estas entidades não estão definidas. Além disso, dado três pontos, consideramos uma relação entre eles, indicada por  $c \varepsilon ab$ , cuja relação é do mesmo modo definida. O leitor pode compreender pelo sinal 1 qualquer categoria de entidades, e por  $c \varepsilon ab$  qualquer relação entre três entidades dessa categoria” (PEANO, 1889, p. 77). Interpretamos, nesta declaração, uma explícita aceitação ou reconhecimento da visão *axiomática*. E devemos observar que a visão de Peano era puramente metodológica, por isso reafirmamos que ele não era, definitivamente, um membro da escola “formalista” (KENNEDY, 2002, p.25).



Já havemos notado que é na incorporação do método *axiomático*, numa convergência como a que se configura atualmente na Matemática, que o termo *axioma* assume definitivamente o sentido de hipóteses e entendemos isso como fruto de um processo dinâmico de simbiose e tendência interpretativa sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático da Linguagem à Matemática. Do mesmo modo, também, como resultado de uma convergência entre da Filosofia para a Matemática e essa característica, podemos, claramente, identificar isso no pensamento de Peano. De acordo com Russell (2006), foi Peano que, quando da redução de toda a Matemática pura tradicional à teoria dos Números Naturais, deu um passo importante ao reduzir esta própria teoria ao menor conjunto de premissas e termos não definidos, a que pudesse ser deduzida.

Mas sabemos que Dedekind já havia definido, em seu ensaio *Was und sind was sollen die Zahlen ?*, de 1888, um ‘ordenado sistema simplesmente infinito’ como sendo um conjunto de elementos os quais, como diríamos hoje, satisfazem os postulados de Peano, que

Se nós negligenciarmos inteiramente o caráter especial dos elementos; simplesmente mantendo a sua habilidade distintiva e tendo em conta apenas as relações de uns com os outros em que são colocados ... então são esses elementos chamados números naturais ou números ordinais, ou simplesmente números. ... Com referência a este libertar aos elementos de qualquer outro conteúdo (abstração) somos justificados em chamar números uma criação livre do espírito humano (DEDEKIND, 1948, p. 68).

Peano tinha conhecimento do ensaio de Dedekind, como de fato ele aponta no prefácio de seu *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita* (1889). Ele diz que havia encontrado uma ‘utilidade’ nesse ensaio, observando, ali, que as questões relativas às fundações de números são profundamente examinadas (BURALI-FORTI, 1897).

Nesta obra: *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, Peano demonstrou que a teoria dos números naturais poderia ser deduzida de três conceitos primitivos e cinco proposições primitivas, além da Lógica pura. Essa composição por ele definida tornou-se o suporte de toda a Matemática pura tradicional. O seu ‘peso lógico’, de acordo com Russell (2006), é igual ao de toda a série de ciências deduzidas da teoria dos números naturais; assim a verdade de todas essas ciências estará garantida caso esteja garantida a verdade das cinco proposições primitivas, isto é, desde que, naturalmente, nada haja de errado no aparato lógico também envolvido. Este trabalho de Peano veio facilitar, sobremaneira, a tarefa de analisar a Matemática.

Peano demonstra que, em seu pensamento, fazia parte se exigir que cada conjunto de *axiomas* fosse: completo, independente e consistente. A propriedade de consistência é, de fato, uma condição primeira e imediata, só que antes das Geometrias não euclidianas nunca tinha sido posta em dúvida. A propriedade de independência pode ser deduzida da de consistência. Sobretudo, foi ele quem desenvolveu essa técnica em um método geral.

Para Kenndy (2002), a aceitação objetiva por Peano, de um conjunto independente de *axiomas*, foi indicada em seu *I principii di Geometria*: "Esta ordenação das proposições mostra claramente o valor dos axiomas, e estamos moralmente certos de sua independência" "(PEANO, 1889, p. 57). Também numa observação semelhante sobre seus *axiomas* para os números naturais, publicado no início de 1889, Peano escreveu: "Eu tinha a prova moral da independência das proposições primitivas de que eu comecei, em sua coincidência substancial com as definições de Dedekind " (PEANO apud KENNEDY, 2002, p.25). Foi somente em 1891, no entanto, depois de ter separado os 'cinco famosos' postulados que lidam com o símbolo  $=$ , que ele mostrou a sua independência absoluta.

Os conceitos primitivos de Peano são: *1*, *número* e *sucessor*. E suas cinco proposições primitivas, ou *axiomas*:

1. O 1 é um número natural.
2. Se  $n$  é um número natural, então o sucessor de  $n$  também é um número natural.
3. O 1 não é o sucessor de nenhum número natural.
4. Se há dois números naturais  $n$  e  $m$  com o mesmo sucessor, então  $n$  e  $m$  são o mesmo número natural.
5. Se o 1 pertence a um conjunto, e dado um número natural qualquer, o sucessor desse número também pertence a esse conjunto, então todos os números naturais pertencem a esse conjunto. Este é o axioma da indução, e captura a ideia de indução matemática.

Sendo que essa última proposição é o princípio de indução matemática. Uma reflexão a ser tecida trata que se poderá sugerir, ao invés de estabelecer *1*, *número* e *sucessor*, como termos cujos significados já conhecemos, que podemos deixar serem representados três objetos 'quaisquer', sem defini-los e satisfaçam os cinco *axiomas* de Peano. Desta maneira, eles não tratam de termos com um significado que seja determinado, mas não definido: atuam deste modo como 'variáveis', ou seja, termos a respeito dos quais podemos fazer certas

hipóteses, isto é, aquelas enunciadas nos cinco *axiomas*, mas que são, de resto, indeterminados.

De modo geral, Peano é mais usualmente conhecido por seus postulados para os números naturais. E esses postulados marcam a conclusão do processo de ‘arimetização’ que começou no último século, quando H. Grassmann, em seu *Lehrbuch der Arithmetik* (1861), mostrou que a lei comutativa podia ser derivada a partir da lei de associação por meio do princípio da indução completa.

Para Russell, Peano avançou, mas em dois aspectos parece ter falhado:

[...] falha em fornecer uma base adequada para a aritmética. Em primeiro lugar, não nos possibilita saber se existem quaisquer conjuntos de objectos que satisfaçam os axiomas de Peano; nem sequer dá a mais tênue sugestão sobre qualquer meio de descobrir se existem tais conjuntos. Em segundo lugar, queremos, como já observamos, que os nossos números sejam tais que nos permitam contar os objectos comuns, e isto exige que os nossos números tenham significado *definido*, não apenas que tenham certas propriedades formais. Este significado definido é estabelecido pela teoria lógica da aritmética.

Segundo Russell, se adotarmos esse plano, nossos teoremas não serão demonstrados acerca de um determinado conjunto de objetos chamado de Números Naturais, mas relativamente a todos os conjuntos que tenham certas propriedades. Para ele, tal procedimento não é falacioso, representa, na realidade, a certos propósitos, uma valiosa e especial generalização.

De todo, Peano em seu trabalho buscou caracterizar os números naturais, sempre os tomando ligados ao problema de contar ou enumerar objetos do mundo dado. Ele estabelece uma maneira de caracterizá-los, elaborando um conjunto de *axiomas* e definições a partir das quais desenvolvem as propriedades do conjunto em forma de teoremas.

Mas, sabemos que Dedekind já havia, em seu ensaio *Was und sind was sollen die Zahlen ?* de 1888, definido um "ordenado sistema simplesmente infinito" como sendo um conjunto de elementos os quais, como diríamos hoje, satisfazem os postulados de Peano, que

Se nós negligenciarmos inteiramente o carácter especial dos elementos; simplesmente mantendo a sua habilidade distintiva e tendo em conta apenas as relações de uns com os outros em que são colocados ... então são esses elementos chamados números naturais ou números ordinais, ou simplesmente números. ... Com referência a este libertar aos elementos de qualquer outro conteúdo (abstração) somos justificados em chamar números uma criação livre do espírito humano (DEDEKIND, 1948, p. 68).

Peano tinha conhecimento do ensaio de Dedekind, como de fato ele aponta no prefácio de seu *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita* (1889). Ele diz que havia encontrado uma ‘utilidade’ no ensaio de Dedekind, observando que neste, as questões relativas às fundações de números são profundamente examinadas (BURALI-FORTI, 1897).

Nesta obra, *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, Peano demonstrou que a teoria dos números naturais poderia ser deduzida de três conceitos primitivos e cinco proposições primitivas, além da lógica pura. Esta composição por ele definida tornou-se o suporte de toda a matemática pura tradicional. O seu ‘peso lógico’, de acordo com Russell (2006), é igual ao de toda a série de ciências deduzidas da teoria dos números naturais; assim a verdade de todas estas ciências estará garantida caso esteja garantida a verdade das cinco proposições primitivas, isto é, desde que, naturalmente nada haja de errado no aparato lógico também envolvido. Este trabalho de Peano veio a facilitar, sobremaneira, a tarefa de analisar a matemática.

Peano demonstra que em seu pensamento fazia parte a exigência de que cada conjunto de *axiomas* fosse: completo, independente e consistente. A propriedade de consistência é de fato uma condição primeira e imediata, só que antes das geometrias não-euclidianas nunca tinham sido postas em dúvida. A propriedade de independência pode ser deduzida da de consistência. Sobretudo, foi quem desenvolveu essa técnica em um método geral.

Em 1891, dois anos após a publicação de seus famosos postulados para Números Naturais Peano publicou, na revista fundada por ele naquele mesmo ano, um artigo com o título *Sul concetto di numero* (Peano 1959, com 80 109). Neste artigo ele simplificou seu sistema, eliminando o termo indefinido simbolizado por  $=$ , e os axiomas que lhe dizem respeito. Este sistema, então, consistia em três termos indefinidos:  $N$  (número),  $1$  (um), e um  $+$  (o sucessor de  $a$ , onde  $a$  é um número). Os cinco axiomas eram (Peano 1958, p. 84):

- (1)  $1 \in N$
- (2)  $+$   $\in N \setminus N$
- (3)  $a, b \in N . a+ = b+ : \supset a = b$
- (4)  $1 - \in N +$
- (5)  $s \in K . 1 \in s . s+ s : \supset . N \supset s$

E, eles poderiam ser lidos da seguinte forma:

**AXIOMAS DE PEANO:** Existe um conjunto  $N$  tal que os seguintes axiomas são verificados:

**Axioma 1** -  $1 \in N$

**Axioma 2** - Para qualquer  $n \in N$  existe um único  $n^* \in N$ , denominado o sucessor de  $n$

**Axioma 3** - Para cada  $n \in N$  temos  $n^* \neq 1$

**Axioma 4** - Se  $m, n \in N$  e  $m^* = n^*$ , então  $m = n$

**Axioma 5** - Se  $M$  é um subconjunto de  $N$  tal que  $1 \in M$  e  $n^* \in M$  sempre que  $n \in M$ , então necessariamente  $M = N$

Para Kennedy (2002) a aceitação objetiva por Peano de um conjunto independente de axiomas foi indicado em seu *I principii di Geometria* : "Esta ordenação das proposições mostra claramente o valor dos axiomas, e estamos moralmente certos de sua independência" "(PEANO, 1889, p. 57). Também numa observação semelhante sobre seus axiomas para os números naturais, publicado no início de 1889, Peano escreveu: "Eu tinha a prova moral da independência das proposições primitivas de que eu comecei, em sua coincidência substancial com as definições de Dedekind " (PEANO apud KENNEDY, 2002, p.25). Foi somente em 1891, no entanto, depois que ele separou os 'cinco famosos' postulados que lidam com o símbolo  $=$ , que ele mostrou a sua independência absoluta.

Para Peano em 1889 e 1891 a sequência de números naturais começava com 1, e o conjunto dos números naturais foi designado por  $N$ . Ele empreende uma modificação à esses axiomas em 1898 (PEANO, 1959, 216) de modo que a sequência começava com 0, o conjunto sendo designada por  $N_0$ . O conjunto de cinco postulados para  $N$ ,  $1, a + 1$  (ou  $0, N_0$ , um  $+$ ) foi aumentado para seis em 1901 com a adição de:  $N_0 \in Cls$ , por exemplo, os números naturais formam uma classe. Com a adição deste último, os postulados já receberam a sua forma final, como segue (onde  $a + 1$  é identificado com  $a+$ ) (PEANO, 1901, p. 41- 43):

(0)  $N_0 \in Cls$

(1)  $0 \in N_0$

(2)  $a \in N_0 \rightarrow a+ \in N_0$

(3)  $s \in Cls \rightarrow 0 \in s \rightarrow x \in s \rightarrow x+ \in s \rightarrow N_0 \subset s$

(4)  $a, b \in N_0 \rightarrow a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$

$$(5) a \in \mathbb{N}. \exists. a + l = 0$$

Devemos observar que Peano chegou a postulados independentemente de Dedekind, e que talvez a ‘utilidade’ a que se referiu, encontrada no ensaio de Dedekind, estivesse em encontrar uma "prova moral da independência de proposições primitivas que eu comecei, em sua coincidência substancial com as definições de Dedekind" (PEANO, 1898, p. 243).

Quando procuramos compreender até que ponto Peano acreditava que seus postulados definiam os Números Naturais em *Sul concetto di numero* é que vamos encontrar o tratamento que ele empreende aos *axiomas*. Nesta obra fica claro que no pensamento de Peano o número trata de resultado de um processo de abstração. Peano em 1891 após recordar as cinco proposições ‘primitivas’ e algumas ‘consequências imediatas’, observa que ( PEANO, 1959, p.84-85):

Os primeiros números apresentados, com as quais formam todos os outros, são os números inteiros positivos. E a primeira pergunta é: Podemos definir um, número, soma de dois números? O definição comum, euclidiana de número, 'número é o conjunto de várias unidades', pode servir como um esclarecimento, mas não é satisfatório como uma definição. Na verdade, as crianças muito jovens usam as palavras um, dois, três, etc. Mais tarde, eles adotam a palavra número, e só muito mais tarde é que a palavra coleção aparece no seu vocabulário. De fato, a filologia ensina que estas palavras aparecem nesta mesma ordem no desenvolvimento das línguas indo-europeias. Assim, do ponto de vista prático, a questão parece-me estar resolvida, ou melhor, não há necessidade de o professor dar qualquer definição de número, uma vez que essa idéia é muito clara para os alunos, e qualquer definição só teria o efeito de confundi-los. A maioria dos autores também compartilham desta opinião. Do ponto de vista teórico, para decidir a questão da definição de número, deve ser dito primeiro as idéias que ele pode usar. Aqui supomos conhecida apenas as idéias, representadas pelos sinais  $\Omega$  (e), U (ou), - (não),  $\mathcal{E}$  (é), etc, que têm sido tratados em nota anterior. Portanto, o número não pode ser definido, uma vez que é evidente que, no entanto, estas palavras são combinadas entre si, nunca poderemos ter uma expressão equivalente para o número. Se o número não pode ser definido, contudo que ainda podemos indicar que as propriedades de muitas outras propriedades bem conhecidas dos números são derivadas. Os conceitos, então, que nós não definimos são os de número N, de um 1, e do sucessor de um número um, que indicam o momento por a +. Estes conceitos não podem ser obtidos por dedução; é necessário obtê-los por indução (abstração). O sucessor de a é aqui indicado por a+, em vez de a um habitual + 1, e isso é feito de forma a indicar por um único sinal, +, a operação fundamental 'Sucessor'. Além disso, nas seções seguintes, tendo definido a soma a + b de dois números, veremos que a + 1 tem precisamente o valor de um +, ou seja, o sucessor de um, e assim voltamos à notação habitual.

Mais a diante em 1894 explica o que quer dizer com uma ideia obtida "por abstração" (PEANO, 1958, p. 167-168):

Existem algumas ideias obtidas por abstração e com a qual as ciências matemáticas são constantemente enriquecidas que não podem ser definidas na forma indicada. Seja  $u$  um objeto; por abstração, deduz-se um novo objeto  $qu$ . Não podemos formar uma igualdade

$qu =$  expressão conhecida

para  $qu$  é um objeto de natureza diferente de todos os que temos considerado até o presente. Em vez disso, definimos a igualdade  $qu = qv$ , definindo

$hu, v . \mathcal{D} : qu = qv . = . Pu, v \text{ Def.}$

onde  $hu, v$  é a hipótese sobre os objectos de  $u$  e  $v$ . Assim,  $qu = qv$  significa o mesmo que  $Pu, v$ , o que é uma condição, ou relação, entre  $u$  e  $v$ , tendo um significado anteriormente conhecido. Essa relação deve satisfazer as três condições de igualdade que se seguem:[. . .] [Aqui Peano descreve a reflexiva, simétrica e transitiva propriedades de uma relação de equivalência].

O objeto indicado por  $u$  é, portanto, o que se obtém por considerar em  $u$  todo e apenas as propriedades que ele tem em comum com os outros objetos  $v$  tal que  $qu = qv$ .

E, admitindo que os objetos sejam verdadeiramente definidos "por abstração", ele avança em relação a posição de Dedekind, e explicitamente dá um tratamento de hipótese aos *axiomas* (PEANO, 1958, p.175) como podemos observar na citação que segue:

Seja qual for a forma de raciocínio, se a ciência não contém idéias primitivas, como acontece em toda teoria avançada, pode-se definir e provar tudo nela. Mas se a ciência toca seus próprios elementos, e se há idéias que não podem ser definidas, alguém vai também encontrar proposições que não podem ser provadas, e do qual todas os outros seguem. Chamaremos essas proposições primitivas, abreviado pelo Pp; elas são axiomas, postulados, e às vezes hipóteses, leis experimentais, etc. Essas proposições determinam ou, se preferir, definir as idéias primitivas que não tenham sido objecto de uma definição direta.

Mas entendemos que o verdadeiro interesse de Peano sempre se centrou na *axiomatização*, pois, dois anos mais tarde, em "*Sul concetto di numero*" (1891), encontramos o reconhecimento explícito de Peano sobre o fato de que os postulados não caracterizam somente os números naturais: "As proposições expressam as condições necessárias e

suficientes para que as entidades de um sistema possam ser feitas correspondentes de maneira inequívoca para a série dos números naturais” (PEANO, 1891, p. 87).

De forma que, para nós, o verdadeiro interesse de Peano sempre centrou-se na axiomatização. Kennedy (2002, p.6) nos diz que:

Because Bertrand Russell adopted much of the logical symbolism of Peano, because Russell always had a high regard for the great Italian mathematician, and because Russell held the logicist thesis so strongly, many English-speaking mathematicians have been led to classify Peano as a logicist, or at least as a forerunner of the logicist school. An attempt is made here to deny this by showing that Peano’s primary interest was in axiomatics, that he never used the mathematical logic developed by him for the reduction of mathematical concepts to logical concepts, and that, instead, he denied the validity of such a reduction.

Segundo Kennedy (2002), talvez Peano estivesse ciente desde o início de que os seus postulados não caracterizavam números naturais. Especialmente, quando observamos que ele substitui o ‘um’ por ‘zero’ em uma declaração definitiva em *Formulaire de mathématiques* (1898), entre suas noções primitivas e, ainda, no comentário de Peano:

Essas proposições primitivas ... suficientes para deduzir todas as propriedades dos números que nós reuniremos na sequência. Existe, no entanto, uma infinidade de sistemas que satisfazem as cinco proposições primitivas. . . . Todos os sistemas que satisfaçam as cinco proposições primitivas estão em uma-a-uma correspondência com os números naturais. Os números naturais são o que se obtém por abstração de todos esses sistemas; em outras palavras, os números naturais são o sistema que tem todas as propriedades e apenas as propriedades listadas nas cinco primitivas proposições (PEANO, 1898, p. 218).

Segundo Russell, se adotarmos este plano, nossos teoremas não serão demonstrados acerca de um determinado conjunto de objetos chamado de Números Naturais, mas, relativamente, a todos os conjuntos que tenham certas propriedades. Para ele, tal procedimento não é falacioso, representa, na realidade, a certos propósitos, uma valiosa e especial generalização.

Assim, entendemos que Peano tenha considerado seu trabalho uma axiomatização. E nessa axiomatização os *axiomas* teriam o sentido interpretativo de hipóteses. Ele não buscava explicitamente e tão somente a definição de número. De acordo com Kennedy (2002), Peano após discutir o trabalho de Dedekind e o seus próprios postulados disse:

Pelo que precede, e o que Dedekind disse, existe aqui uma aparente contradição, que deve ser apontada ao mesmo tempo. Aqui o número não está definido, mas as



suas fundamentais propriedades estão dadas. Em vez disso, Dedekind define o número e chama número precisamente o que satisfaz as condições mencionadas acima. Evidentemente, as duas coisas coincide m (PEANO, 1891, p. 88).

Entendemos que esta afirmação seja uma declaração muito sofisticada do método *axiomático* e ainda contemple uma interpretação correta do pensamento de Dedekind. Em qualquer que seja o ponto de vista, sem dúvida, Peano foi genial em suas reflexões filosóficas sobre a Matemática, influenciando, sobremaneira, seu desenvolvimento embora demonstrasse grande modéstia quando questionado sobre questões de cunho filosófico. De modo geral, Peano é mais usualmente conhecido por seus postulados para os números naturais. E esses postulados marcam a conclusão do processo de ‘aritimetização’, que começou no último século, quando H. Grassmann, em seu *Lehrbuch der Arithmetik* (1861), mostrou que a lei comutativa podia ser derivada a partir da lei de associação por meio do princípio da indução completa.

Segundo Cassina (1933, p.334), Peano nunca mergulhou numa tese logicista de redução da Matemática à Lógica. Seja na Matemática ou na Lógica, Peano nunca trabalhou com puro simbolismo; ou seja, ele sempre exigiu que os símbolos primitivos introduzidos representassem ideias intuitivas para serem explicadas com a Linguagem ordinária.

No que diz respeito a essas ideias intuitivas, Peano diz:

Em todas as ciências, depois de ter analisado as idéias, expressamos o mais complicado por meio do mais simples, encontra-se um certo número de que não pode ser reduzida entre elas, e que se pode definir mais longe. Estas são as idéias primitivas da ciência; é necessário para adquiri-las através da experiência, ou por meio de indução; é impossível explicá-las por dedução (PEANO, 1894, p. 173).

Estes conceitos [número, unidade, sucessor de um número] não podem ser obtidos por dedução; é necessário obtê-los por indução (abstração). (PEANO, 1891, p. 85).

Sobretudo, quando Peano explica dando um indicativo do que seja seu entendimento sobre a ‘abstração’, é que verificamos o sentido dos *axiomas* assumindo o sinônimo de hipótese. Com respeito ao número, segundo Kennedy (2002), é possível que, com a ‘abstração’, assumam um sentido técnico que tenha a ver com a Filosofia realista de Aristóteles. Tal interpretação é sugerida quando, sobre os fundamentos da Geometria, Peano afirma:

Certamente, é permitido a qualquer pessoa apresentar o que quer que as hipóteses que ele deseja, e desenvolver as conseqüências lógicas contidas nessas hipóteses.

Mas a fim de que neste trabalho mereça o nome de geometria, é necessário que estas hipóteses ou postulados expressem o resultado das observações mais simples e elementares de figuras físicas (PEANO, 1894, p. 141).

Pela forma de elaboração dos *axiomas* em Peano, sejam eles assumindo o sentido de construções ou de elaborações, de imediato e visivelmente, podemos distingui-los dos *axiomas* em Euclides. Em Peano, o caráter dos *axiomas* não é descritivo como os de Euclides, mas apresentam-se com caráter operativo, referindo-se a proposições que tratam elementarmente de relações entre conceitos. Já não são assumidos como verdade, mas o sentido de um *axioma* é o de sinônimo a hipóteses.

### 6.9.1 Reflexões sobre *axioma* em Peano

O tratamento de Peano aos *axiomas* é o de hipóteses. Os axiomas de Peano são também conhecidos como ‘Axiomas de Dedekin-Peano’ ou como ‘Postulados de Peano’. Para Kennedy (2002) não pode haver dúvida de que realmente os famosos cinco *axiomas* dos Números Naturais são justamente chamados *Postulados* de Peano. Já neste ponto podemos destacar a que o sentido em que são empregados comunga mais aproximadamente com o de hipótese. Sobre a posição de Peano com relação ao desenvolvimento de Dedekind, Kennedy (2002, p.27) nos diz que:

[...] Peano sempre tentou colocar seu trabalho na evolução histórica da matemática, a vê-la como uma continuação e desenvolvimento do trabalho dos outros. Além disso ele era escrupulosamente honestos (embora às vezes confundido) na atribuição de prioridade da descoberta. Assim, no *Principii di Geometria* ele elogia o livro de Pasch e indica com precisão em que medida o seu tratamento coincide com o dele, e onde ele é diferente. Por outro lado, a descoberta de Peano dos postulados para os Números Naturais era totalmente independente do trabalho de Dedekind, ao contrário do que muitas vezes se supõe.

Figuram em seu conjunto os cinco *axiomas* de Peano como sendo a definição moderna de Números Naturais, mas, em nosso entendimento de acordo com Peano esse conjunto de *axiomas* contém mais as fundamentais propriedades de número. Sendo que, tal procedimento comunga com o do desenvolvimento do método axiomático.

Entendemos que Peano esteve mais preocupado e atento ao método axiomático, do que propriamente a busca de uma definição de Números Naturais. Ele utilizou o método

axiomático com a intenção de tornar a teoria matemática mais clara, mais precisa e mais fácil de aprender. São pois os *axiomas* de Peano utilizados na maioria das vezes sem qualquer modificação em investigações metamatemáticas, inclusive em pesquisa que tratam de questões fundamentais de consistência e completude e da teoria dos números.

Em nossa interpretação, o interesse de Peano era a *axiomática* e não buscar uma definição de Número e, também, ele nunca utilizou a Lógica Matemática desenvolvida por ele para uma redação dos conceitos matemáticos a uma Lógica conceitual, inclusive, negando tal redução. Peano nunca demonstrou uma pretensão filosófica. O aspecto de vital importância de seu trabalho aos fundamentos da matemática é que em particular ele negava a validade da redução da Matemática de Russell à lógica pura.

Peano esteve preocupado com uma redução da aritmética, por exemplo, para um número mínimo de indefinidos termos e *axiomas*, a partir dos quais todo o resto poderia ser definido e comprovado. Ao ter como objetivo tornar mais entendível e clara a teoria ele se apropria do método axiomático, ele entendida e buscava na lógica matemática uma contribuição para este objetivo.

Sobretudo, ele destaca que (PEANO, 1923, p.383):

A matemática tem um lugar entre a lógica e as ciências experimentais. É lógica pura; todas as suas proposições são da forma: 'Se alguém supõe A, então B é verdadeiro'. Mas essas construções lógicas não devem ser feitas pelo simples prazer de raciocinar sobre elas. O objeto estudado por eles é dado pelas ciências experimentais; eles devem ter um objetivo prático.

Peano avança consideravelmente numa leitura sobre os fundamentos do conhecimento matemático, ao compreender que a matemática nos fornece, por exemplo, uma resposta diferentemente de até então do que seja um número, este sendo, através de listar as propriedades de um número como *axiomas*.

Tal avanço e especialmente à uma perspectiva interpretação semiótica, em nosso entendimento avançou primeiramente com o advento em 1881, do pensamento de Charles Sanders Peirce. Ele mostrava uma forma de axiomatização da aritmética dos Números Naturais, seguidamente em 1888 Richard Dedekind que aparecia como uma coleção de axiomas sobre números. Entendemos que Peano amplia e reformula em 1889 seu entendimento e publica sua versão com uma coleção de *axiomas* no livro: *Arithmetices principia, nova methodo exposita*.

Essa exposição de *axiomas* contém três tipos de declarações, que são tomadas como postulados e o sentido a elas atribuído não é mais de sinônimo de verdades e isso fica claro nos posicionamentos de Peano. Figuram os *axiomas* como proposições, no sentido operativo na constituição conceitual. E, definitivamente, observamos que a objetividade do Conhecimento Matemático se desloca de seus fundamentos às suas aplicações futuras, o que é característico da propositura *axiomática*. O pensamento matemático passa a se configurar, caracteristicamente, pelo raciocínio diagramático-estruturalista e relacional.

### 6.10 *Axiomas* em David Hilbert (1862-1943)

Hilbert rotulará o desenvolvimento de Peano de ‘método genético’, deixando e reservando o título de ‘Método *Axiomático*’ para sua própria apresentação. Ele foi um dos mais notáveis matemáticos da Alemanha e, em sua monografia *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria) de 1899, ele desenha suas contribuições mais importantes aos fundamentos da Matemática. Nessa tese, ele apresentou um novo conjunto de *axiomas* para a Geometria, maior que o sistema original de Euclides, um novo conjunto simples e completo, independente entre si dos quais deduziu seus teoremas mais importantes, onde destaca o termo *axioma* e ele tem o sentido interpretativo de sinônimo de hipótese. Será também através dos estudos e trabalhos de Hilbert que se consolidará o Método *Axiomático* Formal (ou Abstrato), numa propositura e nível de abstração, rigor e formalidade nunca vistos até então e, principalmente, com destaque à sua fecundidade no desenvolvimento da Matemática.

Neste seu trabalho, Hilbert, por meio de seu novo sistema de *axiomas*, conseguia reconstruir, integralmente e de um modo rigoroso, o edifício da Geometria euclidiana elementar. Hilbert desenvolve a sua ‘nova abordagem *axiomática* formal’ à Geometria. Mas, ele não somente se preocupou com que seu novo método *axiomático* fosse entendido apenas como um instrumento eficaz para se conseguir uma representação mais rigorosamente lógica e sistemática de teorias matemáticas já existentes, mas também ele entendia e se preocupava em destacar que esse novo método *axiomático* formal se constituía numa ferramenta frutífera, que podia conduzir-nos a novos e originais resultados.

No entanto, destaca Giovannini (2013), àquela época, sempre houve e posteriormente originou-se uma tendência a se ressaltar o aspecto puramente formal, o nível de abstração e de

rigor no pensamento de Hilbert, inclusive, salientando-se que ele mesmo não priorizava destacar a fecundidade do seu método. Por exemplo, Poincaré (1902) compara o método de Hilbert como uma máquina de racionalizar, como o piano lógico de Stanley Jevons<sup>183</sup>, cuja única finalidade seria a obtenção mecânica de teoremas a partir de um conjunto qualquer de *axiomas*. Esta não é certamente a nossa interpretação.

Entendemos que Hilbert sempre buscou ressaltar a fecundidade matemática do método *axiomático* e ele, basicamente, segundo Giovannini (2013), inaugura uma nova área de investigação matemática: a Matemática dos *axiomas* ou metamatemática.

Vale salientar que, por essa altura da mudança para o século XIX, os matemáticos estão em um debate acentuado sobre os fundamentos lógicos da Matemática, como também ligados à ideia de unificação coerente das Ciências.

Em suas primeiras investigações *axiomáticas*, Hilbert foi profundamente influenciado pelo livro *Vorlesungen Uber Neuere geometrie* (1882) de Moritz Pash (1843-1930), que o faz assumir, ainda, uma postura empirista a respeito das bases epistemológicas da Geometria e da natureza do conhecimento geométrico. Entretanto ele possui já uma posição ‘dedutivista’ em relação ao modo de se levar a cabo suas demonstrações, posicionando-se contra qualquer referência ou ao uso de figuras geométricas e diagramas nessas deduções. Também nega, explicitamente, a utilização de definições descritivas ao modo de Euclides e de seus objetos primitivos (pontos, linha e plano). Ele parte em sua nova apresentação *axiomática* que já começa a ser delineada, de um conjunto de objetos quaisquer, cujas únicas propriedades matemáticas relevantes seriam as relações estabelecidas nos *axiomas*. Tal posicionamento reforça a interpretação e a mudança consolidada no termo *axioma* ao sentido hipotético, principalmente, ao referir-se a ‘um conjunto de objetos quaisquer’, como também o direcionamento a um pensamento estruturalista no desenvolvimento teórico.

Nesse início, também, e como consequência do que ele delineia anteriormente, Hilbert declarava que seu sistema *axiomático* não devia ser entendido como uma descrição direta e imediata do espaço físico, demonstrando um desprendimento que começa a se processar da

---

<sup>183</sup> A primeira máquina lógica importante foi a de Stanley Jovens. Ele construiu o que denominou de “piano lógico” pois tinha 21 teclas, uma para uma das 16 combinações possíveis de 4 termos e suas negações e 5 para várias operações. Essa máquina era capaz de resolver mecânica e rapidamente equações booleanas. Cada premissa proposta devia se transformar em equações booleanas. Tocavam-se então as tecla necessárias para introduzir as premissas e se obtinham as conclusões corretas com base na eliminação automática de todas as combinações de termos não permitidos pelas premissas. O piano lógico de Jovens permitia, além disso, encontrar os valores de verdade de uma fórmula dada de acordo com as combinações elementares assinaladas no verbete Tabela de Verdades.

perspectiva empirista; e completa dizendo entender que o seu sistema está mais para um ‘esquema de conceitos’, capaz de ter diversas interpretações.

Não há dúvidas da relevância e do caráter inédito do empreendimento que faz Hilbert ao método *axiomático*, principalmente, por informar que, nesse ‘novo método’, de acordo com sua concepção, a interação entre a teoria *axiomatizada* e a realidade acontece através de interpretações e ‘aplicações’. O que comunga com o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.

Aparecerá mais tarde, nos trabalhos de Hilbert, uma investigação sistemática da consistência e sobre a independência dos *axiomas* da Geometria, que não era sua preocupação inicial. Essa busca será realizada por meio da construção de ‘modelos’ aritméticos, que o conduzirá ao desenvolvimento de uma perspectiva ‘metateórica’, originária de um empreendimento metageométrico. E isso conduz à consolidação de um nível de abstração mais elevado e ao método *axiomático* em desenvolvimento.

Inicialmente, parecia haver por parte de Hilbert uma crença de que a perspectiva *axiomática*, em certo modo, fosse estéril de um ponto de vista matemático, que podemos inferir de um apontamento seu, como indica Giovannini (2013, p.153): “Por certo, meu curso sobre axiomas da geometria não me tem dado, pelo menos até agora, nada edificante. Sempre o mesmo: se deve tomar isto ou aquilo como axioma; sempre o mesmo tom insípido, sem a vívida frescura de novos resultados” (Hilbert a Hurwitz, 13 de junho de 1894). Se assim ocorreu, observamos que ele abandona completamente essa visão. Hilbert também defendia que os conceitos fundamentais da Análise poderiam e deveriam ser construídos simplesmente de uma maneira formal, desprezando tanto quanto possível os assuntos de ordem filosófica.

Quando da publicação de *Fundamentos da Geometria*, podemos observar que um ‘novo’ espírito matemático já se encontra completamente consolidado no pensamento de Hilbert. Em sua monografia, Hilbert ‘constrói’ um novo ‘modelo’ analítico de *axiomas* para a Geometria, utilizando-se de outra teoria matemática. Tal construção consistia em redefinir os conceitos geométricos básicos como *ponto*, *linha* e *congruência*, em termos da teoria dos números reais. Esse procedimento o conduzirá a novidades investigativas e os resultados alcançados foram decisivos numa mudança no modo como Hilbert parecia conceber, em um primeiro momento, a função e utilidade do método *axiomático*. Ele, definitivamente, apresenta nesse trabalho o método *axiomático* como uma ferramenta eficaz para se alcançar

um grau de rigor até o momento inimaginável na apresentação da Geometria elementar. E ainda que:

O proveito maior do método axiomático aparece desta forma na geometria, na medida que ele suscita um grande número de novas e importantes perguntas, as quais dificilmente se poderia chegar se outro modo (HILBERT, 1905, p.70).

Sobretudo, as investigações metageométricas constituíam um aspecto fundamental do caráter matematicamente frutífero do método *axiomático* e Hilbert, certamente, tinha essa perspectiva em mente.

Para Goheen (*apud* OLIVEIRA, 2003, p.14), “o trabalho de Hilbert teve importância capital na mudança de concepção da geometria e, em certo sentido, na concepção idealística da verdade”. Em Hilbert, o termo *axioma* é aplicado e utilizado definitivamente no sentido interpretativo de sinônimo de hipótese. Fica muito evidente no pensamento de Hilbert este aspecto, principalmente, destacado em passagens como vemos a seguir:

No meu livro *Fundamentos da Geometria*, Cap. I ( pp.1-31), **estabeleci um sistema de axiomas** para a geometria euclidiana e aí evidenciei que o desenvolvimento da geometria euclidiana no plano com base nos axiomas planos daquele sistema é possível, mesmo quando não se apliquem os axiomas da continuidade. (*Nova fundamentação da geometria de Bolyai-Lobachevskii*, De *Math Ann.*, v,75, *apud* OLIVEIRA, 2003, p.149) [grifo nosso].

[...] Em vista disso, no que segue **tratei de estabelecer para a geometria plana um sistema de axiomas baseado no conceito de grupo**, que apenas contém condições simples e claras do ponto de vista geométrico e que em particular, em nenhum caso supõe a diferenciabilidade das funções induzidas pelos movimentos. Os axiomas do sistema **por mim estabelecidos** estão contidos como partes constituintes especiais nos axiomas de Lie ou, como creio, são imediatamente dedutíveis deles (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.165) [grifo nosso].

Evidenciamos, na fala de Hilbert, o sentido de hipótese do termo *axioma*, uma vez que existe o destaque ao aspecto construtivo (elaboração individual e pessoal) e não ao sentido de verdades inatas, indemonstráveis.

Hilbert desenvolve um tratamento completo e consistente dos *axiomas* da Geometria e sintetiza-os no contexto da análise dos números reais. Ele demonstrou que, nessa análise, é possível encontrar um modelo de *axioma* da Geometria, como também mostra, ainda, ser admissível estabelecer esse modelo como essencialmente único, isto é, que qualquer outro modelo lhe seria isomorfo.

Por meio da apresentação de Hilbert, da Geometria como um sistema *axiomático* formal, essa teoria se converteu, pela primeira vez, em ‘Teoria da Matemática Pura’, cujo feito foi reconhecido imediatamente e assinalado como uma de suas principais proezas. No entanto, para Hilbert, as investigações metageométricas constituíam o aspecto fundamental, no qual se encontra o caráter matematicamente frutífero do método *axiomático*.

Observa-se que, ao compararmos trabalhos existentes até ao final do século XIX, relacionados com os princípios da Aritmética e com os *axiomas* da Geometria, percebemos, evidentemente, múltiplas analogias, mas ressaltam uma diferença quanto ao método de investigação. Anteriormente, o processo de introdução do conceito de número consistia no método genético:

[...] Partindo da unidade, imaginamos criados, como se faz ordinariamente, os demais números naturais 2, 3, 4 ... mediante o processo de contagem, e desenvolvemos as suas leis de cálculo; depois por necessidade de generalização na prática da subtração, chega-se aos números negativos; em seguida define-se o número fraccionário, digamos como um par de números -, com os quais toda a função linear possui um zero; e finalmente, define-se o número real como um corte ou uma secção fundamental, chegando-se a que toda a função inteira racional ( e até toda a função contínua) que muda de sinal possui um zero. A este processo de introdução do conceito de número podemos denominar de *método genético*, porque o conceito mais geral de número real é engendrado por sucessivas extensões do conceito simples de número (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.216)

Distintamente, no entanto, na estruturação da Geometria, utilizava-se o método *axiomático*. Hilbert questionou se o método genético seria o único apropriado para o estudo do conceito de número, deixando-se o método *axiomático* somente para o estudo dos *Fundamentos da Geometria*. Ao inferir sobre o método à Geometria, explicitamente, ele atribui o sentido de hipóteses ao modo de proceder desse método:

De forma essencialmente distinta [do método genético da aritmética] se procede na estruturação da geometria. Nesta disciplina procura-se começar com **hipóteses de existência de todos os elementos, isto é, postula-se à partida três sistemas de entes** (nomeadamente, os pontos, as rectas e os planos), **e estabelecem-se relações entre esses elementos – por meio de certos axiomas** que são os de incidência, ordem, congruência e continuidade (OLIVEIRA, 2003, p.216) [grifo nosso].

Nessa afirmação, explicitamente, há o sentido hipotético atribuído aos *axiomas*. Hilbert, de modo engenhoso, considerou interessante comparar esses dois métodos e investigar qual deles apresentava mais vantagens para a investigação lógica dos fundamentos,



chegando à seguinte conclusão: "(...) apesar do alto valor heurístico e pedagógico do método genético, merece, no entanto, a minha preferência, o *método axiomático* para a representação definitiva do nosso conhecimento e a sua plena fundamentação lógica." (2003, p. 217).

É assim que, em seus estudos subsequentes, como na elaboração da teoria do conceito de número, Hilbert desenha o processo de aprimoramento da perspectiva *axiomática* e seu 'método axiomático' formal, ou abstrato (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol.8, 1900*) que expomos a seguir.

Procurando por uma fundamentação rigorosa e satisfatória do conceito de número, ele estruturará um método que, definitivamente, designará de *axiomático*. Operando por esse método na conceituação de número, ele formaliza a elaboração de um sistema de *entes* denominados de números e de *axiomas* que tratariam de proposições iniciais, onde ambos teriam um sentido hipotético e cuja verdade está garantida pelas consequências e pela coerência interna de uma estrutura lógica do pensamento.

Ele propõe que pensemos (imaginemos) em um sistema de entes, aos quais chamaríamos de números que seriam designados por a, b, c, ... relacionando-se entre si, e tais relações ajustando-se exata e completamente por quatro conjuntos de *axiomas*: os de ligação, de cálculo, de ordem e de continuidade conforme apresentamos abaixo:

#### I. *Axiomas* de Ligação

I 1. Do número a e do número b, origina-se por adição um determinado número c.  
Simbolicamente:

$$a + b = c \text{ ou } c = a + b$$

I 2. Se a e b são números dados, existe sempre um só número x e um só número y tais que, respectivamente, tenha-se:

$$a + x = b \text{ e } y + a = b$$

I 3. Existe um determinado número chamado zero (0) tal que, para qualquer número a, verifica-se simultaneamente:

$$a + 0 = a \text{ e } 0 + a = a$$

I 4. Dos números  $a$  e  $b$  se origina, contudo, de outra maneira - por multiplicação- um determinado número  $c$ . Simbolicamente:

$$ab = c \text{ ou } c = ab$$

I 5. Se  $a$  e  $b$  são dois números quaisquer com  $a$  diferente de zero, existe sempre um só número  $x$  e também um só número  $y$  tais que, respectivamente, cumpra-se:

$$ax = b \text{ e } ya = b$$

I 6. Existe um determinado número chamado um (1) tal que, para todo o valor de  $a$ , resulta simultaneamente:

$$a \cdot 1 = a \text{ e } 1 \cdot a = a$$

## II. *Axiomas* de Cálculo

Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números quaisquer, verificam-se sempre as seguintes igualdades:

$$\text{II 1. } a + (b + c) = (a + b) + c.$$

$$\text{II 2. } a + b = b + a.$$

$$\text{II 3. } a (bc) = (ab) c.$$

$$\text{II 4. } a (b + c) = ab + ac.$$

$$\text{II 5. } (a + b) c = ac + bc.$$

$$\text{II 6. } ab = ba.$$

## III. *Axiomas* da Ordem

III 1. Se  $a$  e  $b$  são números distintos quaisquer, então um e um só deles (digamos  $a$ ) é maior ( $>$ ) do que o outro; e este se diz, então, o menor dos dois. Simbolicamente:

$$a > b \text{ e } b < a$$

Para nenhum número  $a$ , é válida a relação  $a > a$ .

III 2. Se  $a > b$  e  $b > c$  então também é  $a > c$ .

III 3. Se  $a > b$  então se verifica sempre

$$a + c > b + c \text{ e } c + a > c + b$$

III 4. Se  $a > b$  e  $c > 0$  verifica-se igualmente:

$ac > bc$  e  $ca > cb$ .

#### IV. *Axiomas* da Continuidade

IV 1. (*Axioma* de Arquimedes) Se  $a > 0$  e  $b > 0$  são dois números quaisquer; então é sempre possível somar  $a$  consigo mesmo, quantas vezes forem necessárias para que a soma resultante tenha a propriedade:

$a + a + \dots + a > b$

Podemos observar que os *axiomas* I, II, III e IV correspondem aos de Corpo Ordenado Arquimediano e Completo, sendo a propriedade arquimediana do conceito de número finito pressuposta pelo *axioma* IV.1. Já para a completude, Hilbert apresenta o *axioma* abaixo:

IV 2. (*Axioma* da Completabilidade) Se queremos conservar as relações entre os números, não é possível juntar ao seu sistema outro sistema de entes, de modo que, no sistema combinado entre ambos, sejam satisfeitos, na sua totalidade, os *axiomas* I, II, III e IV 1.

Muito brevemente falando, os números formam um sistema de *entes* que não é susceptível de ampliação alguma se mantiverem todas as relações e todos os *axiomas* estabelecidos. Hilbert estabelece o Sistema Algébrico Ordenado, no qual, para ele, os números reais constituem no seu conjunto um sistema de objetos com essas propriedades. Podemos observar que alguns dos *axiomas* que acabamos de enumerar figuram como consequência dos restantes, o que nos leva à interpretação de uma dependência lógica dos mesmos. E, verificamos que o sistema de números apresentado por Hilbert coincide com o sistema usual dos números reais. Para Hilbert, de acordo com Rodrigues (2006, p.139):

Hilbert considera que na demonstração da não-contradição dos *axiomas* admitidos, encontramos a prova da existência da totalidade dos números reais, isto é, na terminologia de Cantor, a prova de que o sistema dos números reais é um conjunto consistente (acabado). Assim, segundo esta concepção do conjunto dos números reais, não temos de imaginar todas as propriedades possíveis a que podem ser sujeitos os elementos de uma sucessão fundamental, mas sim um sistema de entes cujas relações recíprocas são dadas pelo referido sistema finito e fechado dos

axiomas I - IV, e para o qual são válidos novos enunciados somente quando estes podem ser deduzidos daqueles axiomas, por um número finito de inferências lógicas.

Rodrigues (2006) ainda conclui que existe um corpo completo e ordenado e apenas um a menos de isomorfismo do conjunto dos Números Reais, o qual é denotado por  $\mathbb{R}$  e que nós utilizamos hoje em dia. E, ainda, para este pesquisador:

O conjunto  $\mathbb{R}$  pode, deste modo, representar:

- As Secções de Dedekind, isto é, conjuntos ordenados de racionais;
- Classes de Equivalência de Sucessões Fundamentais;
- Sucessões Corrigidas de Racionais;
- Operações com Quantidades do mesmo tipo;
- Classes de Equivalência de Declives no Plano Reticulado;
- Colecção de Sucessões Equivalentes de Intervalos Encaixados;
- (...) (RODRIGUES, 2006, p. 145).

Hilbert considerava que a Geometria, assim como a Aritmética, necessitava, para sua edificação lógica subsequente, de algumas poucas e simples proposições fundamentais que ele designava como *axiomas*. Assim, ele buscou desenvolver um trabalho ao qual tentou dar o enunciado de um sistema de *axiomas* completo e tão simples quanto possível à Aritmética quanto ao que era dado à Geometria.

Em seu tempo, Hilbert interrogava-se e tecia reflexões sobre as dificuldades que têm sido encontradas à fundamentação da Aritmética. E ele observa que o mesmo já não acontece com a Geometria. E prossegue destacando em *Sobre os Fundamentos da Lógica e da Aritmética* (das Atas do III Congresso Internacional de Matemáticos em Heidelberg, 1904) (OLIVEIRA, 2003, p. 221–223) como sendo algumas dessas dificuldades:

- no modo de proceder de L. Kronecker, tomar o conceito de número inteiro como fundamento autêntico da Aritmética como um conceito geral, como sendo dado direta e imediatamente. Um ponto de vista que ele chama de *dogmático*;

- o ponto de vista que ele designa de *empirista*, representado por H. Helmholtz, em que nunca se pode deduzir a possibilidade ou a existência, possível ou atual, por exemplo, um número arbitrariamente grande;

- o ponto de vista *oportunista*, cujo representante é E. B. Cristoffel, segundo o qual se tem que tomar sempre o conceito de números irracionais, pois, caso contrário, toda análise fica condenada à esterilidade;

- G. Frege, que ele considera como o sábio que penetrou mais profundamente na essência dos números inteiros, principalmente por haver reconhecido corretamente as propriedades essenciais do conceito de número inteiro, bem como do significado do raciocínio por indução matemática. Ele reflete sobre o problema de fundamentos a leis da Aritmética com os recursos da Lógica, mas da Lógica tradicional. Sobretudo, isso aponta a uma dificuldade relacionada à que ela não impõe restrição alguma à noção de ‘cada objeto’. Deste modo, sua teoria cai em paradoxos com a teoria dos conjuntos, mostrando que concepções e meios de investigação da Lógica tradicional não estão à altura das exigências severas da teoria dos conjuntos;

- já R. Dedekind, segundo Hilbert, reconheceu as dificuldades matemáticas quando se busca uma fundamentação do conceito de número inteiro. Dedicou-se à procura de uma estruturação dessa teoria e teceu um método que Hilbert denominou de ‘transcendental’. Entretanto, Hilbert não o entende como praticável, por causa das inevitáveis contradições que apareciam com o conceito de totalidade de todos os entes de Dedekind;

- Mesmo G. Cantor, pressentindo as anteriores contradições mencionadas, de modo que estabelece uma distinção entre conjuntos ‘consistentes’ e ‘inconsistentes’ para resolvê-las; de acordo com Hilbert, Cantor não define um critério preciso a essa distinção, o que deixava margem a juízos ‘subjetivos’ o que, por sua vez, não oferecia certeza objetiva.

Seu pensamento à superação das dificuldades apontadas toma o sentido de promoção de uma convergência da Lógica à Matemática, informando que caracteriza a Aritmética como implícita na Lógica, indicando que, numa observação atenta, podemos constatar que, na exposição tradicional das Leis da Lógica, já estão presentes alguns conceitos aritméticos fundamentais e que as noções lógicas tradicionais fundamentais são geralmente pressupostas quando se trata de estabelecer uma fundamentação para a Aritmética. Em nossa interpretação, o que ele aponta é relacionado à uma compreensão, no sentido de complementaridade entre essas dimensões (lógica – filosófica – releitura do pensamento platônico) na constituição do Conhecimento Matemático. Para Hilbert, a fim de se evitar uma circularidade paradoxal, é necessário o desenvolvimento parcialmente simultâneo da Lógica e da Matemática.

Para indicar como se processaria uma construção dos fundamentos pela conjunção entre a Lógica e a Matemática, Hilbert publica um trabalho intitulado *Sobre os Fundamentos da Lógica e da Aritmética* (em Das Actas do III Congresso Internacional de matemáticos em Heidelberg – 1903, redigido pouco tempo após a divulgação do *Paradoxo de Russell* – 1902).

Nesse trabalho, teremos a confirmação que Hilbert compreende o termo *axioma* como proposição inicial hipotética e, principalmente, o empreendimento de um tratamento aos fundamentos do Conhecimento Matemático dentro da perspectiva semiótica – de promoção de uma confluência, em nossa interpretação, entre a Linguagem (evidenciado pelo pensamento Lógico) e a Matemática.

Para este momento, destacaremos alguns trechos, neste trabalho, que justificam e sustentam a nossa interpretação. Hilbert fala:

Um objecto de nosso pensamento recebe o nome de *pensamento objeto* [*Gedankending*] ou simplesmente *objeto* [*Ding*], e será designado por um símbolo.

Tomamos como base das nossas considerações um primitivo objeto 1 (um). As justaposições deste objeto consigo mesmo uma, duas, três ou mais vezes, como em

11, 111, 1111,

Designamo-las por *combinações* do objeto 1 consigo mesmo, igualmente qualquer combinação destas combinações, como

(1)(11), (11)(11)(11), ((1)(11)(11)), ((111)(1))(1)

Recebe, também, por sua vez, o nome de combinações do objecto1 consigo mesmo. Tais combinações também serão designadas simplesmente por objetos, e para distingui-las do objecto que tomamos como fundamental, o 1, chamamos a este de objecto *simples*.]

Juntamos agora um segundo objecto simples, que denotamos com o símbolo = (igual). Formemos depois combinações destes dois objetos, como

1 =, 11 =, ..., (1) (=1)(==), ((11)(1)(=))(==), 1=1, (11) = (1)(1)

Diremos que a combinação *a* dos objetos simples 1 e = *difere* da combinação *b* daqueles entes quando as duas combinações não são concordantes de alguma maneira no que concerne o modo e a ordem da secessão ou na escolha e posição dos objetos 1, =; isto é, quando *a* e *b* não são *idênticos* entre si.

Suponhamos agora as combinações daqueles dois objetos divididas em duas classes; a *classe das entidades* [*Klasse der seienden*] e a classe das *não entidades* [*der nichtseienden*]; cada objecto pertencente à primeira classe difere de qualquer outro objecto pertencente à segunda classe. Toda a combinação dos dois objetos simples 1 e = pertence a uma destas duas classes (OLIVEIRA,2003, p.223-4).

Fica bastante evidente, na fala de Hilbert, o sentido construtivo, hipotético e (para nós) semiótico, empreendido ao iniciar sua exposição sobre a convergência entre a Lógica e a Aritmética – entre a Linguagem e a Matemática.

Outro ponto que vamos ressaltar trata do atributo de ‘verdade’ no pensamento ao Conhecimento. Ele continua:

Se *a* é uma combinação dos objetos fundamentais 1, =, designamos também por *a* a proposição de que *a* pertence a classe das entidades, e com *ã* a proposição de que *a* pertence à classe das não entidades. Qualificamos *a* como uma proposição *verdadeira* se *a* pertence à classe das entidades; pelo contrário, dizemos que *ã* é uma proposição verdadeira se *a* pertence à classe das não entidades. As proposições *a* e *ã* formam uma *contradição*.

A composta das duas proposições, A, B, simbolicamente

$A \mid B$

Por palavras: << de A infere-se B>> ou << se A é verdadeira, então B é verdadeira>>, recebe também o nome de proposição, chamando-se então a A a *suposição* [*hipótese*, ou *antecedente*] e a B a *asserção* [*tese*, ou *consequente*]. Hipótese e teses podem, por sua vez, constar de várias proposições A1, A2 e B1, B2, B3, respectivamente, etc..., em símbolos

A1 e, A2  $\mid$  B1 o, B2 o, B3

E por palavras << de A1 e A2, infere-se B1 ou B2 ou B3>>, etc. Visto que a negação foi introduzida, e com o símbolo 'o', (ou) à nossa disposição, poder-se-ia evitar o emprego do símbolo ' $\mid$ '; utilizo-o para me aproximar o mais possível da linguagem oral corrente (OLIVEIRA, 2003, p.224-5).

De maneira que a 'verdade' se refere a um juízo lógico, dentro de um sistema consistente. Hilbert chega à elaboração consequente dos *axiomas* na definição do conceito = (igual):

Por A1, A2, .... entenderemos as proposições que, dito de forma breve, resultam de uma proposição A(x) quando no lugar do *objecto arbitrário* [*Willk"urlichen*>>] x pomos os objetos 1, = e suas combinações. Então escrevemos também as proposições A1 o, A2 o, A3,... e A1 e, A2 e, A3, .... como se segue: A(x<sup>(o)</sup>), por palavras << pelo menos para um x>>, A(x<sup>(a)</sup>), com palavras <<para todo o x>>, respectivamente, devendo ver-se nisto, apenas, uma escrita abreviada.

Formemos agora com os objetos fundamentais 1, = as proposições seguintes:

1.  $x = x$
2.  $\{x = y \text{ e } w(x)\} \mid w(y)$ .

Nestas x (com o significado de x<sup>(a)</sup>) indica cada um dos objetos primitivos fundamentais e qualquer combinação dos mesmos. [...] As proposições 1, 2 constituem a definição do conceito = (igual) e também são chamadas *axiomas* (OLIVEIRA, 2003, p.225).

O sentido de hipóteses ainda é reforçado quando Hilbert diz que, se nos *axiomas* 1 e 2, no lugar dos objetos arbitrários x, y, pusermos os objetos simples 1, = ou combinações particulares dos mesmos, obteremos proposições particulares, as quais podem ser chamadas de 'consequências' daqueles *axiomas*. Ele considera que uma seqüência de certas consequências tais, que as hipóteses da última consequência da seqüência sejam idênticas às teses das consequências precedentes. Indicando que "Tomamos então as hipóteses das consequências precedentes como hipóteses e a tese da última consequência como tese; obtemos assim uma nova proposição que, por sua vez, pode ser uma consequência dos *axiomas*" (P.226). E, continuando este processo dedutivo, podemos obter mais e mais consequências.

### 6.10.1 Reflexões sobre o significado de *axiomas* em Hilbert

Com o sentido interpretivo de hipóteses empreendido ao termo axioma a grande inspiração de Hilbert em seus estudos ancorava-se em perceber que havia uma grande diferença da geometria de figuras para a geometria da estrutura do espaço. Juntava-se a isso sua busca de uma fundamentação apropriada ao conhecimento matemático. Foram esses aspectos que o conduziu a sua visão da axiomática e ao desenvolvimento de sua ‘nova’ abordagem axiomática formal/abstrata. Nessa iremos observar que, o termo *axioma* trata de enunciados hipotéticos e não verdades profundas e fundamentais; a condição de verdade repousa somente em que, se alguma coisa é verdade a outra que dela provêm e decorre também é verdade. E, a visão descritiva conceitual é totalmente substituída pela noção estrutural no estabelecimento dos conceitos e nesta direção, os *axiomas* assumem caráter operativo.

Na *axiomática* de Hilbert, observamos que os *axiomas* se referem a proposições hipoteticamente postuladas que são avaliadas por suas consequências lógicas e matemáticas, não expressando alguma verdade objetiva fundamental e dada pela intuição.

Num sentido, e que entendemos de Complementaridade, Hilbert orienta e destaca que, ao se buscar os fundamentos da Aritmética, devemos romper com a impossibilidade (esta impositiva) de se recorrer a outra disciplina (à Geometria, por exemplo) e precisamos trazer e operar uma conjunção frutífera ao pensamento matemático (aritmético e geométrico) e à Lógica (e, obviamente, superando a perspectiva da Lógica Tradicional).

Assim, o pensamento desse filósofo aponta claramente a aproximação entre a Linguagem e a Matemática na constituição de seus fundamentos e que, no trabalho de Hilbert, trataria especificadamente direcionado à fundamentação da Aritmética. Por exemplo, ele afirma que, para se evitar paradoxos na elaboração de uma fundamentação rigorosa e satisfatória do conceito de número, é necessário um desenvolvimento parcial e quase que simultâneo entre a Lógica (Linguagem) e a Aritmética (Matemática), chegando ao que ele designou por método *axiomático*.

Foi assim que, no desenvolvimento e na demonstração de que na análise dos Números Reais se é possível encontrar um modelo de *axiomas* da geometria, ele estabelece seu ‘novo’ método axiomático, que para ele é um modelo essencialmente único. De forma que, ao



refletirmos sobre o pensamento e propositura investida empreendida por Hilbert em seu trabalho, entendemos que há uma postura investigativa que espelha o sentido de Complementaridade ‘Otteano’, principalmente destacada entre a aritmetização e a axiomatização (no sentido da geometria que ele observava, e, lógico-dedutivo no sentido de método). Um modelo que a ele qualquer outro é isomorfo.

Com o processo de aritmetização do século XIX, nasce a necessidade de fundamentação da Aritmética e, de outro modo, também, a necessidade educativa, relacionada ao conhecimento científico advindo com a Revolução Industrial que conduz à nova relação entre a Linguagem e a Matemática, e, principalmente houve a inserção mais intensa do pensamento filosófico na Matemática. Esse movimento foi o cenário que embalava o pensamento de Hilbert na elaboração do seu ‘método axiomático’. De modo que os objetos matemáticos passam a ser as estruturas formalmente *axiomatizadas*, os sistemas, ou seja, as estruturas algébricas, as estruturas geométricas, a Geometria não euclidiana etc.

Somente quando a Aritmética começa a fazer parte da Lógica (no pensamento de Hilbert), devido a um processo de aritmetização da Matemática, em especial da Geometria euclidiana, culmina a acentuada preocupação com os fundamentos da Aritmética, cujo desenrolar conduzirá à sua *axiomatização*. Especificamente, interpretamos em Hilbert esse caminho no direcionamento de seus trabalhos. Desse modo, assistimos ao termo *axioma* definitivamente assumir o sentido interpretativo de sinônimo de hipótese. É a consolidação do Método *Axiomático* Formal.

Em Hilbert, por exemplo, diferentemente de Euclides, os *axiomas* figurarão como proposições iniciais postuladas de uma dedução lógica. Já em Euclides os *axiomas* estão mais para possibilidades assumidas de construções - regras que definem um contexto -, sendo que é à base dessas premissas que devemos mostrar outras construções possíveis, e, antes de tudo, em Euclides o tratamento é o de verdades aos *axiomas*.

Assim, vemos se confirmar em Hilbert o processo de axiomatização da aritmética e a configuração de um método axiomático sumamente abstrato e formal, resultado que teve início de uma confluência entre a Lógica e a Aritmética (em nossa interpretação entre a Linguagem e a Matemática) – entre a arte argumentativa e cálculos – o nascimento e explosão da álgebra. Fica evidente e destacado no pensamento de Hilbert, o direcionamento a mudança na concepção da natureza do termo *axioma*, que passa ao sentido interpretativo de sinônimo à hipótese, deixando o de verdades indemonstráveis ou inatas. Como também, se

tornar evidente uma mudança no caráter do termo *axioma* relacionado ao pensamento conceitual, de modo que, este abandona o lado descritivo e assume o lado operativo na constituição de conceitos.

Hilbert empreendeu uma busca profunda nos fundamentos da Matemática e, em 1928, ele profere uma conferência no Seminário Matemático de Hamburgo, publicada nas Separatas do seminário, onde expõe o desenvolvimento de sua Teoria da Demonstração.

Será através da ‘Teoria da Demonstração’ de David Hilbert, ao lado da teoria de G. Cantor (posteriormente *axiomatizada* por E. Zermelo em 1908) que se acomodarão, decisivamente, os conteúdos matemáticos do século XX e moldando-se, definitivamente, o método hipotético-dedutivo das teorias matemáticas modernas.

Nessa obra, Hilbert resolve e esclarece muitos problemas lógicos relacionados com os fundamentos das Geometrias (já estava em desenvolvimento as Geometrias não euclidianas desde Bolay-1932) e sintetiza e sistematiza os desenvolvimentos geométricos conhecidos até então. Seu sistema tomava por base 21 *axiomas*: de incidência, de congruência, de ordem, de paralelas e de continuidade – a reconhecida Geometria Absoluta - cujo sistema apresentava maior rigor formal, bem como constituía um desenvolvimento metateórico: demonstrações de independência e consistência relativa de alguns *axiomas*. Em particular, ele prova que a demonstração da consistência da Geometria euclidiana é equivalente à dos números naturais e, com isso, interpretamos que ele tenha trabalhado num sentido da perspectiva de Complementaridade do Pensamento ‘Otteano’.

Seu objetivo, ao desenvolver a Teoria da Demonstração, era mostrar uma nova maneira de se providenciar uma fundamentação para a Matemática. Nesse trabalho, ele consolida a abordagem *axiomática* formal à Ciência Matemática. Embora se considere que o método necessitasse ainda de aprimoramento para seu desenvolvimento pleno, ele desejava:

[...] eliminar definitivamente as questões relativas aos fundamentos da matemática na maneira que actualmente se colocam, mediante a conversão de toda a proposição matemática numa **fórmula** que possa ser concretamente exibida e rigorosamente demonstrável, e assim retratar as definições e inferências matemáticas de tal jeito que resultem irrefutáveis, sem deixar de refletir uma visão adequada do conjunto da ciência matemática. (HILBERT in OLIVEIRA, 2003, p.256). (grifo nosso)

Também podemos destacar que o *axioma* encarna, definitivamente, no pensamento hilbertiano, o sentido operativo, inclusive, sendo compreendido no sentido de *fórmulas* basilares, que serviriam como pedra “para a construção do edifício formal da matemática”

(HILBERT in OLIVEIRA, 2003, p.257). Tais fórmulas são, na teoria de Hilbert, distintas das fórmulas correntes da Matemática, pois incluiriam símbolos lógicos. Nesse método, Hilbert utiliza o princípio da indução completa para gerar seus elementos e, com seu programa, altera-se o método da prova que, anteriormente, era redutivo e geral, passando a ser construtiva.

Hilbert, no desenvolvimento dessa sua teoria, aponta que os métodos usuais não deveriam ser considerados como logicamente óbvios, necessitam de uma análise à parte, buscando observar se sua aplicação conseguiria levar a resultados desejáveis. E acreditava que, através da sua Teoria da Demonstração, conseguiria realizar esse empreendimento. Ele estava certo de que a Matemática não poderia ser uma Ciência fundada apenas na Lógica. Entendia ser a condição para aplicações lógicas que alguma coisa seja previamente apresentada às nossas faculdades de representação, “que certos objetos concretos extralógicos estejam intuitivamente presentes como experiência imediata antes de qualquer pensamento” (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.256).

Assume, neste ponto, uma perspectiva ontológica semiótica no pensamento de Hilbert uma vez que, para ele, “em particular, na matemática são objetos a considerar os próprios símbolos concretos cuja forma, segundo a nossa concepção, é imediatamente clara e reconhecível” (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.257).

A Matemática, diferentemente da Lógica, tem um objeto e esse é apreensível intuitivamente, configurando-se em representações, e a Lógica necessita desse objeto para a realização das operações lógicas. Nesta teoria de Hilbert, o raciocínio material é substituído pela manipulação de símbolos de acordo com regras; sendo que, em sua opinião, é desse modo que o método *axiomático* alcança a fiabilidade e perfeição que pode e deve atingir para se tornar o instrumento básico de toda a investigação teórica.

Assim, ele indica que o programa delineado fornece a indicação dos *axiomas*, que ficam a escolher para sua teoria da demonstração, sejam eles, os *axiomas*: da implicação, sobre  $\&$  e  $\vee$ , da negação, da Função Lógica  $\mathcal{E}$ , da igualdade, e, dos números. Além de *axiomas*, “há a necessidade de *definições explícitas*, que introduzem conceitos matemáticos e que têm o caráter de *axiomas*” (HILBERT in OLIVEIRA, 2003, p.260), revelando o aspecto operativo que assumem os *axiomas* em sua opinião.

Há, no desenvolvimento de Hilbert, o que destacamos, como quê, o empreendimento de complementaridade entre Lógica/Linguagem e o pensamento matemático/aritmético. De

forma que sua *axiomática* pressuporá essa Complementaridade, no desenvolvimento da sua Teoria da Demonstração.

Na sua conferência, Hilbert encerra demonstrando e destacando um rompimento definitivo com Deus e a divindade, como também com pressupostos da Antiguidade e de alguns de seus contemporâneos, dizendo:

Mas gostaria de afirmar desde já qual será o resultado final [de uma Teoria da Demonstração]: a matemática é uma ciência sem pressupostos, Para a sua fundamentação não necessito de Deus, ao contrário de Kronecker, nem da suposição de uma aptidão especial da nossa inteligência em sintonia com o princípio da indução matemática, como crê Poincaré; nem da intuição primária de Brouwer; nem, tão pouco, finalmente, de axiomas do infinito, da redutibilidade ou de completabilidade, como fazem Russell e Whitehead, os quais são, de facto, suposições materiais que não podem sem compensadas por provas de consistência (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.275).

Hilbert se defende de algumas críticas sobre a objetividade do Conhecimento Matemático. Assume a perspectiva metodológica de sua Teoria da Demonstração e do seu ‘novo’ método *axiomático* formal, informando, àquele que entende que esse caminho não produz a verdade geral e certa, que tal caminho nos proporciona a exaltação da convicção de que a compreensão matemática, pelo menos, não tem limites e ainda que ela é capaz de descobrir as leis do seu próprio pensamento.

Ele ainda cita Cantor, dizendo que “a essência da matemática consiste na sua liberdade” (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.284), acrescentando que, na Matemática, não existe o *ignorabimus*. Podemos sempre responder a questões com sentido e isso confirma “como talvez tenha sido pressentido por Aristóteles, que a nossa inteligência não pratica artes secretas, mas apenas trabalha segundo regras bem estabelecidas e visíveis, que são ao mesmo tempo a garantia para a absoluta objectividade dos juízos” (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.284).

Os diversos resultados originais a que Hilbert chegou já seriam suficientes para dar prova do caráter matematicamente frutífero do seu ‘novo’ Método Axiomático Formal, e a fecundidade deste, em sua opinião, é um elemento fundamental em sua nova concepção. E entendemos que Hilbert inaugurou uma nova área de investigação matemática, a metamatemática, ou seja, a Matemática dos *axiomas*.

## **CAPÍTULO VII: O que nos revelam as oscilações de significado do termo *Axioma* do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre o relacionamento entre a Filosofia e a Matemática?**

Desde antes de meu primeiro contato com meu orientador, Prof. Otte, sempre sentia uma enorme admiração por ele, e em certa medida invejava seus orientandos que eram meu colegas (Isabella, Kecio, Geslane). Ao ter o privilégio de compartilhar e assistir a caminhada desses orientandos, em seus respectivos projetos de mestrado, aos meus olhos ficava sempre muito evidente o quanto eles estavam evoluindo intelectualmente, e, isso me atraía extremamente. As temáticas que eles pesquisavam, sempre me deixava muito curiosa. Mas, não acreditava ou sequer ambicionava estudá-las, pois entendia que elas estavam muito além de qualquer esforço interpretativo meu. Quando o professor Otte me selecionou, o medo que invadiu minha vida e meu coração era tão intenso quanto a felicidade de conseguir fazer parte de um mundo que considerava muitíssimo distante de minhas possibilidades, mas que me encantava. Já nos primeiros encontros para orientação, foram se confirmando minhas suspeitas sobre a grandiosidade e complexidade das problemáticas e, ao mesmo tempo, ficavam ainda mais evidentes as minhas limitações de fundamento filosófico e teórico em relação ao desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático e, principalmente, fez-se nítido o grande abismo que separava os saberes desse novo grupo de pesquisa de minha bagagem intelectual. Lembro-me da pergunta que o professor Otte me fez na entrevista: Você está disposta a começar do zero?

Bem, aqui estou graças a generosidade desse Professor singular que me escolheu como orientanda, professor que se revelou tão gentilmente paciente e carinhoso comigo e, principalmente, que não desistiu de mim.

Assim, diante da complexidade da propositura deste estudo, em suas dimensões histórica, filosófica e semiótica, da complexidade da teoria, em desenvolvimento, do Professor Otte – O Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’, uma preocupação que se fez constante em meu percurso era a construção de um texto descritivo-reflexivo e esclarecedor sobre os aspectos de nossa tese, mas que principalmente introduzisse aos professores (em sala de aula) aspectos elementares do desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático e sobre o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Isso por entender que, para além de uma teoria reflexiva sobre desenvolvimento do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos, entendo que a teoria de Otte figura como uma

propositura metodológica que pode ser empreendida ao tratamento didático dos conceitos matemáticos e sobre o Conhecimento Matemático em sala de aula. Neste sentido, sempre pensava em meus colegas professores, buscando elaborar um texto direcionado a eles, mas que, ao mesmo tempo, não pecasse, perdendo a sensibilidade e atenção sobre pontos e questões fundamentais.

Um esclarecimento faz-se necessário ao leitor sobre este capítulo. O desejo inicial era que ele figurasse como sendo nossas considerações finais, mas ele tomou uma proporção tão grande que percebi a necessidade de produzir um texto que fizesse algumas “amarrações” entre os capítulos teóricos, para perceber a dimensão e o movimento que direcionaram minha interpretação. Assim, já antecipo que alguns trechos podem parecer repetitivos, pois já estão contemplados em reflexões anteriores, como por exemplo, mas reflexões finais efetuadas sobre a análise quando da apresentação de cada um dos filósofos e matemáticos no capítulo anterior.

O professor Otte me alertou que não tornasse o trabalho muito extenso, pois o assunto já é demasiado complexo e deveríamos tomar o cuidado para não se tornar cansativo para o leitor. Assim antecipadamente me desculpo, inclusive entendendo que o leitor possa optar por dirigir-se diretamente às Considerações Finais. Entretanto, de outro modo, considero imperdível e indispensável uma leitura dos itens 6.1 e 6.2 neste capítulo.

Sobretudo a grande evidência e destaque que este estudo nos revelou foi que uma relação entre a Linguagem e a Matemática foi operacionalizada pelo relacionamento, aproximações e distanciamentos, entre o exercício do pensamento filosófico e o exercício do pensamento Matemático. E que, na medida em que a Filosofia adentra os campos e atividades da Matemática, a Linguagem começa a ganhar destaque, e neste sentido o termo *axioma* tende a ser assumido como sinônimo de hipóteses.

Esse resultado veio a reforçar o que entendemos, como diz Oliveira (2005), que o pensamento claro, o conhecimento científico e filosófico sejam elementos necessários e imprescindíveis à nossa luta pela libertação tanto política como cultural. Neste sentido, espero que este estudo possa contribuir efetivamente ‘no’ e ‘para’ o trabalho dos professores em sala de aula, tanto quanto tem contribuído para meu desenvolvimento docente e como pesquisadora, mais diretamente, ao reavivar minha visão sobre a Matemática e sobre o

desenvolvimento do nosso pensar matemático, através de uma compreensão mais acurada sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático.

Tenho a certeza da necessidade de que esta problemática continue a ser pesquisada e estudada, que avance e seja aprimorada a partir de outras investigações que venha a suscitar. Talvez, este estudo tenha pecado quando caminhei pela dimensão filosófica. Sinto que, neste aspecto, ele deveria ter avançado mais, embora tenha empreendido todas as minhas forças neste sentido. Por diversas vezes, o Professor Otte me alertava: “Seu trabalho é descritivo, não tente ficar filosofando”. Não posso deixar de chamar a atenção para este fato, pois o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’ que permeia nossa perspectiva interpretativa e postura investigativa me ensinou que Ciência e Filosofia estão conectadas de forma indissolúvel. E, também entendo que o nosso compromisso, enquanto Professores Educadores ou Professores Pesquisadores, deve ser sempre ancorado numa forma de pensamento teórico que se assente no conhecimento da história do pensamento e de suas realizações, não se deixando levar por modismos, e, compreendo que uma pré-condição a esse posicionamento exige um legítimo posicionamento e pensar filosófico. Acordamos com Engels (1987 b, p.660) quando ele afirma que a Ciência é tributária de uma filosofia materialista dialética “uma exacta representação do universo, da sua evolução, do desenvolvimento da humanidade e do reflexo desta evolução nas mentes dos homens [...]”. No sentido da Complementaridade ‘Otteana’, a Filosofia e a Ciência interpenetram-se; entretanto, nem uma substitui a outra e, assim por exemplo, as questões da Ciência se resolvem dentro da própria Ciência, e, da Filosofia dentro da própria Filosofia.

Nosso objetivo, neste trabalho, foi estudar a mudança no caráter dos fundamentos do Conhecimento Matemático ao longo de um período que delimitamos como sendo de Platão à Modernidade e do ponto de vista que envolve a relação entre a Linguagem e a Matemática. Tentando compreender sobre essa relação, buscamos investigar o que significava uma possível mudança no entendimento do termo *axioma* que, de acordo com Otte (2011), da Antiguidade até a Modernidade, era tomado como antônimo de hipótese, assumido essencialmente como verdades e, a partir da Modernidade, ele passou a ser entendido como sinônimo de hipótese.

De modo que optamos pelo método qualitativo, interpretativo-reflexivo, alicerçado no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ à análise dos significados e possíveis

oscilações de significado do termo *axioma* no pensamento de filósofos e matemáticos, por nós escolhidos como referenciais no desenvolvimento da Matemática.

Procuramos deixar evidente, nos capítulos teóricos, que nossa interpretação toma como pilares uma abordagem histórica, filosófica e semiótica, aos quais agregamos o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’ além de assumí-lo como pressuposto metodológico. Sobretudo, procuramos e exercitamos empreender postura dialética no sentido de sempre desenhar uma estrutura de pensamento e postura investigativa que procura sinais de Complementaridade imbricados entre os pilares desta problemática e no desenvolvimento evolutivo do Conhecimento Matemático.

Especificamente neste estudo, tomamos o termo *axioma*, interessados em seu significado e oscilações neste significado e, ao proceder nossa análise, procuramos uma compreensão mais aprofundada sobre a relação entre a Filosofia e a Matemática. Nos mesmos moldes entendemos que seria muito interessante empreender um estudo que contemplasse outros conceitos/termos como: verdade, realidade, hipótese, definição, quantidade, qualidade, análise, síntese, intensão, extensão, etc.

Consideramos ser singular e inédito este nosso trabalho, sobretudo, porque utilizamos, como parâmetro de medida, o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’. Entendemos que este trata de uma teoria e abordagem original em desenvolvimento pelo professor Dr<sup>o</sup> Michael F. Otte, que se fundamenta no pensamento kantiano e na perspectiva interpretativa semiótica peirceana. O Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ nos possibilita responder a algumas questões que nem o platonismo, o nominalismo, tampouco o construtivismo têm conseguido responder sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático, sobre a objetividade e fertilidade da Matemática, como também não respondem como os matemáticos podem descobrir novos conhecimentos e muito menos ainda indicam as ideias que guiam essas construções (ARRUDA, 2013).

A questão norteadora deste estudo pretendeu investigar, em relação ao Conhecimento Matemático e sua constituição: *o que significa, de acordo com Otte (2011), o fato de que a palavra Axioma ter sido tomada com antônimo de hipótese até o século XIX e, hoje em dia, Axioma ser considerada como sinônimo de hipótese?*

Procuramos encontrar possíveis respostas para esta questão e, antes de maior aproximação e investigação, observamos que, de um ponto de vista que se consolida em Aristóteles, o termo *axioma* referia-se à uma proposição, representando uma verdade



inquestionável e indemonstrável. Servindo como premissa de uma prova ou sobre a qual uma teoria seria desenvolvida e essa visão permaneceu por quase dois mil anos. Já do ponto de vista Moderno, destacávamos que o *axioma* refere-se mais apropriadamente a uma hipótese através da qual é construído um argumento ou edificada uma teoria, e, sobretudo adquire um status operativo na constituição conceitual.

Desse modo, nossa tese inicial compreendia que houve uma transformação do Conhecimento Matemático de uma visão de caráter descritivo e contemplativo para uma visão instrumental/operativa, com consequências significativas decorrentes e/ou consequentes do entendimento do termo *axioma*. E tal transformação implicou uma mudança dos fundamentos objetivos do conhecimento estabelecido, passando a estar em suas aplicações futuras (OTTE, 2012)<sup>184</sup>.

Também tínhamos como entendimento o fato de que transformações no processo histórico-social e político apontavam e condicionavam, relacionadas ao Conhecimento Matemático, a profundas mudanças que poderiam ter ocorrido na relação entre a Linguagem e a Matemática, entre a Filosofia e a Matemática, e, conseqüentemente, a numa nova ordenação a outro sentido interpretativo do termo *axioma*, e, isto procuramos desenhar e destacar neste estudo.

Interessou-nos também verificar, diante de nossa propositura metodológica, se haveria complementaridade entre esses dois modos de encarar o termo *axioma* – primeiro, como verdade e, depois, como hipótese - ou seja, entre o ponto de vista aristotélico, segundo o qual a objetividade está nos fundamentos iniciais relacionados ao ponto de vista moderno cuja objetividade reside nas aplicações no futuro. Ou seja, de um lado, há fundamentos baseados no conhecimento estabelecido e, do outro lado, os fundamentos estão no futuro, nas aplicações futuras de uma teoria.

Nossa hipótese entende que uma resposta possível possa advir de uma análise que privilegie e agregue à perspectiva interpretativa, reflexiva, semiótica e o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ sobre o desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Admitimos o pressuposto de um desenvolvimento do Conhecimento Matemático dentro da perspectiva evolutiva e genética, sendo o Conhecimento Matemático vinculado intimamente às mudanças históricas, sociais e políticas. Buscamos demonstrar tais aspectos neste estudo,

---

<sup>184</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de Orientação.

tomando, como ponto focal, a análise do significado do termo *axioma* em diferentes tempos e de acordo com alguns pensadores, filósofos e matemáticos.

Pela própria complexidade de um estudo desta envergadura, esperamos não suprimir da tessitura deste capítulo informações que comprometam a uma harmoniosa leitura, embora estejamos conscientes de que podemos falhar neste intuito. Assim, buscamos narrar, a seguir, os pontos que figuraram como definidores de nossa análise interpretativa e, sobretudo, estamos cientes de que esta se apresenta como mais uma ‘possível’ interpretação, passível à contra-argumentação e, neste sentido, entendemos ser este momento de socialização como de crucial importância.

Salientamos, sobretudo que, a própria ontologia do *conceito* e do pensamento conceitual, do próprio termo *axioma*, ou, do próprio Conhecimento Matemático, que se vê implicada e imbricada em tais mudanças históricas, possa passar despercebida na tessitura textual o que, de nenhuma forma, tira o mérito deste estudo, pois, certamente, esta abordagem permeou e está indiretamente imbricada em nossa análise e reflexão. Mesmo porque destacamos que quando é inserida uma postura interpretativa epistemológica semiótica, o sujeito ontológico e o sujeito epistemológico adquirem o mesmo *status*.

Ademais, este estudo se torna relevante em seu caráter epistemológico, no sentido em que possibilita de modo singular desvelar e clarificar questões que tratam da gênese e historicidade do Conhecimento Matemático, permitindo-nos vislumbrar a própria “luta do homem diante do mundo que se cristaliza na matemática” (OTTE, 2013).

Em nosso trabalho, pudemos confirmar o que apontou Karl Manheim (1893-1947), em seu livro *Ideologia e Utopia*, sendo este que o indicativo de que somente um mundo em transformação, onde valores novos estejam sendo criados e antigos destruídos, pode o conflito intelectual chegar ao ponto de transformações profundas, como a que se espelha na mudança do significado de antônimo à sinônimo de hipótese ao termo *axioma*. E ainda que, sobretudo, acontecimentos históricos e etapas fundamentais devem ser primeiramente atingidos para que numerosas tendências no pensamento movimentem-se e possam confluir à (uma nova) mesma direção e assim se efetivarem em significativas mudanças. Neste estudo, em especial, o pensamento kantiano e o início do século XIX, figuram de fundamental importância tanto relacionados aos pontos e acontecimentos que convergiram até o momento de 1800 tanto quanto relacionado aos aspectos que eclodiram a partir de então.

Este estudo demonstrou que uma mudança profunda ocorre na Matemática desde os gregos até a Modernidade. A Matemática que entrou na cultura, primeiramente, como uma técnica, a de fazer cálculos aritméticos e geométricos elementares, na Modernidade assume um caráter sistemático, rigoroso e puro, quase que essencialmente indiferente às suas aplicações práticas imediatas e que a caracterizava anteriormente. Compreendemos e interpretamos que tal mudança ocorreu promovida por uma profunda confluência e estreitamento do exercício do pensamento filosófico ao exercício do pensamento matemático espelhada e promovendo uma aproximação na relação entre a Linguagem e a Matemática, que teve início no século XVI e se efetivará no século XIX. Havemos interpretado que é nesse e por esse movimento dinâmico entre a Linguagem e a Matemática, desencadeado pela aproximação entre a Filosofia e a Matemática, que se faz materializar o potencial criativo da mente humana no desvelamento das problemáticas que nos cercam.

Como Otte (2013) nos diz, na Filosofia grega não se concebia a Linguagem como fundamento da verdade, nem mesmo em Aristóteles. Como também, nesta mesma direção, a analogia e, conseqüentemente, o pensamento metafórico ao invés de serem tomados como demonstração do poder criativo da Linguagem, de outro modo, servia apenas para comprovar a própria inadequação da Linguagem no processo cognitivo. A analogia só teria valor quando são os Deuses que nos falam, como uma “indicação da luz do além, que supera tudo em brilho e grandeza” (NEF, 1995, p.42). Assim é que o homem, ao procurar sondar o abismo inteligível, ao recorrer à analogia, denuncia o próprio não valor do discurso, mostrando sua fraqueza radical, principalmente em relação às realidades não sensíveis. Nesse tempo as verdades eram concebidas como verdades sobre o ser, como essências. Observamos que na Antiguidade, o sujeito ontológico sempre esteve em primazia ao sujeito epistemológico.

**Platão** se destacou em nosso estudo como o primeiro a promover, historicamente, um processo de simbiose entre pensamento filosófico e a Matemática. Sobretudo, suas contribuições teriam o sentido de contributo mais às reflexões do que propriamente ao desenvolvimento da Matemática. Observamos que mesmo o termo *axioma* não era utilizado por Platão, mas, sem dúvida, foi a partir dele que muitos termos, antes usados somente na especulação filosófica, passaram a serem apropriados pelos matemáticos.

Por admirar profundamente a Matemática, Platão busca, através de uma observação acurada e refletindo sobre como atuam os matemáticos, transpor o modo de proceder desses

ao método do pensamento filosófico, implementando-o. É através desse exercício reflexivo e simbiótico que ele desenvolve sua *dialética*, o método dialético platônico.

Cabe destacar a que todo o trabalho de Platão esteve sempre condicionado e permeado por uma disputa com os sofistas que tomavam o pensamento filosófico e a especulação no sentido puramente persuasivo e, neste sentido, a Linguagem não podia ser para Platão tomada como constitutiva do desenvolvimento do nosso Conhecimento. Platão busca invalidar ou desqualificar a postura sofista, ao inferir que as bases de qualquer discurso deve ter o sentido do ‘conhecimento verdadeiro’ e, por isso, seu apelo ao Conhecimento Matemático, entretanto, para Platão, a gênese desse Conhecimento seria divina.

Foi relevante destacar que Platão observou que os matemáticos, em seu trabalho, partem de hipóteses que tomam como verdadeiras, sem questioná-las e delas tiram suas consequências, não em direção a um princípio, mas às consequências. O que nos conduz interpretar que a matemática seria analítica para Platão. Sobretudo, para Platão somente chegamos aos princípios e ao conhecimento legítimo somente pela dialética. Assim, em nosso entendimento, de certa forma, em Platão, o que posteriormente viria a ser nomeado como *axioma* na Matemática, teria o sentido hipotético e não o de verdades fundamentais e indemonstráveis. É por isso que ele justifica que a matemática funcionaria como um tipo de conhecimento ‘discursivo’ e ‘propedêutico’, mas numa perspectiva ontológica era tomado como ‘verdadeiro’ conhecimento. De forma que, em nossa interpretação, haveria em Platão uma possibilidade de se interpretar *axiomas* como hipóteses.

Diagnosticamos um fluxo tensional na interpretação que possa ser empreendida ao significado do termo *axioma*, na Matemática, em Platão. O centro nodal da tensão emana, pois, da apresentação da sua Teoria das Formas, no essencialismo que Platão defendia. No pensamento platônico, os objetos matemáticos têm existência própria e, anterior ao sujeito cognoscente, tratam de objetos ideias, existindo fora do tempo e do espaço. Tornamo-nos conscientes dos objetos matemáticos por algo como um tipo de visão intelectual, ou intuição de caráter matemático que nos conduz ao reino celeste dos domínios matemáticos. E, neste sentido, a verdade matemática também independe do sujeito e da atividade matemática – tese do realismo epistemológico – de modo que, a verdade já estaria garantida *a priori*.

Como em Platão, todo nosso Conhecimento trataria, essencialmente, de um processo de reminiscências, memorização; em certo sentido, todo o Conhecimento Matemático já estaria inato em nós. Este modo de pensar, de outro modo, direciona a interpretação de

*axiomas* como sendo verdades inatas. Entendemos que, em Platão, o sentido de uma ligação da Linguagem com a Matemática, dentro do processo intelectual, posiciona-a com uma função meramente comunicativa, não participando da constituição e elaboração de nosso Conhecimento. O que prevalece no pensamento platônico enquanto campo semântico do desenvolvimento matemático é o contexto da descoberta e não o comunicativo.

Sobretudo, é relevante que Platão promove um movimento de simbiose entre a Matemática e a Filosofia, mas seu objetivo esteve concentrado na validação da postura filosófica pela busca do Conhecimento verdadeiro e ele entendia que, por sua inquestionabilidade e pelo *status* do Conhecimento Matemático àquela época, agregando-o (seu método de proceder) à Filosofia, sem sombra de dúvida, estaria garantida maior validade ao Conhecimento advindo da especulação filosófica.

Mas, também destacamos a consideração, em Platão, de uma interpretação de *axiomas* como hipóteses, pela crítica que ele efetua, àquela época, sobre o que os matemáticos nomeiam como seus princípios; Platão não os considera como princípios. Isto nos conduz a reforçar já em Platão o sentido de hipóteses que poderia ser atribuído ao termo *axioma*.

Também identificamos, mesmo que remota, haver uma propositura de aproximação entre a Linguagem e a Matemática, principalmente, na interpretação e reflexão platônica sobre o Conhecimento Matemático, destacada de inferências que tomam a Matemática como (por exemplo) ‘pensamento discursivo’. Ainda timidamente, podemos também inferir sobre a possibilidade da percepção de Complementaridade entre ambos os métodos (pensamento filosófico + pensamento matemático = dialética platônica). Sobre este ponto e entendimento, é importante destacar que haverá um renascimento do pensamento platônico no início da Modernidade, e que, interpretamos ter sido fundamental ao desenvolvimento da análise na matemática e em especial do método axiomático dedutivo.

A teoria de Platão, em nosso entendimento, perfigura como resultado de um processo tensional entre o sujeito ontológico e o sujeito epistemológico. Isso demonstra e fortalece nossa interpretação sobre a importância que tem a atividade humana, o contexto dessa atividade, na elaboração do Conhecimento, ou seja, é impossível separar o sujeito do seu objeto e a atividade mediativa. De forma que os aspectos entre o sujeito, atividades e o objeto não devem ser considerados separadamente e sim como um todo, prevalecendo, desta forma, o aspecto relacional (aspectos delineados por Bohr, Otte, Peirce – o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’). Pois, a grande luta de Platão contra os Sofistas desenhava o

contexto do desenvolvimento do seu pensamento; sua teoria não poderia sair imune às consequências do ideal e meta de uma vida.

A filosofia de **Aristóteles** contribuiu, sobremaneira, tanto às reflexões sobre a Matemática como também ao seu desenvolvimento. Com certeza, temos, em seus fundamentos e suas inferências sobre pensamento lógico (seu silogismo), desenhada a ideia de uma organização lógica do edifício matemático. Essa ideia é que tornará possível a criação e o desenvolvimento posterior de uma Matemática formal, na qual se procura, simplesmente, as consequências lógicas de certos pressupostos formais.

Embora o silogismo aristotélico parta de uma ligação íntima com a Linguagem, ele não avançou, àquela época, para uma relação que aproximasse a Lógica/Linguagem à níveis mais altos abstrativo do desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Entendemos que isso tenha acontecido devido à concepção e percepção ontológica aristotélica sobre o Conhecimento Matemático e dos próprios objetos matemáticos, de modo que, a Linguagem não era tomada como constitutiva e operativa no processo de desenvolvimento do Conhecimento.

Para Aristóteles, a Matemática era uma Ciência (racional) de aspectos abstratos do mundo empírico, cujos objetos são tomados como abstratos, mas existem, de modo que se situam como ‘pele’, grudados aos objetos sensíveis. Mas, para este filósofo não há independência total destes objetos em relação ao sujeito cognoscente (como em Platão), pois cabe ao sujeito ‘abstraí-los’ dos objetos do mundo empírico, a fim de que o acesso a eles se dê por nossos sentidos. Entretanto eles não tratam de objetos do tipo mentais. Chamou-nos atenção ao fato de que Aristóteles não assume uma posição empirista radical, de modo que, haja em seu pensamento um certo tratamento aos objetos matemáticos como idealidades.

Assim, interpretamos que relacionado à esse aspecto poderíamos agregar a uma leitura semiótica no pensamento aristotélico num sentido aproximativo entre a Linguagem e a Matemática. Haja vista, ele acreditar que, alguns objetos matemáticos existem apenas como possibilidades (infinito potencial), ou seja, ficções, neste sentido, que poderiam existir se efetivamente fossem construídos. De modo que, existiria em Aristóteles a possibilidade de uma matemática de cenários possíveis (SILVA, 2007, p.53). Reforça essa nossa interpretação à uma leitura semiótica a explicação aristotélica sobre como acessamos aos objetos matemáticos. Esses objetos, tanto enquanto possibilidades, assim como os demais ‘extraídos’

do mundo real, seriam frutos de um processo de abstração, donde tais idealizações referem-se à determinados aspectos do objeto.

Entendemos que esse processo poderia ser entendido como um processo lógico-linguístico em que a separação (de aspectos formais que conduzem ao objeto real) não se opera na mente, mas no discurso. No entanto, não encontramos, nas leituras em Aristóteles, um indicativo que fortaleça a esta interpretação. Mas, em determinado momento, quando ele fala sobre a aplicabilidade da Matemática ao mundo empírico, Aristóteles nos diz que ela “aplica-se ao mundo sensível simplesmente na medida em que é só uma maneira de falar dele” (SILVA, 2007, p.48).

Embora seja Aristóteles considerado o precursor da Lógica, um avanço no sentido de conceber sistemas lógicos puramente formais, como sistemas simbólicos sem interpretação e submetidos apenas a regras sintáticas de manipulação de símbolos, só se tornaria possível a partir do século XIX. Nesse momento, e consolidando-se no século XX, firma-se a ideia de que as teorias matemáticas não precisam ser teorias de nenhum domínio objetivo em particular. No pensamento Aristotélico, isso seria inconcebível, nunca se abre não do mundo empírico no pensamento aristotélico.

É notadamente relevante que para Aristóteles, tanto o significado como a veracidade das asserções primeiras e, em nosso estudo, destacamos aos *axiomas*, são de fundamental importância. E observamos que o sentido interpretativo revelado aos *axiomas*, no pensamento aristotélico, é o de ‘verdades’.

Para Aristóteles existem dois pontos de partida ao conhecimento: *axiomas* e postulados. Sendo que, um *axioma* trata de uma afirmação digna de aceitação como verdade e como sendo, de fato, tão evidente, a ponto de ser tomada como verdadeira sem qualquer controvérsia. Um *axioma* é o conhecimento anterior necessário para se aprender. Ele ainda afirma em seus Posteriores Analíticos: "Todo o ensino e aprendizagem que envolve o uso da razão procede do conhecimento pré-existente".

Como *axiomas*, ele inclui os princípios mais gerais, como o da não-contradição e o terceiro excluído. Os princípios mais específicos para a Matemática, por exemplo, ‘quando do igual é tirado igual, os restos são iguais’. Já os postulados seriam diferentes dos *axiomas* e são de dois tipos: definições e hipóteses.

De acordo com nossa interpretação e a de Jahnke (2010), é a partir do pensamento de Aristóteles (desde 400 a.C.) que uma mudança significativa começa a se delinear no estatuto

epistemológico do termo *axioma* como também no de postulados, sendo que estes, anteriormente, podiam até ser tomados no mesmo sentido, definitivamente não mais a partir de Aristóteles.

Observamos que em Aristóteles, o conteúdo de uma teoria se torna fundamental, pois que, ela emana do mundo físico. O conhecimento é um conhecimento sobre o mundo. Já na matemática formal que surge no século XIX o que interessa é conhecer algo em geral, uma *estrutura formal*. De modo que, as teorias matemáticas formais são, na realidade, teorias de formas, não teorias de conteúdos, o que direcionará e justificará uma interpretação dos *axiomas* como sendo hipóteses.

O pensamento filosófico de Aristóteles influenciou sobremaneira o modo como os matemáticos desenvolveram a sua Ciência e toda a história da Matemática. E, de modo especial, Otte (2013) aponta que teria sido Aristóteles o responsável pela introdução do princípio da continuidade na história natural, haja vista ter sido ele o primeiro a sugerir as limitações e os perigos da classificação e a não conformidade das profundas divisões que são indispensáveis à Linguagem sobre a natureza das coisas.

Interpretamos que Aristóteles minimamente procede à uma aproximação da Linguagem à Matemática, que entendemos ser especialmente relacionada à Lógica aristotélica, mas, é inquestionável na análise de nossa problemática, que Aristóteles reconhece sem reservas, a condição de ‘verdade’ (e o sentido de ‘verdade’ na conformidade objectual - empírica) às premissas, aos *axiomas* das ciências matemáticas como também sobre a existência de seus objetos e estes, diferentemente de Platão, sendo de natureza não suprassensível.

A objetividade da Matemática em Aristóteles está em seus fundamentos e, neste sentido, o termo *axioma* condiz com a interpretação no sentido de ‘verdade’. Há uma prevalência e supremacia do sujeito ontológico em relação ao sujeito epistemológico, reforçando situar a objetividade do conhecimento em seus fundamentos. Iremos observar que somente na Modernidade, a objetividade desloca-se dos fundamentos do Conhecimento às suas aplicações futuras e o termo *axioma* assume o sentido de hipótese. Sobretudo, podemos destacar que em Aristóteles encontramos o gérmen de uma ciência dedutiva e da possibilidade futura de construção de uma lógica puramente formal.

Vem de **Euclides** a primeira grande conquista para a sistematização da Matemática, espelhada e formalizada àquela época na elaboração de *Os Elementos*. O método que ele



utilizou para expor a Geometria por ele reunida e organizada se estabeleceu por milênios, consagrando-se como poderosa ferramenta de sistematização para significativa parte do conhecimento científico. Além de que, até hoje, é também utilizada por alguns educadores que a consideram excelente instrumento didático.

Euclides não utiliza nominalmente o termo *axioma*. Ele apresenta-nos algumas *noções comuns* e postulados. De acordo com nossa interpretação, em Euclides, as *noções comuns* tratam do que posteriormente seriam conhecidos como *axiomas*. Neste sentido, os *axiomas* em Euclides admitem coisas que são imediatamente evidentes para nosso conhecimento e facilmente entendidos por nossa compreensão impensada, enquanto que, em um postulado, pedimos licença para assumir algo que pode ser facilmente provocado ou legado, não necessitando de qualquer trabalho.

Otte (2014)<sup>185</sup> entende que é relativa, em Euclides, a diferença entre *axiomas* e postulados, para Otte ambos são tomados dentro de um processo construtivo, cuja construção é uma atividade. De modo geral, em Euclides, percebemos que os *axiomas* são sempre dirigidos para o geral e imutável – à construção de teorias -, enquanto os postulados, ao particular – à resolução de problemas.

Observamos que o sentido de *axiomas* para Euclides e para todos, àquele tempo, é o de verdades e se referia a fatos evidentes por si. Em nosso entendimento e respaldando-nos neste sentido, no pensamento de Ian Muller, o sistema de Euclides não trata de uma estrutura lógico-dedutiva. Quando observamos, percebemos que as *noções comuns* em Euclides não são proposições iniciais que desencadeiam um tal sentido ‘lógico dedutivo’- consequentes -, porém estão mais apropriadamente para ‘regras de construções’.

Embora alguns estudiosos identifiquem o sistema de Euclides com o sistema *axiomático* dos Modernos, julgamos indevida esta interpretação. Euclides não procede, como Hilbert de proposições à deduções lógicas, verificamos que ele procede de termos e a base de experimentos com diagramas, experimentos mentais (OTTE)<sup>186</sup>.

Outra distinção a destacar entre o sistema de Euclides e o sistema *axiomático* Moderno trata de que na Modernidade, *axiomas* são proposições tomadas como premissas de uma dedução lógica, através da qual podemos chegar a uma conclusão que são outras proposições

---

<sup>185</sup> Comentário de Otte em momento de orientação, em julho de 2014.

<sup>186</sup> Observação de Otte em momento de orientação, em 12 de abril de 2012.

e/ou teoremas. Otte<sup>187</sup> considera que, desse ponto de vista, Euclides não foi representativo para a Ciência, nem no sentido platônico nem no sentido aristotélico.

Euclides não traça, em seu trabalho, nenhuma especulação ou reflexão sobre a Linguagem ao processo cognitivo, nem ao desenvolvimento da Geometria ou da Aritmética; entretanto, um ponto em que possa haver uma perspectiva de inserção da Linguagem refere-se à disposição em sua sistematização da Geometria ser trabalhada em termos de análise algébrica.

Sobretudo, é relevante e nítido que, por razões mais ontológicas que epistemológicas, os *axiomas* – noções comuns e/ou postulados - eram utilizados e tomados como ‘verdades’. E eles procuravam justificar o caráter de ‘verdade’ dos *axiomas*, visto que estes seriam daquele tipo de ideias que ‘deveriam ter que ser verdadeiras’ e estas podem ser contempladas em momentos de graça, através de reminiscência do tempo em que a alma vivia mais perto de Deus e aqui temos a influência do essencialismos platônico.

Outro fator que reforça a interpretação no sentido de verdades ao termo *axioma* a que Otte (2014)<sup>188</sup> também destaca, neste momento, em especial é relacionado a que no Conhecimento Matemático, havia se processado a queda do programa de Pitágoras da aritmetização. Este fato teria conduzido e delineado ao “desenvolvimento do método axiomático de Euclides, ou seja, de um novo método, o qual teria de um lado que resgatar, o que pode ser resgatado (incluindo o método da prova racional) ao Conhecimento Matemático e, por outro lado, aceitar a irreduzibilidade da geometria à aritmética (Popper, K., a sociedade aberta e seus inimigos, capítulo 6, Notes)”.

Como temos observado, é muito relevante que Euclides, ao partir de um sistema mínimo e supostamente completo de verdades não demonstradas e/ou indemonstráveis, seus *axiomas- noções comuns* somados aos seus *postulados*, demonstrava racionalmente todos os enunciados de *Os Elementos*. Tal fato fez com que grande parte de estudiosos passasse a considerá-lo como criador do método *axiomático-dedutivo* que, posteriormente, serviria de modelo para toda a Matemática. Um método que consiste na redução racional, preferencialmente lógica, de todas as verdades, de uma teoria à base mínima e completa de verdades evidentes ou simplesmente pressupostas. Mas ressaltamos que, sobre este último

---

<sup>187</sup> Observação de Otte em momento de orientação, em 12 de abril de 2012.

<sup>188</sup> Comentário de Otte em momento de orientação, em julho de 2014.

ponto, discordamos da interpretação, pois entendemos que o método de Euclides não é do tipo lógico-dedutivo, como se configura, a partir da Modernidade, o método *axiomático*.

Sobretudo, reconhecemos o mérito da elaboração da obra de Euclides, pois até ele não havia, na história da Matemática, nada remotamente similar. E, por essa mesma razão Euclides influenciou sobremaneira o modo de sistematização do pensamento científico a partir de então (com reflexos, inclusive, até na atualidade).

De Platão até Euclides fica bem destacado que todo mundo pensava que o conhecimento é conhecimento sobre o mundo mesmo ( perspectiva ontológica), e neste sentido o contexto da descoberta está sempre em primeiro plano no campo semântico da ciência. Não existe qualquer inferência que indique que o conhecimento trata de uma representação do mundo, o que em nossa interpretação indicaria à uma interpretação semiótica.

Na Idade Medieval, observamos que, influenciado pelo pensamento de Aristóteles, começa a ganhar espaço, especialmente pela dimensão lógica, uma perspectiva que conduz à valorização da Linguagem. Em seus fundamentos, assistimos nesse tempo, a uma Ciência fundamentada em apelos qualitativos e à forte ausência do aspecto quantitativo, permitindo, assim, o surgimento de uma doutrina nominalista, que freava, de certo modo, o desenvolvimento científico, especialmente pelo aspecto da subjetividade que agregava o pensamento linguístico.

De um lado, temos a uma supervalorização da Linguagem subsistindo durante boa parte da Idade Média, de outro lado, começa a ser posto em risco a competência da Linguagem como instrumento cognitivo. Bacon (*apud* BROLEZZI, 1996, p. 39), por exemplo, relativizava o poder da Linguagem ao tentar descrever o real, postulando a incompetência do intelecto humano para captar o mundo real e com a Linguagem sendo inoperante nesse trabalho.

A invenção da imprensa e uma socialização do conhecimento, como também o desenvolvimento da máquina a vapor, que irá culmina na revolução industrial, e, uma necessidade de se educar uma sociedade matematicamente, fez explodir, no pensamento filosófico, polêmicas sobre a natureza dos universais, como também o aumento dos descontentes com a esterilidade que reinava na Ciência. Principia a busca por novos modos de se fazer Ciência e que fossem opostas às estritas concepções aristotélicas.

Ao se aproximar a Idade Moderna, no século XVI, observamos ao prelúdio do ressurgir das concepções platônicas e assistimos ao desenvolvimento de uma ciência que caminha à uma super-valorização do aspecto quantitativo com eminente declínio do pensamento aristotélico.

Esse cenário foi impulsionado também no campo científico pelas descobertas de Galileu, Newton, pelas leis de Kepler. A quantificação se tornou uma das principais características da Ciência Moderna. Esse redirecionamento no modo de pensar científico, da Idade Média à Modernidade foi resultados de profundas e significativas mudanças se processaram na sociedade e em todos os sentidos (social, político, intelectual, religioso e cultural).

Por exemplo, podemos de modo específico delinear as mudanças com base na relação do homem com o trabalho e em seu relacionamento com o conhecimento produzido até então. De Platão até o Renascimento nesta relação não houveram mudanças radicais nos modos de produção, sendo esta em grande parte agro-pastoril e de uma agricultura elementar, e, o conhecimento estava sobre 'controle' eclesiástico. Mas, à partir da invenção da imprensa e da máquina a vapor muitas e intensas mudanças começaram a se processar com reflexos em todas as dimensões das relações sociais quanto das relações intelectuais.

Por exemplo, a invenção da imprensa muda radicalmente a relação do homem com o conhecimento e influência inclusive na produção e consolidação do que era tido como conhecimento. Otte ( 2014) chega a afirmar que o surgimento da 'nova' matemática é provocado em grande parte pelas oportunidade oferecidas pelo Sistema de escrita e, mais ainda, pela imprensa. Os textos começam a se proliferar e o conhecimento torna-se mais acessível. Aspecto esse que infere diretamente na produção do conhecimento, que passa a ser mais objetivo, dinâmico e profundo. A socialização também coopera no sentido de que erros podem ser eliminados e as melhorias do conhecimento se tornaram mais possíveis.

Com a invenção da máquina a vapor e esta se tomando em um importante elemento de produção para indústria, passa a figurar com uma preocupação social central torná-la mais econômica, reduzindo-se os gastos com vapor e conseqüentemente com água. Tal fato veio a influenciar sobremaneira ações ligadas à pesquisa, conseqüentemente às ciências. Tornou-se imprescindível à sociedade dedicar-se a estudos mais detalhados sobre os processos físicos da máquina para melhorá-la, aperfeiçoar e potencializar seu uso e operacionalização. Mas, como o aumento da produtividade não ocorria de forma uniforme em todos os setores da produção,

gerou-se a necessidade e quase obrigatoriedade de se procurar outras melhorias tecnológicas também em outras áreas. Deste modo, novas áreas de pesquisa começam a emergir desse contexto.

Neste estudo destacamos concomitante à esse período o pensamento de **Locke**, e nosso interesse neste filósofo partiu do fato de que ao escrever seu *Ensaio sobre o Entedimento Humano*, ele ter dedicado um capítulo especialmente à Linguagem. Interpretamos dos estudos e leituras sobre Locke, que ele surpreendentemente toma os *axiomas* (que ele nomina de *máximas*) no sentido de *postulados*, isto é, coisas que são postas de início, ou seja, ‘assentidas’. Ele identifica que, equivocadamente, sempre foram tomados os *axiomas* como ‘verdades’ – certezas inquestionáveis e indemonstráveis – e como fundamento da ciência. Mas ele explica que isso se deu devido à confusão que se efetuava na compreensão entre ‘método de comunicação do conhecimento’ e ‘método de produção do conhecimento’, entre ‘método de seu ensino’ e ‘método de construção da ciência’. Locke destaca, inclusive, que esse sentido de ‘verdades’ aos *axiomas* veio e foi reforçado pelo contexto sócio-educativo e comunicativo do nosso conhecimento.

Locke empreende, em suas reflexões, um destaque maior ao papel da Linguagem, especificamente relacionada aos nomes gerais e universais, no processo de desenvolvimento do nosso conhecimento. Em nossa interpretação comunga o seu pensamento com o de um direcionamento à interpretação semiótica sobre o processo cognitivo. Neste sentido, é singular a interpretação de Locke da *palavra* (e sobre a Linguagem) enquanto signo mediador e, como ele diz: *arquétipo* entre *ideias* e mundo objetivo, inclusive, destacando que não devemos tomar os nomes pelas coisas nomeadas. Ele contesta Platão e Aristóteles, dizendo:

Em Platão a palavra *anqrwpoz* representa a *ideia* complexa de corpo com certo aspecto e outros indícios aparentes; com a mesma propriedade em Aristóteles a *ideia* complexa chamada *anqrwpoz* reúne corpo e faculdade de raciocínio. Em ambos o nome *anqrwpoz* é posto no lugar de outra coisa que não a *ideia* que se professa expressar por ele, e pressupõe-se que o nome representaria algo além daquilo que significa (LOCKE, 2012, p.545).

Locke, decididamente, começa a chamar nossa atenção para a função sígnica ao processo de desenvolvimento cognitivo, sobre a função representacional- instrumental do nome, no processo de desenvolvimento do nosso conhecimento e, mesmo que ele não a assuma completamente, identificamos o limiar da perspectiva interpretativa semiótica que poderia ser empreendida a partir de seu pensamento. Sobretudo, entendemos que, em Locke,

haja ainda um conflito entre o sujeito ontológico e o sujeito epistemológico – um movimento tensional. Sem dúvida que o seu posicionamento e a publicação da teoria de Locke produzirão consequências frutíferas nas posteriores reflexões e interpretações, inclusive, direcionadas à perspectiva semiótica, que se consolida, especialmente, a partir pensamento kantiano (ao qual ele influenciou) no qual verificamos a promoção de uma virada epistemológica à linguística no desenvolvimento do nosso conhecimento.

Mas Otte (2014) faz a seguinte observação sobre o pensamento de Locke, dizendo que se nós acreditarmos como Locke que a Linguagem é tão somente “o grande instrumento e o laço comum da sociedade” (LOCKE, 1975, p. 254, *apud* OTTE, 2014<sup>189</sup>), somos conduzidos a segui-lo na visão de que os signos são, essencialmente, determinados pelo ser humano, que os emprega para representar as *ideias* que têm em mente. Assim, por um lado, isso pode conduzir-nos a assumir o posicionamento de que a Matemática é uma Linguagem e esse parece ser o sentido que se acentuou a partir do pensamento de Locke, especialmente no tratamento didático no espaço educativo e processo de escolarização. Nós de outro modo, compreendemos que existe uma perspectiva para além deste aspecto no processo representacional, envolvendo e tratando da Linguagem como fruto da interação dos indivíduos com o mundo objetivo.

Em nosso entendimento, epistemologicamente, a compreensão de Locke indica *axiomas* mais no sentido de ‘hipóteses’; porém, quando de uma abordagem ontológica, podemos dizer que ele os assume mais no sentido de ‘verdades’. De modo que, identificamos que as reflexões de Locke indicam um movimento tensional especialmente relacionado ao objetivo papel da Linguagem no processo cognitivo. Entendemos que Locke temendo assumir uma posição relativista, concernente aos fundamentos do nosso Conhecimento, foi muito delicado ao questionar o caráter de ‘verdade’ de nosso Conhecimento e ele ainda repousou sua explicação sobre nossa capacidade intelectual em um dom divino.

Para Locke, verdades tratam de relações entre *ideias* e *ideias* segundo esse filósofo, nós temos dentro de nossa cabeça, mas, evidentemente, para ele, não no sentido inato. Neste sentido, a verdade tem a ver mais com as formulações proposicionais da concordância e discordância entre as *ideias*, sendo que o critério de verdade ou falsidade está no mundo empírico – caráter da verificabilidade.

---

<sup>189</sup> Texto em apêndice intitulado *O que é Matemática afinal?* Apresentado em plenária no colóquio internacional em homenagem a Michele Arigue, Paris, Maio 2012.

Sobretudo, como em Platão, em Locke também identificamos um processo tensional à interpretação que possa ser atribuída ao termo *axioma*. E no enfrentamento dessa tensão, se é que podemos inferir que haja de certa maneira algum enfrentamento, filósofos e matemáticos posicionando-se de modo a negar que a Linguagem pudesse assumir papel ou função mais complexa e diretamente relacionada ao nosso desenvolvimento cognitivo (resultando sempre num posicionamento que a minimiza à função simplesmente classificatória e/ou comunicativa) e no processo do desenvolvimento do nosso conhecimento.

Entendemos que tal posicionamento também estivesse ancorado numa característica sócio, cultural, intelectual e até mesmo política (no sentido de relações de poder), que resultava num destaque maior ao sujeito ontológico e este, sobrepondo-se ao sujeito epistemológico. De modo que, interpretamos ser tal situação que não os permitiu caminhar mais diretamente e rapidamente no sentido à um estreitamento da Linguagem ao processo cognitivo.

Locke viveu num momento em que as ciências empíricas começam a crescer enormemente, em amplitude e complexidade. Foi a queda do poder eclesiástico e uma falta de clareza sobre a experiência humana que provocou realmente o fim da Idade Clássica e das suas tradicionais formas de classificação e representação do mundo, estabelecendo-se em uma nova forma. E, neste sentido observamos a uma mudança iniciando-se a se processar no desenvolvimento cognitivo, direcionando-se do pensamento descritivo-contemplativo ao pensamento operacional-relacional. E, o mundo passando a ser visto como um conjunto de objetos.

Processa-se uma mudança na base do nosso conhecimento e direcionada a que essa passe a ser fundamentado na e pela atividade humana. Certamente e fortemente a base que orientou também este direcionamento sem dúvida teve início com o desenvolvimento da tecnologia da máquina a vapor somadas as ideias de Newton (1642-1727) contribuindo e acentuando o empreendimento à uma visão mecânica de mundo, e, principalmente destacando ser a Epistemologia ou a Metodologia e não mais centrada na Ontologia, o que determinaria o sucesso da Ciência. Esse movimento foi o que culminou no chamado Cientificismo. A Ciência, como também a Matemática, passa a ser conectada com a ideia de funcionalidade e funcionalismo.

Para Newton o ser humano devia seguir o exemplo de Deus, o maior artífice do mundo, e assim, construir máquinas para servir aos nossos interesses, não perdendo tempo em

descobrir causas e objetivos da própria natureza. De forma que, a tecnologia e o método serviriam como um primeiro e indispensável ritmo à orientação científica e cognitiva. Somados esses aspectos e os condicionantes imperativos à sociedade daquela época, tal postura ganhou força e conduziu ao instrumentalismo na Ciência.

Contemporâneo de Newton, o pensamento de **Leibniz** influenciará significativamente o desenvolvimento da Matemática, nós entendemos que ele promoverá o estreitamento na relação entre a Linguagem e a Matemática. Influência essa delineada pelo pensamento filosófico de Leibniz que tem suas raízes no pensamento platônico. Todo o pensamento de Leibniz sobre o desenvolvimento do nosso intelecto está alicerçado em sua concepção de Deus e do Divino. Leibniz escreveu *Novos Ensaio sobre o Entendimento Humano* em resposta e como contraponto ao *Ensaio* de Locke. Sobretudo a tensão interpretativa que identificamos em Leibniz aos *axiomas* não é tão intensa quanto a identificada em Locke, porém existente em ambos. Leibniz mais explicitamente tomará e explicará os *axiomas* como verdades, aliás como equações que tratam de relações que são verdades.

Ele concebia que Deus forneceu, aos homens, faculdades próprias, porém o homem não pode se dar conta delas. E são essas próprias faculdades, nossa inteligência, nossa razão e sentidos que nos abastecem de provas manifestas de Sua existência. Assim, mesmo a verdade da existência de Deus é, em nós, inata.

Sobre o desenvolvimento do nosso Conhecimento, Leibniz nos indica que os *axiomas* são proposições que podem ser consideradas como princípios das Ciências e, pelo fato de tê-las como evidentes por si mesmas e imediatas, ele as denominou inatas. São tão essenciais ao desenvolvimento do nosso Conhecimento que, em seu *Novo Ensaio*, dedica o capítulo VII a uma análise particular sobre eles.

Leibniz entende que a ‘verdade’ de qualquer conhecimento implica a certeza de sua necessidade. Nesse livro, ele afirma que a fonte das verdades primitivas, sejam os *axiomas*, e que estes já estão em nosso espírito e vem das ideias, sendo que é a razão, discernindo pela concordância e/ou discordância entre as ideias – conexão entre as ideias - que sempre nos fornece a certeza de sua necessidade.

Embora haja uma diversidade considerável entre ideias inatas e evidentes por si mesmas, os *axiomas* primitivos teriam importantes peculiaridades. Por exemplo, Leibniz menciona as proposições primitivas da Aritmética e da Geometria como sendo todas inatas. Mas, conforme ele nos informa, devemos observar que, na Aritmética, por exemplo, a



proposição *um mais um são dois*, embora seja evidente, não é propriamente uma verdade, pois se trata da definição de dois, não um *axioma*. *Axiomas* abordariam verdades e verdades universais, por exemplo, ‘que se de coisas iguais se tiram coisas iguais o resto é igual’ e ‘o todo é maior que a parte’ e, ademais, é fácil perceber que toda definição tem em si, implícito, ou seja, tem em si, incorporado, um *axioma*.

Em Leibniz, os *axiomas* não são demonstráveis e são incapazes de receber uns dos outros qualquer luz de prova. A Geometria, neste sentido, seria uma Ciência exemplar, pois se baseia em *axiomas* gerais. Outro ponto trata que, para esse filósofo, as verdades são altamente dependentes das definições e dos *axiomas*.

Os pensamentos tratam de ações, para esse filósofo, e não a essência da alma, já os Conhecimentos e as verdades, enquanto estão dentro de nós (mesmo quando não pensamos neles), são hábitos ou disposições. Sobretudo, mesmo estando dentro de nós, Leibniz entende que os nossos sentidos nos fornecem a ocasião para que descubramos, ou cheguemos aos *axiomas*. Ao compreender como necessária a participação dos sentidos no acesso às verdades que são inatas, inclinamo-nos também a interpretar que Leibniz reconhece, em certa medida, duas fontes para nossos Conhecimentos: os sentidos e a reflexão.

Sobretudo, observamos ser, sempre, sua face racionalista mais usualmente destacada, exatamente por ele não defender que o caminho empírico seja suficiente para produção de verdades, uma vez que necessitam sempre razão, e, que embora possam ser produtor de verdades de fato, estas são sempre contingentes. Também o entendimento de ‘verdades’, para Leibniz, reforça a perspectiva racionalista, pois ele vincula a evidência de uma verdade à certeza luminosa e não podemos considerar a prática como uma possível censura a esta. É a razão, nosso entendimento, que julga a causa da conexão que se enxerga entre as ideias.

Os *axiomas*, então, são razões comuns de verdade particulares que se encontram no espírito dos homens. E, enquanto máximas já conhecidas, constituem os fundamentos de todo o Conhecimento. No entanto, é interessante destacar que Leibniz nos diz que o melhor método para aumentar nosso Conhecimento seria observarmos a Matemática. Leibniz dá um tratamento de equações aos *axiomas*. E, exatamente neste e sobre este aspecto, entendemos que Leibniz agregar uma função mais significativa à Linguagem em sua análise sobre nosso desenvolvimento cognitivo na Matemática. Só que o resultado dessa visão fará com que Leibniz inicie um trabalho no sentido de encontrar uma Linguagem universal. De todo, é muito evidente que *axiomas* tenham, essencialmente, em Leibniz, uma forte concepção

interpretativa que lhes atribui o sentido de verdades, e a garantia desse pressuposto Leibniz atribui a Deus, ao Ser Supremo.

E daí, também interpretamos um sinal tensional, podendo ser destacado no pensamento de Leibniz, de modo que, nessa acepção, o *axioma* possa ter um sentido hipotético, e especificamente quando ele passa a referir-se ao ponto sobre o modo de proceder dos matemáticos. Inclusive quando ele destaca que o método da Matemática comparece, pois, de maneira singular e criativa, ‘ao estabelecer princípios cuja certeza não é completa’ – então podem ser hipóteses -, e esse modo de proceder pode ter utilidade, quando sobre esses princípios construímos apenas para efeito de demonstração. “Com efeito, ainda que neste caso todas as conclusões sejam apenas condicionais e valham somente na suposição de que este princípio seja verdadeiro, não obstante esta ligação e esses enunciados condicionais estariam no mínimo demonstrados” (LEIBNIZ, 1999, p.453).

Ele ainda afirma que, no que se refere às ideias, o que importa é ligar as definições através dos *axiomas*. Informa que, assim procedendo, ampliamos nossa percepção, recorrendo a definições e aos *axiomas* que ele indica como sendo ‘menos primitivos’ – neste sentido, para nós poderiam ser hipotéticos -, e como ele aponta “não negligenciando, assim, algumas belas descobertas que podemos encontrar por meio deles” (LEIBNIZ, p.460).

Este entendimento de Leibniz à nossa interpretação do desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático e do termo *axioma* e sobre possíveis oscilações de significado, repercute, especialmente, em nossa pesquisa, pois, embora Leibniz venha, até determinado ponto, desenvolvendo intensa explicação e construção teórica afirmando e destacando o sentido de ‘verdades’ aos *axiomas* e estes como verdades inatas, evidentes por si, observamos que, relativamente à Matemática, e ao seu método, identificamos que ele passa a atribuir um tipo de exceção à constituição de seus *axiomas*. Assim, os *axiomas* da Matemática, neste sentido, podem assumir o caráter de suposições (hipóteses). Sobretudo, ele ainda tenta justificar seu posicionamento e também salvar o sentido de ‘verdades’ aos *axiomas* da Matemática, demonstrando e realçando que, neste caso particular, este estaria resguardado (de certa forma), pois a percepção que resultaria na conexão/ligação das ideias (estabelecida entre definições e *axiomas*) é sempre regida por *axiomas* primitivos, ou máximas gerais, que herdamos do nosso Criador.

No entanto, ele adverte que não devemos regular a prática segundo essas conclusões, a não ser na medida em que a suposição seja verificada por outros meios. Sobretudo, é

relevante para nossa interpretação ele reconhecer esse engenhoso procedimento da Matemática, assinalando que as hipóteses prováveis “podem conduzir a novas descobertas e constituem no mínimo um grande auxílio para a memória. Entretanto o nosso espírito está muito inclinado a proceder com pressa demais e a contentar-se com algumas aparências levianas, por não querer dar-se ao trabalho e empregar o tempo necessário para aplicá-las a uma série de fenômenos” (LEIBNIZ, 1999, p.457).

Assim, ele também defende que, se o método da Matemática pudesse ser estendido a outras disciplinas e matérias, como as grandezas, nossos pensamentos poderiam ir mais além do que podemos imaginar.

Leibniz se empenha no sentido de estabelecer esse método comum às Ciências. Segundo Otte (2013), com o advento da álgebra Moderna de Vietá e Descartes (1596-1650), aparecerá uma nova relação entre a análise e a síntese, de forma que elas quase são interpretadas como idênticas. Este fato foi incorporado no pensamento de Leibniz em sua ideia de prova matemática formal e no sentido de um método universal para se localizar e comunicar as verdades matemáticas e científicas (Hacking, I. 1980, ‘Proof and eternal truth: Descartes and Leibniz’ in: Gaukroger, S. (ed.), *Descartes: Philosophy, Mathematics, Physics*, Harvester, Sussex, UK, pp.169–80.).

Também é relevante que para Leibniz, a distinção entre analítico e sintético torna-se secundária da distinção entre a mente e o raciocínio de Deus e sua vontade. A Matemática, como resultado do nosso raciocínio, foi então chamada por ele de analítica e o resto de conhecimento sintético. Mas, é importante observar que o analítico para ele tem o sentido de harmonia da representação com o objeto. Para Leibniz, que defende uma ‘harmonia pré-estabelecida’ entre o geral e o particular, a objetividade da razão estaria garantida pelo fato de a razão ser o que temos de comum com Deus.

Segundo Dilthey (1833-1911), devemos reconhecer como mérito de Leibniz ele ser o primeiro a conceber, no jogo das representações do subconsciente, o princípio da explicação psicológica, sendo um pioneiro nos domínios da investigação histórica e filológica.

Para Leibniz, o que realmente importa é a estrutura das relações (intrínsecas) e aí repousa o sentido de analítico. De maneira que seria possível se criar conhecimento objetivo à base de símbolos convencionais ou arbitrários. Por exemplo, quando alguém quer mentir para outra pessoa e convencê-la desse fato mentiroso, mesmo neste caso, é necessário coerência na argumentação, para isso necessitando escolher, objetivamente, as palavras. Pensando desta

maneira, a objetividade repousa nas atividades e em nossas metas. Leibniz também nunca esteve certo sobre a relação entre objetos e conceitos, mesmo entendendo que signos são arbitrários e palavras convencionais

Leibniz destaca o poder criativo da Linguagem ao processo cognitivo essencialmente ligada ao modo de proceder da matemática, ao estabelecer as relações (intrínsecas aos objetos), mas ele centrará sua busca circunstanciada na procura de uma Linguagem perfeita e ideal e ao estabelecimento de um método às ciências. Leibniz fracassa, pois acredita que a Matemática deva ser conceitual, ou seja, baseada no sentido dos conceitos.

E, de acordo com Otte (2013)<sup>190</sup>, mesmo Leibniz insistindo no fato de que todo pensamento ocorre em signos, na construção e aplicação de sistemas de signos, o seu pensamento, embebido de pressupostos racionalistas, entendia os signos e representações como realidades mentais ou subjetivas. E, relacionados a este ponto, seguidamente a Leibniz, encontramos um grande avanço desabrochar no pensamento de Kant, contribuindo para nossa interpretação sobre a relação entre a Linguagem e a Matemática na e para interpretação do processo cognitivo e do desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Também é a partir de Kant que vemos nascer uma verdadeira possibilidade de se fazer uma Filosofia da Matemática, até Kant filosofava-se à partir da Matemática.

Se o caminho delineado inicialmente pela invenção da imprensa foi decisivo no sentido da transformação de mundo, de outro modo, em certa medida, transformou o Conhecimento num objeto. Surge nesta época o desejo de alcançar ou construir um Conhecimento intuitivamente certo, não dependendo, dessa maneira, das autoridades do Estado e da Igreja, ou das autoridades tradicionais em geral. Neste sentido, o valor instrumental e as aplicações empíricas eram decisivos (OTTE, 2013).

Esses foram fatores muito importantes à promoção da mudança em nosso modo de pensar sobre o mundo, sobre como produzimos Conhecimento e do que seria Ciência no início do mundo Moderno.

Segundo Mannheim (1982) ressalta e destaca que, essas mudanças significativas que começam a se processar e se evidenciar nos alicerces do pensamento social e intelectual da sociedade resultaram da intensificação, do que ele chama de ‘mobilidade social horizontal’, quanto de ‘mobilidade social vertical’ na sociedade. Movimento e mobilidade que foi

---

<sup>190</sup> Comentário de Otte em momento de orientação.

provocada como resultado da Revolução Industrial potencializada pela Revolução Científica. Como ele mesmo explica (MANNHEIM, 1982, p.35):

A mobilidade horizontal (movimento de uma posição para outra ou de um país para outro, sem mudança do *status* social) nos mostra que povos diferentes pensam diferentemente. Enquanto, contudo, as tradições do grupo local ou nacional a que uma dada pessoa pertença permanecem intactas, essa pessoa persiste tão apegada à sua maneira de pensar costumeira que as maneiras de pensar percebidas nos demais grupos são encaradas como curiosidades, erros, ambiguidades ou heresias. Neste estágio ninguém duvida seja da correção de suas próprias tradições de pensamento, seja da unidade e uniformidade do pensamento geral.

Somente quando a mobilidade horizontal se faz acompanhar de uma intensa mobilidade vertical, isto é, do movimento rápido entre estratos no sentido de ascensão ou de descenso social, é que a crença de alguém na validade geral e eterna das próprias formas de pensamento é abalada. A mobilidade vertical é o fator decisivo para tornar as pessoas incertas e céticas de suas visões de mundo tradicionais.

A conjunção do sentido desses tipos de mobilidade, indicada por Mannheim, uma vez reveladora em potencial da multiplicidade de formas de pensamento, torna-se fator decisivo para fazer com que as pessoas se sintam incertas e céticas de suas visões de mundo tradicionais, condição imperiosa à promoção de mudanças profundas no pensamento social. A ascensão da burguesia trazendo consigo um novo conjunto de valores, não se contentava em lhe atribuir um lugar circunscrito dentro de antiga ordem. Ela representava um novo sistema econômico, e, um novo estilo de pensamento que a acompanhava, impera neste contexto um elemento essencial à promoção e ao deslocamento dos modos existentes de interpretar e explicar o mundo.

Mannheim ainda acrescenta, que foi neste cenário, que assistimos ser quebrada definitivamente uma interpretação eclesiástica do mundo, e, notamos o surgimento de um estrato de intelectuais livre, em oposição a um grupo fechado e inteiramente organizado. “A ruptura do monopólio intelectual da igreja acarretou a rápida efervescência de uma riqueza intelectual sem precedentes em todos os estratos sociais” (MANNHEIM, 1982, p.40).

Deve-se procurar, nesse processo relativamente simples, a explicação para o fato de que o questionamento fundamental do pensamento nos tempos modernos só teve início depois de um colapso do monopólio intelectual mantido pelo clero. A visão de mundo quase unanimemente aceita, mantida artificialmente, foi destruída a partir do momento em que se destruiu a posição socialmente monopolista de seus produtores (MANNHEIM, 1982, p.40).

De modo que, interpretamos ser esse complexo e dinâmico agregado de acontecimentos que produziu uma grande revolução no pensamento intelectual, e, na visão de

mundo, promovendo à uma inserção do pensamento filosófico de uma nova ordem ao pensamento matemático, e como consequência uma aproximação entre a Linguagem e a Matemática, e, consequentemente redirecionando à uma interpretação epistemológica semiótica. Deste e neste contexto tivemos a mudança do sentido interpretativo do termo *axioma*.

Em nossa interpretação também destacamos neste cenários alguns acontecimentos específicos tais como: o extraordinário sucesso das Leis da Mecânica e da física, da ótica de Newton, da teoria de Calor de Fourier, da teoria eletromagnética de Maxwell; que de certo modo impulsionam a ciência numa outra forma e noutra perspectiva que redirecionava o foco da ciência à uma dimensão qualitativa (principalmente impulsionado pela criação de novas áreas e campos de pesquisa), promovendo o início do declínio à onipotência do aspecto quantitativo ( do séc XV e XVI). Acrescente-se a isso uma necessidade educativa que surge no movimento da Revolução Industrial, como também à contribuições do pensamento de Jean J. Rousseau, Condillac e especialmente a Revolução Copernicana de Kant à epistemologia, que verificamos uma virada nos sentido linguístico (semiótico) ao processo do nosso desenvolvimento cognitivo. Ao ampliarem-se as necessidades e reivindicações educativas, começa a existir no espaço educativo a necessidade de um tratamento didático ao *hall* de todo conhecimento ‘científico’ (transformá-lo em conteúdo educativo) e a linguagem, neste sentido, é elemento direcionador e potencializador do processo educativo.

Assim, mais uma vez vemos a oportunidade e possibilidade de uma aproximação da Linguagem ao processo cognitivo, e especialmente no sentido de um novo direcionamento no desenvolvimento da matemática, que somente virá a efetivar-se somente nos séculos XIX e XX.

Fundamentalmente importante e basilar às profundas transformações no pensamento filosófico, matemático e epistemológico e, em nossa interpretação, ao direcionamento à viragem da interpretação semiótica ao processo cognitivo, é o pensamento de **Immanuel Kant**.

Segundo Otte (2013)<sup>191</sup> a visão aristotélica do ponto de vista metafísico de uma noção de mundo como um cosmos, já na época de Kant havia sido substituída por uma visão do mundo como conjunto de objetos. A Revolução científica já havia promovido a visão de um conceito como representação da substância das coisas para a visão de conceito como

---

<sup>191</sup> Comentário de Otte em discussão via e-mail para seus orientando encaminhado em 2013.

concebido em primeiro como um instrumento, e, daí resultava o papel fundamental do conceito de função.

Cassirer (1997) (*apud* OTTE, 2013)<sup>192</sup> mostrou que a mudança na lógica se baseava na análise da proposição enquanto nenhuma mudança na concepção do conceito havia sido realizada. De modo que, foi o pensamento de Kant que veio a completar a Revolução Científica de Newton ao conceber o conceito como função da atividade, um tipo de Revolução Científica interna ao desenvolvimento do conhecimento matemático em especial. E, isso implicou, em eliminar da filosofia todo o questionamento sobre se nossas representações do conhecimento correspondiam efetivamente a um objeto, e, aceitar o conhecimento científico como uma representação que é escolhida.

É extremamente esclarecedor, neste sentido, o pensamento ‘Otteano’:

Primeiramente, podemos observar que Kant em seu “über Untersuchung morrer Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral” de 1764, que foi escrito como uma resposta para a pergunta - representada pela Academia Real de Berlim - se a verdade metafísica poderia ser equiparada à verdade matemática, que ele chama atenção à sua distinção bem conhecida entre verdades analíticas e sintéticas. Ele classifica a matemática como base nas definições arbitrárias e, portanto, como sintética e afirma que é, em contraste com a matemática, muito cedo para a metafísica e a filosofia natural proceder de acordo com o método sintético. "Somente após a análise nos proporcionar conceitos de forma clara e amplamente compreendidos, a síntese será capaz, como na matemática, a subsumir o conhecimento envolvido em seus elementos mais simples" (OTTE, 2013)<sup>193</sup>.

Observamos que os *axiomas* em Kant tratam de um tipo de conhecimento mediador que prefiguram princípios sintéticos *a priori* enquanto são imediatamente certos e a Matemática, especialmente a Geometria, seria exemplar possuidora desse tipo de *axiomas*.

Mas, nossa reflexão em Kant deve partir mais das entrelinhas do que realmente está posto de imediato. E, foi buscando encontrar essa interpretação que destacamos também em Kant uma tensão interpretativa entre o sentido de “verdades” e o de hipóteses que seja atribuído ao termo *axioma*.

As ideias de Kant para a epistemologia tiveram um caráter revolucionário e, sem dúvida, o ponto relevante em sua teoria foi a Revolução Copernicana provocada pelo seu pensamento. Essa revolução foi desencadeada pela busca de Kant em levar a metafísica a um caminho seguro de Ciência. E, é exatamente neste ponto por acreditar no estabelecimento de

<sup>192</sup> Comentário de Otte em discussão via e-mail para seus orientando encaminhado em 2013.

<sup>193</sup> Manuscrito intitulado *The are varius Kants*, de 2013.

um método ‘seguro’ que destacamos o primeiro ponto tensional à interpretação de *axiomas* em Kant. Haja vista que ele entende ser necessário que, à metafísica, fosse estabelecido um consenso sobre o método, o qual ele pretendeu fornecer com sua teoria. Para tanto, tomava como exemplares enquanto Ciência, a Lógica, a Matemática e a Ciência Natural. Com esse direcionamento entendemos que Kant reforça o sentido de “verdades” aos seus *axiomas*.

Só que, nesta busca, de outro modo, Kant proporá uma verdadeira revolução no modo de pensar metafísico. Ele observava que tal revolução já desde a Antiguidade havia se processado na Matemática e numa ideia que se pratica em toda a demonstração geométrica: “para fins da ciência, não basta ver simplesmente uma figura geométrica ou meramente perseguir seu conceito; é preciso construí-lo *a priori* segundo conceitos próprios” (HÖFFE, 2005, p.42).

Tal pensamento foi importantíssimo aos desdobramentos de uma interpretação sobre *axioma* e direcionado ao sinônimo de hipótese, pois o que Kant destaca é que só se pode saber com certeza aquilo que ‘se colocou’ em um conceito e, em especial, mediante um pensar e um ‘construir criativos’, tornando possível o Conhecimento Científico. Destaca, pois, à Matemática, enquanto Ciência, uma condição até então considerada aparentemente impossível, que diz respeito à dimensão subjetiva que, no entanto, ele buscará explicar como sendo, sobretudo, objetivamente válida.

Kant diz que, para resultar numa revolução na metafísica, é preciso que ela proceda como na Matemática (e na ciência natural), ou seja, que coloque o sujeito cognoscente numa relação criadora com o objeto, mas essa posição, esse olhar, ao modo de proceder da Matemática, figurará revolucionária em suas consequências.

Kant comparou sua proposta com a descoberta de Copérnico e, daí, seu experimento da razão tornou-se conhecido como a Revolução Copernicana de Kant. Ele pretendeu apresentar mais do que uma mera refutação a teorias metafísicas e, em certo sentido, superou assim o racionalismo, o empirismo e o ceticismo.

Em sua teoria, existe uma recusa tanto do empirismo quanto do racionalismo, de forma que há, sim, ideias puras da razão, mas meramente como princípios regulativos a serviço da experiência. A hipótese de Kant pressupõe um tipo de mediação entre o empirismo de Locke e o racionalismo de Descartes, onde “mesmo o nosso conhecimento da experiência seja um composto do que recebemos por meio de impressões e do que o nosso próprio poder de conhecimento (apenas provocado por impressões sensíveis) fornece de si mesmo” (KANT,



B 1). Podemos inferir que, neste ponto, desponta no pensamento kantiano um sentido de Complementaridade entre sujeito e objeto no desenvolvimento do nosso Conhecimento, ou seja, na manifestação da nossa razão. Por isso Otte entende que a ideia sobre Complementaridade já está latente no pensamento kantiano.

Kant funda com sua teoria uma nova posição do sujeito em relação à objetividade. Em seu revolucionário pensamento o conhecimento não deve mais regular-se pelo objeto, mas sim o objeto pelo nosso conhecimento. Ele afirma que, a necessidade e a universalidade que pertencem ao conhecimento objetivo não nascem, como nós costumávamos acreditar e creditar, dos objetos, mas se devem ao sujeito cognoscente. Ao situar o sujeito como eixo do e no processo cognitivo, Kant passa a promover o sentido de uma possibilidade interpretativa que prime pela complementaridade entre sujeito ontológico e sujeito epistemológico. Desta complementaridade, decorrerá mudanças fundamentais na compreensão sobre os fundamentos de nosso conhecimento. Entendemos que este ponto no pensamento de Kant tem importância vital e tem desempenhado papel fundamental à uma viragem interpretativa do termo *axioma* do sentido de verdade ao sentido de hipóteses. E, em especial o pensamento de Kant situa-se limítrofe e impulsionador nas reflexões posteriores para a inserção de uma abordagem interpretativa semiótica ao processo de desenvolvimento do nosso Conhecimento.

Especialmente relacionado às Leis de Newton, observamos que Kant empreende à elas um tratamento de *postulados* ou *leis*, o que vai em direção oposta ao sentido de ‘verdades’, o que identificamos como um segundo ponto tensional na interpretação do termo *axioma*.

Mas para Kant, na Matemática e especificamente na Geometria, um *axioma* seria do tipo: que a linha reta é a distância mais curta entre dois pontos (KANT, B 6). Ele explica que um *axioma* desse tipo tem o caráter de juízos sintéticos *a priori* e todos os juízos da Matemática seriam, em geral, sintéticos e ‘objetivamente’. Mas também observa que nem todos os juízos sintéticos *a priori* são *axiomas*; para que o sejam necessitam ter o caráter de generalidade e de necessidade e sejam ‘objetivamente’ sintéticos *a priori*, e como juízos sintéticos tratariam de verdades. Para Kant, a Aritmética não possui *axiomas*, pois ela trata de casos particulares, não retratam juízos apodícticos de caráter geral, sendo um tipo de conhecimento analítico.

O fato, indiscutivelmente, interessante do pensamento kantiano refere-se a que, ao promover sua Revolução Copernicana, ele abre definitivamente a possibilidade de se começar a por em ‘xeque’ o caráter de ‘verdade’ dos *axiomas* e o de ‘verdades eternas’ do

Conhecimento Matemático. E isso, mesmo ele considerando a Matemática exemplarmente como Ciência e buscando destacar, especialmente, o seu método de abordar a realidade ou qualquer problema, e, tomando-a como propositura elementar para se alcançar a objetividade e chegarmos ao nosso objeto – o fenômeno - identificamos que Kant redireciona a ‘verdade’ a um sentido regulativo, mais aproximativo em nossa interpretação, tendendo ao sentido de hipóteses.

Ao investigar os elementos sintéticos *a priori* – como são possíveis – especialmente partindo da Matemática sobre como seria possível a metafísica como ciência, foi-nos surpreendente sua análise e conclusão. A revolução copernicana de Kant irá também indicar que existe sempre uma distinção entre fenômeno e a coisa em si e, neste mesmo sentido, o nosso Conhecimento objetivo se limitaria ao âmbito de toda experiência possível. O que Kant está a destacar tem a ver com o sentido do importante papel da ‘atividade’ no movimento do desenvolvimento do nosso Conhecimento.

Kant, no entanto, em alguns momentos recorre à definição tradicional da ‘verdade’, esta entendida no sentido de adequação (correspondência) do pensamento ao objeto. Mas, ao mostrar que, o objeto não trata de um *em-sí* independente do sujeito, mas que este é constituído somente pelas condições apriorísticas do sujeito cognoscente, seu pensamento irá redirecionar esse o entendimento sobre o que seja essa ‘verdade’. Já que denota de seu pensamento uma mudança tanto no entendimento sobre a natureza do objeto, conseqüentemente haverá implicações à um outro sentido à verdade. De modo que, isto indicará a que todo nosso conhecimento está situado à partir de uma relação que toma o sujeito como ponto nodal dessa relação, somados aos condicionantes tanto dos sujeitos como do contexto envolvidos em relação ao objeto, de modo que, passa a ser (em certa medida) relativizado o sentido de ‘verdades’ e ainda questionável o de ‘verdades eternas’, ou mais especificamente para nós, o sentido de ‘verdade’ do termo *axioma*. Sobretudo, ele não tira da Matemática e das ciências naturais matemáticas o caráter de exemplares possibilitadoras de uma objetividade do nosso Conhecimento.

São as ideias de Kant que conduzirão à interpretação da Matemática como o raciocínio diagramático em Peirce e sobre a relevância e especificidade simbólico-estruturalista dessa Ciência.

Kant também se posiciona contra uma separação rigorosa entre a Linguagem de observação e Linguagem de teoria uma vez que todo o Conhecimento, inclusive, dizendo que o nosso Conhecimento cotidiano, contém elementos teórico-conceituais.

Também ao fazer uma distinção, entre teorias e realidade, assim como entre objetos e fenômenos, interpretamos que no pensamento de Kant os *axiomas* ao tratarem de juízos sintéticos *a priori* sobre representações que ‘pretendem’ uma validade objetiva, eles estariam mais para o sentido de hipóteses do que o de verdades. Mas, sendo que para ele é a matemática e as ciências naturais matemáticas que seriam mais exemplares no sentido do caminhar a esta objetividade, pela generalidade e necessidade do conhecimento produzido.

De acordo com Otte(2014)<sup>194</sup> podemos observar quando estudamos Kant que ele irá apresentar em um primeiro momento uma posição que coloca a metafísica e a matemática em estreita ligação, mas depois ele muda sua posição e seu ponto de vista, situando-as em sentido opostos, essa mudança tem consequências importante à matemática e a seus fundamentos, como também à mudança no sentido interpretativo do termo *axioma* de verdades para hipóteses. Pois, à partir de Kant e desta separação promovida que a epistemologia, ou seja, o método começa a ter maior ênfase do que o objeto enquanto paradigma científico.

Kant constrói sua teoria, a justifica e a explica fazendo uma extensa e completa reflexão sobre verdades que são analíticas e verdades que são sintéticas. Sobretudo, cabe um destaque, a que, na antiguidade até Descartes a distinção entre analítico e sintético era compreendida como a correlação entre dois métodos, a análise deveria mostrar as possibilidades da solução de um problema e a síntese deveria realizar a solução, ou seja, mostrar a realidade da solução. Mas, em Kant esta distinção se processa de modo diferente, pois, Kant fez da cognição humana a base da sua epistemologia.

Em Kant o pensamento analítico é o tipo de raciocínio feito quando nos baseamos somente em um conceito, mas, para ele o fato de um conceito não ser auto-contraditório não produziria a realidade do conhecimento objetivo, que para ser provado irá necessitar do suporte de uma intuição correspondente, o que ele identificava haver na Matemática pela sua generalidade e objetividade.

De modo que, Kant não concebia a distinção entre analítico e sintético em termos de proposições ou frases, mas em termos de atos de pensamento e juízos, ou seja, ele concebia a

---

<sup>194</sup> Fala de Otte em momento de orientação.

distinção em termos epistemológicos. Ele fazia da cognição humana a pedra fundamental de sua epistemologia.

De forma que, a matemática ele situava como sendo sintética, diferentemente da metafísica e da filosofia natural, que para ele, eram em contraste analíticas. Informando que ainda era muito cedo àquelas últimas procedem de acordo com o método sintético. "Somente após a análise nos proporcionar conceitos de forma clara e amplamente compreendida, a síntese seria capaz, como na matemática, subsumir o conhecimento envolvido em seus elementos mais simples" ( *Deutlichkeit*, 1764). Daí o seu posicionamento posterior distanciando a metafísica da matemática.

Para Otte (2014)<sup>195</sup> em 1764, ele aderiu a uma concepção muito formal da matemática – matemática como sendo uma ciência a partir de definições arbitrárias e que operam com sinais de acordo com regras simples e seguras. Ele passou a ter uma visão de aritmética, por exemplo, que chegou muito mais perto de modernas visualizações axiomáticas - porque deixou de lado todas as questões com respeito à natureza do número -, que ele apresentava em sua *Crítica da Razão Pura*. Nessa, a geometria e a construção geométrica tornou-se paradigmática para sua noção de matemática e do método matemático. Assim é que em sua publicação anterior à *Crítica* observamos que sua concepção de geometria era mais operativa e formal.

Na *Crítica* (1781) a matemática não é mais uma ciência meramente formal, mas é objetiva e a natureza de seus objetos é para Kant responsável pelo fato de que a matemática seria capaz de desenvolver seu método sintético especial, o que lhe permitia real progresso cognitivo, diferentemente dos lógicos.

Otte (2013)<sup>196</sup> ainda completa dizendo: “o que eu mais gosto em Kant é que o conhecimento não é um espelho [do mundo empírico] ou uma reflexão passiva [de nossa mente]...a realidade é um processo da atividade ... e ... tem objetividade na atividade”.

Devemos reconhecer que, a partir das reflexões de Locke e propriamente das de Kant que se processa o rompimento definitivo das amarras que prendem sujeito ontológico ao sujeito epistemológico, mais especificamente relacionado ao Conhecimento Matemático, e que de um modo sempre delegava primazia ao primeiro. A Linguagem passa a incorporar papel mais significativo no processo cognitivo, de modo a ampliar nosso entendimento sobre

---

<sup>195</sup> Fala de Otte em momento de orientação.

<sup>196</sup> Comentário de Otte em momento informal de orientação em 2012.

o seu espaço ao nosso desenvolvimento cognitivo. Dentro de uma nova abordagem – semiótica - ambos os sujeito adquirem o mesmo *status*.

Diante dos fatos e aspectos exposto, sem dúvida é o pensamento de Kant (1724-1804) que figura como ponto limítrofe à mudança interpretativa do termo *axioma* de um sentido que o coloca como antônimo de hipótese, para um sentido em que ele se assume como sinônimo de hipótese. Sua epistemologia é um reflexo, segundo Otte (2012) do contexto sócio-histórico e político que vai do século XVII ao XIX. Kant provoverá o que será conhecido como sua Revolução Copernicana, ele não deixará nada de pé do que foi estabelecido epistemologicamente até então, e, assistiremos conseqüentemente ao desenvolvimento de sua teoria, ao ‘apogeu’ da Linguagem e das proposições na e para interpretação do desenvolvimento cognitivo.

Para Mannheim, do ponto de vista sociológico a Idade Moderna, o fato mais evidente em contraste com o da Idade Média, caracterizou-se pelo rompimento com o monopólio da interpretação eclesiástica do mundo, e, neste sentido o pensamento de Kant é tanto reflexo deste processo de rompimento como contribui sobremania à posteriores interpretações epistemológicas, embora, ainda houvesse em seu pensamento o apelo ao transcendente.

Ele ainda entende que ainda especialmente contribuiu nesta direção o fator sócio-político relacionado a mobilidade horizontal e vertical da sociedade ao permitir a promoção e o surgimento de estratos de intelectuais advindos de situações de vida variáveis, diferentemente de um grupo fechado sacerdotal.

Desaparece, nesse processo, a ilusão do intelectual de que haja apenas uma forma de pensar. O intelectual não é mais, como antigamente, um membro de uma casta ou grupo, cuja maneira escolástica de pensar aparece como o pensamento em si. Deve-se procurar, nesse processo relativamente simples, a explicação para o fato de que o questionamento fundamental do pensamento nos tempos modernos só teve início depois do colapso do monopólio intelectual mantido pelo clero. A visão de mundo quase unanimemente aceita, mantida artificialmente, foi destruída a partir do momento em que se destruiu a posição socialmente monopolista de seus produtores (MANNHEIM, 1982, p.40).

Passa a existir, deste modo, uma efervescência intelectual e com diferentes visões de mundo sem precedentes. Fora os conflitos gerados por um novo modo de organização do modo de vida, e do pensamento intelectual, ressurgiam e borbulhavam conflitos sociais e políticos. Conseqüentemente à esse processo, observamos fracassar a possibilidade de elaboração contínua e direta de conceitos relativos a coisas e situações, do modo até então

usualmente operacionalizado, frente a uma multiplicidade de definições fundamentalmente divergentes que se tornam reveladas e reveladoras desse novo cenário. Concordamos com Manheim e entendemos que somente uma mudança radical na interpretação de mundo, poderia margear e justificar a uma mudança no entendimento sobre a oscilação do sentido do termo *axioma* de antônimo de hipótese passando ao sentido de sinônimo de hipótese na/com a Modernidade.

Foi tão efervescente este período que em contraposição ao movimento capitalista provocado pela Revolução Industrial, surgiu um movimento denominado do *Romantismo*. Tal movimento veio a reforçar as mudanças em andamento, só que um outro modo, pois ele figurava como um contra-movimento capitalista. Sobretudo, ele contribuiu e reforçou para um sentido de promoção da aproximação na relação entre Linguagem e a Matemática, principalmente pelo papel que este movimento atribui à metáfora.

A linguagem figurada começa a ganhar destaque também porque novas elaborações e construções são realizadas no campo científico, e, entendemos que ela adentra o cenário cognitivo pela porta disponibilizada pelo movimento do Romantismo. Assim, foi que assistimos se processar uma mudança radical do papel da Linguagem no desenvolvimento cognitivo, e essa mudança ocorre também alicerçada pelo estabelecimento de um mais íntimo relacionamento entre a Matemática e a Lógica (esta tomada como Semiótica).

Interpretamos que somente num cenário que conduz a um nível de inquietude profundo podem surgir novos modos de pensamento, de conceptualização e de atribuição de sentido, é que se poderia processar uma aproximação tão significativa da Linguagem ao desenvolvimento cognitivo como nunca antes observado. Uma multiplicidade dos modos de pensar, geradas neste período de efervescência conduziu uma crescente elaboração de conhecimento, nas diversas e novas áreas, advindo da necessidade em desenvolver novos princípios de uma nova ordem e de uma nova forma de racionalidade técnica. Entretanto, começamos neste momento à correr o risco de adquirir-se um amontoado de conhecimentos desorganizados e de maneira incompreensível, o que equivaleria a não ter conhecimento algum.

Assistimos então despontar, uma nova forma de se conceber o conhecimento e esta procurando valorizar as ideias gerais como a única forma de organizar a enorme quantidade de conhecimento dos fatos, ideias e técnicas que foram adquiridas até o século XVIII.

No século 18 mais do que nunca, as ciências são confrontadas com a inevitabilidade da experiência. Apesar de extensões quantitativas de conhecimento sempre levar a mudanças nos métodos científicos, técnicas e teorias, este aumento do conhecimento acelerou a tal ponto que a capacidade das tradicionais tecnologias de processamento de informações, com base na organização espacial do estoque de conhecimento, parecia exausta" (LEPENIES, W.. *das Ende der Naturgeschichte*, Suhrkamp Frankfurt, 1978, p. 16).

Como um dos resultados da Revolução Industrial também o status cultural do conhecimento mudou. E, a Matemática em particular começou a se transformar numa 'instituição social'. Num caminho oposto ao que desempenhara até então, ao invés de se constituir numa coleção de métodos para resolver problemas ela passa a se transformar numa coleção de teorias, inclusive atuando como instrumento reorganizador e para se entender esse novo mundo que surgia diante de um novo olhar e novos parâmetros.

Há o aparecimento, também na Modernidade por exemplo, de uma nova preocupação aos matemáticos, tratando da relação entre quantidades discretas e contínuas (quantidade e qualidade/ extensão e intensão), principalmente, após a criação do Cálculo Diferencial e Integral, que podemos realçar, especialmente, espelhado pelo pensamento de **Dedekind** (1872).

Tal preocupação já havia se acendido na Antiguidade, tendo a ver com a crise dos incomensuráveis e que influenciou historicamente a própria Matemática grega. Àquela época, os gregos não souberam que tratamento empreender ao problema pitagórico dos incomensuráveis; desta forma, desviaram-se do caminho de estabelecer, entre a Geometria e a Aritmética, uma ponte, ou seja, mais especificamente entre grandezas contínuas e discretas; assim, ambas seguiram caminhos opostos. Um impasse que só parece ter encontrado solução quando é estreitado o relacionamento da Linguagem ao processo cognitivo e à Matemática.

Sobretudo, é oportuno ressaltar que Platão já havia percebido, em seu tempo, o abismo entre a Geometria e a Aritmética, e sugerido, por conseguinte, que uma solução ao problema da medida das quantidades 'incomensuráveis' poderia ser alcançada através da construção *axiomática* do conceito de número (Rezende, 2003), independentemente de qualquer base geométrica. Entretanto, Platão não avançou neste aspecto ou sequer deu uma resposta direta aos paradoxos de Zenão ou ao problema da incomensurabilidade. Foi à partir deste ponto que interpretamos haver, no pensamento platônico, uma perspectiva aproximativa entre a Linguagem e a Matemática, mesmo que houvesse o sentido de *axioma* como 'verdades' inatas (prerrogativa do essencialismo e atributo de divindade ao desenvolvimento intelectual).

Observamos ser, a partir do século XIX, que a Matemática efetivamente evolui, de modo a se tornar cada vez mais abstrata e rigorosa, e a Lógica também sofre mudanças, deixando de ser definida pela Ciência como finalidade ao estudo das inferências válidas e tanto ela como a Matemática começam a caracterizar-se pelo uso básico do método *axiomático* e da formalização, o que promoveu uma aproximação considerável entre ambas. E, segundo Costa, (2008) mesmo os matemáticos intuicionistas que defendem a tese de a Matemática e a Lógica não serem, em princípio, formalizáveis, devem admitir que as técnicas *axiomático-formais* são de capital importância, ao menos para caracterizar e precisar sua posição e ideias.

Atualmente, a Lógica formal reflete, na realidade, a estrutura dedutiva de contextos linguísticos e, em nosso entendimento, esses contextos nada passam do que contextos racionais. Sobretudo, não compreendemos que Lógica e Matemática sejam coisas idênticas, de forma que a primeira seja reduzida à segunda. Mesmo porque muito do que temos produzido matematicamente não é de natureza puramente lógica (ex.: o *axioma* multiplicativo, o *axioma* do infinito). E acordamos com Costa (2008), ao nos apontar que Lógica não preexiste à Matemática. A Matemática como Ciência estruturada e sistematizada é anterior à Lógica.

Ainda este autor nos informa que a Lógica se encontra ligada tanto à etnografia como à Linguagem. Reforçando este último aspecto, Peirce toma a Lógica como sinônimo de Semiótica. Fica evidente, no pensamento de ambos, a íntima relação que liga Lógica e Semiótica, entremeando-se pelo aspecto linguístico dessa atividade cognitiva. Costa ainda nos afirma que

Os Princípios lógicos refletem, sob certos aspectos, as leis que regem o exercício da razão. Praticamente não há atividade lógico-racional sem o veículo linguístico. Assim sendo, as leis lógicas terminam por ser caracterizadas por meio da linguagem. Se quisermos estudar os princípios da razão, espelhados pelos princípios lógicos, torna-se imprescindível, pois, tratarmos de alguns aspectos básicos da teoria da linguagem (COSTA, 2008, p.38).

Enquanto, para este autor, a Lógica demonstra, em certo modo, dependência da Linguagem, já a Matemática, ele concorda com Brouwer, afirmando que ela independe da Linguagem. Já Otte (2012) nos chama a atenção para o fato de que a Matemática não pode ser minimizada a uma Linguagem, mas, sobretudo, ela não é quase nada sem a Linguagem.



Até o século XIX a matemática obtinha sua legitimidade e seu significado através de uma ligação com a geometria e a intuição geométrica, em que a expressão máxima era a geometria euclidiana. No século XIX observamos uma confluência entre Lógica e Matemática, e, especialmente a legitimidade da matemática passando a estar atrelada à Lógica.

Com a proliferação historicamente crescente das linguagens e dos códigos (inciado com a invenção da prensa), dos meios de reprodução e difusão de informações e mensagens, operacionalizado e acentuado com a invenção da imprensa e como resultados do desenvolvimento científico observamos a mudanças que começam a se intensificar na direção de uma estreitamento da Linguagem ao processo cognitivo, e, principalmente fazendo emergir gradativamente uma “consciência semiótica” (SANTAELLA, 2012, P.23). Soma-se a estes aspectos fatos especificamente relacionados ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático, sejam eles:

- a descoberta da Geometria não euclidiana, que revela a possibilidade de haver mais de uma geometria imaginável;
- do desenvolvimento da análise de tal maneira que ultrapassa a intuição geométrica;

Assim à partir do século XIX, também observamos se revelar uma mudança significativa ao modo de como se pensava a Matemática. Primeiro, identificamos que a perda da certeza na Geometria implicou a perda de toda a certeza no pensamento humano; os matemáticos retomam a Aritmética, deixando de lado a Geometria para validação do Conhecimento Matemático e como fundamento para toda a Matemática. Neste sentido, o contínuo (intensão) que até então era lidado geometricamente, passa a ser buscado em sua representação aritmética. Os fundamentos da Matemática começam a tomar uma nova direção; por exemplo, começa um esforço para se reduzirem a análise e a Geometria à Aritmética e os conjuntos infinitos passam a ser introduzidos aos fundamentos da Matemática.

Dedekind, Cantor e Weierstrass, tomando a Aritmética como fundamento para a Matemática, apresentam, cada um deles, uma construção do contínuo linear (sistema dos números reais) a partir dos números inteiros.

[...] introduziram-se conjuntos infinitos nos fundamentos da matemática. Cantor desenvolveu a Teoria dos Conjuntos e parecia que a ideia de um conjunto, como uma coleção arbitrária de objetos distintos, era tão simples e fundamental que poderia ser a base para construir toda a matemática. A teoria dos conjuntos era confundida com a própria lógica, por exemplo, a relação de inclusão entre dois conjuntos B incluindo A, pode ser uma implicação “se A, então B”.

A compreensão da relação entre quantidades, discretas e as contínuas, volta a preocupar os matemáticos após a criação do Cálculo Diferencial e Integral, e ela foi diretamente abordada em 1872 por R. Dedekind.

Uma relação sempre tensa historicamente, e que sempre esteve presente na relação entre a Linguagem e a Matemática, pode ser destacada na questão que trata do discreto e do contínuo, minimamente se nos orientamos a uma interpretação que toma discreto como quantitativo, e, contínuo como qualitativo, podemos verificar bem o sentido dessa tensão, principalmente no desenvolvimento da ciência. E, como destacamos anteriormente na Idade Média assistimos uma exarcebção do poder da palavra, e, neste sentido da linguagem, dos aspectos qualitativos, já na Modernidade passamos a uma supervalorização do discreto, do quantitativo ( e o caminho à um cientificismo).

Interpretamos que Dedekind, especialmente promove o que entendemos seja o sentido de uma Complementaridade entre ambos os aspectos. E, especialmente o sentido interpretativo de *axiomas* em Dedekind é definitivamente assumido como sendo de hipótese. O pensamento deste matemático revela um rompimento decisivo com a metafísica tradicional no pensamento de Dedekind, principalmente realçado pelo fato dele considerar os objetos matemáticos como invenções humanas. Os números para ele não são objetos, nem são nomes de objetos, os números tratam de relações dentro de uma série, de um conjunto. Todas as operações com os números são definidas obedecendo as relações estabelecidas na série, no sistema, no conjunto.

Segundo Dedekind, medir significa comparar com uma estrutura matemática. Ou seja, comparar um campo de objetos com uma estrutura matemática. Neste sentido, evidenciamos no pensamento de Dedekind uma perspectiva relacional-estruturalista. E, nessa visão é que temos baseada a sua *axiomática* da Aritmética.

Dedekind se direciona à interpretação criacionista dos conceitos matemáticos, reforçando nosso entendimento de que, para ele, o sentido interpretativo do termo *axioma* como sendo o de regras estabelecidas (criadas), comungando mais com a interpretação de sinônimo ao de hipóteses e não mais de verdades indemonstráveis.

Para Dedekind, os *axiomas* funcionavam tais como regras de construções e elaborações humanas e seu problema esteve focado em alcançar todos os números possíveis ao se contar indefinidamente, sendo que o seu quinto *axioma* é o que garantiria essa possibilidade. De modo que, ele discorre sobre a necessidade desse *axioma* ou um *postulado* que garantisse essa condição e isso, em nossa interpretação, indica que ele já atribuía aos *axiomas* o sentido interpretativo sinônimo de *postulados*. Algo que fosse posto de modo a estabelecer o tipo de uma regra e, neste sentido, ele não estaria tratando de uma verdade absoluta. Os números, deste modo, tratariam de construções e podemos organizá-los, como também eles podem ser arbitrários. De forma que a perspectiva de Dedekind, em nossa interpretação, impõe o sentido imperativo de sinônimo ao de hipóteses ao termo *axioma*.

A construção dos Números Reais por Dedekind, dois mil e quinhentos anos depois da descoberta, pelos gregos, dos incomensuráveis, não trata de uma simples coincidência com a mudança de significado do termo *axioma*, mas é revelador de um processo de construção e evolução do próprio pensamento humano, do desenvolvimento do Conhecimento Matemático e, especificamente, neste trabalho, de um processo que entendemos de simbiose o qual vai se processando e ampliando entre a Linguagem e a Matemática epistemologicamente promovida pelo exercício do pensamento filosófico ao exercício do pensamento matemático. Como resultado dessa aproximação e movimento, Dedekind constrói a noção de Números Reais de forma independente da noção de limite, com seu postulado da continuidade a partir da noção algébrica de corte, uma construção formal do conjunto de Números Reais.

Destaca-se no pensamento de Dedekind o limiar de um rompimento com a dicotomia entre discreto e contínuo, dicotomia historicamente evidenciada entre a Aritmética e a Geometria. Identificamos que, para se caminhar no sentido desse rompimento, foi importante o movimento histórico que direcionou ao rompimento do distanciamento da Linguagem em relação à Matemática e ao processo cognitivo, principalmente, posicionando a Linguagem num sentido operativo e constitutivo do/no desenvolvimento do Conhecimento Matemático.

Dessa maneira, assistimos consolidar-se, em Dedekind, o caminho ao desenvolvimento do conceito geral abstrato do Número Real. E o termo *axioma*, mesmo ainda sendo considerado como regras para Dedekind, explicitamente, assume o *status* de proposições hipotéticas, não tratando mais de ‘verdades’. E este sentido de hipóteses aos *axiomas* pode ser reconhecido e destacado do tratamento dado por Dedekind, especificamente ao número, como de construções ou elaborações humanas.

Posteriormente e quase contemporaneamente à Dedekind, o matemático italiano Giuseppe Peano (1857-1932) publica seu livro *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* (1899) onde desenvolve e elabora os famosos *Axiomas* de Peano, considerados até hoje como a *axiomatização* padrão dos Números Naturais. Segundo Otte (2013)<sup>197</sup>, na realidade, Peano havia roubado a ideia de Dedekind, de forma que até ele mesmo em determinado momento admite ter copiado Dedekind.

Para a construção dos Números Reais, foi imprescindível o desenvolvimento do Cálculo e um aprofundamento significativo sobre suas ideias fundamentais, tais como a noção de limite e conceito de continuidade. Neste sentido, observamos que a Lógica foi fundamentalmente importante, no sentido da Semiótica/Linguagem e impregnando-se os fundamentos da Matemática. Fruto da aproximação entre Lógica e Matemática e os desenvolvimentos consequentes, assistimos ao termo *axioma*, passando a ser interpretado como sinônimo de hipótese. Mas, de certa maneira, houve um incremento no pensamento e no entendimento de que a Lógica (leis fundamentais da razão) poderia ser a base para toda a Matemática.

É interessante fazermos aqui um adendo reflexivo sobre a relação entre Lógica/Linguagem e a Matemática. Assim, entendemos oportuno e interessante a abordagem que Russel faz, destacando dois sentidos relacionados à constituição do pensamento matemático:

A matemática é um assunto cujo estudo, quando iniciado nas suas partes mais familiares, pode ser conduzido em dois sentidos opostos. O mais comum é construtivo, no sentido da complexidade gradualmente crescente: dos inteiros para os fraccionários, os números reais, os números complexos; da adição e multiplicação para a diferenciação e integração e daí para a matemática superior. O outro sentido, menos familiar, avança, pela análise, para a abstracção e a simplicidade lógica sempre maiores; em vez de indagar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admite no começo, indaga-se que mais ideias e princípios gerais podem ser encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido. É o facto de seguir este sentido oposto que caracteriza a filosofia matemática, em contraste com a matemática comum. Mas deve ser entendido que a diferença de sentido da pesquisa não está no assunto, mas sim no estado de espírito. Os géometras gregos antigos, ao passarem das regras de agrimensura empíricas egípcias para as proposições gerais pelas quais se constatou estarem aquelas regras justificadas, e daí para os axiomas e postulados de Euclides, estavam praticando a filosofia matemática, segundo a definição acima; porém, uma vez atingidos os axiomas e postulados, o seu emprego dedutivo, como encontramos em Euclides, pertencia à matemática no sentido comum. A distinção entre matemática e filosofia matemática depende do interesse que inspira a pesquisa e da etapa por esta atingida, e não das proposições que ocupam a investigação (RUSSELL, 2006, p.13-14).

---

<sup>197</sup> Comentário informal do Professor Michael F. Otte em momento de Orientação.

Para Russell, ambas a Filosofia Matemática (Lógica/Linguagem) e a Matemática (Aritmética/Geometria) são dois tipos de instrumentos indispensáveis para ampliar nossa capacidade lógica: uma para nos fazer avançar até a Matemática superior e a outra para nos levar de volta aos fundamentos lógicos das coisas que somos propensos a aceitar como fatos consumados em Matemática.

Entretanto, cabe lembrar que Russell é da corrente logicista na Filosofia e nos fundamentos da Matemática. Uma característica essencial desta corrente é a crença de que a Matemática (ou parte dela) pode ser reduzida à Lógica e um instrumento técnico desta redução é a teoria dos tipos que Russell desenvolveu em várias publicações, com especial relevância para os três volumes do *Principia Mathematica* (1910-13) em parceria com Alfred North Whitehead. Mas isso não tira o mérito de sua reflexão sobre os aspectos em jogo no desenvolvimento do pensamento matemático.

A teoria dos tipos sobreviveu como sistema fundacional da corrente logicista, mas depois de um tempo começou a tornar evidente que os fundamentos dessa teoria não eram de natureza puramente lógica (como mostra o *axioma* multiplicativo ou o *axioma* da redutibilidade) o que, segundo Oliveira, “não comprometeu aquela parte do programa científico de reconstrução da matemática que é independente de considerações sobre a natureza ora lógica ora matemática das entidades e dos princípios básicos” (RUSSELL, 2006, p.8).

Interpretamos que a incorporação do método *axiomático* (numa convergência ao que se configura atualmente) à Matemática e o termo *axioma* assumindo o sentido de hipótese seja fruto de um processo dinâmico dessa primeira dimensão de simbiose entre a Filosofia e a Matemática, que conduziu à convergência entre a Linguagem/Lógica e a Matemática. E Russel (2006) apontou que, nessa direção, poderemos destacar o pensamento de **Peano** (1858-1932), sendo que ele quando da redução de toda a Matemática pura tradicional à teoria dos Números Naturais, deu um importante passo, reduzindo essa própria teoria ao menor conjunto de premissas e termos não definidos, a que ela pudesse ser deduzida.

Segundo nossas observações, o ponto de vista que assume os *axiomas* no sentido interpretativo de hipóteses não era amplamente aceito antes do século XX. E compreendemos que essa mudança tenha ocorrido devido a pressões internas da própria Matemática, sendo que uma delas inclui, principalmente, a descoberta das Geometrias não euclidianas.

Kennedy (1972, p. 133-136) identifica uma transição do sentido de ver um *axioma* como princípio ‘autóvidente’ e geralmente aceito pela visão moderna, assumindo o sentido interpretativo de sinônimo a hipóteses, ocorrendo somente na segunda metade do século XIX e podendo ser encontrado num período breve de 1882-1889, que vai desde a *Vorlesungen über neuere Geometrie* de Pasch até a *I principii di Geometria logicamente esposti* de Peano.

Pasch primeiro promoveu que o interesse se deslocasse dos teoremas aos *axiomas* e contribuiu para isso, mas, sobretudo, ele esteve sempre preocupado em encontrar um conjunto de *axiomas* completo e isso fez com que ficasse conhecido como o Pai do Rigor na Geometria. Peano tinha conhecimento do trabalho de Pasch, assim como veio a conhecer o de Dedekind e como era evidente as inovações importantes que ele fez à Matemática. Para nós, é de extrema importância constatar que uma dessas inovações é a declaração explícita da atitude moderna relacionada aos termos não definidos de um sistema *axiomático* matemático.

**Giuseppe Peano** é considerado um dos fundadores da Lógica Matemática e da Teoria dos Conjuntos, como é também conhecido como o Pai da *Axiomatização* padrão dos números naturais, os famosos *Axiomas de Peano* (de 1899).

Os *axiomas* de Peano foram também designados como ‘Axiomas de Dedekind-Peano’ ou como ‘Postulados de Peano’. Já neste ponto podemos destacar a que o sentido interpretativo de hipóteses é assumido ao *axiomas*, especialmente pelo fato notadamente de nomeá-los como postulados. Para Kennedy (2002), não pode haver dúvida de que realmente os famosos cinco *axiomas* dos números naturais são justamente chamados Postulados de Peano. Sobre a posição de Peano, em relação ao desenvolvimento de Pasch e Dedekind, Kennedy (2002, p.27) nos diz que:

[...] Peano sempre tentou colocar seu trabalho na evolução histórica da matemática, a vê-la como uma continuação e desenvolvimento do trabalho dos outros. Além disso, ele era escrupulosamente honesto (embora às vezes confundido) na atribuição de prioridade da descoberta. Assim, no *Principii di Geometria* ele elogia o livro de Pasch e indica com precisão em que medida o seu tratamento coincide com o dele, e onde ele é diferente. Por outro lado, a descoberta de Peano dos postulados para os Números Naturais era totalmente independente do trabalho de Dedekind, ao contrário do que muitas vezes se supõe.

Figuram, no conjunto desses *axiomas*, a definição de Números Naturais, mas, em nosso entendimento, de acordo com Peano, eles conteriam mais as suas fundamentais propriedades. E tal procedimento comunga com o desenvolvimento do método *axiomático*. São, pois, utilizados, na maioria das vezes, sem qualquer modificação em investigações

metamatemáticas, inclusive, em pesquisas que tratam de questões fundamentais de consistência e completude e da teoria dos números.

Em nossa interpretação, o interesse de Peano sempre foi a *axiomática* e estava centrado unicamente em buscar uma definição de Número, como também ele nunca utilizou a Lógica matemática, desenvolvida por ele, para uma redação dos conceitos matemáticos à Lógica conceitual, inclusive, negando tal redução.

Entendemos relevante destacar que, em 1881, Charles Sanders Peirce mostrava uma forma de *axiomatização* da Aritmética dos Números Naturais. Seguidamente, em 1888, Richard Dedekind aparece com a coleção de *axiomas* sobre números, e somente na sequência é que Peano, em 1889, reformula, amplia o entendimento e publica sua versão com uma coleção de *axiomas* no livro: *Arithmetices principia, nova methodo exposita*.

A exposição dos *axiomas* de Peano, contêm três tipos de declarações, que são explicitamente tomadas como postulados e o sentido à elas atribuído não é mais de sinônimo de verdades, e isto fica claro nos seus posicionamentos. Tais *axiomas* como proposições no sentido operativo na constituição conceitual. A partir do desenvolvimento de Peano, assistimos à objetividade do Conhecimento Matemático se deslocando de seus fundamentos a suas aplicações futuras, o que é característico da propositura *axiomática*. Como observamos o pensamento matemático passando a configurar-se, caracteristicamente, pelo raciocínio diagramático-estruturalista e relacional. E, começa a emergir uma tendência ao pensamento formalista e logicista.

Na sequência a esses desenvolvimentos, Russell descobre que a noção de conjunto possui armadilhas, contradições, que denomina de antinomias, mostrando que mesmo a Lógica, que parecia dominar no método genético em desenvolvimento, poderia nos conduzir a contradições, levando a uma crise dos fundamentos matemáticos. Numa tentativa de resolver o paradoxo da Lógica intuitiva, que conduzia a contradições reveladas por Russell, destacamos o desenvolvimento do formalismo por **David Hilbert**.

Para nós, é essencialmente relevante destacar no pensamento de Hilbert que o termo *axioma* já é assumido no sentido de sinônimo de hipótese e, em nossa interpretação, isso resulta de uma inserção definitiva da Linguagem no processo desenvolvimento do conhecimento matemático. e, de uma completa simbiose entre Filosofia e Matemática. A Linguagem e, em consequência, uma perspectiva interpretativa semiótica já é adotada nos fundamentos do Conhecimento Matemático. Hilbert constrói uma *axiomatização* dos números

reais e elabora uma estrutura teórica para os números complexos. Na sua definição de número, os *axiomas* têm o sentido operativo, referindo-se a relações entre conceitos. Nesta acepção, de acordo com Otte (2013)<sup>198</sup>, a perspectiva admitida estruturalista do método *axiomático* é um construtivismo; assim, os *axiomas* não podem referir-se a verdades, mas têm o sentido de hipóteses.

Em Hilbert, os *axiomas* tratam de proposições e estas são tomadas como premissas de uma dedução lógica, pela qual podemos chegar a conclusões que são outras proposições ou teoremas. A *axiomatização* da Aritmética formaliza a inserção do pensamento relacional e estruturalista no e ao desenvolvimento da Matemática.

Os trabalhos de Hilbert partiram do fato de ele perceber que havia grande diferença da Geometria de figuras para a Geometria da estrutura do espaço e, assim, ele saiu à procura de uma fundamentação apropriada para o Conhecimento Matemático. Nesse caminho, ele chega a sua visão da *axiomática* e ao desenvolvimento de sua ‘nova’ abordagem *axiomática* formal/abstrata. Nessa *axiomática*, observamos que o tratamento empreendido por Hilbert ao termo *axioma* é o de enunciados hipotéticos e não verdades profundas e fundamentais; a condição de verdade repousa somente em que, se alguma coisa é verdade, a outra que dela provém e decorre também o é. E a visão descritiva conceitual é totalmente substituída pela noção estrutural no estabelecimento dos conceitos e, nesta direção, os *axiomas* assumem caráter operativo.

Para esse matemático, os *axiomas* referem-se às proposições hipoteticamente postuladas que são avaliadas por suas consequências lógicas e matemáticas, não expressando alguma verdade objetiva fundamental e dada pela intuição.

O trabalho de Hilbert assume claramente a aproximação entre a Linguagem e a Matemática na constituição de seus fundamentos e, em seu trabalho, trataria especificadamente direcionado à fundamentação da Aritmética. Por exemplo, ele afirma que, para se evitar paradoxos na elaboração de uma fundamentação rigorosa e satisfatória do conceito de número, é necessário um desenvolvimento parcial e quase simultâneo entre a Lógica (Linguagem) e a Aritmética (Matemática), chegando ao que ele designou por método *axiomático*.

Hilbert orienta que, ao buscar os fundamentos da Aritmética, devemos romper com a impossibilidade (esta impositiva) de se recorrer à outra disciplina (a Geometria, por exemplo)

---

<sup>198</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação, em 09/04/2014.



e trazer e operar a conjunção frutífera ao pensamento matemático (aritmético e geométrico) e à Lógica (e, obviamente que, superando a perspectiva da Lógica Tradicional). Entendemos que Hilbert assume, neste sentido, uma perspectiva no sentido da Complementaridade ‘Otteana’;

Tal complementaridade revela-se na demonstração de que, na análise dos números reais, é possível encontrar um modelo de *axiomas* da Geometria. Ele estabeleceu seu ‘novo’ método *axiomático*, que é um modelo essencialmente único. Um modelo que, para ele, qualquer outro é isomorfo. Uma complementaridade que se destaca e é operada entre a aritmetização e a *axiomatização* (no sentido da Geometria que ele observava) e lógico-dedutivo (no sentido de método).

O processo de aritmetização do século XIX fez nascer a necessidade de fundamentação da Aritmética e, de outro modo, também, a necessidade educativa relacionada ao conhecimento científico que adveio com a revolução Industrial foram fatores que conduziram à nova relação entre a Linguagem e a Matemática. Esse movimento desenhou o cenário que embalava o pensamento de Hilbert e o conduziu à elaboração do seu ‘método axiomático’. De modo que os objetos matemáticos passam a ser as estruturas formalmente *axiomatizadas*, os sistemas, ou seja, as estruturas algébricas, as estruturas geométricas, a geometria não euclidiana etc.

Somente quando a Aritmética começa a fazer parte da Lógica, devido ao processo de aritmetização da Matemática, em especial da Geometria euclidiana, culminaremos com uma acentuada preocupação com os fundamentos da Aritmética, cujo desenrolar conduzirá à *axiomatização* da Aritmética. Especificamente, interpretamos em Hilbert esse caminho no direcionamento de seus trabalhos. De modo que assistimos ao termo *axioma*, definitivamente, assumir o sentido interpretativo de sinônimo de hipótese e a consolidação do Método *Axiomático* Formal. Para Hilbert, os *axiomas* figurão como proposições iniciais de uma dedução lógica.

Será através da ‘Teoria da Demonstração’ de David Hilbert, ao lado da teoria de G. Cantor (posteriormente *axiomatizada* por E. Zermelo em 1908) que se acomodarão, decisivamente, os conteúdos matemáticos do século XX e moldando-se, definitivamente, o método hipotético-dedutivo das teorias matemáticas modernas.

Seu objetivo, ao desenvolver sua Teoria da Demonstração, era mostrar uma nova maneira de se providenciar uma fundamentação para a Matemática. Neste trabalho, ele

consolida a abordagem *axiomática* formal à Ciência Matemática embora considerasse que o método necessitasse ainda de aprimoramento para seu desenvolvimento pleno.

Hilbert, no desenvolvimento dessa sua teoria, aponta que os métodos usuais não deveriam ser considerados como logicamente óbvios, necessitam de uma análise à parte, buscando observar se sua aplicação conseguiria levar a resultados desejáveis. Hilbert acreditava que, através da sua Teoria da Demonstração, poderia realizar esse empreendimento. Ele estava certo de que a Matemática não poderia ser uma ciência fundada apenas na Lógica. Entendia ser uma condição para aplicações lógicas que alguma coisa seja previamente apresentada às nossas faculdades de representação, “que certos objetos concretos extralógicos estejam intuitivamente presentes como experiência imediata antes de qualquer pensamento” (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.256).

Entendemos que, sobre este ponto, Hilbert assume também uma perspectiva ontológica semiótica uma vez que, para ele, “em particular, na matemática são objetos a considerar os próprios símbolos concretos cuja forma, segundo a nossa concepção, é imediatamente clara e reconhecível” (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.257).

A Matemática, para Hilbert, diferentemente da Lógica, tem um objeto e esses são apreensíveis intuitivamente, configurando-se em representações, e a Lógica necessita desse objeto para realização das operações lógicas. Nesta teoria de Hilbert, o raciocínio material é substituído pela manipulação de símbolos, de acordo com regras, sendo que, em sua opinião, é desse modo que o método *axiomático* alcança a fiabilidade e perfeição que pode e deve atingir para se tornar no instrumento básico de toda a investigação teórica.

Assim, ele destaca ao caráter operativo indicando que o programa delineado fornece a indicação dos *axiomas*, que escolhe para sua teoria da demonstração, sejam eles, os *axiomas*: da implicação, sobre  $\&$  e  $\vee$ , da negação, da Função Lógica  $\mathcal{E}$ , da igualdade e dos números. Além de *axiomas*, “há a necessidade de *definições explícitas*, que introduzem conceitos matemáticos e que têm o caráter de *axiomas*” (HILBERT in OLIVEIRA, 2003, p.260).

Há, no desenvolvimento de Hilbert, o que destacamos como sendo um empreendimento de complementaridade entre Lógica/Linguagem e o pensamento matemático/aritmético-geométrico. De forma que sua *axiomática* perfigurarão essa Complementaridade no desenvolvimento da sua Teoria da Demonstração.

Hilbert se defende de algumas críticas sobre a objetividade do Conhecimento Matemático. Assume uma perspectiva metodológica de sua Teoria da Demonstração e do seu

‘novo’ método *axiomático* formal, afirmando que, àquele que entende que esse caminho não produz a verdade geral e certa, proporciona-nos a exaltação da convicção de que a compreensão matemática, pelo menos, não tem limites e ainda é capaz de descobrir as leis do seu próprio pensamento.

Ele ainda cita Cantor, dizendo que “a essência da matemática consiste na sua liberdade” (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.284), acrescentando que, na Matemática, não existe o *ignorabimus*. Podemos sempre responder a questões com sentido e isso confirma, “como talvez tenha sido pressentido por Aristóteles, que a nossa inteligência não pratica artes secretas, mas apenas trabalha segundo regras bem estabelecidas e visíveis, que são ao mesmo tempo a garantia para a absoluta objectividade dos juízos” (HILBERT *apud* OLIVEIRA, 2003, p.284).

Hilbert chegou a diversos resultados originais e os entendeu como suficientes para darem prova do carácter matematicamente frutífero do seu ‘novo’ Método *Axiomático* Formal e a fecundidade deste, em sua opinião, é elemento fundamental em sua nova concepção. E entendemos que Hilbert inaugurou uma nova área de investigação matemática, a metamatemática, ou seja, a Matemática dos *axiomas*.

Segundo Lira (2008, p.9), o projeto de Hilbert consistia em três passos:

- . Introduzir uma linguagem formal e regras formais de inferência suficientes para que toda “demonstração correta” de um teorema clássico pudesse ser representada por uma dedução formal, partindo dos *axiomas*, com cada passo mecanicamente verificável.
- . Desenvolver uma teoria das propriedades combinatórias desta linguagem formal, considerada como um conjunto finito de símbolos sujeitos às permutações e reajustes, conforme permitido pelas regras de dedução (metamatemática).
- . Demonstrar, por meio de raciocínios puramente finitos, que uma contradição não pode ser deduzida dentro deste sistema.

Sobretudo, observamos que ainda consubstanciava no pensamento de Hilbert a busca pela certeza matemática. E viria de Gödel, em 1930, o golpe fatal em seu pensamento. Os teoremas da imperfeição de Gödel mostraram ser irrealizável o projeto de Hilbert, ou seja, que qualquer sistema formal consistente, suficientemente forte, que contivesse a Aritmética elementar, seria incapaz de demonstrar sua própria consistência.

Sem dúvida, no início do século XIX, a Matemática pura surge com base na análise da prova e para a criação de conceitos cada vez mais abstratos, sobretudo, a harmonia entre os meios e objetos da atividade matemática começam a se quebrar. A Matemática pura é a

filha de um crescimento explosivo da atividade matemática que ocorreu por volta de 1800 e que, nas suas origens, pode ser brevemente caracterizada quando afirmamos que, pela primeira vez na história da Matemática, um grande número de conexões entre resultados aparentemente muito diferentes e seus problemas foram detectados. A descoberta da Geometria analítica de Descartes iniciou um processo que se tornou realmente dominante desde o início do século XIX (OTTE, 2013).

A Matemática moderna nunca esteve satisfeita com o recurso à intuição para validar os conceitos geométricos mais elementares (ponto, reta ou linha). Assim, dirigiram sua atenção às questões básicas e partiram em busca não só de novos teoremas geométricos, mas também dos motivos da validade de todas as verdades geométricas. E, neste ponto, foi a Lógica que forneceu o caminho adequado para muitos matemáticos e logicistas e para este trabalho da Matemática que buscava respostas sobre o seu significado ou sobre sua justificação.

Neste estudo, também especialmente nos chamou a atenção o fato de a Lógica ter permanecido praticamente invariável (antes de 1900 não se falava em Lógica simbólica) durante dois mil anos, coincidentemente, o mesmo período em que o termo *axioma* e seu significado eram tidos como verdades irrefutáveis.

Outro aspecto que interessa e se destaca como resultado de uma aproximação entre a Linguagem e a Matemática reflete-se na evolução da lógica. A lógica tradicional, que era constituída, basicamente pela codificação que Aristóteles lhe conferiu, mudou nos últimos cem anos a uma lógica matemática ou *simbólica*. Na realidade a lógica no seu estado atual de evolução é *simbólica* e *matemática* (COSTA, 2008, p.13).

Interpretamos que esses fatos se inter-relacionam, sendo direcionados e estando conectados por um processo de aproximação da Linguagem ao processo cognitivo, à partir de um estreitamento da relação entre a Linguagem e a Matemática, resultado de um movimento dinâmico, em sua maior parte, exterior e direcionados pela relação entre a Filosofia e a Matemática, e, derivado de contingências históricas que abordamos e tentamos tornar mais evidentes nos capítulos teóricos deste trabalho.

O século XIX e início do século XX configuraram o tempo de grandes transformações na Matemática tanto na sua estrutura lógica, como no seu conteúdo, mas também observamos a forte transformação na Lógica, sendo, às vezes, difícil diferenciar onde começa uma ou

outra, apontando, em nossa interpretação, para um processo de simbiose. Tanto a Matemática como a Lógica avança no processo de simbolização, a Matemática assumindo níveis cada vez mais altos no processo de abstração e a Lógica deixando de ser entendida no sentido simplista de modo a fazer inferências. Entendemos e reafirmamos que isso se deve à aproximação e destaque que passa a ser dado à Linguagem no processo cognitivo e, para nós, essencialmente, à perspectiva epistemológica interpretativa semiótica que se assume no desenvolvimento cognitivo.

A Lógica também passa a figurar uma codificação das regularidades (Lógica simbólica) que se podem constatar no exercício da atividade construtiva da Matemática e do matemático. Assim, a Matemática e a Lógica, que eram domínio de estudos distintos, a primeira relacionando-se com a Ciência e a segunda com a Retórica e o idioma grego, começam a partilhar do mesmo território e seus percursos se entrelaçam. Interpretamos que o ponto nodal de promoção desse processo esteja relacionado com o aspecto e caráter linguístico em ambas.

Como afirmamos, a Lógica apropria-se do método de formalização matemático e a Matemática, ao evoluir de modo marcante, tornando-se cada vez mais abstrata e rigorosa, também se aproxima, por seu turno, cada vez mais da Lógica. Podemos destacar, como impulsionador e, ao mesmo tempo, resultado dessa aproximação, o uso tanto pela Lógica quanto pela Matemática do método *axiomático* e da formalização. De maneira que interpretamos ser pela convergência da Matemática à Lógica, ou de outro modo, da Lógica à Matemática, que podemos, também, identificar efetivar-se o nascimento do método *axiomático* nos moldes como se configura atualmente, ou seja, do método fundamental de codificação e de sistematização das disciplinas lógico-matemáticas (Ciências Formais).

Compreendemos que essa convergência só foi possível pelo ponto comum que sempre existiu entre elas: a Linguagem, mas necessitou de aproximadamente dois mil anos para se promover esse relacionamento, ou seja, a partir do momento em que é reconhecido o papel epistemológico da Linguagem no desenvolvimento do nosso pensamento e, especificamente, no desenvolvimento do pensamento matemático. Evidentemente, a Matemática não é uma Linguagem. É muito mais do que a Linguagem, mas, sem esta, ela não é quase nada.

A Matemática também é anterior à Lógica. Observamos que esse encontro coopera no sentido de que a Lógica tenha vindo complementar a Matemática no trabalho que lhe compete de indagar sobre o seu significado ou justificação e a ainda contribui com a Lógica no

processo de simbolização. Assim, tanto o raciocínio simbólico como a justificação se apresenta sintetizado no pensamento *axiomático* da Matemática, de modo a se tornar cada vez mais difícil distinguir onde começa e termina a Lógica, ou o pensamento matemático. Para Russell (2006), muito do trabalho da Matemática Moderna se encontra na fronteira da Lógica e a Lógica Moderna tornou-se tão simbólica quanto formal, demonstrando a relação que tem se estreitado mais e mais entre ambas.

Assim, o processo que aproxima a Lógica e a Matemática nasce da procura, centrada no fato de que todas as conclusões fossem derivadas não da intuição, mas a partir de proposições explicitamente formuladas através de meios puramente lógicos, dos seus pressupostos e *axiomas* ou, se isso não fosse possível, deveria ser expressamente declarado por novos axiomas. Frases como ‘resulta a partir da consideração da figura ...’ ou ‘Pode ser visto a partir do desenho ...’, doravante, foram proibidas. Em particular, não haveria mais qualquer recurso tácito em provas geométricas para as propriedades cuja presença só poderia ser estabelecida através da observação da figura.

Neste momento, parecia intolerável que os princípios últimos - os *axiomas* da Geometria, que fundamentam todas as provas e, portanto, em si não são demonstráveis – devessem, ainda, a sua validade à intuição.

Esta foi a mesma intuição que os matemáticos tentaram eliminar a partir de procedimentos de prova, porque, instruídos especialmente com o desenvolvimento de pontos de vista sobre o postulado das paralelas, chegaram a suspeitar de sua confiabilidade. Se o significativo dos conceitos matemáticos básicos, tais como ‘ponto’, ‘linha’ ou ‘plano’, só poderiam ser exibidos por meio da intuição, então os *axiomas* que partem dela também podem ser obtidos a partir da intuição. No entanto, é precisamente a legitimidade de tal prova que era posta em questão.

O surgimento de novas ciências, como a Álgebra e disciplinas tradicionais como a Geometria e Aritmética estavam a se desenvolver consideravelmente, além de que, do ponto de vista filosófico, chamava muito a atenção, nesse período, a crescente autonomia do simbolismo matemático, advindo da nova concepção de número germinada do domínio da Álgebra.

Dessa forma, os números deixam de ser entendidos como entidades independentes que seriam apenas denotadas por símbolos e passam a ser entidades geradas pelo próprio simbolismo e caracterizados, exclusivamente, pelas relações operatórias com os outros

números. Vemos muito bem isso apresentado por Peano e sua definição *axiomática* de número. De acordo com Otte (2014)<sup>199</sup> a álgebra que se desenvolveu à partir do século XVI é essencialmente uma arte analítica e nos ajuda a entender a importância do método hipotético-dedutivo nas ciências e na Matemática, porque ela ensina-nos operar com um número desconhecido como se ele fosse conhecido. Ou seja, a álgebra é a fonte do novo entendimento de axiomas.

Entretanto, ao passo em que ocorre esse desenvolvimento e mudanças, outra mudança de significância especial se processa em relação ao Conhecimento Matemático, que trata da ampliação das necessidades educativas do Conhecimento. Consequentemente a esse movimento, observamos que passa a ser reforçado o sentido mais intenso de se considerar e confundir a Matemática como uma Linguagem, com a Lógica. Ela passa a ser compreendida no espaço didático educativo como coisa puramente mental. E a reforma da chamada Matemática Moderna mostrou isso claramente: os matemáticos puros passam a atribuir toda a aprendizagem e todo conhecimento objetivo à língua formal e à Lógica.

É em Piaget (1976, p.1-28) que vamos buscar um contraponto para essa posição formalista, empreendida ao Conhecimento Matemático e ao desenvolvimento do pensamento matemático. Piaget recusa o formalismo (como também recusa o construcionismo e o logicismo) como uma solução ao paradoxo apontado por Russel e, em um estudo sobre o objeto e os métodos da Lógica, interpretamos que o pensamento piagetiano compactua com o pensamento ‘Otteano’ de Complementaridade.

Piaget aponta outra visão na relação entre Lógica/semiótica e Matemática. Ele concebe as estruturas lógicas e matemáticas sendo parcialmente separadas, mas constituindo uma parte comum por assimilações recíprocas e não mais em um sentido único:

[...] a lógica não se ‘aplica’, pois, de for a, à matemática: ela lhe é parcialmente incorporada e se acha assim generalizada em lógica matemática. Inversamente, a matemática não se reduz tampouco à lógica, mas a completa e a modifica num processo de troca contínuo.

Desse modo, Piaget afirma que a assimilação recíproca entre Lógica/semiótica e a Matemática é especialmente clara no terreno da quantidade e que a quantificação lógica, com frequência, reduz-se apenas às relações da parte ao todo e de complementaridade (quantidade

---

<sup>199</sup> Comentário de Otte por e-mail enviado em 09 de novembro de 2014.

intensiva), enquanto as estruturas matemáticas supõem, além disso, uma relação quantitativa entre as próprias partes dos conjuntos (quantidades extensivas). Para Lira (2008):

É possível construir estruturas lógicas sem fazer apelo à matemática (classificações) e, inversamente, há um conjunto considerável de estruturas matemáticas que ultrapassam a quantidade lógica. Entretanto, as estruturas intensivas estão incluídas no seio da matemática (em teoria dos conjuntos) e é possível estabelecer relações sempre mais estreitas entre as estruturas comuns à lógica e à matemática (inclusões e complementaridade) e as estruturas extensivas (correspondência entre elementos, etc) sem que se possa pensar em separação pura e simples das duas (LIRA, 2008, p.10).

Entendemos que essa relação é mais apropriadamente com preendida no sentido de uma Complementaridade, e que, mais significativamente, efetiva-se na constituição do método *axiomático* à Matemática como reflexo da consolidação de um processo histórico-sócio-político e intelectual entre a Linguagem e a Matemática. De todo, observamos que conforme historicamente se processa à um estreitamento na relação entra a Linguagem e a Matemática, num direcionamento em que a primeira passa a assumir um papel e função mais objetiva na constituição do Conhecimento Matemático o sentido interpretativo do termo *axioma* tende ao sinônimo de hipóteses. Esta aproximação possibilita e possibilitou à matemática alçar níveis cada vez maiores de abstração, onde assistimos à objetividade do conhecimento produzido deslocar-se de seus fundamentos às aplicações futuras, e, ela neste estudo mostrou-se delineada e impulsionada por uma Complementaridade entre o exercício do pensamento filosófico e o exercício do pensamento matemático

### **6.1 Observações e reflexões de Otte sobre a mudança de significado do termo *Axioma*: três pontos a destacar**

Otte (2014)<sup>200</sup> destaca alguns motivos e ocasiões que, em seu entendimento, contribuíram decisivamente para a transformação do termo *axioma* de verdades para hipóteses. O **primeiro** trata do fracasso da visão pitagórica de aritmetização do mundo, ou seja, a ideia de que o mundo consiste de coisas e que a Matemática (o número) forneceria um modelo ou uma imagem desse mundo. De acordo com Otte, uma das descobertas mais importantes da Escola Pitagórica foi, sem dúvida, a incomensurabilidade do lado e da

---

<sup>200</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.



diagonal do quadrado, que implicou o fracasso da aritmetização. Esse fracasso conduziu à generalização do conceito de número, ou seja, possibilitando à uma inserção maior da Linguagem no desenvolvimento da Matemática.

Foi o aprofundamento e grande interesse no estudo do pentágono que, segundo Brolezzi (1996 p.16), os gregos teriam chegado a resultados tão surpreendentes que causaram verdadeira ruptura no pensamento da Antiguidade, a chamada ‘crise dos incomensuráveis’. Tal crise irá significar a mudança conceitual em relação à noção de número dos gregos. Na realidade, eles não mudam definitivamente sua posição em relação ao número e, para eles, continuam sendo considerados números somente os naturais. Mas eles inauguram uma nova área de conhecimento, que é a Álgebra geométrica, que trabalharia com números tratados geometricamente.

Identificamos, no redirecionamento a essa nova área, o ensaio à perspectiva no sentido de Complementaridade ‘Otteana’, espelhada na relação entre a Linguagem e a Matemática, a se revelar na/pele álgebra e esta, ao aplicar-se à Geometria, numa tentativa de se resolver uma tensão entre o discreto e contínuo, existente na concepção de número do povo grego. Essa crise dos incomensuráveis, que foi reforçada pelo pensamento Aristotélico, é de ímpar importância no estudo da evolução matemática.

Comentando a crise dos incomensuráveis, Bourbaki atribui aos gregos a idéia de número real, devido ao fato de possuírem uma teoria coerente de razões de quantidades. Segundo Bourbaki, basta terem colocado a questão da incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado para que concluamos que possuíam uma distinção muito clara entre uma razão e seus valores aproximados. Entretanto, essa distinção não serviu para entender a noção de número dos gregos. Evidentemente, o conceito de *números irracionais* está diretamente associado à noção de grandezas incomensuráveis. Mas os gregos não fizeram a extensão do seu universo numérico, apenas reforçaram a separação entre a *Teoria dos Números* e a *Geometria*.

[...]

A crise dos incomensuráveis marca assim o início claro de uma visão dicotômica entre a contagem e a medida, entre o discreto e o contínuo. E mostra claramente que a idéia de número é composta tanto de referências à contagem quanto de referências à medida (BROLEZZI, 1996, p.18-9).

Uma dicotomia que somente será resolvida somente mais tarde pela generalização do conceito de número. O próprio conceito destacará e trará imbutido o sentido de uma complementaridade entre discreto e contínuo.

A crise gerada na Grécia antiga pelos incomensuráveis concretizou a separação quase completa entre a Teoria dos Números e a Geometria. Contudo, assumir esta postura também conduziu a resultados importantes nos dois campos, ao evitar a discussão dos pontos de

tangência entre discreto e contínuo, números e a Geometria. Uma repulsa ao infinito gerou, ou, ao menos, contribuiu significativamente, para o desenvolvimento da ‘Álgebra Geométrica’, que consistia na resolução de problemas aritméticos ou algébricos, lidando diretamente com grandezas contínuas, isto é, realizando todas as operações sem necessidade de referência direta a números e suas representações. De modo que cada número seria um segmento de reta e somar significava juntar dois segmentos e formar um maior. A multiplicação era a obtenção da área do quadrilátero cujos lados são os segmentos dos fatores.

Desta forma, não era necessário distinguir entre números racionais ou irracionais, nem pensar se dois segmentos são comensuráveis ou incomensuráveis. Dados dois segmentos de reta, sempre era possível somá-los, subtrair um do outro, multiplicá-los ou dividir um pelo outro (isto é, encontrar o segmento que, multiplicado pelo primeiro, resulta numa área igual à do quadrilátero de um lado unitário e de outro igual ao segundo segmento). Tudo isso pode ser feito sem necessidade de *pensar numericamente* em nenhuma etapa do processo. A fuga e direcionamento à Álgebra geométrica estão registrados, principalmente, no Livro II de *Os Elementos*, de Euclides, que representa e espelha a busca que resultará no Cálculo Diferencial e Integral. Não é por acaso que os criadores do Cálculo, no século XVII, irão se voltar para Euclides e tentar buscar aí as ideias do Cálculo.

Os gregos não desenvolveram, por exemplo, o Cálculo, àquele tempo, por duas razões: pelo mal-estar diante do infinito – chamado *horror infiniti* – e pelo fato de que eles não possuíam a linguagem da Álgebra. Brolezzi (1996, p.25) observa que, para Euclides, a razão não era um número no sentido aritmético abstrato e o tratamento dado aos irracionais em *Os Elementos* era totalmente geométrico. Conseqüentemente, o tratamento e a concepção que permeiavam a sua elaboração tomam o termo *axioma* no sentido de verdade inatas e indemonstráveis.

A crise dos incomensuráveis, enfrentada pelos gregos se, de um modo, levou à separação da Aritmética e a Geometria, e, entre as operações lógicas daquelas infralógicas, promovendo o distanciamento da Linguagem ao processo cognitivo influenciando o modo como se pensava no mundo físico; de outro modo, ela apontou a necessidade de uma nova noção e base interpretativa e daquilo que, futuramente, seria conhecido pelo conceito de limite.

Só que o conceito de limite viria, somente a mil e quinhentos anos depois, explicar os números irracionais e ter-se-ia a resposta para tal separação. Sobretudo, devemos salientar

que os gregos haviam buscado uma resposta para a crise, criando o método da exaustão de Eudoxo, que era baseado no postulado de Arquimedes. Mas esse método não contemplava uma passagem ao infinito, uma vez que não existia a noção de infinito à época do povo grego.

A elaboração da construção formal do conceito de limite e do cálculo, com a sua redução à Aritmética dos números reais, é atribuída à Cauchy, em 1826, acrescida da formulação construída por Weierstrass, e, é ele que aponta a solução ao paradoxo dos incomensuráveis. Cauchy estabelece a noção de limites, em certa medida, elaborando, em linguagem matemática, uma estrutura flexível dentro da qual as noções de discreto e contínuo pudessem ser trabalhadas. Mas, mesmo com a noção e o conceito de Limite, ainda havia a necessidade da definição de Cálculo, que tratava da compreensão da natureza da reta real e dos números reais, associados aos pontos desta reta. Essa discussão foi feita por Cantor e Dedekind. Todo esse caminho que desemboca na teoria do Cálculo Moderno foi precedido e delineado pela teoria de Newton e de Leibniz, que viriam a se encontrar em um mesmo ponto, o Cálculo.

Antes de se chegar à noção de Limites, ao que eram os números reais, às ideias de movimento contínuo e de infinitésimos discretos, Newton teria chegado ao Cálculo pela via do contínuo, e Leibniz, pela via do discreto, ambas as maneiras se mostrando igualmente úteis. Esses dois caminhos irão desembocar na teoria do Cálculo que terá, posteriormente, uma evolução no sentido de definir melhor o que eram os números reais e a ideia de Limite.

Nesse sentido, observamos que, historicamente, foi necessário ultrapassar a visão dicotômica entre o discreto (extensão) e o contínuo (intensão) em que nasceram e ancoravam-se as duas teorias para que se chegassem à uma solução possível. De acordo com Boyer (*apud* LIRA, 2008, p. 31):

Somente após o desenvolvimento do conceito geral abstrato de número real o caminho estava claro para interpretar ambos os cálculos fluxionais [Newton] e diferencial [Leibniz] em termos de limite de uma sequência infinita de razões ou números; mas essa interpretação não tornou-se ainda aceita por mais um século.

E é assim que surge o Cálculo Moderno, ele é em essência, é o mesmo que ambos criaram, mas com Linguagem e abordagem conceitual bem distintas. A perspectiva de Complementaridade é destacada, quando vemos, no Cálculo Moderno, a operação de diferenciação associada à função derivada. Em Leibniz, a diferenciação agregava uma diferencial infinitamente pequena a uma variável. E, para Newton, tomar fluxões significava

associar uma velocidade finita a uma variável. De maneira que a concepção de operação fundamental nos cálculos desses dois matemáticos era totalmente diferente dos conceitos de diferenciação em uso no Cálculo Moderno. Podemos dizer (BROLEZZI, 1996, p.33) que o Cálculo Moderno é o “reino” onde interagem, de modo especial, discreto e contínuo.

Sobretudo, na mudança conceitual relacionada ao conceito de número, operacionalizada pela resolução da crise dos incomensuráveis na Modernidade, temos revelado, mais explicitamente, o redirecionamento interpretativo do termo *axioma* de ‘verdade’ ao sentido de sinônimo de hipótese.

Essa mudança será tecida pelo processo de aritmetização do contínuo que figurará como um objetivo fundamental da Matemática pura no século XIX. O distinto ou determinado de um lado (extensão) e o contínuo e possível (intensão), de outro lado, deixam de estar em forte oposição, como os sentidos e as referências dos nossos símbolos, através da Complementaridade que se torna operacionalizada entre *axiomatização* e aritmetização.

Uma **segunda** razão que contribuiu na mudança de significação do termo *axioma*, para Otte, repousa na crença de que a ciência e a metafísica devem ser consideradas e mantidas como separadas e a Matemática, sendo tomada como ciência analítica como a metafísica. Neste sentido ,enfatiza Pierre Duhem (1954, p.10):

Se a física teórica é subordinada à metafísica , as divisões que separam os diversos sistemas metafísicos se estenderá para o domínio da física. A teoria física famosa por ser satisfatória pelos sectários de uma escola metafísica será rejeitada pelos partidários de uma outra escola (DUHEM , P. 1954, *O objetivo e a estrutura da teoria física* , Princeton UP , 1954, p. 10).

Assim, a Ciência, para ser metafisicamente neutra, deve, portanto, tornar-se formal ou matemática. Para Duhem:

Uma teoria física não é uma explicação. É um sistema de proposições matemáticas , deduzidas a partir de um pequeno número de princípios , que visam representar de forma simples, tão completa e tão exatamente quanto possível, um conjunto de leis experimentais (DUHEM , 1954, p. 19).

Duhem nos chama a atenção para os modelos matemáticos que são simplesmente significativos para a conveniência do cientista e não servem como modelos físicos, a partir dos quais, as causas verdadeiras podem ser expostas e postuladas. Neste sentido, o termo *axioma* trataria de hipóteses e não de verdades.

Mas, desde os tempos de Platão, a Matemática tem sido fortemente, segundo Otte, associada à Filosofia e com a noção de verdade metafísica. Nossa interpretação apontou que Platão promove um movimento de simbiose entre a Matemática e a Filosofia; entretanto, Platão não faz uma ‘Filosofia da Matemática’, mas tenta transpor o método da Matemática à Filosofia, tomando-a como um Conhecimento propedêutico à sua dialética e um tipo de Conhecimento exemplar.

De modo que Platão considerava a Matemática como meramente instrumental ou uma maneira ‘conveniente’ de apresentar as coisas. Mas ele deixa claro que a tarefa do matemático seria projetar um sistema que reduzisse irregularidades aparentes do e no mundo aos movimentos perfeitos do mundo ideal. Assim, não seria tarefa do matemático explicar a realidade física da realidade subjacente. E era nesse sentido que para Platão a Matemática se ligava à metafísica, por elevar-nos ao mundo divino.

Assim, observamos que, mesmo em Platão, já temos, de certa forma, uma ideia da Matemática como instrumental, visto que ela funcionaria apenas para ‘salvar os fenômenos’, não para explicá-los (ideia que se fixará a partir de Aristóteles). A Matemática não parece, portanto, dar explicações substanciais no senso comum da Ciência aristotélica.

Como consequência, observamos que, para os sucessores gregos de Platão e Aristóteles, o debate entre os métodos de pensar sobre os céus se concentraram em dois pontos-chave:

O primeira foi a de que diferentes modelos matemáticos poderiam descrever , e salvar os fenômenos astrais igualmente bem. Hiparco apontou que epiciclos e excêntricos eram tão eficientes no acompanhamento do movimento das estrelas. Para os realistas isto era inaceitável . Os físicos queriam a causa , o astrônomo simplesmente queria uma solução que fornecesse o melhor ajuste para seus dados. A segunda questão-chave era a crença comum de filósofos e astrônomos que a física observável na Terra, ou sub-lunar, era completamente diferente da física celeste. Diante disso, os físicos estavam limitados à adivinhação quase completa , e com uma chance muito limitada para o sucesso (OTTE, 2014).

Segundo Otte, em 1543, Nicolau Copérnico (1473-1543 ) publica seu tratado *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (A Revolução de Esferas Celestes), no qual é apresentada uma nova visão do mundo: o modelo heliocêntrico . O aspecto mais importante do trabalho de Copérnico é que ele irá mudar para sempre o lugar do homem no cosmo, como também mudará a ideia do que isso significa para explicar o cosmo.

Mas Otte salienta que o mais importante e interessante é observar mais detalhadamente o posicionamento de Copérnico em relação às suas descobertas, mesmo

porque ele estava tentando minimizar as implicações filosóficas de seu trabalho àquela época. Nesta direção, ele assume a perspectiva platônica de ‘salvar fenômenos’, indicando que, aos modos matemáticos – do astrônomo -, as descrições pareciam úteis para uma apropriação técnica do mundo, mas não eram assumidas para fornecer explicações sobre esse mundo. Segundo Otte (2014)<sup>201</sup>, no mesmo espírito, é, por vezes, alegado que as máquinas podem servir a um propósito, mas não explicam nada. Mesmo o Cardeal Bellarmino, explicando sobre seu adversário Galileu, sugere, em uma carta (1615), que Galileu fala ‘hipoteticamente’ e ‘não absolutamente’ e isso é o suficiente para o matemático, haja vista que, ao matemático, compete a tarefa de fornecer descrições formais dos modos de funcionamento da natureza e, não, para explicar a realidade.

Esta maneira de compreender a Matemática, de outro modo, uma vez que a considera como propedêutica à elevação divina e, ainda, referindo-se a ela no sentido platônico para ‘salvar os fenômenos’, pode direcioná-la a uma nova leitura que a coloca em oposição à metafísica. O que influenciará sobremaneira a uma mudança na leitura do termo *axioma* ao sentido interpretativo de hipótese no limiar da Modernidade.

Mas não era deste modo que aconteceu, a partir de Platão (mesmo em Platão), o que temos foio desenrolar-se de uma ênfase numa perspectiva que compreende e situa a Matemática numa relação estreita com a Filosofia (e isto considerando Filosofia e religião, unidas) reforçando o sentido de verdades aos *axiomas*. Por isso, identificamos, e ressaltamos anteriormente, o que compreendemos como um processo tensional no pensamento platônico à interpretação de *axiomas*.

Otte (2014)<sup>202</sup> destaca vinculado à esse segundo ponto, o **terceiro** ponto destacado à mudança interpretativa do termo *axiomas* e ressaltado por Arpad Szabo (*Anfänge des euklidischen Axiomensystems*, In: . Becker, O. (ed), 1965 *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Darmstadt GBM, p. 355-461): a existência de uma relação entre o método *axiomático* e a dialética socrática. Esta, referindo-se a arte de troca de argumentos e contra-argumentos, em um debate que parte de pontos de vistas controversos. Assim, o método dialético seria uma estratégia de argumento para a resolução de controvérsias que foi fundamental à Filosofia antiga. Para Sócrates (e no pensamento Platônico), a dialética

---

<sup>201</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.

<sup>202</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.

favoreceria chegarmos à verdade como o valor mais alto, ao propor que poderíamos descobrir a verdade por meio da razão e da lógica em discussão: a dialética.

Otte (2014)<sup>203</sup> indica que, de acordo com Szabo, os três conceitos de hipótese, postulado e *axioma* tinham significados semelhantes na dialética pré-platônica. Todos eles designavam essas proposições iniciais com que os participantes de um debate dialético devem concordar. Assim, uma proposta inicial, já acordada, era então chamada de hipótese. No entanto, se os participantes não concordassem ou se não declaravam nenhuma decisão, a proposição era então chamada de *axioma* (Szabo 1965, p. 399 ).

Acontece, pois, que as Matemáticas das grandezas variáveis, cujo setor mais importante é o Cálculo infinitesimal, são, em essência, nada mais que a aplicação da dialética aos problemas matemáticos. Dessa forma, foi o renascimento do pensamento platônico na Modernidade que direcionou esta perspectiva. Neste ponto de vista de Szabo, e que, coloca o método *axiomático* em relação à dialética, os *axiomas* não tratariam de verdades absolutas e evidentes, mas o sentido mais aproximativo de hipóteses.

No desabrochar do século XIX , assistimos emergir uma concepção puramente formal de Matemática, não como uma Ciência de conteúdos, ou objetos, mas de estruturas ou invólucros formais de *possíveis* domínios de objetos. E elas afloram no contexto definidas por relações puramente formais, interiorizadas num sistema simbólico cuja interpretação não é pré-determinada, mas passa a figurar como o estudo de estruturas formais *axiomaticamente* definidas e suas relações recíprocas, segundo Bourbaki. Resulta daí que observamos ao termo *axiomas* assumindo o tratamento definitivo no sentido de hipóteses.

O fato de os matemáticos modernos não aceitarem e também não acreditarem tanto na intuição como em uma harmonia pré-estabelecida (divina), como base dos fatos ou objetos matemáticos, remeteu à tendência de se entender a Matemática como uma Linguagem formal e os conceitos matemáticos como meros instrumentos, que têm um sentido (regras de calcular), mas nenhum significado.

A fim de escapar dessa incerteza, os matemáticos retiraram-se para um caminho que é da maior importância para a epistemologia. Com base no trabalho preparatório de outros, David Hilbert comprometeu-se a construir a Geometria com uma fundação cuja absoluta certeza não seria colocada em perigo sob qualquer ponto por apelo à intuição. Para Otte

---

<sup>203</sup>Manuscrito orientativo de Otte não publicado..

(2013), se Hilbert foi bem sucedido em todos os particulares, ou se a sua solução ainda precisa ser complementada e aperfeiçoada, não nos interessa aqui. Nosso intuito está, unicamente, no princípio, na execução e na sua elaboração. O princípio em si é incrivelmente simples. A tarefa consistia em introduzir os conceitos básicos que são, no sentido usual, indefiníveis, de tal forma que a validade dos *axiomas* que tratam destes conceitos fosse rigorosamente garantida. E a solução de Hilbert era simplesmente estipular que os conceitos básicos ou primitivos devessem ser definidos apenas pelo fato de satisfazerem os *axiomas*.

Isto é o que conhecemos como definição por *axiomas*, ou a definição de postulados ou definição implícita. É importante que fique bem claro quanto ao que esse tipo de definição significa e proporciona e que do que ela difere do tipo comum de definição. Na Ciência, geralmente, o efeito das definições é criar conceitos como claramente determinados por sinais, por meio dos quais o trabalho de Conhecimento possa seguir em frente com total confiança. Assim, as definições constroem conceitos com todas as características necessárias apenas para esse trabalho. Agora, o trabalho intelectual da Ciência - em breve, teremos de examinar a sua natureza mais de perto - consiste em inferir, isto é, em deduzir novos julgamentos aos antigos. A inferência só pode prosseguir a partir de juízos ou afirmações.

Assim, quando utilizamos um conceito no negócio de pensamento, nós não empregamos nenhuma de suas propriedades, salvo a propriedade que certos julgamentos nos asseguram no que diz respeito ao conceito - por exemplo - , o que os *axiomas* asseguram para os conceitos primitivos da Geometria. Segue-se que, para uma Ciência rigorosa, que se engaja em uma série de inferências, um conceito é realmente nada mais do que isso, ou seja, uma relação sobre a qual certos julgamentos podem ser expressos.

Consequentemente, esta é também a forma como o conceito está sendo definido. E isso demonstra uma mudança que ocorre não somente relacionada ao termo *axioma*, mas também trata de uma mudança no próprio entendimento do *conceito* de conceito. A Matemática Moderna, na eleição para definir os conceitos básicos de Geometria, dessa maneira, não criou algo real e inteiramente novo e excepcional. Ela apenas descobriu o papel pelo qual esses conceitos realmente operam e sempre desempenharam na dedução matemática. Isso quer dizer que, quando se deduz verdades matemáticas umas das outras, o significado intuitivo dos conceitos básicos é irrelevante qualquer que seja. A Lógica mais tradicional já dizia que a verdade real das premissas é insignificante para a Lógica, o



importante é que tais premissas implicam uma conclusão, não que premissas e conclusões sejam verdadeiras.

O passo decisivo de qualquer raciocínio e todo Conhecimento versam no processo de dar nomes às coisas, de formar conceitos. O resto trata de mera lógica e fácil em relação ao primeiro passo (OTTE, 2013). A genialidade imensa de Kant consistia em entender isso (mesmo de uma maneira ainda bastante restrita):

O nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objeto mediante estas representações (espontaneidade dos conceitos); pela primeira é-nos *dado* um objeto; pela segunda é *pensado* em relação com aquela representação (como simples determinação do espírito). Intuição e conceitos constituem, pois, os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que nem conceitos sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceitos pode dar um conhecimento (Kant, Crítica da R. P., B 74).

Filósofos como Bolzano e muitos matemáticos puros que ignoram estas verdades profundas foram forçados a entender a semântica só no sentido das leis da comunicação, ao invés de regularidades das relações de referência aos objetos, ou tinham de assumir mundos construídos como referência da significação. (“Abstração reflexiva” de Piaget, por exemplo).

Como já afirmamos, esses matemáticos puros atribuíram toda aprendizagem e todo conhecimento objetivo à língua formal e à Lógica – e a reforma da chamada ‘Matemática Moderna’ mostrava isso claramente. Mas a Lógica, não podemos esquecer, é uma filha da Retórica e a Retórica serve para promover os interesses e os pontos de vista do falante, ou seja, é a irmã da política (OTTE, 2012). Nesta direção não faz mais sentido um tratamento de *axiomas* como verdades, e, como este estudo demonstrou desde antes Platão já era deste modo. Em Platão o que conduziu à uma interpretação dos *axiomas* como ‘verdades’ foi sua histórica disputa com os sofistas, uma questão política.

## **6.2 O ponto ao qual convergem os movimentos tensionais a uma mudança interpretativa do termo *axioma* e que impulsionará a mudança e rompimento do sentido de ‘verdade’ ao sentido de ‘hipótese’**

Soma-se, à interpretação de Otte, a nossa interpretação de ter sido, a partir de Kant, ‘com Kant’, e inclusive às críticas contrárias dos matemáticos da época ao intuicionismo de

Kant, que identificamos iniciar-se a versão linguística dos procedimentos hipotético-dedutivos e, neste sentido, contribuindo para nova interpretação do termo *axiomas*. De forma que, claramente, observamos o *status* do termo *axioma* começando a sofrer mudança profunda para assumir o sentido de hipóteses e não de verdades. E a Matemática, ao invés de ser uma coleção de métodos para resolver problemas, transformando-se numa coleção de teorias.

Otte (2014)<sup>204</sup> afirma que a novidade da Ciência e da Matemática Moderna está no seu caráter de uma *instituição social*, em vez de uma coisa mental e, por isso, o nominalismo filosófico que dominava toda epistemologia na época ‘Clássica’ (para Foucault XVII e XVIII) tornou-se insuficiente. A Lógica é uma língua e nenhuma língua tem condições de falar sobre a realidade em si, ou seja, as palavras não criam um mundo objetivo.

Observamos que a concepção de *axioma* veio gradativamente sendo diferenciada da noção, ou do sentido interpretativo de proposições verdadeiras, a partir do momento em que a Linguagem começa a assumir *status* epistemológico, ou seja, um papel ativo na produção do Conhecimento. Também observamos que, quando o sujeito epistêmico entra em cena e, neste sentido, as ideias de Kant foram fundamentais, houve uma abertura mais intensa do pensamento filosófico e científico à Linguagem ao/no processo cognitivo e, nesta direção, à mudança na interpretação de *axioma*, tomando o direcionamento do sentido interpretativo de hipótese.

O século XIX é, em nossa interpretação, ponto referencial à mudança de sentido do termo *axioma*. Uma mudança que se alicerçou também na transformação da visão de mundo do homem e isso com reflexos na dinâmica relacional entre a Linguagem e o processo cognitivo, entre a Linguagem e a Matemática condicionado pelo pensamento filosófico.

O simbolismo, na Antiguidade, essencialmente, constituía-se em apenas uma forma abreviada da Linguagem discursiva usual, mas, conforme se processa um estreitamento na ligação entre a Linguagem e a Matemática, a notação algébrica passa a constituir-se num sistema simbólico bastante flexível, como pudemos observar nas técnicas árabes de resolução de equações que progridem e tornam-se técnicas sofisticadas, transformando-se num processo mecânico de manipulação de símbolos. Já com a Modernidade, o simbolismo algébrico parece adquirir vida própria, principalmente, gerando os seus próprios conceitos.

Como Otte (2012) explica, o significado de um texto é uma função da estrutura total e, nessa direção, o significado de qualquer *axioma* ou de um conjunto de proposições

---

<sup>204</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.

axiomáticas é-nos dado pela sintaxe total de suas proposições e o seu sentido em suas aplicações (possíveis). “A função de um carro não reside nas rodas ou no volante, mas sim na estrutura integral do veículo” (OTTE, 2012). Com este pensamento e olhando, por exemplo, para os *axiomas* de Peano, podemos destacar que o sentido interpretativo de *axiomas* é o de hipóteses, já que sua objetividade não situa em seus fundamentos, mas nas aplicações futuras, diferentemente da configuração dos *axiomas* da Antiguidade.

Ocorre que, epistemologicamente, e isso foi determinante para essa mudança interpretativa do termo *axioma*, que a Matemática em Platão era uma Ciência da unidade e da ordem do nosso universo e isso perdurou até o pensamento kantiano. Mas em Galileu, começa o caminhar no sentido de promoção de uma mudança, pois as pessoas passam a acreditar que a Matemática não descreve um mundo objetivo, e pode não ser o reflexo de algum realismo metafísico. Começa um entendimento no sentido de que a Matemática é mais um reflexo da atividade humana neste nosso mundo. Este sentido veio a ser reforçado no pensamento kantiano e Otte indica que Kant parece ter sido o primeiro a perceber realmente isso, quando da sua Revolução Copernicana Epistemológica.

E, observamos ser, a partir do pensamento kantiano, que o termo *axioma* virá efetivamente desempenhar outro papel na constituição do Conhecimento, passando a designar proposições que descrevem relações entre conceitos e não mais tratando de princípios inatos, como sendo verdades. Assistimos ao início, no desvelar de um novo sentido interpretativo, no processo cognitivo e no desenvolvimento do Conhecimento Matemático, do um pensamento relacional-estruturalista.

Tudo isso veio a ser comprovado e reforçado no pensamento de Dedekind, Peano e Hilbert. A Matemática assume seu papel de melhor distinguir as coisas, indicando a transição de uma interpretação ontológica a uma interpretação epistemológica semiótica da Matemática segundo a qual o sujeito ontológico e sujeito epistemológico adquirem o mesmo *status*. Tal *status* tem a ver com o sentido de círculo hermenêutico do desenvolvimento do nosso conhecimento e ambas constituindo-se de base elementarmente simbólica – semiótica. Foi deste modo que, se processou a mudança interpretativa do termo *axioma*, de ‘verdade’ para o sinônimo de ‘hipóteses’.

À época do pensamento de Kant opera-se uma mudança no sentido da semântica do conhecimento Matemático, da dimensão representacional à dimensão comunicativa. E isso foi consequência de uma impregnação do pensamento filosófico à Matemática. E, foi somente à

partir do pensamento kantiano que assistimos ao nascimento da possibilidade de se fazer uma filosofia da matemática.

Historicamente, pudemos observar que sempre houve uma dicotomia interpretativa sobre o sentido do desenvolvimento do Conhecimento Matemático, sendo ora atribuída uma prioridade à matemática enquanto experimentos mentais, ora priorizado o contexto das provas formais. Da antiguidade até Galileu e mesmo Newton, Otte (2014)<sup>205</sup> nos afirma que o Conhecimento Matemático era tomado no sentido de experimentos mentais, isto é, o contexto da descoberta vem em primeiro plano, é por isso a matemática era considerada sintética. Mas, quando a filosofia, e neste sentido interpretamos o renascimento do pensamento platônico, à partir do século XVIII interpenetra o pensamento matemático vemos a ênfase se deslocar às provas formais. De modo que, nesse momento mais do que o contexto da descoberta o que passa a ser priorizado é o contexto da argumentação matemática, da justificação matemática. Foi nesse sentido e por isso que a matemática passou a ser considerada analítica. Sobretudo, entendemos que o Conhecimento Matemático é resultado de uma dinâmica entre esses aspectos. Por isso concordamos com Peirce em sua abordagem linguística-semiótica e quando ele diz que a matemática é pensamento diagramático. Pois a linguagem tem esse duplo aspecto: sentido e referência. Mas não entendemos a matemática como minimamente uma linguagem, ele é muito mais que uma linguagem, mas sem a linguagem ela não é “quase” nada.

Foi também neste contexto dessa mudança da prevalência do aspecto formal, da justificação matemática, em relação ao aspecto da descoberta que o termo *axioma* mudou do sinônimo de verdade para o de hipótese.

---

<sup>205</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado

## CONSIDERAÇÕES FINAIS: Afinal, o que é um *Axioma*?

Tomamos emprestado o título desta nossa Considerações Finais, do livro: *O que é um Axioma?* (SANT'ANNA, 2003). Este livro foi a primeira leitura indicada pelo nosso orientador Professor Otte. Fico especialmente muito feliz após quatro anos de estudo e pesquisa intensa constatar o quanto foi possível ampliar meu conhecimento sobre os fundamentos do nosso Conhecimento Matemático.

Na Antiguidade, especialmente à partir do pensamento de Aristóteles era usualmente comum tomar o termo *axioma* como ‘verdades inquestionáveis e indemonstráveis’. Da Antiguidade, na Idade Média até a Modernidade, prevaleceu o sentido de ‘verdades’, entretanto, constatamos por vezes, o termo *axioma* sendo assumido no sentido de *postulado*. Somente e efetivamente, a partir do século XIX, é promovido um sentido interpretativo mais fortemente ligado ao sinônimo de hipóteses e este se consolidará no início do século XX.

O resultado mais geral que observamos foi que o termo *axioma* na antiguidade era usualmente utilizado somente na Filosofia e o sentido interpretativo comungava mais usualmente com o de postulado ou indefinido. Inclusive observamos que Platão não utilizou essa terminologia, mas, foi a partir de Platão que termos da Filosofia começaram a serem apropriados ao pensamento matemático.

Platão foi um dos primeiros a promover um processo de simbiose entre a Filosofia (dialética) e a Matemática. Numa perspectiva ontológica platônica interpretamos que *axioma* toma o sinônimo de verdade e numa perspectiva epistemológica pode ser interpretado como o sinônimo de hipótese. Entretanto, quando apropriado por Aristóteles o termo *axioma* começa adquirir sentidos interpretativos bem diferentes do uso filosófico. O termo *axioma* às ciências objetivas – geometria, mecânica – de Aristóteles à Modernidade assumiu o sentido interpretativo de ‘verdades’.

Euclides não utilizou nomeadamente o termo *axioma*, ele fazia distinção entre o que ele chamava de *noções comuns* (gerais) e *postulados*. Sobretudo, as primeiras ficaram conhecidas como *axiomas gerais* e as segunda como *axiomas específicos*, sendo interpretados como verdades.

Será somente na Modernidade, com a efetivação do declínio do poder eclesiástico sobre o conhecimento, que esse termo mudará de sentido passando a ser interpretado definitivamente como sinônimo de ‘hipóteses’. Entendemos que essa mudança é processada

ao tempo em que se promoveu uma convergência do pensamento filosófico ao pensamento Matemático, através de um renascimento e uma re-leitura do pensamento platônico na matemática, com o surgimento e desenvolvimento da álgebra.

Nascido e reforçado pelo contexto educativo, uma releitura da dialética do pensamento platônico promoveu uma mudança na semântica, a prioridade no desenvolvimento do nosso conhecimento é transferida da dimensão da representação à dimensão comunicativa, da argumentação. Ou seja, muda a semântica do contexto da descoberta, ao contexto da justificação, daí passando ter mais valor as provas formais.

O processo de convergência entre filosofia e Matemática, concomitante à esse renascimento do pensamento platônico à matemática, iniciou-se no século XVIII. Este movimento promoveu uma maior reflexão sobre os fundamentos do próprio conhecimento matemático – e como resultado de uma releitura platônica aplicado aos fundamentos da matemática nasce a análise.

De modo que, interpretamos que a mudança no significado do termo *axioma* é operacionalizada fortemente por convergência do pensamento filosófico Platônico ( da dialética e da Lógica) ao pensamento matemático (geometria, cálculo-logística, ciência, técnica, a mecânica), operacionalizada por uma releitura da dialética no e ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático.

Quando olhamos para Euclides e seus *axiomas*, da antiguidade à Modernidade, estando em primeiro plano o contexto da descoberta o sujeito ontológico prevalece em relação ao sujeito epistemológico, e a veracidade do conhecimento situa-se em suas bases e fundamentos. Também observamos em especial que todo conhecimento é regido e regulado pelo objeto. Somente com a mudança de uma perspectiva epistemológica, que se opera com a Revolução Copernicana de Kant ( e dimensão platônica), o sujeito epistemológico (mesmo que transcendental) é trazido ao centro do processo, tal aspecto reforçará uma mudança do sentido do termo *axioma*, e, a possibilidade de inserção de uma abordagem interpretativa semiótica ao processo cognitivo. Foi decisivo neste processo o pensamento kantiano, pois é somente à partir de Kant que surge a possibilidade de se fazer uma Filosofia da Matemática, até Kant somente se filosofava à partir da matemática.

A somatória desses fatores conduzirá e produzirá à um grande desenvolvimento da álgebra (desenvolvendo-se como que uma linguagem) e conseqüentemente ao desenvolvimento do método axiomático-dedutivo. E, também como reflexo do contexto

comunicativo estando em primeiro plano – do contexto argumentativo-, das provas formais sendo colocadas em primeiro plano, assistimos desencadeado um estreitamento entre a Linguagem e a Matemática, e, ao desenvolvimento à níveis cada vez maiores de abstração do conhecimento matemático.

Numa dimensão semântica da representação e da descoberta os signos são relacionados com objetos, nessa nova perspectiva a comunicativa, a semântica trata da relação entre signos e signos. Haja vista que, nessa nova centralidade que prima pelo contexto argumentativo em Matemática o que passa ter realmente valor para o matemático são as provas e argumentos formais e os resultados consequentes, não mais os contexto de descoberta e de pesquisa como na semântica representacional. A intuição não é realmente o mais relevante neste contexto comunicativo, embora seja um instrumento útil no momento da pesquisa, da descoberta, ela não é relevante na resolução de um problema.

Esta reflexão pode explicar o fato de ter sido por isso que também em um primeiro momento a Matemática foi considerada sintética, e só com a Modernidade ela passa a ser considerada analítica. Sobretudo o pensamento sobre complementaridade ‘Otteano’, nos permite observar que o Conhecimento matemático contempla ambos os aspectos.

E, ainda em nosso entendimento, numa perspectiva complementarista, tanto a Matemática como o desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático contempla esses dois aspectos semânticos, tanto o linguístico relacionado à teoria da comunicação, quanto o contexto semântico da teoria da ciência.

Evidentemente que todas essas mudanças tão significativas ao desenvolvimento da Matemática e à mudança do termo *axioma* se processa como consequência de uma mudança na visão de mundo, na visão do que seja conhecimento (em outros aspectos também) e pela inserção da Linguagem de modo operativo à interpretação do desenvolvimento do nosso conhecimento. E, como entendemos ser impossível a qualquer linguagem representar de fato um objeto, mas sim que ele trata somente de uma modo de representá-lo (indica também uma releitura da grande disputa entre Platão e os sofistas) não tem mais sentido falar um tratamento de ‘verdades’ ao termo *axioma*, de forma que, muda-se o sentido interpretativo de ‘verdade’, passando ao de ‘hipótese’.

Também assistimos no século XIX o nascimento das Ciências Humanas e com elas um novo método interpretativo do conhecimento – o círculo hermenêutico. O círculo hermenêutico é o espelho do que compreendemos como Complementaridade. Ele representa a

possibilidade interpretativa assumidamente como um movimento dialético (no sentido de movimento processual dinâmico) entre aspectos que até então eram tratados como dicotômicos, ou seja, entre: descoberta e justificação, provas formais e intuição particular, argumentação e construção, etc. Foi nesta direção que nasceu a Sociologia, e de repente surgiram novas maneiras de interpretação de textos.

Segundo Otte (2014)<sup>206</sup> a igreja católica sempre evitou que isso acontecesse. Com um novo paradigma científico imposto pelas ciências humanas, foi que surgiu uma perspectiva interpretativa, sendo esta direcionada ao sentido da Complementaridade no século XIX. Com uma amplitude maior de possibilidades interpretativas fez-se surgir a necessidade de se encontrar uma arte de interpretação. E a busca dessa arte é que nos conduz à complementaridade, ao círculo hemenêutico.

Entretanto a ênfase à uma epistemologia mais centrada no contexto comunicativo, conduzirá o entendimento de alguns a que a matemática tratasse de somente uma linguagem formal. Como também, a matemática só passou a ser considerada analítica, porque o que importava era agora como se apresentar uma prova, um argumento, como comunicar, ou seja como ensinar. Nós observamos que muito geralmente fala-se que os professores em sala de aula dão um tratamento extremamente formal ao conteúdo matemático, é interessante perceber que foi o contexto da necessidade educativa em matemática o que conduziu de um lado à este formalismo, a uma visão analítica da matemática, e, de outro lado, ao entendimento de que a matemática fosse minimamente uma linguagem.

Sobretudo, no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ busca destacar a dinâmica existente e manifesta no Conhecimento Matemático entre aspectos como o da descoberta e o da comunicação, da intensão e da extensão, e que revelam a matemática não poder ser considerada como minimamente uma linguagem formal. De modo que, elementarmente a fundamentação semiótica do Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ justifica e destaca sobre a relevância do caráter indicial do desenvolvimento do Conhecimento Matemático situando neste aspecto a diferença elementar que existe entre a Matemática e a Linguagem. A manifestação do Conhecimento Matemático, suas teorias, seus conceitos são frutos de um processo de Complementaridade entre exercício do pensamento matemático e o exercício do pensamento linguístico.

---

<sup>206</sup> Fala de Otte em momento de orientação.



Resumimos a seguir três pontos gerais que se sobressaem em nossa análise reflexiva e que nos conduziram as considerações anteriores:

1 – Este estudo nos revelou, sobretudo que, uma relação entre a Linguagem e a Matemática foi operacionalizada pelo relacionamento, aproximações e distanciamentos, entre o pensamento filosófico e o pensamento Matemática. E que, na medida em que a Filosofia adentra os campo e atividades da Matemática, a Linguagem começa a ganhar destaque, e neste sentido o termo *axioma* tende a ser assumido como sinônimo de hipóteses.

2- Conforme se processa um movimento de distanciamento entre a Linguagem e a Matemática, conseqüentemente entre Filosofia e Matemática, observamos uma tendência a que o termo *axioma* seja tomado no sentido de ‘verdades indemonstráveis e inquestionáveis’. E observamos que, em geral, quando há esse distanciamento, o sujeito ontológico sobrepõe-se ao sujeito epistemológico.

3 – Antes do século XIX, sempre que a Linguagem ganhava espaço e destaque no pensamento de filósofos ou matemáticos dois caminhos distintos era tomados: ou existia um tendência de tomar-se a Matemática como uma Linguagem, ou a Matemática é tomada como uma Atividade (construtiva). Mas em ambos os casos o sujeito ontológico e epistemológico possuíam status distintos e os *axiomas* ora tendem a serem assumidos com o sentido de regras ou Leis, ora com o de *postulados*. Somente com a inserção de interpretação semiótica ao processo de nosso desenvolvimento cognitivo e do Conhecimento Matemático é que ambos, sujeito ontológico e sujeito epistemológico adquirem o mesmo *status* e o termo *axioma* definitivamente passa ao sentido de hipótese.

Otte (2014)<sup>207</sup> aponta-nos que, somente durante o século XIX, tornou-se uma opinião generalizada que os *axiomas* se referem a *hipóteses*. E as razões para explicar este fato sempre aparecem muito desencontradas.

Por exemplo, John Stuart Mill (1806-1873) (*A System of Logic*, 1843, 8ª impressão 1882, pp. 168-171, *apud* OTTE, 2014)<sup>208</sup> diz que os *axiomas* geométricos são hipóteses,

---

<sup>207</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.

<sup>208</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.

porque todo o conhecimento deriva da experiência e o bom senso nos afirma que não existe absolutamente conhecimento certo, baseado na experiência. Já Pierre Duhem (1862-1916) escreve: "Se a física teórica é subordinada à metafísica, as divisões que separam os diversos sistemas metafísicos se estenderá para o domínio da física. A teoria física que tem a fama de ser satisfatória pelos sectários de uma escola metafísica será rejeitada pelos partidários de uma outra escola "(Duhem, P. 1954, O objetivo e a estrutura da teoria física, Princeton UP, p. 10f, *apud* OTTE, 2014)<sup>209</sup>.

A Ciência, para ser metafisicamente neutra, deve, portanto, tornar-se formal ou matemática e isso implica que os *axiomas* sejam hipóteses formais, como no caso de Hilbert. E Duhem novamente relata: "Uma teoria física não é uma explicação. É um sistema de proposições matemáticas, deduzida a partir de um pequeno número de princípios, que visam representar de forma simples e tão completa e exatamente quanto possível, um conjunto de leis experimentais" (DUHEM, 1954, p. 19, *apud* OTTE, 2014)<sup>210</sup>.

De acordo com Otte (2014)<sup>211</sup>, para Mill, os *axiomas* são meras hipóteses, porque a Matemática é derivada da experiência empírica e não pode, portanto, estar absolutamente certa. E, para Duhem (e Hilbert) os *axiomas* são meras hipóteses, porque a Matemática deve estar livre de todas as opiniões (metafísica ou empírica). Mill apoia-se em uma teoria empirista da ciência e Duhem numa teoria instrumentista. É interessante observar que eles chegam a mesma conclusão por razões muito opostas.

Nós entendemos que uma abordagem interpretativa no sentido da Complementaridade ‘Otteana’ pode explicar melhor sobre essas conclusões tão díspares em concepções, principalmente, quando olhamos historicamente para o desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Mais especificamente, sobre o aspecto da relação processal na interpretação do nosso desenvolvimento cognitivo entre a Linguagem e a Matemática, destaca-se o aspecto como apontamos, de que, conforme existe um distanciamento da Linguagem ao processo cognitivo, por exemplo, do desenvolvimento da Matemática, existe a tendência de atribuir o sentido de ‘verdade’ aos *axiomas*. De outro modo, quando se toma a direção de uma abordagem interpretativa epistemológica semiótica, operacionalizada ao desenvolvimento da Matemática e se operacionaliza uma aproximação entre a Linguagem e a Matemática ao

---

<sup>209</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.

<sup>210</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.

<sup>211</sup> Manuscrito orientativo de Otte não publicado.

processo cognitivo e ao desenvolvimento da Matemática – o termo *axioma* passa a assumir o sentido de *hipóteses*.

Também podemos observar que Mill e Duhem concebem o Conhecimento Matemático com o mesmo *status* ontológico, ou seja, no sentido de uma aproximação entre a Linguagem e a Matemática, e, para um mesmo entendimento do termo *axioma* e este sendo o de *hipóteses*.

Sobretudo, alguns aspectos e desenvolvimento históricos mais específicos foram relevantes neste estudo em nossa interpretação e que entendemos influenciaram mudanças na relação entre a Linguagem e Matemática, consequentemente relacionado à mudança de significação do termo *axioma*, do direcionamento de ‘verdade’ para o sinônimo de ‘hipótese’. Compreendemos que tais aspectos – que se relacionam tanto a fatores externos quanto internos ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático - sejam elementares e indispensáveis na caracterização sobre como se processa a gênese e historicidade do Conhecimento Matemático. Sejam eles:

1º - Queda do poder eclesiástico sobre o Conhecimento humano. Em relação a questões ontológicas, observamos e destacamos um ‘rompimento com Deus’ que se intensifica à partir do pensamento Kantiano. Por exemplo, destacamos na fala de Hilbert, quando este afirma que a Matemática para *a sua fundação não necessita de Deus [...] (OLIVEIRA, 2003, p.274)*. Tal aspecto foi promotor e potencializador da aproximação da Linguagem ao processo de desenvolvimento cognitivo e na interpretação sobre o desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático. Atuaram como dinamizadores nesse ponto as descobertas de Galileu e a Invenção da Imprensa e, seguidamente, a Revolução Industrial, bem como os movimentos sociopolíticos e culturais tanto do Iluminismo como do Romantismo.

2º- Notamos, historicamente, uma proliferação histórica crescente das linguagens e códigos, foram intensificados com a Invenção da Imprensa que por sua vez, incrementa de modo nunca visto a reprodução e a difusão de informações e mensagens, a isso veio somar-se o advento da Revolução Industrial. Podemos inferir que esses aspectos foram fundamentais e, gradativamente, fizeram emergir, no pensamento filosófico e científico, uma ‘consciência semiótica’.

3° - Como resposta às mudanças sociopolíticas, concomitantemente e consequentes, à Revolução Industrial, começou a existir a necessidade de se educar matematicamente, de se formar engenheiros, mão de obra qualificada, fato este que também promoveu uma nova relação entre a Linguagem e a Matemática, principalmente porque o pensamento filosófico passa a penetrar o domínio do pensamento matemático. Já que, na Educação, o professor tem que comunicar o conhecimento para o aluno, esse fato irá conduzir e produzir reflexões mais profundas sobre as bases e fundamentos do Conhecimento Matemático. O contexto semântico muda, e a dimensão comunicativa torna-se mais relevante do que a dimensão representacional, neste cenário *axiomas* não podem ser mais verdades.

4° - Também destacamos o processo de uma particular convergência entre a Linguagem e a Matemática, no século XVII, operacionalizada pela promoção e convergência entre a Lógica e a Matemática, sendo a Lógica entendida como um tipo de Linguagem. Num primeiro momento passando a aferir e conferir o caráter de verdade ao Conhecimento Matemático. Mas como são as provas (cálculos) que teriam ligação com a Lógica, conseqüentemente, a Linguagem começa assumir, definitivamente, um *status* diferenciado no processo cognitivo. Como o paradigma de ciência era a Matemática, sobretudo, em certo sentido, essa aproximação irá imprimir o caráter de 'postulados', regras ou leis aos *axiomas*. Esta perspectiva aproximativa conduzirá a uma interpretação no século XIX no sentido de uma corrente interpretativa do pensamento que toma a Matemática como uma Linguagem Formal.

5° - Um renascimento do pensamento platônico, ou seja, uma releitura desse pensamento é operacionalizado no início da Modernidade (século XVIII), e que, numa re-leitura contribui também efetivamente e num outro sentido de convergência da Lógica à Matemática. Segundo Engels, a Lógica formal é também, antes de tudo, um método de perscrutar novos resultados progressivos de Conhecimento ao que não conhecemos. Esse autor observa que o mesmo opera com um sentido que se torna mais evidente na dialética, além disso, rompendo os estreitos horizontes da lógica formal, representando por si mesma o germe de uma ampla concepção de mundo. Engels nos diz que passa a ocorrer com as Matemáticas, as Matemáticas elementares, que operam com grandezas constantes, é que elas movem-se, pelo menos, em termos gerais, dentro das fronteiras da Lógica formal. As Matemáticas das grandezas variáveis, cujo setor mais importante é o Cálculo infinitesimal, nada mais são, em

sua essência, do que a aplicação da dialética aos problemas matemáticos. Nesta, o aspecto puramente probatório fica relegado a segundo plano, substituído pela aplicação variada e constante do método a novas zonas de investigação.

6º - Com uma convergência entre a Lógica e Matemática observamos a que a Linguagem universal do Conhecimento Matemático passa a ser em certa medida a Lógica. Como na Aritmética temos os números, começa-se um movimento de aritmetização da Matemática em confluência com a Lógica.

7º - Do movimento de aritmetização da Matemática, inicia-se um processo no qual os matemáticos começam a se preocupar com os fundamentos da Aritmética, por exemplo, definir o que é um número. E, neste ponto, observamos ser promovido o sentido de uma nova interpretação, agora, o de *hipóteses* ao termo *axioma* nos filósofos e matemáticos que estudamos. Uma aplicação reflexiva dialética aos fundamentos faz com que o conceito de número, de acordo com Poincaré (OLIVEIRA, 2003, p.316), fosse tornado mais claro e preciso; ao mesmo tempo, foi generalizado em várias direções. Sendo que a mais valiosa dessas propagações foi a introdução dos *números imaginários*. Os objetos da Matemática passam a ser estruturas, elementarmente, estruturas algébricas (estruturas geométricas, Geometria não euclidiana).

8º - Interpretamos que essa convergência que se estabeleceu entre a Lógica e a Matemática figurou como um dos fatores que conduziu e resultou na elaboração e estruturação do Método *Axiomático*. Resultado de uma convergência entre a Linguagem e a Matemática, entre Filosofia e Matemática. Com a formalização do Método *Axiomático* os *Axiomas* não são mais tomados como princípios a priori e intuitivos, mas passam a configurar proposições iniciais das quais ficamos deduzindo outras proposições e teoremas – assumindo o sentido de princípios de um sistema dedutivo lógico- hipotético.

9º - Indenficamos que, conforme se processa a aproximação da Linguagem ao processo cognitivo e ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático, de Platão à Modernidade, este movimento desenhará momentos de tensão na significação do termo *axioma*. De outro modo, a partir da Modernidade, essa aproximação se intensificou e determinou a possibilidade de um

empreendimento à interpretação semiótica ao Conhecimento Matemático resultando a efetivar-se uma tendência de interpretar o termo *axioma* como sinônimo de *hipótese*. Como já indicamos, essa aproximação entre a Linguagem e a Matemática mais se intensificou como fruto de um movimento que se inicia com a Invenção da Imprensa (socialização do Conhecimento – Iluminismo), vindo a somar-se com a Revolução Industrial (e o contraponto do movimento Romântico) e ao renascimento (re-leitura da dialética) do pensamento platônico, do empreendimento educativo à matemática. E isso culminará e se efetivará somente no século XIX, dois mil anos depois da *axiomatização* da Geometria assistimos à *axiomatização* da Aritmética. Principalmente, podemos dizer que, para que isso ocorresse, a natureza do termo *axioma* teve que mudar do sentido de ‘verdades’ para o de hipóteses, uma mudança imbricada e promovida, porque muda o modo de, no pensamento humano, conceber-se o próprio homem e este, em relação ao mundo; e assim, também altera nosso entendimento sobre como se processa nossa compreensão do mundo. Outro ponto a destacar é que a Modernidade começa a ser caracterizada pela flexibilidade do pensamento (o renascimento do pensamento platônico) e, em relação ao Conhecimento, ao invés de o considerarmos só uma atividade mais ou menos pragmática, assumimos uma atitude reflexiva, abrindo caminho ao que entendemos por metaconhecimento (contribui neste sentido o Movimento Iluminista e o Movimento Romântico).

10º - Também ressaltamos que, enquanto estivemos consubstanciados por pressupostos metafísicos e ontológicos, o termo *axioma* assumia o sentido interpretativo de ‘verdades’; já quando o plano epistemológico começa a sobressair ( e neste ponto o pensamento de Kant funciona como um ponto limítrofe), o termo *axioma* assume uma perspectiva interpretativa de postulados, mais próximo do indicativo de sinônimo de *hipótese*. A mudança nesse processo de significação se processa, deste modo, com a aproximação e estreitamento da Linguagem aos fundamentos epistemológicos do desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático, e nesta direção o sujeito ontológico e sujeito epistemológico adquirem o mesmo *status*.

11º - Um pensamento e teoria, em especial, que contribuem sobremaneira à aproximação da Linguagem como perspectiva interpretativa ao nosso desenvolvimento cognitivo, foi o de Immanuel Kant. E o ponto fundamental do pensamento kantiano foi sua Revolução Copernicana. Observamos que, no século XIX, o termo *axioma* deixa de ser entendido como

uma ‘verdade’ e passa a ser assimilado como sinônimo de *hipótese*; inclusive, com implicações no próprio entendimento da ‘verdade’. Enquanto, desde a Antiguidade, o sentido de ‘verdade’ é garantido pelo ‘divino’ ou esteve ligado a um atributo do objeto – conhecer o objeto/fenômeno/essência, na Modernidade, o sentido de ‘verdade’ passa a ser embasado na condição da prova, da coerência da estrutura conceitual e proposicional.

12º - Destacamos também neste estudo a uma transformação do pensamento conceitual que deixa de ser em termos de substância e de suas características assumindo um tipo de pensamento conceitual em termos relacionais, revelando a uma transformação profunda que se efetua no próprio entendimento do *conceito* de conceito. De acordo com Cassirer ocorreu uma mudança que pode ser evidenciada na Modernidade no modo de conceber um *conceito* e sobre sua constituição, e segundo ele, quem nos mostra isto mais propriamente é a própria Matemática. Nesta nova configuração do pensamento conceitual, o termo *axioma* assume status diferenciado na constituição de um *conceito*, este deixa de ter um tratamento como que referindo-se à verdades e passa a ser entendido no sentido interpretativo sinônimo de *hipóteses*.

13º - Consequentemente, entendemos que essa transformação no próprio desenvolvimento do *conceito* de conceito teve influência e está conectada à uma mudança interpretativa do termo *axioma* - que deixa de assumir o aspecto descritivo passando a assumir o sentido operativo. Neste último, os *axiomas* figuram como proposições que participam da elaboração de uma definição/conceito (p. e. do que é número real), estabelecendo relações entre os elementos constituintes e/ou *entes*. Como a configuração assumida no Método Axiomático.

14º - Foi também o processo de aritmetização da Matemática e o desenvolvimento da álgebra no século XVI que conduziu a novas reflexões sobre os fundamentos da Matemática, ao estabelecimento do método *axiomático*. Com o início do desenvolvimento do método *axiomático*, a Matemática passa a estar focada na construção de teorias e não mais somente em resolver problemas, destacando-se, deste modo, operou-se uma mudança do pensamento instrumental ao pensamento operacional.

15º – A álgebra que se desenvolve à partir do século XVI e mais intensamente no século XVIII é essencialmente uma arte analítica e nos ajuda a entender a importância do método hipotético-dedutivo nas ciências e na Matemática, porque ela ensina-nos operar com um número desconhecido como se ele fosse conhecido. Ou seja, a álgebra é “também” uma fonte do novo entendimento de *axiomas*.

16º- Com a nova *axiomática*, observamos que ênfase à *epagoge* (indução) é resgatada e também se mantém realçada a *apagoge* (dedução). Isto caracteriza uma diferença essencial da *axiomática* de Euclides e da *axiomática* a partir da Modernidade, pois em Euclides a *epagoge* havia sido abolida.

17º- O próprio desenvolvimento do método *axiomático*, em nossa interpretação, ao se revelar como produto de um movimento de Complementaridade entre a Linguagem e a Matemática, entre Filosofia e Matemática, de acordo com Otte, nos faz inferir que haja também um sentido de Complementaridade entre a *axiomática* de Euclides e a *axiomática* Moderna, pois “enquanto a nova axiomática, aquela que surgiu da álgebra do século XIX, pode somente ser vista como uma ferramenta – e muito poderosa – do pensamento da teoria dos conjuntos, a *axiomatização* de Euclides, isto é, a redução lógica, a análise e organização de noções inteligíveis e sentenças são ferramentas fundamentais e indispensáveis para pensá-lo” (CESARI *apud* OTTE, 2012). E nós precisamos dessas duas intâncias e aspectos no processo de desenvolvimento do nosso conhecimento.

18º - De todo, identificamos no desenvolvimento da Humanidade que se espelhou na secção temporal deste trabalho no desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático ao direcionamento e aumento à níveis cada vez maior de abstração do Conhecimento Matemático, sempre na medida em que se torna mais e mais operacionalizado um estreitamento a Linguagem e a Matemática, e, dimensionado pela relação entre a Filosofia e a Matemática. Evidenciados neste estudo especialmente em Platão, iniciando-se século XVI, reforçado à partir do pensamento de Kant e depois mais intensamente no século XIX, consolidando-se no século XX.



Ademais e sobretudo, ao concluirmos sobre ao relacionamento entre a Linguagem e a Matemática, observamos que este pode ser entendido como consequência de uma convergência e Complementaridade entre o exercício do pensamento filosófico e o exercício do pensamento matemático. Neste trabalho identificamos delinear-se mais intensamente este relacionamento no século XIX e como resultado deste movimento foi que chegamos ao desenvolvimento do Método Axiomático Dedutivo.

Um aspecto relevante sobre este estudo do termo *axioma*, trata de que, estes a partir da modernidade os *axiomas* passam a se configurarem ingredientes de uma teoria que passa a ser conhecida e chamada *Teoria Axiomática* –um método. Uma teoria axiomática, por sua vez, trata de um caso particular de uma teoria formal. Técnicas de axiomatização específicas utilizam de ‘linguagens específicas’ e formais, e, se referem sempre a situações especiais que satisfazem alguns critérios.

Dizemos Linguagem específica porque ela não é natural, podemos assim chamá-la de artificial, na qual os conceitos de ‘expressão’, ‘expressão significativa’ ou “*axioma*” são devidamente tornados precisos (SANT’ ANNA, 2003). A Matemática comumente lida com ideias abstratas e uma teoria axiomática busca expressar tais ideias. De modo que ela é formulada em Linguagens artificiais que tentam cumprir com esta finalidade.

Numa teoria axiomática, existe sempre um procedimento específico para distinguir *axiomas* de outras fórmulas bem constituídas que compõem esta teoria e por isso são conhecidas como teoria axiomática. Outro aspecto interessante é que não há qualquer exigência de que haja consistência entre os *axiomas*, podemos ter *axiomas* que se contradizem entre si. Também não se exige que os *axiomas* sejam finitos.

Não lidamos com qualquer noção de verdade numa teoria axiomática. Dessa forma, um *axioma* pode tanto ser verdadeiro, quanto pode ser falso. Assim, fica mais adequado atribuir-lhe o sentido sinônimo de *hipótese*. Também é incorreto dizer que os *axiomas* sejam sentenças aceitas sem demonstração, pois, em qualquer teoria formal, todos os *axiomas* são teoremas, independentemente de qualquer regra de inferência adotada.

Um conceito muito importante no método *axiomático* é a noção de *estrutura* em Matemática. Podemos dizer que *axiomatizar* uma teoria é definir uma estrutura em termos de noções da teoria de conjuntos, utilizando-se, para este fim, de uma Linguagem específica.

Observamos que uma teoria científica parte sempre de um mínimo de pressupostos; daí, por meio de um sistema dedutivo, permite a inferência do máximo possível de

consequências lógicas. Uma teoria *axiomática* reflete uma síntese significativa do método científico, ao proporcionar o poder de síntese em um grau que oferece outra perspectiva.

O método *axiomático* também qualifica o discurso, de modo a nos permitir que questões de caráter filosófico em Ciência sejam respondidas “objetivamente”. Funciona também como uma ferramenta didática muito interessante, ao representar uma economia de pensamento. E, além de tudo, é um excelente instrumento de pesquisa em Matemática. Segundo Sant’Anna (2003, p.131), “é como se estivéssemos olhando para o mesmo objeto no espaço, sob diferentes ângulos. Nesse sentido, o método axiomático é belo, pois sempre nos surpreende com novos aspectos quando o examinamos sob diferentes pontos de vista”.

Concordamos que o método *axiomático* contribui, sobremaneira, para ajudar-nos a responder questões sobre os fundamentos lógico-matemáticos de qualquer disciplina científica. E, a metamatemática que ele viabiliza é o que justifica sua tão ampla utilização e aplicação em outras áreas, além da Matemática propriamente.

A vantagem do método *axiomático* tem-se revelado enormemente, uma vez que nos permite tornar explícitas as suposições e princípios que alicerçam qualquer disciplina, tornando mais nítida a sua estrutura. E, mesmo ele sendo utilizado de forma precária e não desempenhando papel tão fundamental em outras Ciências (Naturais e Humanas), nem por isso ele perde seu caráter de relevância e sempre que há possibilidade, procura-se empregá-lo.

A grande vantagem, por exemplo, da axiomatização de qualquer disciplina, está na obtenção de um sistema axiomático tal, do qual esta disciplina é uma possível realização, uma vez que sabemos que um sistema axiomático pode receber as mais variadas interpretações. Com a consolidação desse método a objetividade do conhecimento definitivamente se deslocou dos fundamentos de uma teoria para suas aplicações no futuro.

A organização final de qualquer teoria lógico-matemática (Ciências Formais) ou das Ciências Reais tende, atualmente, a ser *axiomatizada e*, utilizando-se o método *axiomático*, a razão como que se objetiva. “Daí a relevância da estruturação axiomática dos contextos científicos, advindo desse fato um de seus traços marcantes, eles são em princípio, hipotético-dedutivos” (COSTA, 2008, p.37).

Observamos nesse nosso estudo que, desde Platão, já existia implicitamente a possibilidade interpretativa do termo *axioma* como sinônimo de hipótese. Mas esse significado só será definitivamente incorporado a ele, a partir da Modernidade, quando ocorre uma mudança radical na visão de mundo e, conseqüentemente, nos modos de se explicar, ou

melhor, de se entender como podemos explicar esse mundo. Também interpretamos que o método axiomático incorpora e reflete o renascimento da dialética de Platão que se processou à partir da Modernidade.

A análise e reflexão histórica nos leva a compreender que muitos conceitos matemáticos, como também a evolução e oscilações de significados de termos como *axioma*, são ferramentas desenvolvidas pelo ser humano e não são frutos e resultados de elaborações de uma só pessoa, mas resultados dos esforços de muitos. Assim, também entendemos que existe, mesmo entre pensamentos contraditórios, entre teorias que se opõem, o sentido de uma Complementaridade. É a partir de um movimento tensional gerado, no “balançar do pêndulo” que envolve aspectos polarizantes dos fenômenos, que assistimos emergir a potencialidade criativa da mente humana.

Defendemos que uma abordagem interpretativa de perspectiva semiótica e que agrega o pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ figura como um caminho possível e frutífero para compreendermos aspectos da gênese e historicidade dos fundamentos da Matemática e respondermos sobre eles de modo singular sobre aspectos aos quais nem o platonismo, ou o construtivismo, como também nem o nominalismo têm conseguido responder. Inclusive, percebemos que esta abordagem interpretativa pode ser empreendida desde a Antiguidade até os dias atuais para compreendermos sobre o desenvolvimento do Conhecimento Matemático.

A Matemática, diferentemente das outras Ciências, constrói, como fruto de um processo que entendemos ser semiótico, os seus objetos, figurando como o tipo de pensamento que chamaríamos de diagramático, relacional-estruturalista. De modo que a Matemática não se baseia ou se fundamenta na possibilidade de existência de seus objetos, mas seus fundamentos encontram-se no movimento de sua própria constituição e suas aplicações futuras. E, seu grande potencial heurístico reside na dimensão metafórica que ela apresenta e representa para o pensamento humano.

A Matemática, assumindo essa perspectiva de Ciência Formal, principalmente ao incorporar como empreendimento metodológico o Método *Axiomático*, promoveu, ao mesmo tempo, uma mudança no entendimento do que seja “verdade” e sobre o “critério da verdade”.

Dessa forma, acordamos com o pensamento de Newton da Costa (2008), que o conceito de verdade passa a não ter uma definição rigorosa, especialmente no tocante à Linguagem comum. O sentido de ‘verdade’, numa disciplina formal, englobará as dimensões

sintática, semântica e pragmática da Linguagem usual e se refletirá em uma metalinguagem, ou seja, numa Linguagem formal, devidamente paramentada.

A verdade não mais toma como critério a evidência, tampouco apela para a coerência forte ou fraca, ou menos, sequer, a analiticidade. Segundo Costa (2008), dada a natureza da concepção dialética das Ciências Formais, podemos inferir que não existe critério de verdade em Matemática, pois as verdades lógicas e matemáticas não se impõem em virtude de critério de verdade. Ao contrário,

[...] entram no domínio da ciência historicamente, pelos motivos mais variados, por exemplo, pela evidência, pela sua fecundidade ou pelo fato de se mostrarem essenciais em certos usos da razão. No entanto, a permanência dessas verdades como verdades dependentes da capacidade que demonstrarem de resistir à dialetização, às experiências de pensamento, intencionais ou não, que as testam (COSTA, 2008, p.260).

Por isso, trouxemos as perspectivas histórica, filosófica, semiótica que compreendemos inseridas completamente no pensamento de Complementaridade ‘Otteano’. É o movimento histórico do desenvolvimento do pensamento matemático na Humanidade que embalará o sentido da ‘verdade’. No entanto, observamos, sobretudo, que a verdade em Ciências formais também esteve sempre, histórica e intimamente, relacionada com o rigor. “No entanto, o rigor não é critério de verdade, entre outros motivos porque não há critério absoluto de rigor” (NEWTON, 2008, p.260).

Assim, mesmo o rigor também é relativo às etapas da própria evolução histórica das Ciências formais, da própria Matemática. “O padrão de rigor da geometria de Euclides não se admite mais hoje em dia [...]”, e mesmo o rigor sendo a própria essência das disciplinas formais, inferimos que ele tem dimensão histórica, não é estático mesmo em seus fundamentos; também evolui e se transforma no decurso da história da Humanidade. E em toda a história da Matemática, buscam-se, consciente ou inconscientemente, maiores padrões de rigor.

Segundo Newton (2008), não existe critério absoluto de verdade em Ciências formais, existem são *quase-critérios* que utilizamos na falta de um critério próprio. Dentre esses escolhidos, podem ser destacados além do rigor, a evidência, a clareza e a resistência à dialetização.

Atualmente, o rigor em Matemática se identifica com o método *axiomático*, ou seja, com a perfeita aplicação desse método. Entendemos que o rigor se constitui em um elemento de progresso, porquanto ele fecunda e ajuda a intuição, e o método *axiomático*, neste sentido,

satisfaz (pelo menos até o momento) a essa expectativa, principalmente porque o rigor figura como um traço nuclear desse método *axiomático* dedutivo. Mas, sobretudo, identificamos que tanto ‘rigor’ como ‘método’, têm características históricas, estando intimamente relacionados com as específicas situações históricas, nos diversos períodos de sua evolução.

Estudar a mudança de significado do termo *axioma* de Platão à Modernidade, em especial, para a mudança do sentido interpretativo (de ‘verdade’ para ‘hipóteses’), foi extremamente relevante para compreendermos sobre o próprio desenvolvimento do método matemático enquanto estratégia humana a fim de entender sobre o mundo e seus fenômenos. Deixou evidente, pelo menos em nossa interpretação, que o Conhecimento Matemático pode se constituir tanto objeto como método de manifestação do nosso pensar matemático. E, é assim que, neste sentido, entendemos que a Matemática não tenha “objeto”, mas tenha sim “objetividade”.

O método axiomático configura-se como um tipo de estrutura, personificação e formalização do pensamento relacional no/ao desenvolvimento de uma teoria. Onde o sentido de uma teoria surge em função da sua estrutura total – o estruturalismo. Um estruturalismo representa, neste sentido, uma forma holística.

**Afinal, como Otte nos chama a atenção, é interessante observar que a axiomatização da Aritmética surge quase dois mil após a axiomatização da Geometria. Como podemos explicar isso?**

Ele responde dizendo que primeiro, entendendo ter sido esse o tempo necessário para essa evolução Histórica e essa passagem que vai da contemplação, observação da realidade concreta à abstração, exigiu um grande esforço intelectual da Humanidade.

Segundo, que o desenvolvimento formal da Matemática foi delineado e conduzido pela renúncia, uma renúncia de afirmações sobre realidade dos fatos ou sobre a objetividade. Assim, observamos as teorias matemáticas passando a configurar-se em funções formais e a serviço de hipóteses, uma renúncia à explicações de coisas objetivas. A Matemática passa a fazer parte de um mundo ‘de fora’, ao tornar-se cada vez mais abstrata, onde a experiência cotidiana não tem mais acesso. E isso explica por que os *axiomas* mudam e não podem ser mais verdades fundamentais e só podem receber o tratamento de sinônimo de hipóteses. Só

existem símbolos e proposições com suas consequências, onde a objetividade é guiada e direcionadas pelas atividades envolvidas, as aplicações.

Assim nos atrevemos, muito resumidamente, a inferir dizendo que, de Platão até a Modernidade, o nosso desenvolvimento cognitivo e, especificamente, o Conhecimento Matemático desenharam e destacaram três dimensões: contemplativa/descritiva, relacional (análise de diferença e igualdade) e estruturalista. Otte (2014)<sup>212</sup> nos informa, inclusive, que, para ele, no processo que conduziu ao desenvolvimento do método *axiomático*, “foi Grassmann quem deu o último passo no desenvolvimento do Conhecimento Matemático e não é por acaso que ele foi o primeiro, em 1861, ao propor uma fundação axiomática para a aritmética, justamente porque ele tinha essa visão estruturalista”. Infelizmente não nos foi possível abordar o pensamento de Grassmann neste trabalho.

Quando chegamos ao estabelecimento e ao desenvolvimento do pensamento estruturalista, a generalização cumpre papel de fundamental importância. De modo que, segundo Otte (2014)<sup>213</sup>, assim temos a Matemática como exemplar do pensamento estruturalista e metafórico – entendidas no sentido de um raciocínio intelectual estruturalista. As metáforas não são nada menos do que representações entre símbolos, como na Matemática, e, no sentido do pensamento estruturalista espelham estruturas inteligíveis.

A Matemática pertence ao mundo das construções teóricas, não trata da realidade em si. Observando essas três dimensões apontadas ao desenvolvimento do nosso Conhecimento Matemático e refletindo sobre todo o processo que parece estar delineado deste Platão até a Modernidade.

Entendemos poder estabelecer um sentido de Complementaridade entre dois modos, historicamente, destacados no entendimento do termo *axioma*. Ou seja, entre o modo que da Antiguidade à Modernidade colocava a objetividade do Conhecimento (matemático) em seus fundamentos iniciais e, neste caso, *axioma* seria entendido como uma verdade e o modo que, a partir da Modernidade, passamos a situar a objetividade do Conhecimento em suas aplicações futuras e, assim, os *axiomas* passando a ser tomados como hipóteses. Sobretudo, esta perspectiva de Complementaridade é explicada por Otte (2014)<sup>214</sup>:

---

<sup>212</sup> Fala de Otte em momento de orientação, em 25 de abril de 2014.

<sup>213</sup> Fala de Otte em momento de orientação, em 25 de abril de 2014.

<sup>214</sup> Manuscrito não publicado de 2014.

Na ciência, para entender um conceito significa desenvolver uma teoria, e vice-versa, uma teoria como um todo é logicamente fundada, se ela pode ser entendida como uma - original - idéia, que foi desenvolvida e desdobrada fazendo-se assim "concreta".

O maior alcance do desdobramento da idéia em si fundamenta uma teoria o conceito original, embora este seja fundado nessa última. Assim, essas idéias são o objetivo do desenvolvimento da teoria. Essas idéias são, no entanto, ao mesmo tempo o seu início e a sua base.

Isso significa que elas têm de ser intuitivamente impressionantes, devem motivar a atividade e orientar a representação. Os Paradigmas e os conceitos fundamentais ou idéias básicas, portanto, são auto-referenciais, ou seja, eles organizam o processo de sua própria implementação e articulação. "O sucesso de um paradigma (...) é, no início, em grande parte uma promessa de sucesso detectável no selecionado e ainda nos exemplos incompletos" (Kuhn, Th., 1962, *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago, p. 23). Além disso, "a pesquisa científica normal está dirigida para a articulação daqueles fenômenos e teorias que o paradigma já fornece" (p. 24).

Se fosse impossível que o paradigma ou o conceito teórico, pelo menos em parte, fornecesse a base do seu próprio desenvolvimento e explicação, o único caminho padrão seria tentar e ver se as novas idéias e os novos conceitos seriam semelhantes ao velho ou não. Neste caso nada significativamente novo resultaria, como o paradigma dado da ciência normal continuando a ser o pano de fundo para tudo. O processo da ciência equivaleria a acumular fatos e organizá-los no quadro de representações e normas explicativas, que têm sido válidas até então. Para explicar algo novo significaria tentar reduzi-lo ao já conhecido. Se, ao contrário, o desenvolvimento fosse absolutamente descontínuo e o (novo) paradigma tornando-se uma base do mundo, e de pensar sobre este mundo, em sentido absoluto, isso seria transformar o desenvolvimento do conhecimento em um processo aleatório. Assim, é que entendemos que intenções e extensões dos nossos conceitos são complementares entre si na medida em que, por um lado, funcionam de forma relativamente independente umas das outras e permanecem, por outro lado, circularmente ligados uns aos outros.

Existem entre esses aspectos (intensões - extensões/verdade – hipótese) uma dependência 'circular' e dinâmica que não cessa, revelando-se como a força motriz do próprio desenvolvimento do nosso Conhecimento. A Matemática figura exemplarmente como reveladora 'desse' e 'nesse' movimento. Devemos reconhecer que ela é uma parte essencial da nossa relação com a realidade objetiva, entendendo-a como uma Ciência que, diferentemente das outras, não possui objetos do tipo 'reais', mas que, sobretudo, possui objetividade. Otte (2014)<sup>215</sup>, nesta mesma direção, completa:

Não há verdade absoluta. A verdade tem de ser assim concebida como um princípio regulador a serviço da perfeição do homem e da adaptação mútua entre o sujeito e o objeto do conhecimento. A relatividade do conhecimento e da verdade faz com que o conhecimento se torne reflexivo.

---

<sup>215</sup> Manuscrito não publicado de 2014.

Entendemos do mesmo modo a relação entre a Linguagem (pensamento descritivo, classificatório, informativo/comunicativo) e a Matemática (pensamento diagramático estruturalista- relacional). Identificamos esta relação, metaforicamente, como semelhante a um movimento pendular. Assim, ora temos mais acentuada e destacada um lado e ora do outro da relação (mas sempre um movimento dinâmico) e por isso, conseqüentemente, às vezes, alguns confundem (ou consideram) a Matemática como sendo uma Linguagem. Mas a Matemática não é uma Linguagem, embora figure uma manifestação do pensamento humano que expressamos através da Linguagem e que se desenvolve pela utilização de signos (representações) até ser formalizada, ou seja, sua materialidade. Sobretudo, é a Matemática um modo de expressão do raciocínio humano, interdependente e imbricado pela Linguagem. Este estudo revelou que uma relação de aproximação e distanciamento esteve condicionado à um movimento relacionado entre o exercício do pensamento filosófico e o exercício do pensamento matemático.

É interessante notar no desenvolvimento do nosso Conhecimento que, quanto mais nos afastamos de um aspecto e privilegiamos ou enfatizamos um outro, alguns benefícios e ganhos se operam (de modo que não condenamos o 'movimento' em qualquer que seja o sentido e intensidade), mas, na mesma medida ao se fixar o distanciamento observamos que há uma estagnação (vê-se diminuindo) em relação à força motriz (que pode ser a atividade humana, ou o contexto sócio-cultural e político), assim observamos observamos a geração de um movimento que força um sentido de aproximação (movimento de retorno do pêndulo) ao encontro do outro aspecto.

Entretanto, este mesmo movimento de aproximação entre os aspectos dicotômicos, digamos que, em seu ponto máximo de aproximação, de outro modo, gera uma força promotora de desenvolvimento potencialmente significativo do Conhecimento Matemático e, concomitantemente, a tensão intensificadora parece agir de outro modo tão acentuadamente que tende a empurrá-las no sentido de polarizá-las novamente (fomentando o movimento pendular). Sobremaneira, consideramos que seja de alguma forma problemático à uma mais elaborada, mas entendemos ser o próprio movimento que mantém vivo esse processo. E, continuamente!



Tal movimento pode ser interpretado, por exemplo, quando observamos, segundo Otte (2014)<sup>216</sup>, que os sistemas *axiomáticos*, no sentido de Hilbert ou Peano, de fato caracterizam conceitos, ao invés de objetos e, em relativa independência de características objetivas. Eles não são estabelecidos por abstrair, simplesmente, a partir de determinados dados ou objetos. A *axiomática* moderna surgiu do fato de que a Geometria não poderia definir seus objetos, algo que Pascal já havia observado. Isto levou à concepção de conceitos matemáticos em termos completamente operacionais ou instrumentais. De modo que, vemos surgir um novo movimento, este de um novo sentido, exatamente quando se vê estagnada a força de um modo de pensar.

Mas um conceito deve ser definido, como Moritz Schlick disse, em relação à *axiomatização* da Geometria de Hilbert, pelo fato de que algumas conclusões podem ser tiradas dele (Schlick, 1925, p. 45). De modo que a Matemática parecia tornar-se intensional, como a Lógica. Em raciocínio matemático, o sentido e a Lógica são (ou tornam-se agora) mais importantes que significado ou referência.

Sobretudo, descrições *axiomáticas* pertencem ao metaconhecimento. A *axiomatização* (no sentido de estrutura linguística - perspectiva semiótica) e a aritmetização (no sentido de pensamento matemático-estruturalista) da Matemática, desta forma, figuram complementares. A Matemática torna-se, pelo processo de abstração reflexiva, uma metamatemática, uma teoria da prática Matemática, de acordo com Otte (2014)<sup>217</sup>.

Assim, a Matemática tornou-se, por esse processo de abstração reflexiva meta-matemática, ou seja, transformou-se numa teoria da prática Matemática.

Na matemática grega, qualquer que seja a sua originalidade e reputação, a simbolização ... não avançou para além de um primeiro estágio, ou seja, além do processo de idealização, que é um processo de abstração da realidade direta, ... No entanto ... a escalada inteira- simbolização é muito mais do que mera idealização. Ela envolve, em particular, a escalada desenfreada de abstração, ou seja, a abstração da abstração, a abstração da abstração da abstração, e assim por diante ;..., é tudo importante, os objetos abstratos gerais decorrentes assim, se vistos como instâncias de símbolos, devem ser elegíveis para o exercício de certas manipulações e operações produtivas, se eles são matematicamente significativos (Bochner 1966, 18) (OTTE, palestra do dia 07 de março de 2014 UNIBAN).

---

<sup>216</sup> Manuscrito de Otte não publicado, intitulado provisoriamente como *Parmênides*. Fev.

<sup>217</sup> Fala de Otte em momento de orientação, em 25 de abril de 2014.

É deste modo que para Otte (2014)<sup>218</sup> a reflexividade da Matemática se mostra mais importante no método *axiomático* e resulta numa Complementaridade do definitivo e genuinamente matemático por um lado, e, o não inteiramente determinado e meramente possível, por outro lado.

*Axiomas* são proposições sobre conceitos, apenas de uma forma diferente. Por exemplo, um triângulo em geral é uma variável livre, como os termos em descrições *axiomáticas* e não uma coleção de triângulos determinados. O triângulo é uma ideia que governa e produz suas representações particulares. Hilbert disse que as variáveis livres ocorrem em declarações *axiomáticas* são deste tipo de generalidade: por exemplo, a afirmação de que, se  $A$  é um símbolo numérico, então  $A + 1 = 1 + A$  é uma verdade universal, e de nossa perspectiva finitária incapaz de negação. A afirmação anterior deve ser interpretada apenas como um juízo hipotético que afirma algo para o caso em que um símbolo numérico nos é dado.

Otte (2014)<sup>219</sup> nos diz que, como resultado dessa discussão, percebemos que o quadro teórico cuja objetividade se encontra nos fundamentos e a abordagem *axiomática* são complementares entre si, no sentido da Complementaridade entre intenções (conceitos) e extensões (objetos) de símbolos.

Podemos concluir, segundo Otte (2014)<sup>220</sup>, que a abordagem *axiomática* é essencial para o crescimento do Conhecimento Matemático, pois é adaptada ao desejo de cada novas áreas matematizadas da realidade e experiência. Neste sentido, uma Complementaridade entre a Aritmética ou a abordagem teórica, por um lado e o método *axiomático*, por outro lado, representam uma interação entre o crescimento e a base do Conhecimento Matemático. Se isso parece uma ideia viável, *axiomas* não podem ser considerados como verdades absolutas e fundamentais, mas devem ser concebidos como meras hipóteses.

A organização final de qualquer teoria lógico-matemática (Ciências Formais) ou das Ciências reais tende atualmente a serem *axiomatizadas*. E, utilizando-se o método *axiomático*, a razão como que se objetiva. “Daí a relevância da estruturação axiomática dos contextos científicos, advindo desse fato um de seus traços marcantes eles são, em princípio, hipotético-dedutivos” (COSTA, 2008, p.37).

---

<sup>218</sup> Fala de Otte em momento de orientação, em 25 de abril de 2014.

<sup>219</sup> Manuscrito de Otte não publicado, intitulado provisoriamente como *Parmênides*.

<sup>220</sup> Manuscrito de Otte não publicado, intitulado provisoriamente como *Parmênides*.

O significado e oscilações de significado do termo *axioma*, evidenciados em alguns filósofos e matemáticos sobre a relação entre a Linguagem e a Matemática, neste estudo, buscou mostrar que, de Platão à Modernidade, mais especificamente até o ano de 1800, o significado do termo *axioma* esteve fortemente ligado à interpretação no sentido de ‘verdades indemonstráveis’, seja tanto numa perspectiva racionalista ou numa perspectiva empirista. No entanto, um movimento tensional nesta significação pôde ser destacado sempre de modo mais ou menos intenso exercido na e pelo relacionamento histórico entre sujeito ontológico e o sujeito epistemológico, entre Filosofia e Matemática no processo de nosso desenvolvimento cognitivo e de nosso Conhecimento Matemático e essa relação opera reflexos na relação entre a Linguagem e a Matemática.

Pudemos verificar um grande avanço no sentido da generalização e à níveis mais altos de abstração, em dois momentos, no século XVI e trezentos anos depois no século XIX. Mas não se tratará de um movimento cujo objetivo é o formalismo, a matemática e seu desenvolvimento sempre esteve ligada à questões sociais, necessidades humanas e direcionadas à aplicações possíveis e aplicáveis à esse conhecimento. Enquanto atividade a matemática não caminha à generalização somente para generalizar (OTTE, 2014)<sup>221</sup>, mas sempre com uma preocupação centrada em suas aplicações. Historicamente os grandes matemáticos nunca pensavam em formalismo somente. O formalismo se justifica pelas suas vantagens na investigação da natureza e em suas aplicações. Por exemplo, quando muda consideravelmente a nossa imagem e ideia de mundo ( como ocorreu à partir das descobertas de Galileu), a matemática é trazida à cena, para iniciar um novo processo de matematização do mundo. É um instrumento fundamental da humanidade à interpretação e construção de um modelo interpretativo desse novo mundo.

Também identificamos que através desse grande movimento, observamos que no século XVII seguidamente no século XVIII as aporias do pensamento antigo, gradualmente começam a ser substituídas por complementaridades. Os fatos e as teorias passam a ser tomados como elementos complementares do sistema de atividades humanas. E, Otte (2014), apoiado no pensamento de Boutroux, nos diz que este período que se consolidará por volta de 1800 é caracterizado como sendo o período na evolução matemática de apropriação da Complementaridade.

---

<sup>221</sup> Fala de Otte em momento de orientação, em 25 de abril de 2014.

Segundo Otte (2014)<sup>222</sup> a matemática pura é filha e foi um crescimento explosivo da atividade matemática que, pode ser caracterizada brevemente, afirmando que foram detectados um grande número de conexões entre os resultados e os problemas aparentemente diferentes, pela primeira vez na história da matemática.

Na Modernidade assumimos um ponto de vista relacional, isto é, adotamos uma ‘visão de mundo’ que fornece aos objetos e as relações entre os objetos um estatuto ontológico igual. Em certo sentido, podemos dizer que a mudança começa ser operacionalizada quando observamos uma mudança numa relação que dominava até a modernidade, e que, assistimos mudar com a modernidade, relacionada ao sujeito epistemológico sobrepondo-se ao sujeito ontológico. De modo que conceitos são ressignificados (o de número é um exemplo deles) como também os fundamentos do objeto e do método da matemática. É destacável em nossos estudos que essas mudanças direcionada e conduzidas por uma virada à linguística, teve seu início com o pensamento epistemológico de Kant.

Assim no início do século XIX, destacamos que emergiu a Matemática pura, com base na análise da prova e da criação de conceito cada vez mais abstratos. Um dos resultados, ou seja, o produto dessas mudanças foi o termo *axioma* mudar seu *status* ontológico. O *axioma* deixa de ser caracterizado como uma proposição descritiva, expressão de verdades indemonstráveis e assume o caráter de proposições no sentido operativo, na constituição de um conceito, designando relações entre elementos de um conceito. Seu *status* ontológico e epistemológico passa a ser compreendido dentro de uma nova ótica, de uma única base e esta possibilitada por uma abordagem que compreende a semiótica.

Como Otte sempre nos afirma, a Matemática é, essencialmente, uma atividade que opera com símbolos e diagramas e a semiótica se torna um fundamental instrumento de pesquisa para entender a cognição e a epistemologia matemáticas.

E, ele destaca que o conceito de função, por exemplo, espelha essa Complementaridade, como também o conceito de número, na abordagem *axiomática*. Mas essa compreensão exige-nos visão dinâmica ou genética na e da Matemática. Devemos tomar a Matemática não como um edifício lógico fixo, mas como um organismo vivo e em evolução e cada vez maior entre Conhecimento e atividade (OTTE, 2014)<sup>223</sup>.

---

<sup>222</sup> Fala de Otte em momento de orientação, em 25 de abril de 2014.

<sup>223</sup> Fala de Otte em momento de orientação, em 25 de abril de 2014.

A Matemática pura é um instrumento social, “um instrumento da inteligência social do mesmo jeito como um sistema de semáforos é um instrumento para fazer o comportamento dos automobilistas mais inteligentes e deixar o trânsito fluir” (OTTE, 2014)<sup>224</sup>; já o sentido da Matemática pura é o de deixar nossa capacidade criativa fluir e se desenvolver. Otte completa que, segundo Barrow (1992, p.3), a Matemática pura age como uma Linguagem de computador, isso porque é primeiramente uma Linguagem que tem uma Lógica embutida. E, grande parte do desenvolvimento da humanidade acontece quando agimos sem precisar pensar.

Diríamos que a problemática desta investigação nos revelou a possibilidade de compreender como se processa o próprio desenvolvimento e manifestação do pensamento matemático, embora, sobretudo, consideremos que esta se apresente como mais uma forma de interpretação. De todo, temos a certeza de que é assim que avançamos, uma vez que mesmo este modo particular aqui exposto de interpretar o pensamento matemático humano, só pôde ser construído a partir de compreensão e interação com outros modos, historicamente construídos de interpretação. Assim, mínima e certamente, servirá como instrumento para novos e futuros modos interpretativos.

As especificidades desta interpretação sobre a relação entre a Linguagem e a Matemática, pode e deve ser ampliada no sentido de uma relação entre a Filosofia e a Matemática e isso nós procuramos destacar neste trabalho. Sobretudo, entendemos que agregar o pensamento de Complementaridade ‘Otteano’ aos fundamentos do Conhecimento Matemático, traz uma nova luz a questões sobre a objetividade e fertilidade da Matemática, sobre como podemos chegar a novos conhecimentos e como também sobre as ideias que guiam e direcionam nossas construções.

Quando nos distanciamos e empreendemos uma macro visão (bem numa perspectiva *kantiana*) para o processo histórico do desenvolvimento do Conhecimento Matemático – por exemplo, de Platão à Modernidade – podemos destacar e observar que a receptividade é o que caracterizava a Matemática (números são autênticos aos objetos); já na Modernidade temos uma Matemática caracterizada pela espontaneidade dos conceitos (temos números simbólicos). No primeiro caso a ênfase está contexto da descoberta, da teoria (episteme), e, no segundo caso a ênfase está no contexto da justificação, da prática (techne). Observamos

---

<sup>224</sup> Fala de Otte em momento de orientação, em 25 de abril de 2014.

realçado os dois lados do processo de aprendizagem: a atividade e a operatividade do pensamento, que têm como pressupostos a receptividade das impressões e a espontaneidade dos conceitos. Um processo de desenvolvimento genético em cujas etapas e fases revelam o próprio modo de nosso desenvolvimento cognitivo humano.

É deste modo que devemos olhar o nosso Conhecimento, na forma de um progresso em movimento dinâmico, ou seja, de um ponto de vista genético ou evolutivo. Segundo (ARRUDA, 2014)<sup>225</sup>, por exemplo, “se eu sigo essa trajetória, todos os contrastes que surgem entre o pensamento algébrico e geométrico se resolvem, pois percebemos que no desenvolvimento da Matemática sempre há interação entre essas perspectivas. Em alguns momentos privilegia a Geometria e outro momento a Álgebra, mas a interação está no interior dessa transformação”.

Especialmente relacionado ao termo *axioma* mesmo na antiguidade, por exemplo na dialética dos sofistas, ou seja na prática da argumentação, os *axiomas* assumiam um sentido diferente dos fundamentos da matemática. Tal aspecto deve-se ao contexto que é privilegiado em cada uma desses contexto – um o contexto argumentativo e outro o contexto da descoberta. Quando inciamos nossa pesquisa nosso entendimento limitado nos conduzia a entender que *axiomas* na antiguidade referiam-se à verdades somente. De modo que, um sentido interpretativo de *axiomas* enquanto hipóteses sempre existiu.

Comungamos com as reflexões de Otte (2014) que de Platão até a Modernidade sempre existiu a ênfase interpretativa que promovia uma dicotomia entre esses aspectos do desenvolvimento do nosso conhecimento. E, somente quando chegamos ao século XIX, com pensamento de Kant, o renascimento do pensamento Platônico, conduzindo à possibilidade de se fazer uma Filosofia da Matemática, concomitantemente com nascimento das Ciências Humanas (com a perspectiva do círculo hermenêutico) é que temos possibilitada o nascimento de uma abordagem interpretativa no sentido da Complementaridade. Como resultado de um movimento simbiótico frutífero entre Filosofia e Matemática. Dentro dessa nova perspectiva interpretativa não faz mais sentido tomarmos o termo *axiomas* como verdade (mesmo porque muda o próprio sentido de verdades, de objeto na Matemática, como também nem se faz mais sentido fazer uma distinção rígida entre método e objeto na matemática).

---

<sup>225</sup> Tese em desenvolvimento de Evilásio José de Arruda, orientando do Professor M. F. Otte, com previsão de defesa para novembro de 2014.

Foi assim que procuramos ressaltar e evidenciar o fenômeno sobre Complementaridade ‘Otteano’ e o quanto é inovador e importante esta teoria em desenvolvimento. A Complementaridade não é um tipo de pensamento que coloca um contra o outro, como uma antítese, mas a Complementaridade está na possibilidade de capturar, de ambos os aspectos polarizantes, suas especificidades que contribuem para o crescimento intelectual na resolução de problemas tanto da própria Matemática como do mundo cotidiano, pois esses mundos se transformam numa relação simétrica e assimétrica (ARRUDA, 2014)<sup>226</sup>.

Historicamente, o pensamento linguístico – a Linguagem/contexto comunicativo - e o pensamento matemático – a Matemática/contexto da descoberta - operacionalizam um movimento dinâmico e vital, caracterizado por momentos de aproximações e distanciamentos (e em níveis diversos) na interpretação do nosso desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Tanto as aproximações como os distanciamentos são necessários ao crescimento e consolidação desse conhecimento, neste estudo observamos que as aproximações e distanciamentos podem ser interpretados como resultado do relacionamento entre o exercício do pensamento filosófico e o exercício do pensamento matemático.

Compreendemos que o formalismo matemático que surge à partir do século XVI e que retorna com grande força no Século XIX e que identificamos direcionado pelo renascimento e releitura do pensamento platônico na matemática (dialética platônica: análise), embora possa parecer conduzir à um esvaziamento, historicamente tem seu valor no desenvolvimento da humanidade, tanto como a perspectiva Aristotélica teve seu valor. O idealismo platônico se justificou pela busca de uma postura e desenvolvimento ético, Aristóteles procurava as explicações das coisas, em encontrar a explicação das coisas. Na modernidade esse contexto muda, pois se processou uma mudança enorme na humanidade em todos os sentidos. Aquela perspectiva da descoberta, do conhecimento como conhecimento do mundo é abandonada, embora tenha produzido avanços em outros sentido, mas se esgotaram diante das novas necessidades. Passou a ter seu valor então a perspectiva do pensamento relacional, e nesta direção o formalismo surge para suprir as novas necessidade de matematização do mundo.

De maneira que, devemos evitar considerar polarizadas essas forças dinamizadoras (e que entendemos sempre inseparáveis pela nossa própria natureza humana) da mente humana, e que neste estudo de modo geral dispostos delineada entre a Filosofia e a Matemática, e ao

---

<sup>226</sup> Tese em desenvolvimento de Evilásio José de Arruda, orientando do Professor M. F. Otte, com previsão de defesa para novembro de 2014.

investiga-las e estudá-las há que se buscar e priorizar uma compreensão, no sentido de Complementaridade entre ambas. Neste sentido, o Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ é, destacadamente, relevante, ao nos conduzir e embalar no e pelo movimento, mesmo porque, pelo menos em nossa interpretação, aprendemos isto ser elementar (“Meu caro Watson” como diria Sherlock Holmes).

E, finalmente encerramos recordando que “um *axioma* básico e elementar do Pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ trata de que o pensamento não ocorre na cabeça, mas, numa perspectiva semiótica ocorre a nível das representação, nos signos, nos símbolos. Se isso é verdade, estudar as mudanças, de significados das palavras vai nos dar informações sobre uma mudança na maneira sobre como um povo pensa” (OTTE *apud* PAULA, 2014, p.18)<sup>227</sup> – então uma hipótese!

---

<sup>227</sup> Comentário de M. F. Otte em momento de Orientação.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de Filosofia. 2. éd. São Paulo: Mestre Jou, 1990.
- ABIDO, Alexandre Silva. *A Interpretação Geométrica dos Números Imaginários segundo Jean Robert Argand*. Cuiabá – MT, UFMT, 2012. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Educação da Universidade Federal de Cuiabá, 2012).
- ABRÃO, Bernadette Siqueira (Org). A História da Filosofia. Col. *Os Pensadores*. São Paulo: Ed. Nova Cultura, 2004.
- ARISTÓTELES. *Órganon*. *Os Pensadores*. São Paulo: Ed. Nova Cultura, 2004.
- ARISTÓTELES. *Arte Poética*. São Paulo: Martin Claret, 2007(a).
- ARISTÓTELES. *Retórica*. São Paulo: Editora Rideel, 2007(b).
- BARNES, Jonathan (Org.). *Aristóteles*. Aparecida, SP: Ideias & Letras, 2009.
- BARROS, Luiz Gonzaga Xavier; OTTE, Michael Friedrich. A=B: uma visão Pierceana. IN.: *A Lógica de Diagramas de C.S. Pierce – implicações em Ciência Cognitiva, Lógica e Semiótica*. Org. João Queiroz & Lafayette de Moraes. 18/10/2012. (aguardando publicação)
- BATESON, G. Steps to an Ecology of Mind. Paladin Books, 1972, p.128. IN.: CENTENO, Maria João. *O Conceito de Comunicação na Obra de Bateson: interação e regulação*. Universidade de Beira Interior, 2009.
- BLACKBURN, Simon. *Dicionário Oxford de Filosofia*. Trad. Desidério Murcho. et al. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1997.
- BETH, E. W.. Critical epoch in the development of the theory of science. IN.: *British Journal for the Philosophy of Science*. 1950.
- BOHR, N. *Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics*. (republicação integral de *Atomic Physics and Human Knowledge*, New York, Science Editions Inc., 1961), (1949). In.: *Atomic Physics and Human Knowledge*, New York, Dover Publications Inc, 2010.
- BOHR, N.. *Physical Science and the Problem of Life*. (republicação integral de *Atomic Physics and Human Knowledge*, New York, Science Editions Inc., 1961). (1949), In.: *Atomic Physics And Human Knowledge*, New York, Dover Publications Inc, 2010.
- BOSI, Alfredo. *Dizionario di Filosofia*. São Paulo: Editora Mestre Jou, 1970.
- BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

- BOYER, C. B.. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BUENO, Francisco da Silveira. *Grande Dicionário Etimológico – Prosódico da língua Portuguesa*. 2ª Tiragem, 1º Volume, São Paulo: Edição Saraiva, 1968.
- BUNT, L; JONES, P; BEDIANT, J. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. (Reprodução da 1ª edição de 1976). New York: Dover Publications, 1988.
- BROLEZZI, A. C. *A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática*. São Paulo- SP: Universidade de São Paulo, 1996. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática do Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1996).
- BRUGGER, Walter. *Dicionário de Filosofia*. Trad. Antônio Pinto de Carvalho, 2ª Ed., São Paulo: Editora Herder, 1969.
- BURALI-FORTI, C., “Una questione sui numeri transfiniti”, *Rend. del circolo mat. di Palermo*, vol. 11, 1897.
- CARAÇA, B. J.. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 2ª Ed. Lisboa: Gradativa, 1998.
- CASSIN, Barbara. *Aristote et Le Logos – Contes de la phénoménologie ordinaire*. Paris: PUF, Collège Internaacional de Philosophie, 1997.
- CASSINA, U..*Su la logica matematica di G. Peano*, 1933. In.: KENNEDY, Hubert. *Twelves articles on Giuseppe Peano*. San Francisco: Peremptory Publications ebook, 2002.
- CASSIRER, E.. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*. Berlin: Bruno Cassirer, 1910.
- \_\_\_\_\_. *Philosophie der Symbolischen Formen*. Vol. III, Darmstadt: WBG, 1977.
- CATTANEI, Elisabetta. *Entes Matemáticos e Metafísica: Platão, a Academia e Aristóteles em confronto*. Trad. Fernando S. Moreira. São Paulo, SP: Edições Loyola, 2005.
- CONDILLAC, E. B.. *A Língua dos Cálculos*. 1973.
- \_\_\_\_\_. *Lógica*. Coleção Os Pensadores. Ed. Abril, 1974.
- \_\_\_\_\_. *Lógica ou os primeiros desenvolvimentos da arte de pensar*. Coleção Os Pensadores, vol XXVI, Textos Escolhidos, São Paulo: Abril Cultural, 1973.
- CONDILLAC, É. B., HELVÉTIUS, C., DEGÉRANDO, M.. *Textos escolhidos*. Coleção Os Pensadores. 2 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1979.
- COMTE-SPONVILLE, André. *Dicionário Filosófico*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

CORRÊA, I.M.P. *Como se fala matemática? Um estudo sobre a complementaridade entre representação e comunicação na educação matemática*. Cuiabá: UFMT, Dissertação de Mestrado. Instituto de Educação, Universidade Federal de Mato Grosso, 2008.

DEDEKIND, R., *Essays on the Theory of Numbers* (La Salle, Illinois: Open Court Pub. Co., 1948.

\_\_\_\_\_. *Stetigkeit und Irrationalen Zahlen. Was sind und was sollen die Zahlen? Essays on the Theory of Numbers. I Continuity and Irrational Numbers II The Nature and the Meaning of Numbers*. New York: Dover Publications, 1961.

\_\_\_\_\_. (1872). Continuity and irrational numbers, English transl. 1901. In: *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963.

DEELY, John. *Introdução à Semiótica*. Lisboa: Gulbenkian, 1995.

DESCARTES, R. *Regras para orientação do espírito*. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

DUGAC, P. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Paris, 1977.

DURKHEIM, ÉMILE. *As Formas Elementares da Vida Religiosa I*. Trad. Paulo Neves. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

DUROZOI, G.; ROUSSEL, A. *Dicionário de Filosofia*. Campinas: Papirus, 1993.

ENGELS, F. *Dialectics of Nature*. In.: Karl Marx-Frederick Engels Collected Works. New York, International Publishers, v. 25, 1987(a).

ENGELS, F. *Anti-Duhring*. In.: Karl Marx-Frederick Engels Collected Works, New York, International Publishers, v.25, 1987(b).

EUCLIDES. *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Unicamp, 1997.

FAVERI, C. B.. Ensaio sobre a origem das Línguas. Tradução de Jean-Jacques Rousseau. *Cadernos de Tradução*. Universidade Federal de Santa Catarina, v. 2, n. 8, 2001.

FISCH, Max H.. "Peirce's Place in American thought". In.: *Ars Semiotica*, 1/2, pp.21-37. 1977.

FISCH, Max H.. "Foreword" a "You Know My Method": A juxtaposition of Charles S. Peirce and Sherlock Holmes, por Thomas A. Sebeok e Jean Umiker-sebeok, Bloomington. Indiana: Gaslight Publications, pp. 7-13. 1980.

- FREGE, G. “Sobre sentido e a referência” In: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix/USP, 1978.
- FREIRE, Laudelino. *Grande e Novíssimo Dicionário da Língua Portuguesa*. 2ª ed, v. II, São Paulo: Livraria José Olympio Editora, 1954.
- FREUDENTHAL, H.. *Mathematics as na Education Task*. Dordrecht: Kluwer, 1973.
- FOUCAULT, Michel. *As palavras e as coisas*. São Paulo: Martins Fontes, 1995.
- GARCIADIEGO, Alejandro R. *Los Elementos de Euclides una Introducción*. In: Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n.1, Dez/2007. P.333-348.
- GAY, Peter. *Modernismo: o fascínio da heresia: de Baudelaire a Beckett e mais um pouco*. Trad. Denise Bottmann. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.
- GILLIES, D. A.. *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Mathematics*. Assen: Van Gorcum, 1982.
- GIOVANNINI, Eduardo N. *Hilbert y la Fecundidad Matemática del Método Axiomático*. In.: Notae Philosophicae scientiae Formalis, v. 2, n.2, pp. 149- 63, Outubro 2013.
- GRASSMANN, H. G. (1947). *Teoria de La Extension – Nueva Disciplina Matemática Expuesta y Aclarada Mediante Aplicaciones*. (E. O. Roxin, Trad.). Buenos Aires: Compañia Editora Espaca-Calpe Argentina, S. A. (Obra original publicada em 1844).
- HACKING, I. Proof and eternal truth: Descartes and Leibniz’ in: Gaukroger, S. (ed.), *Descartes: Philosophy, Mathematics, Physics*, Harvester, Sussex, UK, pp.169–80, 1980.
- HEATH, A. E.. *Hermann Grassmann. 1809 – 1877*. In: The Monist, Vol. 27, n. 1 (Janeiro), pp 1-21. Hegeler Institute Stable, 1917.
- HEGENBERG, Leonidas. *Dicionário de Lógica*. São Paulo: EPU, 1995.
- HERÓDOTO. *História*. Brasília: Universidade de Brasília, 1988.
- HILBERT, David. *Los fundamentos da la Geometria por David Hilbert*. Traduzido por Juan David Garcia Bacca. México: universidade nacional Autonoma de México, 1944.
- \_\_\_\_\_. *Fundamentos da Geometria*. Tradução Portuguesa de 1947, baseada na 7ª Ed.; reedição Gradiva 2003, revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira com apêndices do autor e suplementos, 1930.
- \_\_\_\_\_. *Fundamentos de las Matemáticas*. Mathema, México, 1993. [http:// galleon. Com/casanchi/casanchi\\_2000/heri01.htm](http://galleon.Com/casanchi/casanchi_2000/heri01.htm). (acessado em 11/05/2013).
- HOBBS, T. *Leviatã*. Coleção Os Pensadores. – São Paulo: Nova Cultural, 1996.

HÖFFE, Otfried. *Immanuel Kant*. Trad. Christian Viktor Hamm, Valerio Rohden. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. *Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

HUSSERL, E.. *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*. Evanston: Northwestern University Press, 1970.

ISRAEL, Jonathan I. *Iluminismo radical: a filosofia e a construção da modernidade, 1650-1750*. Trad. Claudio Blanc. São Paulo: Madras, 2009.

JAHNKE, Hans Niels. *The Conjoint Origin of Proof and Theoretical Physics*. IN: *Explanation and Proof in Mathematics: philosophical and educational perspectives*. V III. Hardcover, 2010. P.17-32.

JAMES, Adam. *The Republica of Plato*. 2. ed. Cambridge: Cambridge Universit Press, 1965.

JOSEPH, H. W. B. *Na Introduction to Logic*. 2ª ed. Revista.Oxford: Clredon Press. 1916.

KANT, Immanuel. *Crítica da Razão Pura – Os pensadores*. v.1. São Paulo: Nova Cultura, 1987.

\_\_\_\_\_. *Crítica da Razão Pura*. Editora Nova Cultural. São Paulo: 2000.

\_\_\_\_\_. *Crítica da Razão Pura*. 5ª Ed. Fundação Calouste Gulbenkein. Lisboa: 2001.

KENNEDY, Hubert. *Twelve articles on Giuseppe Peano*. San Francisco:Perremptory Publications ebook, 2002.

KLEIN, Jacob. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Álgebra*. Trad. Eva Brann. New York: Dover Publications, 1992.

KUHN, T. *A Estrutura das Revoluções Científicas*. São Paulo: Perspectiva, 2007.

LAUDAN, Larry. *Teorias do Método Científico de Platão a Mach*. Trad. Balthazar Barbosa filho. Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 3, v. 10, n. 2, p. 9-140, jul.-dez, 2000.

LALANDE, André. *Vocabulário Técnico e Criptico da Filosofia*. 2ª Ed., São Paulo Martins Fontes, 1996.

LAPEDES, Daniel N. *Dictionary of Physics and Mathematics*. 2ª ed. McGrawc- Hill, 1978.

LEÃO, Gabriel Magarinos de Souza; MATTOS, José Augusto Juruena de. *Dicionário Ilustrado de Matemática*. v. 1. f.1. Coleção Dicionários Especializados. Brasília: Ministério da Educação e Cultura: Instituto Nacional do Livro, 1972.

LEITE, Kécio Gonçalves; OTTE, Michael F. *Metáfora e Matemática: a contingência em uma disciplina escolar considerada exata*. Cuiabá: UFMT, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Educação, Universidade Federal de Mato Grosso, 2010).

LÉNINE, V. I. *Materialismo e Empiriocriticismo – Notas críticas Sobre uma Filosofia Reaccionaria* (1909). Lisboa, Moscovo: Edições Avante-Edições Progresso, 1982.

LÉNINE, V. I. *Obras Escolhidas em 6 tomos, t.6. Cadernos filosóficos*. Lisboa, Moscovo, Edições Avante – Edições Progresso, 1989.

LENHARD, J.; OTTE, M. Two Types of Mathematization. In Bart Van Kerkhove, Jonas De Vuyst, and Jean Paul Van Bendegem, *Philosophical perspectives on mathematical practice*. (pp. 301-330). London: College Publications, 2010.

LÉVI-STRAUSS, Claude. *Mito e Significado*. Trad. António Marques Bessa. Rio de Janeiro: Edições 70. 1978.

\_\_\_\_\_. *Tristes Trópicos*. Trad. Rosa Freire d’Aguiar. São Paulo: Companhia das Letras, 1996.

LEIBNIZ, G. W. *Novos ensaios sobre o entendimento humano*. Coleção Os Pensadores. vol. 1, São Paulo: Abril Cultural, 1999.

LIRA, Antonio da Fonseca de. *O Processo da Construção do Conceito Matemático de Limite pelo Aprendiz com Utilização de Objetos Digitais*. Porto Alegre –RS: UFRS, 2008. Tese (Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre-Rs, 2008).

LOCKE, J. *Ensaio sobre o entendimento humano*. Tradução de Eduardo Abranches de Soveral. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1999.

LOSEE, John. *A Historical Introduction to the Philosophy of Science*. (Fourth Edition). New York: Oxford University Press, 2001.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e Didática: As concepções do conhecimento e a prática docente*. São Paulo: Cortez. 1995.

MAGALHÃES, Alvaro. *Dicionário Enciclopédico Brasileiro Ilustrado*. v. A-F. São Paulo: Editora Globo, 1951(a).

MAGALHÃES, Alvaro. *Dicionário Enciclopédico Brasileiro Ilustrado*. v. G-Z. São Paulo: Editora Globo, 1951(b).

MAN, P. A Epistemologia da Metáfora. In: SACKS, S. (Org.) *Da Metáfora*. Tradução de Leila Cristina M. Darin ET AL., São Paulo: EDUC/pontes, 1992.

MANNHEIM, Karl. *Ideologia e Utopia*. 4ª ed. Trad. Sérgio Magalhães Santeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1982.

MARIE, Gaston. *Platão*. Lisboa: Presses Universitarie de France, 1966.

MATURANA, H, R.. *Biologie der Realität*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp. 1998.

MELO, Ana Rafaela Pereira. *Matemática enquanto ciência intermediária na 'República' de Platão*. Revista Saberes. v.1. n. 4. Jun. Natal, 2010. <www.cchla.ufrn.br/saberes> acessado em 13/03/2012.

MORAVCSIK, Julius. *Platão e Platonismo: aparência e realidade na ontologia, na epistemologia e na ética*. Trad. Cecília Camargo Bartalotti. São Paulo: Edições Loyola, 2006.

MORA, José Ferrater. *Dicionário de Filosofia*. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

NASCIMENTO, Demilson Benedito. *Hermann Günter Grassmann (1809-1877) e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: a complementaridade entre alguns aspectos da Die Lineale Ausdehnungslehre (1844)*. Cuiabá-MT, UFMT, 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática, Programa de Pós-Graduação do Instituto de Educação da Universidade Federal de Cuiabá, 2013).

NEF, Frédéric. *A Linguagem: uma abordagem filosófica*. Trad. Lucy Magalhães. Rio de Janeiro Jorge Zahar Ed., 1995.

NETTO, Antonio Garcia de Miranda, et al. *Dicionário de Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Editora da Fundação Getúlio Vargas, 1986.

OS PENSADORES. *Pierce e Frege*. v. XXXVII. Editor: Victor Civita. 1ª Ed. São Paulo: Abril Cultural, 1974.

OTTE, Michael F. *The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz*. In. *Historia Mathematica*, vol. 16, p.1-35. Academic Press. Inc., 1989.

\_\_\_\_\_. *O Formal, O Social e o Subjetivo: Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática*. Trad. Raul Fernando Neto. São Paulo – SP: Unesp, 1993.

\_\_\_\_\_. *Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico*. *Educação Matemática: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática/PUC – São Paulo: EDUC – Semestral*, 11-58, 1999.

\_\_\_\_\_. *Epistemologia Matemática de um ponto de vista semiótico*. 2001.

\_\_\_\_\_. *Complementary, sets and numbers*. *Educational Studies in Mathematics*, v. 53, p. 203-228. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003.

\_\_\_\_\_. *Proof – analysis and continuity*. In: *Foundations of Science*, n. 11, pp. 121-155. Springer, 2006. 2003.

\_\_\_\_\_. *Metaphor and Contingency*. In: Radford, L.; Schubring, G. ; Seeger, F. (Orgs.). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Rotterdam: Sense Publisher, 2008.

\_\_\_\_\_. *Justus and Hermann Grassmann: philosophy and mathematics*. In.: Hermann Grassmann – From past to future: Grassmann's work in context Grassmann bicentennial conference, September 2009. H-J Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen, S. Russ. (Editors). pp – 61-70. Springer Basel AG, 2011.

\_\_\_\_\_. *Evolution, Learning, and semiotics from a Peircean Point of View*. In.: *Educ. Stud. Math.* 2011b.

\_\_\_\_\_. *A Realidade das Idéias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá- MT: EDUFMT, 2011.

\_\_\_\_\_. *Generalizar é Necessário ou mesmo Inevitável*. (Manuscrito não publicado datado de 07 de abril de 2014).

OTTE, M. F.; LEITE, K. G.. *Uma breve história dos relacionamentos entre Matemática e Linguagem desde os tempos de Descartes*. *Linguagem e Matemática: da certeza intuitiva em Descartes à contingência em Condillac*. p.26-42. 2012. (Material não publicado)

PATO, Ana Henrique. *Materialismo e idealismo na física do final do século XIX e início do século XX a partir de 'Materialismo e Epiriocriticismo' de Lênine. O caso exemplar da interpretação bohriana da Mecânica Quântica*. Lisboa, Portugal: Universidade de Lisboa, 2012. Dissertação (Mestrado em História e Filosofia das Ciências. Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, 2012).

PASCH, M.. *Vorlesungen Über Neuere Geometrie*. Leipzig, Teubner. 1882.

\_\_\_\_\_. PEANO, G.. *I principii di Geometria, logicamente esposti*, Bocca, Turin, 1889.

\_\_\_\_\_. [Unpublished] Letter to Felix Klein, dated 29 August 1894, in the Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen Handschriftenabteilung. 1894.

\_\_\_\_\_. *Formulaire de mathématiques*. Vol. 2, section 2. Bocca, Turin, 1898.

\_\_\_\_\_. *Formulaire de mathématiques*. Vol. 2, section 3. Bocca, Turin, 1899.

\_\_\_\_\_. *Formulaire de mathématiques*. Vol. 3. Carre & Naud, Paris, 1901.

\_\_\_\_\_. *Aritmetica generale e algebra elementare*. Paravia, Turin, 1902.

\_\_\_\_\_. (1908). *Formulario mathematico*. Vol. 5. Bocca, Turin. Facsimile reprint, ed. U. Cassina, Cremonese, Rome, 1960.



\_\_\_\_\_. Review of A. Nantucci, *Il concetto di numero, e le sue estensioni*, *Archeion. Archivio di storia della scienza* 4, 382–383, 1923.

\_\_\_\_\_. *Opere scelte di Giuseppe Peano*. Vol. 1. Ed. U. Cassina. Cremonese, Rome, 1957.

\_\_\_\_\_. *Opere scelte di Giuseppe Peano*. Vol. 2. Ed. U. Cassina. Cremonese, Rome, 1958.

\_\_\_\_\_. *Opere scelte di Giuseppe Peano*. Vol. 3. Ed. U. Cassina. Cremonese, Rome, 1959.

\_\_\_\_\_, *Sul concetto di numero*, ( III, 80–109), 1891. In.: KENNEDY, Hubert. *Twelves articles on Giuseppe Peano*. San Francisco: Perremptory Publications ebook, 2002.

\_\_\_\_\_. *Sui fondamenti della geometria*, ( III, 115–157), 1894. In. KENNEDY, Hubert. *Twelves articles on Giuseppe Peano*. San Francisco: Perremptory Publications ebook, 2002.

\_\_\_\_\_. *Sul paragrafo 2 del Formulario*, t. II - III: *Arithmetica*”, 1898. In. KENNEDY, Hubert. *Twelves articles on Giuseppe Peano*. San Francisco: Perremptory Publications ebook, 2002.

PEIRCE, C. Sanders. *Semiótica*. Trad. José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Editora Perspectiva, 1970.

\_\_\_\_\_. *Semiótica*. São Paulo: Perspectiva, 1990.

\_\_\_\_\_. *Semiótica*. São Paulo: Perspectiva, 2003.

PELLEGRIN, Pierre. *Vocabulário de Aristóteles*. Trad. Claudia Berliner. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2010. (Coleção vocabulário dos filósofos)

PENEIREIRO, J. B.; SILVA, M. F. *Geometria Plana e Desenho Geométrico*. Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2008.

PESSANHA, José Américo Motta. *Aristóteles*. Trad. Leonel Vallandro e Gerd Bornheim. São Paulo: Nova Cultural, 1987. 293 p. (Coleção Os Pensadores, v.1)

PESSOA Jr., Osvaldo. *A Matemática Antiga*. In: *Teoria do Conhecimento e Filosofia da Ciência I*, 2010.

PIAGET, Jean. *A Equilibração das Estruturas Cognitivas*. Trad. Marion Merlone do Santos Penna. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 1976.

PLATÃO. *A República*. V. 2. Trad. Robert Baccou. São Paulo: difusão Européia do livro, 1965.

\_\_\_\_\_. *Mênon*. Trad. Maura Iglêsias. Rio de Janeiro: Edições Loyola, 2001.

\_\_\_\_\_. *Fedão*, Versão eletrônica. Trad. Carlos Alberto Nunes. Créditos da digitalização: Membros do grupo Acrópolis (Filosofia). Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cv000031>>. Acesso em 15 abril 2012.

\_\_\_\_\_. *Teeteto*, Versão eletrônica. Trad. Carlos Alberto Nunes. Créditos da digitalização: Membros do grupo Acrópolis (Filosofia). Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cv000031>>. Acesso em 20 abril 2012.

\_\_\_\_\_. *Parmênides*, Versão eletrônica. Trad. Carlos Alberto Nunes. Créditos da digitalização: Membros do grupo Acrópolis (Filosofia). Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cv000031>>. Acesso em 01 maio 2012.

POINCARÉ, H. [Review]. *Hilbert: Les Fondaments de la Géométrie*. Bulletin des Sciences Mathématiques. Deuxième Serie, 26, 1902. pp 249-272.

PÖKSEN, B. *Abschied vom Absoluten: Gespräche zum Konstruktivismus*. Heidelberg: Carl-Auer-Systeme Verlag. 2001.

PLOTNITSKY, Arkady. *Niels Bohr and Complementarity: An Introduction*. New York: Springer, 2012.

QUINÉ, W. V.. *Essays on the Philosophy*. New York: University of Oklahoma Press. 1979.

REALE, Giovanni. *Introdução a Aristóteles*. 10ª ed. Trad. Artur Morão. Lisboa-Portugal: Edições 70, 1974.

ROGUE, Christopher. *Compreender Platão*. 3ª edição. Petrópolis, RJ Vozes, 2007.

ROUSSEAU, J. J. *Ensaio sobre a origem das línguas*. São Paulo: Abril Cultural, 1998.

RUSSELL B.. *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, Routledge. 1967.

\_\_\_\_\_. *Introdução à Filosofia*. 1ªed. (ebook). Edição e tradução de Augusto J. Franco de Oliveira (CEHFC/EU), 2006.

SANT'ANNA, A. S. *O que é um Axioma?* Barueri, SP: Manole, 2003.

SANTANA, Geslane Figueiredo. *Pierre Bourroux e a Revolução na Matemática Moderna*. Cuiabá-MT: UFMT, 2011. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Educação da Universidade Federal de Mato Grosso, 2011).

SANTAELLA, Lúcia. *O que é semiótica?* São Paulo: Abril Cultural, 2003.

SCHLICK, Moritz. *Epistemology & Modern Physics*. Garland Publishing Inc. 1925.

SCHMIDT, Ana Rieger. *Contradição e Determinismo: um estudo sobre o problema dos futuros contingentes em Tomás de Aquino*. Porto Alegre: UFRS, 2009. Dissertação (Mestrado em Filosofia do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009).

SERVIDONI, M. C. P. *A Axiomatização da Aritmética: e a contribuição de Hermann Günther Grassmann*. São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática do Programa de Pós-Graduação da PUC-SP, 2006).

SILVA, Adalberto Prado; LOURENÇO, M. B.; MARINS, F.; MAURER Jr., T. H.; CURADO, J.; PEREIRA, A. T.; ROSUT, A. *Encyclopaedia Britannica do Brasil*. 5ª Ed. São Paulo: Companhia Melhoramentos de São Paulo, 1981.

SILVA, Benedicto; MIRANDA NETTO, Antonio Garcia. *Dicionário de Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Editora da Fundação Getúlio Vargas, 1986.

SILVA, Jairo José da. *Filosofia(s) da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVEIRA, Fernando Lang da. A Teoria do Conhecimento de Kant: o idealismo transcendental. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*. v.19, número especial: p.28-51.jun.2002.

STIRN, François. *Compreender Aristóteles*. 3 ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 2011.

TARSKI, A.. Der Wahrheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica*, 1 (1936), p.261-405. Este artigo faz parte, em tradução inglesa, da coletânea do mesmo autor, *Logic, Metamathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1956.

TAVARES, Luiz Alberto. "James Watt: A trajetória que levou ao desenvolvimento da máquina a vapor vista por seus biógrafos e homens de ciências". São Paulo: Universidade Católica de São Paulo, 2008. Dissertação (Mestrado em História da Ciência, do Programa de Pós-Graduação da Universidade Católica de São Paulo, 2008).

THINES, G.; LEMPEREUR, A. *Dicionário Geral das ciências Humanas*. Coleção Lexis. Lisboa: Edições 70, s/d.

TILES, M. *Filosofia da Matemática*. In. *Compêndio de Filosofia*. Orgs. N. Bunnin e E.P. Tsui-James. Cap.10. São Paulo: Ed. Loyola, 2002. P.325-55.

THOM, René. *Modern Mathematics: Does it exist?*, in: A.G. Howson (ed), *Development in Mathematica*, 1973.

WILLIAMS, Raymond. *Palavras-chaves: um vocabulário de cultura e sociedade*. Trad. Sandra Gardini Vasconcelos. São Paulo: Boitempo, 2007.