



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

# ALGUMAS SOLUÇÕES EM TEORIAS DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA

---

**William Douglas Rodrigues de Jesus**

2021

Cuiabá/MT



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

# ALGUMAS SOLUÇÕES EM TEORIAS DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA

---

**William Douglas Rodrigues de Jesus**

Tese apresentada ao Curso de Pós-graduação  
em Física da Universidade Federal de Mato  
Grosso como parte dos requisitos necessários  
para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos*

2021

Cuiabá - MT

### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

R696a Jesus, William Douglas Rodrigues de.  
Algumas Soluções em Teorias de Gravitação Modificada / William  
Douglas Rodrigues de Jesus. -- 2021  
xi, 68 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Alesandro Ferreira dos Santos.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de  
Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Cuiabá, 2021.  
Inclui bibliografia.

1. Gravitação modificada. 2. Geometria de Lyra. 3. Universo de Gödel.  
4. Energia Escura de Ricci. 5. Violação das simetrias de Lorentz. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO**  
**PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO: "Algumas soluções em teorias de gravitação modificada"**

AUTOR : Doutorando William Douglas Rodrigues de Jesus

Tese defendida e aprovada em 12/02/2021.

**COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA**

1. Doutor Alesandro Ferreira dos Santos (Presidente Banca / Orientador)
2. Doutor Maurício Godoy (Examinador Interno)
3. Doutora Érica de Mello Silva (Examinador Interno)
4. Doutor Ronni Geraldo Gomes de Amorim (Examinador Externo)
5. Doutor José Silva da Cruz Filho (Examinador Externo)

CUIABÁ, 12/02/2021.



Documento assinado eletronicamente por **ALESANDRO FERREIRA DOS SANTOS, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 12/02/2021, às 12:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOSE SILVA DA CRUZ FILHO, Usuário Externo**, em 12/02/2021, às 12:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronni Geraldo Gomes de Amorim, Usuário Externo**, em 12/02/2021, às 12:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8](#)



Documento assinado eletronicamente por **MAURICIO GODOY, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 12/02/2021, às 12:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ERICA DE MELLO SILVA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 12/02/2021, às 12:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **TELDO ANDERSON DA SILVA PEREIRA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 12/02/2021, às 12:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufmt.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3236838** e o código CRC **CB648E06**.

*À Daniela*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Alesandro Ferreira dos Santos, pela paciência, conselhos e orientação que me levaram à finalização deste trabalho.

Ao Instituto Federal de Mato Grosso pelos quatro anos de liberação para o meu processo de doutoramento.

*There are times when working hard  
may not be enough. But those who  
succeed worked hard.*

Kamogawa Genji - Hajime no Ippo.

## Lista de Figuras

|     |                                                                                                   |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Variedade M [58]. . . . .                                                                         | 21 |
| 4.1 | Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para $\alpha = 0.46$ e $V > 0$ . . . . . | 45 |
| 4.2 | Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para $\alpha = 0.46$ e $V < 0$ . . . . . | 45 |
| 4.3 | Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para $\alpha = 0.5$ e $V > 0$ . . . . .  | 46 |
| 4.4 | Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para $\alpha < 0$ e $V < 0$ . . . . .    | 46 |
| 4.5 | Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para $\alpha > 0.5$ e $V < 0$ . . . . .  | 46 |
| 4.6 | Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para $\alpha < 0$ e $V > 0$ . . . . .    | 47 |

# Resumo

Neste trabalho, a questão de causalidade é discutida em uma geometria não-riemanniana, chamada geometria de Lyra. Para comparar essa geometria com a geometria de Riemann, as equações de campo de Einstein são consideradas. Verifica-se que as métricas de Gödel e tipo-Gödel são consistentes com essa nova geometria. Uma solução não trivial para o universo de Gödel, na ausência de fontes de matéria, é determinada sem análogo na relatividade geral. Diferentes fontes de matéria são consideradas e, então, condições diferentes para soluções causais e não causais são discutidas. Na segunda parte do trabalho, a energia escura de Ricci é estudada. Este é um modelo inspirado nos modelos de energia escura holográfica, com a densidade de energia escura sendo proporcional à curvatura escalar de Ricci. Aqui, este modelo é estudado na teoria da gravidade de bumblebee. Que é uma teoria gravitacional que exhibe quebra espontânea da simetria de Lorentz. Então, a equação de Friedmann modificada é resolvida para dois casos. No primeiro caso, a constante de acoplamento  $\xi$  é igual a zero. No segundo caso é considerada uma solução no vácuo, onde o campo de bumblebee se torna uma constante que minimiza o potencial. A constante de acoplamento controla a interação gravidade-bumblebee. O universo do tipo-Gödel é introduzido no contexto da gravidade de bumblebee e a causalidade e sua violação são estudadas. Soluções causais e não causais do tipo-Gödel são obtidas para diferentes conteúdos de matéria. Ademais, quando a constante de acoplamento é zero, o potencial de bumblebee pode estar associado ao valor da constante cosmológica da relatividade geral. Além disso, o caso com a constante de acoplamento diferente de zero também é investigado.

**Palavras Chave:** Relatividade Geral, geometria de Lyra, universo de Gödel, modelo bumblebee.

# Abstract

In this work, the causality issues are discussed in a non-Riemannian geometry, called Lyra geometry. It is a non-Riemannian geometry originated from Weyl geometry. In order to compare this geometry with the Riemannian geometry, the Einstein field equations are considered. It is verified that the Gödel and Gödel-type metric are consistent with this non-Riemannian geometry. A non-trivial solution for Gödel universe in the absence of matter sources is determined without analogue in general relativity. Different sources are considered and then different conditions for causal and non-causal solutions are discussed. The Ricci dark energy is a model inspired by the holographic dark energy models with the dark energy density being proportional to Ricci scalar curvature. Here, this model is studied in the bumblebee gravity theory. It is a gravitational theory that exhibit spontaneous Lorentz symmetry breaking. Then, the modified Friedmann equation is solved for two cases. In the first case, the coupling constant  $\xi$  is equal to zero and in the second case a solution in the vacuum, where the bumblebee field becomes a constant that minimizes the potential, is considered. The coupling constant controls the interaction gravity-bumblebee. The Gödel-type universe is introduced in the context of bumblebee gravity and then the causality and its violation is studied. Causal and non-causal Gödel-type solutions are obtained for different content of matter. In addition, when the coupling constant is zero, the bumblebee potential may be associated with the value of the cosmological constant of the general relativity. Furthermore, the case with the non-zero coupling constant is also investigated.

**Keywords:** General relativity, Lyra's geometry, Gödel universe, bumblebee model.

## Sumário

|                                                       |           |
|-------------------------------------------------------|-----------|
| Dedicatória                                           | vi        |
| Agradecimentos                                        | vii       |
| Epígrafe                                              | viii      |
| Lista de Figuras                                      | ix        |
| Resumo                                                | x         |
| Abstract                                              | xi        |
| <b>1 Introdução</b>                                   | <b>3</b>  |
| <b>2 Universo de Gödel</b>                            | <b>8</b>  |
| 2.1 Solução de Gödel . . . . .                        | 9         |
| 2.2 Métricas do Tipo-Gödel . . . . .                  | 11        |
| <b>3 Geometria de Lyra</b>                            | <b>15</b> |
| 3.1 Geometria Riemanniana . . . . .                   | 15        |
| 3.2 Geometria de Weyl . . . . .                       | 17        |
| 3.3 Geometria de Lyra . . . . .                       | 18        |
| 3.3.1 Cálculo de $K^i_{\kappa\alpha\beta}$ . . . . .  | 21        |
| 3.3.2 Equações de Campo . . . . .                     | 24        |
| 3.4 Solução de Gödel na Geometria de Lyra . . . . .   | 26        |
| 3.5 Solução Tipo-Gödel na Geometria de Lyra . . . . . | 30        |

|          |                                             |           |
|----------|---------------------------------------------|-----------|
| 3.5.1    | $\Lambda = 0$                               | 30        |
| 3.5.2    | $\Lambda \neq 0$                            | 34        |
| <b>4</b> | <b>Gravidade de Bumblebee</b>               | <b>38</b> |
| 4.1      | Modelo Bumblebee                            | 39        |
| 4.1.1    | Derivação das Equações de Campo             | 40        |
| 4.2      | Energia Escura de Ricci no Modelo Bumblebee | 43        |
| 4.2.1    | Caso 1: $\xi = 0$                           | 44        |
| 4.2.2    | Caso 2: $\xi \neq 0$                        | 47        |
| 4.3      | Métrica Tipo-Gödel no Modelo Bumblebee      | 48        |
| 4.3.1    | Caso 1: $\xi = 0$                           | 50        |
| 4.3.2    | Caso 2: $\xi \neq 0$                        | 52        |
| <b>5</b> | <b>Conclusões</b>                           | <b>54</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>           | <b>57</b> |

A teoria da relatividade geral descreve a gravitação em um nível clássico. Apesar de ser a teoria de gravidade mais bem testada, ela não explica alguns dados experimentais [1, 2, 3]. Resultados observacionais recentes levam a evidências para uma fase de expansão acelerada do universo. Esta aceleração pode ser explicada por uma nova componente chamada de energia escura, que corresponde a aproximadamente 70% da quantidade de energia do universo e sua natureza ainda é um mistério.

O candidato mais simples que descreve a energia escura é a constante cosmológica  $\Lambda$ . Ela é o ingrediente fundamental do modelo  $\Lambda$ CDM (do inglês:  $\Lambda$  Cold Dark Matter), o modelo mais consistente com os dados observacionais. Contudo, esse modelo sofre de dois problemas, o problema de ajuste fino (o valor observado da constante cosmológica é da ordem de  $10^{-120}$  menor que o valor estimado para a energia do vácuo na teoria quântica de campos) e o problema da coincidência (no período atual da história do universo os valores da densidade de energia escura e de matéria escura são da mesma ordem de magnitude).

Além disso, ainda não existe uma teoria completa e consistente de gravidade quântica. Destes fatos emerge a possibilidade de que a relatividade geral possa ser modificada. Muitas teorias surgem como possíveis generalizações, tal como a gravidade  $f(R)$  [4], modelo bumblebee [5], gravidade de Chern-Simons [6], teoria de Brans-Dicke [7], dentre outras.

Em busca por uma teoria unificada, em 1918, Hermann Weyl [8] apresentou sua teoria de campo unificado, na qual considerava a introdução de uma função de calibre que possibilitava geometrizar o eletromagnetismo. Porém, a geometria passa a ser não-Riemanniana. As condições de compatibilidade da métrica se alteram, o que faz com que a conexão afim não seja mais representada pelo símbolo de Christoffel. O maior problema da teoria é que o comprimento do vetor sob transporte paralelo não se mantinha

constante, o que a tornava inconsistente, já que a teoria passa a ser não integrável.

Em 1951, Lyra propôs uma modificação da geometria Riemanniana [9]. Essa modificação consiste na introdução de uma função de calibre no espaço afim, onde a função de calibre adquire o mesmo status de sistema de coordenadas, e juntos formam o chamado “sistema de referência”. A teoria de Lyra pode ser considerada como uma generalização da geometria de Weyl, mas com a vantagem do comprimento do vetor sob transporte paralelo se manter constante.

D. K. Sen, em 1957 [10], formulou uma generalização da relatividade geral no contexto da geometria de Lyra. Nesta generalização, a introdução da função de calibre faz surgir naturalmente um vetor deslocamento nas equações de campo. Halford [11] mostrou que o vetor deslocamento constante faz o papel da constantes cosmológica, com a vantagem de que o vetor deslocamento surgiu naturalmente da introdução da função de calibre, enquanto que a constante cosmológica é adicionada de maneira adhoc na relatividade usual.

Sen e Dunn [12] mostraram que as equações de campo obtidas em [10] podem ser consideradas como um caso especial das equações de Brans-Dicke [7] se a função de calibre for identificada como o campo escalar. A geometria de Lyra é estudada em vários contextos [13, 14, 15, 16].

Outro problema envolvendo a relatividade geral é a falta de uma teoria de gravidade quântica. Contudo, existem algumas teorias que unificam a relatividade geral e o modelo padrão da física de partículas [17, 18]. É esperado que estas teorias de unificação surjam na escala de Planck,  $10^{19}$  GeV. Nesta escala, pequenos efeitos de violação de Lorentz podem aparecer. A quebra da simetria de Lorentz surge como uma possibilidade na teoria de cordas [19, 20], teorias de campos não-comutativas [21] e gravidade quântica de loop [22]. Para estudar as consequências da violação de Lorentz, uma extensão do modelo padrão foi desenvolvida. A Extensão do Modelo Padrão (SME - Standard Model Extension) [23, 24] é uma teoria de campo efetiva que contém o modelo padrão, a relatividade geral e todos os possíveis operadores que violam as simetria de Lorentz e CPT<sup>1</sup>.

Os mecanismos pelos quais os coeficientes para a violação de Lorentz poderiam surgir no SME são divididos em duas classes: quebra explícita das simetrias de Lorentz e quebra espontânea das simetrias de Lorentz. As violações explícitas de Lorentz são caracterizadas

---

<sup>1</sup>A simetria CPT é formada pela combinação de três simetrias discretas: conjugação de carga (C), que converte a partícula em antipartícula; inversão de paridade (P), que transforma um objeto em sua imagem espelhada invertida; e reversão temporal (T), que inverte a direção do fluxo do tempo.

diretamente ao assumir coeficientes não nulos no campo de fundo, enquanto que, a quebra espontânea de simetria assume que as violações de Lorentz surgem dinamicamente como uma solução que viola Lorentz, que é associada a uma ação invariante de Lorentz. A quebra espontânea de simetria tipicamente ocorre quando soluções de baixas energias de um sistema não respeitam a simetria que existe na teoria. Um exemplo deste processo é a quebra de simetria espacial, que ocorre quando pressionamos uma vareta no sentido de comprimi-la. Como não podemos prever em que direção a vareta irá dobrar, dizemos que esta quebra da simetria de rotação ocorre de forma espontânea [25]. Outro exemplo de quebra espontânea de simetria ocorre no modelo padrão, onde um potencial gera um valor esperado no vácuo (VEV - Vacuum Expectation Value) para o campo de Higgs, que quebra espontaneamente a simetria de calibre  $SU(2) \times U(1)$ . A quebra espontânea de uma simetria global resulta em modos de Nambu-Goldstone sem massa, enquanto a quebra de uma simetria local resulta em bósons de calibre massivos, os bósons W e Z no caso do modelo padrão. Outras partículas acopladas ao campo de Higgs também recebem uma massa relacionada ao VEV [26].

O mecanismo utilizado para gerar o modelo padrão estendido é a quebra espontânea de simetria, no qual um campo tensorial que contém índices de Lorentz, adquirem um valor esperado no vácuo (VEV) não nulo,  $\langle T_\mu \rangle \neq 0$ , que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo e assim, quebra espontaneamente a simetria de Lorentz.

O modelo mais simples de teoria com quebra espontânea de simetria de Lorentz é o modelo bumblebee [27], onde um campo vetorial adquire um VEV diferente de zero,  $\langle B_\mu \rangle = b_\mu$ , sendo  $B_\mu$  um campo vetorial chamado de campo de bumblebee e  $b_\mu$  seu valor esperado no vácuo. Tal modelo será estudado no capítulo 3, e vamos verificar se a energia escura de Ricci [28] e a solução tipo-Gödel [29] é consistente com esse modelo.

Acredita-se que uns dos princípios fundamentais da gravidade quântica é o princípio holográfico (PH). Proposto pela primeira vez por Gerard 't Hooft [30, 31], foi dada uma interpretação precisa na teoria de cordas por Leonard Susskind [32]. O PH afirma que toda a informação contida em um volume de espaço pode ser representada como um holograma, o que corresponde a uma teoria que se localiza no limite desse espaço. Em 1997, Maldacena propôs a correspondência AdS/CFT, que é a realização mais importante do princípio holográfico, e acredita-se que o mesmo é um princípio fundamental da gravidade quântica.

Um tentativa interessante de explicar a atual expansão acelerada do universo é o modelo de Energia Escura de Ricci [28]. Este modelo é inspirado pelo princípio holográfico,

o qual considera que a densidade de energia é proporcional ao escalar de curvatura de Ricci. A grande vantagem deste modelo é que ele evita ambos os problemas do modelo  $\Lambda$ CDM, o problema de ajuste-fino e coincidência, sendo que a energia escura não é associada à escala de Planck, mas com a escala cosmológica.

A solução de Gödel, obtida em 1949 [33], pelo lógico, matemático e filósofo Kurt Gödel é considerada. Essa solução tem como uma de suas principais características as curvas do tipo-tempo fechadas (CTCs - do inglês: Closed Timelike Curves), que permitem viagens ao passado.

A solução publicada por Gödel em 1949 é a primeira solução exata das equações de Einstein com matéria em rotação, cuja característica mais importante é a presença de curvas tipo-tempo fechadas, que permitem, ao menos em teoria, viagens ao passado.

A solução de Gödel foi muito criticada e não foi bem aceita pela maioria dos físicos, até mesmo por Einstein, que na época era um grande amigo de Gödel [34]. No Cinquentenário da Teoria da Relatividade, H. P. Robertson referiu-se sobre a geometria de Gödel do seguinte modo: "Considero um defeito das equações da relatividade geral o fato de que elas permitam tal solução". Assim, a proposta de Gödel foi considerada um "defeito teórico" das equações da relatividade geral [35]. Em 1992, Stephen Hawking propõe a conjectura de proteção cronológica, que afirma que as leis do universo estão construídas de tal maneira que a viagem no tempo é proibida.

Outro motivo da métrica de Gödel ser ignorada, é o fato da solução ser estática, não sendo um modelo realístico do universo, pois o mesmo está em expansão [36]. Porém, pelo fato da solução de Gödel ser uma solução exata das equações de Einstein, ela é considerada um laboratório teórico para testes de teorias de gravitação modificada, e é estudada em vários contextos [37, 38, 39, 40, 41, 42].

Uma generalização da métrica de Gödel é proposta em [29], chamada de métrica tipo-Gödel, onde temos três classes de solução: linear, trigonométrica e hiperbólica. Na classe linear existe somente uma região não causal. Na classe trigonométrica temos uma sequência infinita de regiões alternando entre soluções causais e não causais. Na classe hiperbólica podem existir dois tipos de soluções: a solução de Gödel, com uma única região não causal; e uma solução tipo-Gödel causal, onde as curvas tipo-tempo fechadas são evitadas, e portanto, sem violação de causalidade.

A tese está organizada como segue. No capítulo 2, apresentamos as soluções de Gödel e tipo-Gödel, e estudaremos a questão da causalidade. No capítulo 3, estudamos a Geo-

metria de Lyra, e verificamos sua consistência com as métricas de Gödel e tipo-Gödel, e as questões de causalidade são discutidas para diferentes fontes de matéria. No capítulo 4, estudamos a gravidade de bumblebee. Em seguida, o modelo de energia escura de Ricci é estudado nesta teoria. Por fim, a métrica tipo-Gödel é estudada no modelo bumblebee, e o problema da causalidade é investigado neste modelo gravitacional. No capítulo 5, nossas conclusões e perspectivas são apresentadas.

## Universo de Gödel

Em 1949, Kurt Gödel [33] publicou um artigo em que apresentava a primeira solução exata das equações de Einstein com matéria em rotação. A matéria nesse universo tem a forma de um fluido perfeito sem pressão (poeira), cujo tensor energia-momento é  $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$ , onde  $\rho$  é a densidade de matéria e  $u_\mu$  é o quadri vetor velocidade normalizado. Esta solução é estacionária, espacialmente homogênea e apresenta simetria cilíndrica.

A solução de Gödel é caracterizada pelo fato de que o fluido não tem expansão ou aceleração. A única quantidade cinemática é a rotação (vorticidade), que tem uma magnitude constante  $\omega = 2\sqrt{\pi G\rho}$ , onde  $G$  é a constante gravitacional de Newton.

A consequência mais interessante da solução de Gödel é a possibilidade de curvas tipo-tempo fechadas, curvas essas que permitem em teoria, viagens ao passado. No entanto, a existência dessas curvas representa uma violação de causalidade <sup>2</sup>, que não é bem aceita pela maioria dos físicos [34], visto que a natureza parece seguir as leis da causalidade, como por exemplo a flecha do tempo da cosmologia, que somente aponta para o futuro [43]. Em 1992, Stephen Hawking construiu um princípio de proteção causal [44], o qual simplesmente exclui a solução de Gödel, argumentando que as CTC's não existem em nosso universo. No entanto, ainda não foi feita uma prova geral desta conjectura. Pelo fato da solução de Gödel ser uma solução exata das equações de Einstein, ela é considerada um laboratório teórico para testes de teorias de gravitação modificada, e é estudada na geometria de Finsler [45], na gravidade  $f(R, T)$  [46], dentre outros contextos [47, 48, 49, 50, 51, 52].

Para estudar com mais detalhes os problemas de causalidade, uma versão generalizada da métrica de Gödel foi proposta em [29], que é chamada métricas tipo-Gödel. Nesta

---

<sup>2</sup>Relação entre um evento A, a causa, e um segundo evento B, o efeito, de tal forma que o segundo evento seja uma consequência do primeiro.

generalização temos três classes de soluções: A primeira onde a violação de causalidade é evitada; a segunda apresenta uma sequência infinita alternando entre regiões com e sem violação de causalidade; a terceira com violação de causalidade. Na próxima seção, discutimos as principais características dessa solução.

## 2.1 Solução de Gödel

A métrica de Gödel é escrita como [33]

$$ds^2 = a^2[dt^2 - dx^2 + \frac{1}{2}e^{2x}dy^2 - dz^2 + 2e^x dt dy], \quad (2.1)$$

onde  $a$  é um número positivo.

Para provar a invariância rotacional da equação acima, Gödel introduziu novas coordenadas  $r, \phi, t'$  e  $z$ , usando as seguintes equações de transformação

$$\begin{aligned} e^x &= \cosh(2r) + \cos\phi \sinh(2r), \\ ye^x &= \sqrt{2} \sin\phi \sinh(2r), \\ tg\left(\frac{\phi}{2} + \frac{t-2t'}{2\sqrt{2}}\right) &= e^{-2r} tg\frac{\phi}{2}, \text{ onde } \left|\frac{t-2t'}{2\sqrt{2}}\right| < \frac{\pi}{2}, \\ z &= 2z'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Com a introdução destas variáveis a equação (2.1) se torna

$$ds^2 = 4a^2[dt'^2 - dr^2 - dz'^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r)d\phi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r d\phi dt'], \quad (2.3)$$

que diretamente exhibe a simetria rotacional, sendo que  $g_{\mu\nu}$  não depende de  $\phi$ .

As curvas definidas por  $t' = z' = r = \text{constante}$  serão tipo-tempo fechadas se  $(\sinh^4 r - \sinh^2 r > 0)$ . Assim, teremos CTCs para todo  $r > r_c$ . Onde o raio crítico  $r_c$  é

$$r_c = \sinh^{-1}1 = \ln(1 + \sqrt{2}). \quad (2.4)$$

Como mostrado por Chandrasekhar e Wright [53], as geodésicas de Gödel não exibem violação de causalidade, e erroneamente eles chegaram a conclusão que as CTCs no universo de Gödel não existem. Mas segundo Stein [54], as órbitas circulares de Gödel não

são geodésicas.

A métrica acima é um caso particular das geometrias do tipo-Gödel que veremos com mais detalhes na próxima seção.

Vamos mostrar que a métrica, equação (2.1), satisfaz as equações de Einstein com constante cosmológica  $\Lambda$  [55]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\rho u_\mu u_\nu + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci, e  $R$  é o escalar de Ricci. O vetor unitário  $\mathbf{u}$  na direção  $x^0$  tem as componentes contravariantes  $(1/a, 0, 0, 0)$  e as componentes covariantes  $(a, 0, ae^x, 0)$ . Para resolvermos as equações (2.5), precisamos das seguintes quantidades:

(i) Símbolos de Christoffel não-nulos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= 1 \\ \Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{02}^1 = \frac{1}{2}e^x \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}e^{2x} \\ \Gamma_{01}^2 &= -e^{-x}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

(ii) Componentes do tensor de Ricci não-nulas:

$$\begin{aligned} R_{00} &= 1 \\ R_{02} &= R_{20} = e^x \\ R_{22} &= e^{2x}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

(iii) Escalar de Ricci:

$$R = \frac{1}{a^2}. \quad (2.8)$$

Usando os resultados acima, as componentes não-nulas das equações de Einstein são: Componente (00), que é igual a componente (02):

$$\frac{1}{2} = 8\pi G\rho a^2 + \Lambda a^2. \quad (2.9)$$

Componente (11), que é igual a componente (33):

$$\frac{1}{2} = -\Lambda a^2. \quad (2.10)$$

Componente (22):

$$\frac{3}{2} = 16\pi G\rho a^2 + \Lambda a^2. \quad (2.11)$$

Portanto, as equações (2.9) a (2.11) somente são satisfeitas se

$$\frac{1}{a^2} = 8\pi G\rho \quad \text{e} \quad \Lambda = -\frac{1}{2a^2}, \quad (2.12)$$

ou  $\Lambda = -4\pi G\rho$ , ou seja, o universo de Gödel somente é consistente com as equações de Einstein se e somente se as condições (2.12) forem satisfeitas.

## 2.2 Métricas do Tipo-Gödel

Para estudar com mais detalhes a questão de causalidade, vamos estudar a métrica tipo-Gödel. A solução de Gödel é um membro da família de geometrias homogêneas do espaço-tempo do tipo-Gödel, cuja forma em coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$  é dada por [42]

$$ds^2 = -[dt + H(r)d\phi]^2 + D^2(r)d\phi^2 + dr^2 + dz^2, \quad (2.13)$$

onde as funções  $H(r)$  e  $D(r)$  são tais que

$$\frac{H'}{D} = 2\omega, \quad (2.14)$$

$$\frac{D''}{D} = m^2. \quad (2.15)$$

Aqui a linha denota derivada com respeito a  $r$ , e os parâmetros  $(m, \omega)$  são dois parâmetros constantes usados para classificar diferentes geometrias do tipo Gödel, tais que,  $\omega^2 > 0$  e  $-\infty \leq m^2 \leq \infty$ .

As métricas homogêneas do tipo Gödel podem ser agrupadas nas seguintes classes:

i. Linear, em que  $m = 0$  e

$$H(r) = \omega r^2, \quad D(r) = r. \quad (2.16)$$

ii. Trigonométricas, onde  $m^2 = \text{constante} \equiv -\mu^2 < 0$  e

$$H(r) = \frac{4\omega}{\mu^2} \text{sen}^2\left(\frac{\mu r}{2}\right), \quad D(r) = \frac{1}{\mu} \text{sen}(\mu r); \quad (2.17)$$

iii. Hiperbólicas, em que  $m^2 = \text{constante} > 0$  e

$$H(r) = \frac{4\omega}{m^2} \text{senh}^2\left(\frac{mr}{2}\right), \quad D(r) = \frac{1}{m} \text{senh}(mr). \quad (2.18)$$

Todas as métricas do tipo Gödel são caracterizadas pelos dois parâmetros  $m$  e  $\omega$ . Pares idênticos  $(m^2, \omega^2)$  especificam espaços-tempo isométricos <sup>1</sup> [29, 56, 57]. A solução de Gödel é um caso particular da classe hiperbólica ( $m^2 > 0$ ) com  $m^2 = 2\omega^2$ .

Para examinarmos a questão da causalidade associada à métrica tipo-Gödel, reescrevemos a equação (2.13) como

$$ds^2 = -dt^2 - 2H(r)dtd\phi + dr^2 + G(r)d\phi^2 + dz^2, \quad (2.19)$$

onde  $G(r) = D(r)^2 - H(r)^2$ . Na forma acima, se  $G(r) < 0$  para um determinado intervalo de  $r$ , o círculo definido por  $t, z, r = \text{constante}$  é uma curva tipo-tempo fechada que leva para a violação de causalidade: ao seguir tal curva, um observador acelerado pode retornar ao seu ponto de partida no mesmo instante que partiu.

As características de causalidade da métrica do tipo-Gödel depende dos dois parâmetros  $m$  e  $\omega$  como apresentado em [29]. Vejamos:

Para  $m = 0$ , equação (2.16), temos

$$G(r) = \omega^2 r^4 - r^2, \quad (2.20)$$

onde encontramos o raio crítico  $r_c = \frac{1}{\omega}$ , tal que, para todos  $r > r_c$  temos círculos de Gödel não-causais.

Para  $m = -\mu < 0$ , equação (2.17), temos

$$G(r) = \frac{4}{\mu^4} \text{sen}^2\left(\frac{\mu r}{2}\right) \left[ \mu^2 - (4\omega^2 + \mu^2) \text{sen}^2\left(\frac{\mu r}{2}\right) \right], \quad (2.21)$$

e  $G(r)$  tem uma sequência infinita de zeros. Também, existe uma sequência infinita de

---

<sup>1</sup>Isometrias são as simetrias da métrica.

regiões alternando entre regiões causais  $[G(r) > 0]$  e não causais  $[G(r) < 0]$ .

Para  $m^2 > 0$ , equação (2.18), temos

$$G(r) = \frac{4}{m^2} \sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\mu^2}\right) \sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right)\right], \quad (2.22)$$

e teremos  $G(r) < 0$  para

$$\sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right) > \left(\frac{4\omega^2}{m^2} - 1\right)^{-1}. \quad (2.23)$$

Se  $m^2 = 2\omega^2$  recuperamos o resultado obtido por Gödel em [33], e o raio crítico é dado por

$$r_c = \frac{2}{m} \sinh^{-1}(1), \quad (2.24)$$

e assim teremos curvas de Gödel para todo  $r > r_c$ .

Para o valor  $m^2 = 4\omega^2$ , o raio crítico  $r_c \rightarrow \infty$ , assim não temos círculos de Gödel, e a violação da causalidade é evitada.

Para facilitar os cálculos das equações de campo, a métrica tipo-Gödel pode ser escrita no espaço tangente como

$$ds^2 = \eta_{AB} \Theta^A \Theta^B = (\Theta^0)^2 - (\Theta^1)^2 - (\Theta^2)^2 - (\Theta^3)^2, \quad (2.25)$$

onde as 1-forma  $\Theta^A = e^{(A)}_{\alpha} dx^{\alpha}$  são dados por

$$\Theta^0 = dt + H(r)d\phi, \quad \Theta^1 = dr, \quad \Theta^2 = D(r)d\phi, \quad \Theta^3 = dz. \quad (2.26)$$

As letras maiúsculas são índices de tetradas e variam de 0 a 3, e as letras gregas são índices tensoriais.

Da equação (2.25), as componentes das tetradas são dadas por:

$$e^{(0)}_0 = e^{(1)}_1 = e^{(3)}_3 = 1, \quad e^{(0)}_2 = H(r), \quad e^{(2)}_2 = D(r), \quad (2.27)$$

e usando que  $e^{(A)}_{\alpha} e^{\alpha}_{(B)} = \delta^A_B$ , obtemos

$$e^0_{(0)} = e^1_{(1)} = e^3_{(3)} = 1, \quad e^0_{(2)} = -\frac{H(r)}{D(r)}, \quad e^2_{(2)} = \frac{1}{D(r)}. \quad (2.28)$$

As componentes não nulas do tensor de Einstein no referencial de tetradas, onde

$G_{AB} = e^\mu{}_A e^\nu{}_B G_{\mu\nu}$ , são:

$$G_{00} = 3\omega^2 - m^2, \quad G_{11} = G_{22} = \omega^2, \quad G_{33} = m^2 - \omega^2. \quad (2.29)$$

Estes resultados serão usados no próximo capítulo, onde a solução do tipo-Gödel será estudada na estrutura da geometria de Lyra, e posteriormente no modelo de gravidade de bumblebee.

## Geometria de Lyra

Em sua tentativa de unificar a gravitação e o eletromagnetismo, Weyl introduziu um campo vetorial com uma significância geométrica intrínseca. Porém, tal unificação vem com um custo alto, o comprimento de um vetor transportado paralelamente muda, fazendo com que a teoria se torne não-integrável. Tal fato foi criticado por Einstein, porque implica que a frequência de linhas espectrais emitidas por átomos não permaneceria constante, mas dependeria de sua trajetória.

Lyra sugeriu uma modificação da geometria Riemanniana que pode ser considerada como uma generalização da geometria de Weyl. Na geometria de Lyra, o conceito de calibre de Weyl, que é essencialmente um conceito métrico, é modificado pela introdução de uma função de calibre na estrutura da variedade. Na geometria de Lyra, a conexão é consistente com a métrica e o comprimento dos vetores transportados paralelamente são integráveis como na geometria Riemanniana.

### 3.1 Geometria Riemanniana

Na geometria Riemanniana [12], a estrutura geométrica de uma variedade diferenciável é determinado por (i) uma conexão afim caracterizada (em um sistema de coordenadas local  $x^\lambda$ ) pelas componentes  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ , que são definidas pela variação devida a um transporte paralelo infinitesimal de um vetor  $\xi^\mu$  de um ponto  $P(x^\mu)$  para  $P'(x^\mu + dx^\mu)$ ,

$$d\xi^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\xi^\alpha dx^\beta, \quad (3.1)$$

e (ii) uma conexão métrica caracterizada pelo tensor métrico fundamental  $g_{\mu\nu}$  que é definida pela medida do comprimento  $\xi$  de  $\xi^\mu$ ,

$$\xi = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu. \quad (3.2)$$

A geometria Riemanniana é caracterizada pela simetria de  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ , que é  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$  e pela condição de que o comprimento de um vetor não deve se alterar sob transporte paralelo, isto é,

$$\delta\xi = \delta(g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu) = 0. \quad (3.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu + g_{\mu\nu} \delta \xi^\mu \xi^\nu + g_{\mu\nu} \xi^\mu \delta \xi^\nu &= 0 \\ \delta g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

esta condição será satisfeita para qualquer curva, se e somente se

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} g_{\mu\nu;\alpha} = 0, \quad (3.5)$$

que é a equação de compatibilidade da métrica, onde  $g_{\mu\nu;\alpha}$  é a derivada covariante da métrica. Podemos expandir a equação (3.5) para três permutações diferentes e obter

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\alpha} &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\mu\sigma} = 0, \\ g_{\nu\alpha;\mu} &= \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} g_{\nu\sigma} = 0, \\ g_{\alpha\mu;\nu} &= \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\alpha\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Subtraindo a segunda e a terceira equação da primeira, e usando a simetria da conexão, obtemos:

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\alpha\sigma} = 0, \quad (3.7)$$

multiplicando por  $g^{\rho\nu}$ , e organizando os índices, ficamos com

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \{\alpha^\mu{}_\beta\} = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}), \quad (3.8)$$

onde o lado direito são os símbolos de Christoffel de segundo tipo.

## 3.2 Geometria de Weyl

Weyl generalizou a noção da conexão Riemanniana considerando que além do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  ser invariante por transformações de coordenadas, também deveria ser invariante por transformações de calibre, da seguinte maneira.

Com cada vetor  $\xi^\mu$  existe uma medida de comprimento associada dada pela forma quadrática  $\xi = g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$ . Dois vetores  $\xi^\mu$  e  $\eta^\nu$  tem o mesmo comprimento se e somente se  $\xi = \eta$ . Agora a forma quadrática é completamente determinada somente quando se especifica um fator de proporcionalidade (ou calibre) de escala diferente de zero. Em todos os pontos da variedade há, portanto, a possibilidade de uma mudança de escala (ou seja, uma recalibração) ou uma transformação de calibre. Na variedade de Weyl, isto não é suficiente para que a conexão métrica tenha uma determinação de medida em cada ponto, pois cada ponto também deve ser metricamente relacionado a vizinhança. A relação métrica é determinada ao especificar a mudança na medida do comprimento do vetor  $\xi^\mu$  transportado paralelamente de  $P(x^\mu)$  até  $P'(x^\mu + dx^\mu)$ . Contudo, em um calibre arbitrário,  $\xi$  é assumido para mudar de acordo com a relação

$$\delta\xi = -\xi\phi_\mu dx^\mu, \quad (3.9)$$

onde  $\phi_\mu$  é um vetor que caracteriza a variedade. A conexão métrica da variedade de Weyl é portanto caracterizada por duas quantidades independentes  $g_{\mu\nu}$  e  $\phi_\mu$ , relativos ao sistema de referência (sistema de coordenadas + calibre). Numa transformação de calibre, os comprimentos  $\xi \rightarrow \bar{\xi} = \lambda\xi$ , onde  $\lambda = \lambda(x)$  em geral,  $\phi_\mu$  e  $g_{\mu\nu}$  se transformam da seguinte maneira:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}; \quad \phi_\mu \rightarrow \bar{\phi}_\mu = \phi_\mu - \lambda^{-1}\lambda_{,\mu}, \quad (3.10)$$

onde  $\lambda_{,\mu} = \partial\lambda/\partial x^\mu$ . Combinando a equação (3.9) com a (3.2), obtemos que

$$g_{\mu\nu;\alpha} = \phi_\alpha g_{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

onde  $g_{\mu\nu;\alpha}$  é a derivada covariante do tensor métrico. As componentes da conexão afim

$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  são obtidas da mesma maneira que os símbolos de Christoffel na equação (3.8),

$$\begin{aligned}\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\mu\sigma} &= \phi_\alpha g_{\mu\nu}, \\ \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\alpha\sigma} &= \phi_\nu g_{\alpha\mu}, \\ \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} g_{\nu\sigma} &= \phi_\mu g_{\nu\alpha},\end{aligned}\tag{3.12}$$

subtraindo a segunda e terceira equação da primeira obtemos

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\alpha\sigma} = \phi_\alpha g_{\mu\nu} - \phi_\nu g_{\alpha\mu} - \phi_\mu g_{\nu\alpha},\tag{3.13}$$

e multiplicando por  $g^{\rho\alpha}$  e organizando os itens, as componentes da conexão afim na geometria de Weyl são:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \{\alpha^\mu{}_\beta\} + S^\mu_{\alpha\beta},\tag{3.14}$$

com  $S^\mu_{\alpha\beta}$  definido como

$$S^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha \phi_\beta + \delta^\mu_\beta \phi_\alpha - g_{\alpha\beta} \phi^\mu),\tag{3.15}$$

onde  $\phi^\mu = g^{\mu\lambda} \phi_\lambda$ . Na geometria unificada de Weyl, o campo vetorial  $\phi_\mu$  é identificada como o potencial vetor de um campo eletromagnético.

### 3.3 Geometria de Lyra

Na geometria de Lyra, o vetor deslocamento  $\mathbf{PP}'$  entre dois pontos  $P(x^\mu)$  e  $P'(x^\mu + dx^\mu)$ , tem as componentes  $\xi = x^0 dx^\mu$ , onde  $x^0(x)$  é uma função de calibre não nula. O sistema de coordenadas  $x^\mu$  junto com  $x^0$  formam um sistema de referência  $(x^0; x^\mu)$ . Uma transformação geral dos sistemas de referência é dada por

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x^\lambda), \quad (x^0; x^\mu) \rightarrow (x^{0'}; x^{\mu'}),\tag{3.16}$$

com

$$A^{\mu'}_\mu \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}, \quad \det A^{\mu'}_\mu \neq 0.\tag{3.17}$$

Sob (3.16), um tensor multicomponente  $\xi_{\sigma_1 \dots \sigma_r}^{\rho_1 \dots \rho_s}$  se transforma da seguinte forma

$$\xi_{\sigma_1' \dots \sigma_r'}^{\rho_1' \dots \rho_s'} = \lambda^{s-r} A_{\rho_1'}^{\rho_1} \dots A_{\rho_s'}^{\rho_s} A_{\sigma_1'}^{\sigma_1} \dots A_{\sigma_r'}^{\sigma_r} \xi_{\sigma_1 \dots \sigma_r}^{\rho_1 \dots \rho_s}, \quad (3.18)$$

onde  $\lambda = x^{0'}/x^0$ . O fator  $\lambda^{s-r}$  surge como uma consequência da introdução da função de calibre.

As componentes  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  podem ser consideradas como resultado de transformações de coordenadas gerais da seguinte maneira. Vamos supor que no sistema de referência  $(x^0; x^{\mu})$ , um vetor  $\xi^{\mu}$  é constante, isto é,  $\xi_{,\lambda}^{\mu} = 0$ . Então, em outro sistema de referência arbitrário  $(x^{0'}; x^{\mu'})$ , temos ( $\xi^{\mu} = \lambda^{-1} A_{\mu'}^{\mu} \xi^{\mu'}$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{0'}} \xi_{,\lambda'}^{\mu'} &= \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}} \xi^{\mu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}} (\lambda A_{\mu'}^{\mu} \xi^{\mu}) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\lambda A_{\mu'}^{\mu} \xi^{\mu}) \\ \frac{1}{x^{0'}} \xi_{,\lambda'}^{\mu'} - \frac{1}{x^0} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \lambda \frac{\partial A_{\mu'}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \xi^{\mu} - \frac{1}{x^0} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\lambda}} A_{\mu'}^{\mu} \xi^{\mu} &= 0 \\ \frac{1}{x^{0'}} \xi_{,\lambda'}^{\mu'} - \frac{1}{x^0} \lambda \frac{\partial A_{\mu'}^{\mu}}{\partial x^{\lambda'}} \xi^{\mu} - \frac{1}{x^0} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\lambda'}} A_{\mu'}^{\mu} \xi^{\mu} &= 0 \\ \frac{1}{x^{0'}} \xi_{,\lambda'}^{\mu'} - \frac{1}{x^0} A_{\nu'}^{\mu} A_{\mu,\lambda'}^{\mu'} \xi^{\nu'} - \frac{1}{x^0} \lambda^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\lambda'}} \xi^{\mu'} &= 0 \\ \frac{1}{x^{0'}} \xi_{,\lambda'}^{\mu'} - \frac{1}{x^0} A_{\nu'}^{\mu} A_{\mu,\lambda'}^{\mu'} \xi^{\nu'} - \frac{1}{2x^0} \lambda^{-1} \frac{\partial \ln \lambda^2}{\partial x^{\lambda'}} \xi^{\mu'} &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $A_{\mu,\lambda'}^{\mu'} = \partial A_{\mu'}^{\mu} / \partial x^{\lambda'}$ . Fazendo as seguintes definições

$$\Gamma_{\nu'\lambda'}^{\mu'} = -\frac{1}{x^0} A_{\nu'}^{\alpha} A_{\alpha,\lambda'}^{\mu'} \quad e \quad \phi_{\lambda'} = \frac{1}{x^0} \frac{\partial \ln \lambda^2}{\partial x^{\lambda'}}, \quad (3.20)$$

obtemos

$$\xi_{,\lambda'}^{\mu'} - \Gamma_{\nu'\lambda'}^{\mu'} \xi^{\nu'} - \frac{1}{2} \phi_{\lambda'} \xi^{\mu'} = 0. \quad (3.21)$$

Assim, o transporte paralelo de um vetor  $\xi^{\mu}$  na geometria de Lyra é portanto dado por

$$d\xi^{\mu} = -\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} x^0 dx^{\beta}, \quad (3.22)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\mu} \phi_{\beta}. \quad (3.23)$$

Note que  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu}$  não é simétrico, contudo  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$ . As componentes da conexão afim generalizada são caracterizados por  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ , e também por  $\phi_{\beta}$  que aparece como uma

consequência da introdução formal da função de calibre no espaço sem estrutura.

A métrica da medida do comprimento do vetor deslocamento  $\xi^\mu = x^0 dx^\mu$  entre dois pontos  $P(x^\mu)$  e  $P'(x^\mu + dx^\mu)$  é dado pela invariância absoluta (isto é, invariante sob transformações de calibre e coordenada)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} x^0 dx^\mu x^0 dx^\nu. \quad (3.24)$$

O transporte paralelo do comprimento na geometria de Lyra é integrável (como na geometria Riemanniana), em contraste a geometria de Weyl, isto é

$$\delta(g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu) = 0. \quad (3.25)$$

Assim, temos a mesma situação da equação (3.5). Expandindo a equação acima e fazendo três permutações diferentes dos índices, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^0} g_{\mu\nu;\alpha} &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\alpha} g_{\sigma\nu} - \tilde{\Gamma}^\sigma_{\nu\alpha} g_{\mu\sigma} = 0, \\ \frac{1}{x^0} g_{\nu\alpha;\mu} &= \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \tilde{\Gamma}^\sigma_{\nu\mu} g_{\sigma\alpha} - \tilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\mu} g_{\nu\sigma} = 0, \\ \frac{1}{x^0} g_{\alpha\mu;\nu} &= \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \tilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\nu} g_{\sigma\mu} - \tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} g_{\alpha\sigma} = 0, \end{aligned}$$

Usando a equação (3.23),

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\alpha} &= \frac{1}{x^0} g_{\mu\nu;\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} g_{\mu\sigma} + \frac{1}{2} \delta^\sigma_\mu \phi_\alpha g_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \delta^\sigma_\nu \phi_\alpha g_{\mu\sigma} = 0, \\ g_{\nu\alpha;\mu} &= \frac{1}{x^0} g_{\nu\alpha;\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \delta^\sigma_\nu \phi_\mu g_{\sigma\alpha} + \frac{1}{2} \delta^\sigma_\alpha \phi_\mu g_{\nu\sigma} = 0, \\ g_{\alpha\mu;\nu} &= \frac{1}{x^0} g_{\alpha\mu;\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \delta^\sigma_\alpha \phi_\nu g_{\sigma\mu} + \frac{1}{2} \delta^\sigma_\mu \phi_\nu g_{\alpha\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda e a terceira equação da primeira:

$$\frac{1}{x^0} (g_{\mu\nu;\alpha} - g_{\nu\alpha;\mu} - g_{\alpha\mu;\nu}) - 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\alpha} + g_{\mu\nu} \phi_\alpha - g_{\alpha\mu} \phi_\nu - g_{\nu\alpha} \phi_\mu = 0.$$

Multiplicando por  $g^{\rho\alpha}$  e organizando os índices, obtemos

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{x^0} \{ \alpha^\mu{}_\beta \} + \frac{1}{2} (\delta^\mu_\alpha \phi_\beta + \delta^\mu_\beta \phi_\alpha - g_{\alpha\beta} \phi^\mu). \quad (3.26)$$

Tirando o fator  $1/x^0$ , a conexão acima é idêntica as componentes da conexão afim na geometria de Weyl, equação (3.14). Na geometria de Lyra, também temos um campo vetorial com uma significância geométrica intrínseca, sem a inconveniência da não integrabilidade do comprimento do vetor sob transporte paralelo.

Uma geodésica na geometria de Lyra é definida como uma curva  $x^i = x^i(s)$  cujo vetor tangente  $\xi^i = \left(\frac{dx^i}{ds}\right) x^0$  é transportado paralelamente para si mesma. A equação da geodésica, é portanto

$$\begin{aligned} x^0 \frac{d^2 x^k}{ds^2} + \left[ (x^0)^{-1} \{^k_{ij}\} + \frac{1}{2} (\delta^k_i \phi_j + \delta^k_j \phi_i - g_{ij} \phi^k) \right] (x^0)^2 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} ds \\ = \frac{1}{2} (\phi_i - \phi_i^0) (x^0)^2 \frac{dx^i}{ds} dx^j ds, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde

$$\phi_i^0 = (x^0)^{-1} \frac{\partial [\log(x^0)^2]}{\partial x^i}. \quad (3.28)$$

O transporte paralelo, equação (3.22), e portanto o sistema de equações diferenciais

$$\frac{1}{x^0} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} + \tilde{\Gamma}^i_{\kappa\alpha} \xi^\kappa = 0, \quad (3.29)$$

é integrável somente quando as componentes do tensor de curvatura,

$$K^i_{\kappa\alpha\beta} = \frac{1}{(x^0)^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (x^0 \tilde{\Gamma}^i_{\kappa\beta}) - \frac{\partial}{\partial x^\beta} (x^0 \tilde{\Gamma}^i_{\kappa\alpha}) \right] + x^0 \tilde{\Gamma}^i_{a\alpha} x^0 \tilde{\Gamma}^a_{\kappa\beta} - x^0 \tilde{\Gamma}^i_{a\beta} x^0 \tilde{\Gamma}^a_{\kappa\alpha}, \quad (3.30)$$

desaparecem identicamente.

### 3.3.1 Cálculo de $K^i_{\kappa\alpha\beta}$

Vamos imaginar na variedade M, Figura 3.1, um loop fechado muito pequeno do qual os quatro lados são as linhas de coordenadas  $x^1 = a$ ,  $x^1 = a + \delta a$ ,  $x^2 = b$  e  $x^2 = b + \delta b$ .

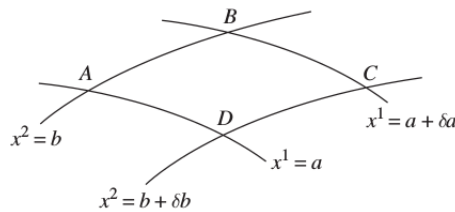


Figura 3.1: Variedade M [58].

O vetor  $\xi^k$  é transportado paralelamente do ponto A até o ponto B. Pela equação do transporte paralelo, temos:

$$\frac{1}{x^0} \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^1} = -\tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} \xi^i. \quad (3.31)$$

Integrando de A até B:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^0} \int_A^B \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^1} dx^1 &= - \int_A^B \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} \xi^i dx^1 \\ \frac{1}{x^0} [\xi^k(B) - \xi^k(A)] &= - \int_A^B \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} \xi^i dx^1 \\ \xi^k(B) &= \xi^k(A) - x^0 \int_A^B \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} \xi^i dx^1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Similarmente de B para C, e de C para D, obtemos:

$$\xi^k(C) = \xi^k(B) - x^0 \int_B^C \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2} \xi^i dx^2, \quad (3.33)$$

$$\xi^k(D) = \xi^k(C) + x^0 \int_C^D \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} \xi^i dx^1. \quad (3.34)$$

Similarmente, a conclusão do loop fornece

$$\xi^k(A_{final}) = \xi^k(D) + x^0 \int_D^A \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2} \xi^i dx^2. \quad (3.35)$$

A variação líquida em  $\xi^k(A)$  é o vetor  $\delta \xi^k$ , dado por

$$\begin{aligned} \delta \xi^k &= \xi^k(A_{final}) - \xi^k(A) \\ &= -x^0 \int_A^B \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} \xi^i dx^1 - x^0 \int_B^C \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2} \xi^i dx^2 + x^0 \int_C^D \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} \xi^i dx^1 \\ &\quad + x^0 \int_D^A \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2} \xi^i dx^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando a expansão em série de Taylor na integral dos caminhos CD e BC:

$$\begin{aligned} \delta \xi^k &= -x^0 \int_A^B \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} \xi^i dx^1 - x^0 \int_B^C \left[ \xi^i \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2} + \delta_a \frac{\partial}{\partial x^1} (\xi^i \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2}) \right] dx^2 \\ &\quad + x^0 \int_C^D \left[ \xi^i \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1} + \delta_b \frac{\partial}{\partial x^2} (\xi^i \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1}) \right]^i dx^1 + x^0 \int_D^A \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2} \xi^i dx^2 \end{aligned}$$

$$= -x^0 \int_b^{b+\delta b} \delta_a \frac{\partial}{\partial x^1} (\xi^i \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2}) dx^2 + x^0 \int_a^{a+\delta a} \delta_b \frac{\partial}{\partial x^2} (\xi^i \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1}) dx^1,$$

logo,

$$\delta \xi^k \approx \delta_a \delta_b x^0 \left[ -\frac{\partial}{\partial x^1} (\xi^i \tilde{\Gamma}^\kappa_{i2}) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\xi^i \tilde{\Gamma}^\kappa_{i1}) \right]. \quad (3.37)$$

Usando a regra do produto para resolver as derivadas, e lembrando que  $\frac{d\xi^k}{dx^1} = \tilde{\Gamma}^i_{a1} \xi^a x^0$ , obtemos:

$$\delta \xi^i = x^0 \delta_a \delta_b K^i_{\kappa\alpha\beta} \xi^k, \quad (3.38)$$

onde  $K^i_{\kappa\alpha\beta}$  é o tensor de curvatura

$$K^i_{\kappa\alpha\beta} = \frac{1}{(x^0)^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (x^0 \tilde{\Gamma}^i_{\kappa\beta}) - \frac{\partial}{\partial x^\beta} (x^0 \tilde{\Gamma}^i_{\kappa\alpha}) + x^0 \tilde{\Gamma}^i_{a\alpha} x^0 \tilde{\Gamma}^a_{\kappa\beta} - x^0 \tilde{\Gamma}^i_{a\beta} x^0 \tilde{\Gamma}^a_{\kappa\alpha} \right], \quad (3.39)$$

que é obtido através do transporte paralelo do vetor  $\vec{V}$  em torno do loop dado por  $\delta \vec{e}_\alpha$  e  $\delta \vec{e}_\beta$ .

Usando a equação (3.26), podemos reescrever o tensor de curvatura, da seguinte maneira:

$$K^\iota_{\kappa\alpha\beta} = \frac{1}{x^0} \left( \frac{\partial \Gamma^\iota_{\kappa\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\iota_{\kappa\alpha}}{\partial x^\beta} \right) + \Gamma^\iota_{a\alpha} \Gamma^a_{\kappa\beta} - \Gamma^\iota_{a\beta} \Gamma^a_{\kappa\alpha} + \frac{1}{2} (\phi_\alpha^0 \Gamma^\iota_{\kappa\beta} - \phi_\beta^0 \Gamma^\iota_{\kappa\alpha}) \\ + \frac{1}{2} \delta^\iota_\kappa \left[ \frac{1}{x^0} \left( \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x^\alpha} \right) - \frac{1}{2} (\phi_\alpha^0 \phi_\beta - \phi_\beta^0 \phi_\alpha) \right]. \quad (3.40)$$

O tensor de curvatura contraído é obtido fazendo  $i = \alpha$ :

$$K_{\kappa\alpha} = K^\iota_{\kappa\iota\alpha} = \frac{1}{x^0} \left( \frac{\partial \Gamma^\iota_{\kappa\alpha}}{\partial x^\iota} - \frac{\partial \Gamma^\iota_{\kappa\iota}}{\partial x^\alpha} \right) + \Gamma^\iota_{a\iota} \Gamma^a_{\kappa\alpha} - \Gamma^\iota_{a\alpha} \Gamma^a_{\kappa\iota} + \frac{1}{2} (\phi_\alpha^0 \Gamma^\iota_{\kappa\alpha} - \phi_\alpha^0 \Gamma^\iota_{\kappa\iota}) \\ + \frac{1}{2} \delta^\iota_\kappa \left[ \frac{1}{x^0} \left( \frac{\partial \phi_\iota}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\iota} \right) - \frac{1}{2} (\phi_\alpha^0 \phi_\iota - \phi_\iota^0 \phi_\alpha) \right]. \quad (3.41)$$

Agora, usando a equação (3.14), o tensor de curvatura contraído, depois de algumas simplificações, se torna

$$K_{\kappa\alpha} = \frac{R_{\kappa\alpha}}{(x^0)^2} + \frac{1}{x^0} (S^i_{\kappa i, \alpha} - S^i_{\kappa\alpha, i}) + S^i_{a\alpha} S^a_{\kappa i} - S^i_{ai} S^a_{\kappa\alpha} + \frac{F_{\kappa\alpha}}{2x^0} \\ + \frac{1}{2} (\phi_\alpha^0 S^i_{\kappa i} - \phi_i^0 S^i_{\kappa\alpha}) - \frac{1}{4} (\phi_\alpha^0 \phi_\kappa - \phi_\kappa^0 \phi_\alpha), \quad (3.42)$$

onde  $R_{\kappa\alpha}$  é o tensor de Ricci da geometria Riemanniana e definimos

$$S^i_{\kappa\alpha,\beta} = \frac{\partial S^i_{\kappa\alpha}}{\partial x^\beta} - \{\kappa^a_{\alpha}\} S^i_{a\alpha} - \{\alpha^a_{\beta}\} S^i_{\kappa a} + \{a^i_{\beta}\} S^a_{\kappa\alpha}, \quad (3.43)$$

como a derivada covariante de  $S^i_{\kappa\alpha}$  e

$$F_{\kappa\alpha} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \phi_\kappa}{\partial x^\alpha}. \quad (3.44)$$

Podemos escrever a parte simétrica de  $K_{\kappa\alpha}$  usando a equação (3.15):

$$K_{\kappa\alpha} = \frac{R_{\kappa\alpha}}{(x^0)^2} + \frac{1}{x^0} \phi_{\kappa;\alpha} + \frac{1}{2x^0} g_{\alpha\kappa} \phi^i_{;i} - \frac{1}{2} g_{\alpha\kappa} \phi^\gamma \phi_\gamma + \frac{1}{2} g_{\alpha\kappa} \phi_i^0 \phi^i. \quad (3.45)$$

Por fim, o escalar de curvatura é dado por

$$K = g^{\kappa\alpha} K_{\kappa\alpha} = \frac{R}{(x^0)^2} + \frac{3}{x^0} \phi^i_{;i} + \frac{3}{2} \phi_i \phi^i + 2 \phi_i^0 \phi^i, \quad (3.46)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura Riemanniano. Se escolhermos o calibre normal  $x^0 = 1$ , o escalar de curvatura se reduz para

$$K = R + 3 \phi^i \phi_{;i} + \frac{3}{2} \phi_i \phi^i, \quad (3.47)$$

que é idêntico ao escalar de curvatura da geometria de Weyl. A partir do escalar de curvatura podemos obter as equações de campo no contexto da geometria de Lyra.

### 3.3.2 Equações de Campo

Na geometria de Lyra, a densidade lagrangiana é definida por

$$\mathcal{L} = K \sqrt{-g} (x^0)^4. \quad (3.48)$$

Podemos simplificar a lagrangiana escolhendo o calibre  $x^0 = 1$ , logo

$$\mathcal{L} = K \sqrt{-g}. \quad (3.49)$$

Usando a equação (3.47), a densidade de lagrangiana se torna

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R + 3\phi^i{}_{;i} + \frac{3}{2}\phi_i\phi^i). \quad (3.50)$$

A ação na geometria de Lyra é dada por

$$S_L = \int K\sqrt{-g}d^4x. \quad (3.51)$$

As equações de campo são obtidas a partir do princípio variacional, isto é,

$$\delta(S_L + S_M) = 0, \quad (3.52)$$

onde  $S_M$  é a ação para a matéria, dada por

$$S_M = \int \mathcal{L}\sqrt{-g}d^4x, \quad (3.53)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a densidade de lagrangiana de matéria. Temos que

$$\delta S_M = \kappa T_{ij}, \quad (3.54)$$

onde  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ , e  $T_{ij}$  é o tensor energia-momento associado ao conteúdo de matéria.

A variação de  $\delta S_L$  será

$$\delta S_L = \int \left[ \delta(\sqrt{-g}R) + 3\delta(\sqrt{-g}\phi^i{}_{;i}) + \frac{3}{2}\delta(\sqrt{-g}\phi_i\phi^i) \right] d^4x, \quad (3.55)$$

onde a variação do primeiro termo nos fornece o tensor de Einstein da relatividade usual

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R. \quad (3.56)$$

O segundo termo da equação (3.55), corresponde a uma derivada total:

$$3\delta(\sqrt{-g}\phi^i{}_{;i}) = 3\delta\nabla_i(\sqrt{-g}\phi^i) = 3\delta\partial_i(\sqrt{-g}\phi^i),$$

e pelo teorema de Stokes, leva a uma contribuição de contorno que podemos definir como zero, fazendo a variação desaparecer no infinito.

Para o terceiro termo da equação (3.55), usando que  $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ij}\delta g^{ij}$ , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\delta(\sqrt{-g}g^{ij}\phi_i\phi_j) &= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ij}g^{ij}\phi_i\phi_j\delta g^{ij} + \sqrt{-g}\phi_i\phi_j\delta g^{ij}\right] \\ &= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ij}\phi_j\phi^j\delta g^{ij} + \sqrt{-g}\phi_i\phi_j\delta g^{ij}\right] \\ &= \left[\frac{3}{2}\phi_i\phi_j - \frac{3}{4}g_{ij}\phi_k\phi^k\right]\sqrt{-g}\delta g^{ij}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Combinando as equações (3.54), (3.56) e (3.57), obtemos as equações de campo da geometria de Lyra:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \frac{3}{2}\phi_i\phi_j - \frac{3}{4}g_{ij}\phi_k\phi^k = \kappa T_{ij}.\quad (3.58)$$

Podemos reescrever as equações de campo ao multiplicá-las por  $g^{ij}$ :

$$R_{ij} = 8\pi G(T_{ij} - \frac{1}{2}Tg_{ij}) - (L_{ij} - \frac{1}{2}Lg_{ij}),\quad (3.59)$$

onde  $T = g^{ij}T_{ij}$  é o traço do tensor energia-momento,  $L_{ij}$  corresponde aos termos das equações de campo relacionados com  $\phi_\kappa$ , definido por

$$L_{ij} = \frac{3}{2}\phi_i\phi_j - \frac{3}{4}g_{ij}\phi_\kappa\phi^\kappa,\quad (3.60)$$

e  $L$  seu traço, isto é,  $L = g^{ij}L_{ij}$ .

Na próxima seção será verificada a consistência da solução de Gödel e tipo-Gödel na geometria de Lyra.

### 3.4 Solução de Gödel na Geometria de Lyra

Vamos considerar o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$ , como originalmente considerado por Gödel. Como primeira tentativa de solução, o vetor deslocamento terá a forma

$$\phi_i = \left(0, 0, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}a\beta\right).\quad (3.61)$$

Assim, usando a métrica, equação 2.1, as componentes não nulas das equações de campo (3.58) obtidas são:

(i) Componente (00) = (02)

$$\begin{aligned} G_{00} + \frac{3}{2}\phi_0\phi_0 - \frac{3}{4}g_{00}g^{33}\phi_3\phi_3 &= k\rho u_0 u_0 \\ \frac{1}{2} + a^2\beta^2 &= k\rho a^2 \\ \frac{1}{2} &= k\rho a^2 - a^2\beta^2, \end{aligned} \quad (3.62)$$

(iii) Componente (11)

$$\begin{aligned} G_{11} + \frac{3}{2}\phi_1\phi_1 - \frac{3}{4}g_{11}g^{33}\phi_3\phi_3 &= k\rho u_1 u_1 \\ \frac{1}{2} - a^2\beta^2 &= 0 \\ \frac{1}{2} &= a^2\beta^2, \end{aligned} \quad (3.63)$$

(iv) Componente (22)

$$\begin{aligned} G_{22} + \frac{3}{2}\phi_2\phi_2 - \frac{3}{4}g_{22}g^{33}\phi_3\phi_3 &= k\rho u_2 u_2 \\ \frac{3}{4}e^{2x} - \frac{a^2\beta^2}{2}e^{2x} &= k\rho a^2 e^{2x} \\ \frac{3}{2} &= 2k\rho a^2 + a^2\beta^2, \end{aligned} \quad (3.64)$$

(v) Componente (33)

$$\begin{aligned} G_{33} + \frac{3}{2}\phi_3\phi_3 - \frac{3}{4}g_{33}g^{33}\phi_3\phi_3 &= k\rho u_3 u_3 \\ \frac{1}{2} + 2a^2\beta^2 - a^2\beta^2 &= 0 \\ \frac{1}{2} &= -a^2\beta^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Analisando as equações, vemos que não temos solução de Gödel, pois o sistema de equações é insolúvel. Considerando a existência da constante cosmológica, as equações de campo se tornam:

$$\frac{1}{2} = k\rho a^2 - a^2\beta^2 + \Lambda a^2, \quad (3.66)$$

$$\frac{1}{2} = a^2\beta^2 - \Lambda a^2, \quad (3.67)$$

$$\frac{3}{2} = 2k\rho a^2 + a^2\beta^2 + \Lambda a^2. \quad (3.68)$$

A única solução possível é aquela em que  $\beta = 0$ , reduzindo as equações (3.66) a (3.68) as equações de Gödel usuais da relatividade geral.

Esse resultado se repete caso o vetor deslocamento assuma o valor de  $\phi_i = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}a\beta, 0, 0\right)$  ou  $\phi_i = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}a\beta, 0, 0, 0\right)$ .

Mas, se escolhermos

$$\phi_\alpha = \left(0, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}a\beta e^x, 0\right), \quad (3.69)$$

as componentes não nulas das equações de campo são:

(i) Componente (00) = (02)

$$\begin{aligned} G_{00} + \frac{3}{2}\phi_0\phi_0 - \frac{3}{4}g_{00}g^{22}\phi_2\phi_2 &= k\rho u_0 u_0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}a^2 2 \frac{e^{-2x}}{a^2} \frac{4}{3}a^2\beta^2 e^{2x} &= k\rho a^2 \\ \frac{1}{2} + 2a^2\beta^2 &= k\rho a^2 - a^2\beta^2 \\ \frac{1}{2} &= k\rho a^2 - 2a^2\beta^2, \end{aligned} \quad (3.70)$$

(iii) Componente (11) = (33)

$$\begin{aligned} G_{11} + \frac{3}{2}\phi_1\phi_1 - \frac{3}{4}g_{11}g^{22}\phi_2\phi_2 &= k\rho u_1 u_1 \\ \frac{1}{2} - 2a^2\beta^2 &= 0 \\ \frac{1}{2} &= 2a^2\beta^2, \end{aligned} \quad (3.71)$$

(iv) Componente (22)

$$\begin{aligned} G_{22} + \frac{3}{2}\phi_2\phi_2 - \frac{3}{4}g_{22}g^{22}\phi_2\phi_2 &= k\rho 2_0 u_2 \\ \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{3}{2}\frac{4}{3}a^2\beta^2 e^{2x} + a^2\beta^2 e^{2x} &= k\rho a^2 e^{2x} \\ \frac{3}{2} &= 2k\rho a^2 - 6a^2\beta^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Novamente, a única forma de termos solução de Gödel, é se tivermos a constante cosmológica diferente de zero, e  $b = 0$ , abandonando novamente a modificação de Lyra e retornando as equações de Einstein usuais, portanto a escolha da equação (3.69) não é interessante.

Agora, nossa última escolha possível é

$$\phi_\alpha = \left( \frac{2}{\sqrt{3}}a\beta, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}a\beta e^x, 0 \right), \quad (3.73)$$

que nos fornece as seguintes componentes da equação de campo:

(i) Componente (00) = (02)

$$\begin{aligned} G_{00} + \frac{3}{2}\phi_0\phi_0 - \frac{3}{4}g_{00}(g^{00}\phi_0\phi_0 + g^{02}\phi_0\phi_2 + g^{20}\phi_2\phi_0 + g^{22}\phi_2\phi_2) &= k\rho u_0 u_0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{4}{3}a^2\beta^2 - \frac{3}{4}a^2(g^{00}\phi_0\phi_0 + 2g^{02}\phi_0\phi_2 + g^{22}\phi_2\phi_2) &= k\rho a^2 \\ \frac{1}{2} + 2a^2\beta^2 - \frac{3}{4}a^2\frac{4}{3}\beta^2 &= k\rho a^2 - a^2\beta^2 \\ \frac{1}{2} &= k\rho a^2 - a^2\beta^2, \end{aligned} \quad (3.74)$$

(iii) Componente (11) = (33)

$$\begin{aligned} G_{11} + \frac{3}{2}\phi_1\phi_1 - \frac{3}{4}g_{11}\phi_k\phi^k &= k\rho u_1 u_1 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}a^2\frac{4}{3}\beta^2 &= 0 \\ \frac{1}{2} &= -a^2\beta^2, \end{aligned} \quad (3.75)$$

(iv) Componente (22)

$$\begin{aligned} G_{22} + \frac{3}{2}\phi_2\phi_2 - \frac{3}{4}g_{22}\phi_k\phi^k &= k\rho u_2 u_2 \\ \frac{3}{4}e^{2x} + 2a^2\beta^2 e^{2x} - \frac{3}{4}a^2\frac{e^{2x}}{2}\frac{4}{3}\beta^2 &= k\rho a^2 e^x \\ \frac{3}{4} + 2a^2\beta^2 - \frac{1}{2}a^2\beta^2 &= k\rho a^2 e^x \\ \frac{3}{2} &= 2k\rho a^2 - 3a^2\beta^2. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Logo, para a solução de Gödel persistir na Geometria de Lyra, as seguintes relações devem ser satisfeitas

$$\beta^2 = -\frac{1}{2a^2} \quad e \quad \rho = 0. \quad (3.77)$$

Ou seja,  $\beta^2$  assume o valor da constante cosmológica, equação (2.12), em um universo sem matéria comum. Se consideramos um valor não nulo para a constante cosmológica,

as equações de campo se tornam:

$$\frac{1}{2} = k\rho a^2 - a^2\beta^2 + \Lambda a^2, \quad (3.78)$$

$$\frac{1}{2} = -a^2\beta^2 - \Lambda a^2, \quad (3.79)$$

$$\frac{3}{2} = 2k\rho a^2 - 3a^2\beta^2 + \Lambda a^2. \quad (3.80)$$

Para que as equações de campo sejam satisfeitas, devemos ter que

$$8\pi G\rho = \frac{1}{a^2} + 2\beta^2 \quad e \quad \Lambda = -\frac{1}{2a^2} - \beta^2 = -4\pi G\rho. \quad (3.81)$$

Com essas condições, teremos curvas tipo-tempo fechadas na geometria de Lyra. Se fizermos  $\beta = 0$ , recuperamos a solução de Gödel na relatividade geral de Einstein.

O próximo passo é verificarmos como o vetor deslocamento  $\phi_\alpha$  altera o raio crítico e as regiões de violação de causalidade do universo de Gödel.

## 3.5 Solução Tipo-Gödel na Geometria de Lyra

Para estudarmos a solução tipo-Gödel na geometria de Lyra, dois casos serão considerados: (i) constante cosmológica nula e (ii) constante cosmológica não-nula.

### 3.5.1 $\Lambda = 0$

As equações de campo (3.59) no referencial de tetradas são

$$R_{AB} = \kappa(T_{AB} - \frac{1}{2}T\eta_{AB}) - (L_{AB} - \frac{1}{2}L\eta_{AB}). \quad (3.82)$$

Vamos considerar que a fonte de matéria é um fluido perfeito, que no espaço tangente é definido como

$$T_{AB} = (\rho + p)u_A u_B - p\eta_{AB}, \quad (3.83)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia,  $p$  é a pressão e  $u_A = (1, 0, 0, 0)$  é a 4-velocidade do fluido. Tomando o traço da equação (3.83), temos:

$$T = \eta^{AB}T_{AB} = \rho - 3p. \quad (3.84)$$

**Primeiro caso:**  $\phi_A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}b, 0, 0, 0\right)$

As equações de campo dependem da escolha do vetor deslocamento  $\phi_A$ , o primeiro valor considerado é

$$\phi_A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}b, 0, 0, 0\right). \quad (3.85)$$

Assim, as equações de campo se tornam

$$2\omega^2 + 2b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p), \quad (3.86)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p), \quad (3.87)$$

$$\rho = p. \quad (3.88)$$

Usando a equação (3.88) em (3.86) e (3.87), as equações de campo se reduzem para

$$m^2 = 2\omega^2, \quad (3.89)$$

$$\omega^2 + b^2 = \kappa\rho. \quad (3.90)$$

A relação (3.89) corresponde a solução de Gödel, portanto as CTC's podem existir na geometria de Lyra para a escolha do vetor deslocamento dada na equação (3.85). Como consequência, o raio crítico  $r_c$  é modificado e se torna

$$r_c = \frac{2}{m} \sinh^{-1}(1) = 2 \sinh^{-1}(1) \frac{1}{\sqrt{2\kappa\rho - 2b^2}}. \quad (3.91)$$

Na geometria Riemanniana, os parâmetros são relacionados como  $m^2 = 2\omega^2 = \kappa\rho = -2\Lambda$ . Aqui, a mesma relação é recuperada a partir da equação (3.90), com

$$b^2 = \omega^2 = -\Lambda, \quad (3.92)$$

onde  $b^2$  corresponde ao valor negativo da constante cosmológica. Assim o vetor deslocamento adquire um valor complexo. Resultado similar foi obtido em [10].

**Segundo caso:**  $\phi_A = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}b, 0, 0\right)$

A próxima escolha para o vetor deslocamento é

$$\phi_A = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}b, 0, 0\right), \quad (3.93)$$

que leva as equações de campo para

$$4\omega^2 = \kappa(\rho + 3p), \quad (3.94)$$

$$2\omega^2 - m^2 + 2b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p), \quad (3.95)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p), \quad (3.96)$$

$$\rho = p. \quad (3.97)$$

Pelas equações (3.95) e (3.96), vemos que é possível somente obtermos a solução trivial com  $b^2 = 0$ , que reduz as equações de campo para as da relatividade geral usual, abandonando a contribuição de Lyra. Este resultado se repete para a escolha  $\phi_A = \left(0, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}b, 0\right)$ .

**Terceiro caso:**  $\phi_A = \left(0, 0, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}b\right)$

O vetor deslocamento considerado tem a forma

$$\phi_A = \left(0, 0, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}b\right), \quad (3.98)$$

que leva as equações de campo para

$$2\omega^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p), \quad (3.99)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p), \quad (3.100)$$

$$2b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p). \quad (3.101)$$

Combinando as equações (3.100) e (3.101) obtemos

$$m^2 = 2\omega^2 - 2b^2. \quad (3.102)$$

Aqui, duas possíveis classes de solução podem ser consideradas. A primeira classe

corresponde ao espaço-tempo de Som-Raychaudhuri [59]. Neste caso  $m^2 = 0$ , e então  $b^2 = \omega^2 = \text{constante}$ .

A segunda classe corresponde a  $m^2 > 0$ . E teremos dois casos diferentes:

- (i) Caso não-causal: Se  $b^2 = 0$  a solução de Gödel com  $m^2 = 2\omega^2$  é recuperada;
- (ii) Caso causal: Se  $b^2 = -\omega^2$ , a relação causal  $m^2 = 4\omega^2$  é obtida. Tal resultado leva para a distribuição exótica de matéria com  $\rho = p$ . E neste caso, a vorticidade  $\omega$  terá um valor complexo. Resultado semelhante foi obtido em [10].

Outra maneira de obtermos uma solução causal é considerar o tensor energia momento dado por

$$T_{AB} = T_{AB}^M + T_{AB}^S, \quad (3.103)$$

onde  $T_{AB}^M$  é o tensor energia-momento do fluido perfeito, equação (3.83) e  $T_{AB}^S$  é o tensor energia-momento associado ao campo escalar  $\Phi$ , definido por

$$T_{AB}^S = \nabla_A \Phi \nabla_B \Phi - \frac{1}{2} \eta_{AB} \eta^{CD} \nabla_C \Phi \nabla_D \Phi, \quad (3.104)$$

onde  $\nabla_A$  é a derivada covariante com respeito a base  $\theta^A = e^A_B dx^B$ . Assumindo por simplicidade que

$$\Phi(z) = ez + c, \quad (3.105)$$

onde  $c$  é uma constante. As componentes do tensor energia-momento associado ao campo escalar são

$$T_{00}^S = -T_{11}^S = -T_{22}^S = T_{33}^S = \frac{e^2}{2} \quad (3.106)$$

e seu traço é

$$T = \rho - 3p + e^2. \quad (3.107)$$

Vamos analisar os casos em que  $\phi_a$  leva para soluções não-triviais, i.e. equações (3.85) e (3.98).

Para a escolha da equação (3.85), as equações de campo se tornam

$$2\omega^2 + 2b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p), \quad (3.108)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p), \quad (3.109)$$

$$-\kappa e^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p). \quad (3.110)$$

Combinando as equações (3.109) e (3.110), obtemos

$$m^2 - 2\omega^2 = \kappa e^2. \quad (3.111)$$

Devido a introdução do campo escalar, aqui temos a liberdade de escolha do valor de  $m^2$ . Considerando que a métrica tipo-Gödel pertença a classe hiperbólica, onde  $m^2 > 0$ . As possíveis soluções são: Solução de Gödel e solução causal. Se  $m^2 = 2\omega^2$ , a solução de Gödel é recuperada com  $e = 0$ . Se tivermos  $\kappa e > 0$ , então  $m^2 = 4\omega^2$  é um valor possível, que leva a solução causal. Neste caso, o campo escalar,  $e$ , assume o valor

$$e = \sqrt{\frac{2}{k}}\omega. \quad (3.112)$$

Agora, para a escolha da equação (3.98), as equações de campo se tornam

$$2\omega^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p), \quad (3.113)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p), \quad (3.114)$$

$$2b^2 - \kappa e^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p). \quad (3.115)$$

Destas equações obtemos

$$m^2 = 2\omega^2 - 2b^2 + \kappa e^2. \quad (3.116)$$

Para a classe hiperbólica, a solução causal é obtida se

$$b^2 = \frac{1}{2}\kappa e^2 - \omega^2. \quad (3.117)$$

Portanto, em ambos os casos com campo escalar a solução causal é possível.

### 3.5.2 $\Lambda \neq 0$

As equações de campo (3.82) com constante cosmológica no espaço tangente são

$$R_{AB} = \kappa(T_{AB} - \frac{1}{2}T\eta_{AB}) - (L_{AB} - \frac{1}{2}L\eta_{AB}) - \Lambda\eta_{AB}. \quad (3.118)$$

Novamente, vamos nos restringir as escolhas das equações (3.85) e (3.98), que são aquelas com solução não-trivial.

Para o vetor deslocamento, equação (3.85), as equações de campo se tornam

$$2\omega^2 + 2b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) - \Lambda, \quad (3.119)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p) + \Lambda, \quad (3.120)$$

$$-\Lambda = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p). \quad (3.121)$$

Rearranjando as equações de campo, obtemos

$$m^2 = 2\omega^2, \quad (3.122)$$

$$2\omega^2 = \kappa(\rho + p) - 2b^2. \quad (3.123)$$

A equação (3.122) leva para a solução de Gödel e modifica o raio crítico:

$$r_c = \frac{2}{m} \sinh^{-1}(1) = \frac{2}{\sqrt{\kappa(\rho + p) - 2b^2}} \sinh^{-1}(1). \quad (3.124)$$

Podemos ver que é possível obtermos uma solução causal se  $2b^2 = \kappa(\rho - p)$ , que leva o raio crítico  $r_c \rightarrow \infty$ .

Para o vetor deslocamento dado pelo equação (3.98), obtemos as seguintes equações de campo

$$2\omega^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) - \Lambda, \quad (3.125)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p) + \Lambda, \quad (3.126)$$

$$2b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p) + \Lambda. \quad (3.127)$$

Combinando as equações acima, obtemos

$$\kappa\rho = \omega^2 - \Lambda + 3b^2, \quad (3.128)$$

$$\kappa p = \omega^2 + \Lambda - b^2, \quad (3.129)$$

$$m^2 = 2\omega^2 - 2b^2. \quad (3.130)$$

Se considerarmos a classe de solução  $m^2 = 0$ , obtemos que

$$\omega^2 = b^2. \quad (3.131)$$

A solução de Gödel  $m^2 = 2\omega^2$  acontece quando  $b = 0$ . A solução causal  $m^2 = 4\omega$  leva para um valor complexo da vorticidade  $\omega$ , como visto em [10].

Para obtermos uma outra solução causal, vamos considerar o campo escalar como na equação (3.103). Para a escolha da equação (3.85), as equações de campos se tornam

$$2\omega^2 + 2b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) - \Lambda, \quad (3.132)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p) + \Lambda, \quad (3.133)$$

$$-\kappa e^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p) + \Lambda. \quad (3.134)$$

Rearranjando as equações, obtemos

$$m^2 = 2\omega + \kappa e^2. \quad (3.135)$$

Considerando a classe hiperbólica de solução, obtemos a solução causal  $m^2 = 4\omega^2$  somente se

$$2\omega^2 = \kappa e^2, \quad (3.136)$$

que leva para

$$b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + p). \quad (3.137)$$

Para o vetor deslocamento, equação (3.98), as equações de campo serão

$$2\omega^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) - \Lambda, \quad (3.138)$$

$$2\omega^2 - m^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p) + \Lambda, \quad (3.139)$$

$$2b^2 - \kappa e^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho - p) + \Lambda. \quad (3.140)$$

Manipulando as equações, obtemos

$$\kappa\rho = \omega^2 - \Lambda - \frac{3}{2}\kappa e^2 + 3b^2, \quad (3.141)$$

$$\kappa p = \omega^2 + \Lambda + \frac{1}{2}\kappa e^2 - b^2, \quad (3.142)$$

$$m^2 = 2\omega^2 + \kappa e^2 - 2b^2. \quad (3.143)$$

E obtemos a solução causal somente se a relação

$$b^2 = \frac{1}{2}\kappa e^2 - \omega^2, \quad (3.144)$$

é satisfeita.

Neste capítulo mostramos que ambas as soluções causal e não-causal são possíveis na geometria de Lyra, de acordo com o tipo de fonte de matéria considerado. Todos os resultados apresentados neste capítulo estão publicados [60].

## Gravidade de Bumblebee

A quebra espontânea de simetria desempenha um papel importante na teoria quântica de campos, em que o estado fundamental não respeita a simetria da teoria que o descreve. Para ilustrar o fenômeno de quebra espontânea de simetria, vamos considerar um campo escalar com interação do tipo  $\lambda\phi^4$ . Esta teoria admite a simetria  $\phi \rightarrow -\phi$ . A lagrangeana que descreve tal modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4, \quad (4.1)$$

onde  $\lambda$  é positivo e  $\mu^2$  é um parâmetro que pode ser positivo ou negativo. O potencial é dado por  $V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4$ . O estado fundamental é obtido ao tomarmos o mínimo do potencial,

$$\frac{dV}{d\phi} = \mu^2 \phi + \frac{1}{6} \lambda \phi^3, \quad (4.2)$$

que nos fornece duas situações a serem analisadas:

- (i) se  $\mu^2 > 0$ , temos apenas a solução  $\phi = 0$ , e a simetria de paridade é mantida;
- (ii) se  $\mu^2 < 0$ , temos dois mínimos,  $\phi = \sqrt{-\frac{6\mu^2}{\lambda}} = \pm\phi_0$  e um máximo local em  $\phi = 0$ .

Uma vez que escolhemos um valor de  $\phi_0$ , a simetria é quebrada pelo vácuo da teoria.

Alguns efeitos na escala de Planck indicam a possibilidade de que a simetria de Lorentz possa ser quebrada. Dentre estes, estão alguns mecanismos em teoria de cordas, teoria de campo em geometrias não-comutativas, gravidade quântica, efeitos devido a relações de dispersão, etc. [19, 20, 21, 22, 27, 61, 62, 63].

Estes fatos motivaram o desenvolvimento da Extensão do Modelo Padrão [23, 24], que inclui todas as interações conhecidas do modelo padrão, a relatividade geral e os termos que violam Lorentz e CPT.

Uma das ideias mais elegantes para a violação de Lorentz é que a simetria possa ser quebrada espontaneamente. Esta quebra ocorre quando um campo vetorial ou tensorial adquire um valor esperado do vácuo diferente de zero.

O caso mais simples de teoria com quebra espontânea de Lorentz é o modelo bumblebee, que iremos estudar a seguir.

## 4.1 Modelo Bumblebee

A ação correspondente ao setor gravitacional no SME é

$$S_g = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\alpha\rho} R_{\mu\nu\alpha\rho}], \quad (4.3)$$

onde os tensores adimensionais  $u, s^{\mu\nu}$  e  $t^{\mu\nu\alpha\rho}$  são coeficientes que geram a violação de Lorentz.

O modelo bumblebee é o modelo mais simples que estende o formalismo padrão da relatividade geral ao permitir quebra espontânea da simetria de Lorentz. Tal violação acontece quando um campo vetorial  $B_\mu$ , chamado de campo de bumblebee, adquire um valor esperado no vácuo  $b_\mu$  diferente de zero, que leva a violação da simetria de Lorentz.

A correspondência entre o modelo bumblebee e a ação, equação (4.3), é

$$u = \frac{1}{4}\xi B^\mu B_\mu, \quad s^{\mu\nu} = \xi(B^\mu B^\nu - \frac{1}{4}g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha), \quad t^{\mu\nu\alpha\rho} = 0. \quad (4.4)$$

E a ação que descreve a dinâmica do campo de bumblebee será [64]

$$S = \int \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) + \mathcal{L}_M \right], \quad (4.5)$$

onde  $\kappa = 8\pi G$ ,  $\xi$  é uma constante de acoplamento,  $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$  é o tensor campo-força,  $b^2 \equiv b_\mu b^\mu = \langle B_\mu B^\mu \rangle_0 \neq 0$  é o valor esperado no vácuo para o vetor bumblebee contraído,  $V$  é o potencial responsável por desencadear o mecanismo de violação espontânea de Lorentz, que exibe um mínimo em  $B_\mu B^\mu \pm b^2 = 0$ , e  $\mathcal{L}_M$  é a densidade de lagrangiana para os campos de matéria.

### 4.1.1 Derivação das Equações de Campo

Fazendo a variação da ação com respeito a métrica, temos

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \delta \left[ \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \right] + \delta \left[ \sqrt{-g} \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{2} \kappa (B_\mu B^\mu \pm b^2)^2 \right] \right\}. \quad (4.6)$$

Vamos reescrever essa última equação como,

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_{BK} + \delta S_{BV} + \delta S_{B\xi}, \quad (4.7)$$

onde

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \delta \left[ \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \right], \quad (4.8)$$

é a variação da ação de Einstein-Hilbert mais a constante cosmológica  $\Lambda$ , cujo resultado são as equações de Einstein, dadas por [55]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^M, \quad (4.9)$$

onde  $T_{\mu\nu}^M$  é o tensor energia-momento para matéria. Os termos  $\delta S_{BK}$ ,  $\delta S_{BV}$  e  $\delta S_{B\xi}$  são as variações do termo cinético, do potencial e de acoplamento de bumblebee, respectivamente, dados por

$$\delta S_{BK} = \int d^4x \delta \left[ -\frac{\sqrt{-g}}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right], \quad (4.10)$$

$$\delta S_{BV} = \int d^4x \delta \left[ -\frac{\sqrt{-g}}{2} \kappa (B_\mu B^\mu \pm b^2)^2 \right], \quad (4.11)$$

$$\delta S_{B\xi} = \int d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} \right]. \quad (4.12)$$

Vamos calcular esses termos separadamente:

**(i) Resolvendo  $\delta S_{BK}$ :**

Escrevendo  $B^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} B_{\alpha\beta}$ ,  $\delta S_{BK}$  se torna

$$\delta S_{BK} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} (\sqrt{-g} g^{\nu\beta} \delta g^{\mu\alpha} + \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} \delta g^{\nu\beta} + g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} \delta \sqrt{-g}) B_{\mu\nu} B_{\alpha\beta} \right]. \quad (4.13)$$

Vamos considerar que [55]

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

assim,

$$\begin{aligned} \delta S_{BK} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} \left[ \sqrt{-g}g^{\nu\beta}\delta g^{\mu\alpha} + \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}\delta g^{\nu\beta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha} \left( -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\lambda\rho}\delta g^{\lambda\rho} \right) \right] B_{\mu\nu}B_{\alpha\beta} \right\}, \quad (4.15) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} \left( \delta g^{\mu\alpha}B_{\mu\nu}B_{\alpha}^{\nu} + \delta g^{\nu\beta}B_{\nu}^{\alpha}B_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\lambda\rho}\delta g^{\lambda\rho}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \right) \right]. \end{aligned}$$

A qual pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \delta S_{BK} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} \left( 2B_{\mu\alpha}B_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}, \\ \delta S_{BK} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} \left( B_{\mu\alpha}B_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.16) \end{aligned}$$

**(ii) Resolvendo  $\delta S_{BV}$ :**

Substituindo a equação (4.14) na equação (4.11), temos

$$\begin{aligned} \delta S_{BV} &= \int d^4x \left[ -V\delta\sqrt{-g} - \sqrt{-g}\delta V \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{V}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \sqrt{-g}\kappa \left( g^{\mu\sigma}B_{\mu}B_{\sigma} \pm b^2 \right) \delta g^{\mu\sigma}B_{\mu}B_{\sigma} \right]. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Fazendo a troca de índices  $\sigma \leftrightarrow \nu$  no segundo termo do lado direito, ficamos com

$$\delta S_{BV} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{V}{2}g_{\mu\nu} + \kappa \left( g^{\mu\nu}B_{\mu}B_{\nu} \pm b^2 \right) B_{\mu}B_{\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.18)$$

Notamos que

$$V' = \frac{\partial V}{\partial X} \Big|_{X=B_{\mu}B^{\mu} \pm b^2} = \kappa \left( B_{\mu}B^{\mu} \pm b^2 \right), \quad (4.19)$$

logo,

$$\delta S_{BV} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{V}{2}g_{\mu\nu} + V'B_{\mu}B_{\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

**(iii) Resolvendo  $\delta S_{B\xi}$ :**

Usando as definições [55]:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = \nabla_\sigma(\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}) - \nabla_\sigma(\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}) \quad (4.21)$$

$$\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (g_{\nu\alpha}\nabla_\mu\delta g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu\delta g^{\alpha\lambda} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^\lambda\delta g^{\alpha\beta}). \quad (4.22)$$

Obtemos

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\square + g_{\alpha\beta}\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla_\beta - g_{\alpha\lambda}g_{\mu\beta}\nabla_\nu\nabla^\lambda] \delta g^{\alpha\beta}, \quad (4.23)$$

que leva a ação, equação (4.12) para

$$\begin{aligned} \delta S_{B\xi} = \int d^4x \delta\sqrt{-g}\xi \left[ \frac{1}{2}B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\alpha\mu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\mu(B^\alpha B_\nu) + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\nu(B^\alpha B_\mu) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\beta(B^\alpha B^\beta)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\square(B_\mu B_\nu) \right] \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Usando o princípio da mínima ação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \quad (4.25)$$

e as equações (4.8), (4.16), (4.20) e (4.24), obtemos as equações de campo

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = \kappa \left[ 2V'B_\mu B_\nu + B_{\mu\alpha}B_\nu{}^\alpha - \left( V + \frac{1}{4}B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} \right) g_{\mu\nu} \right] \\ + \xi \left[ \frac{1}{2}B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\alpha\mu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\mu(B^\alpha B_\nu) + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\nu(B^\alpha B_\mu) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\beta(B^\alpha B^\beta)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\square(B_\mu B_\nu) \right] + \kappa T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ao fazer a variação da ação, equação (4.5), com respeito ao campo bumblebee obtemos

$$\nabla_\mu B^{\mu\nu} = 2 \left( V'B^\nu - \frac{\xi}{2\kappa} B_\mu R^{\mu\nu} \right). \quad (4.27)$$

Agora vamos verificar a consistência do modelo de energia escura de Ricci, e da solução tipo-Gödel, equação (2.25), com o modelo bumblebee.

## 4.2 Energia Escura de Ricci no Modelo Bumblebee

Vamos considerar a energia escura de Ricci no contexto do modelo bumblebee para um universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) para geometrias planas, isto é  $k = 0$ , dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.28)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala.

A densidade de energia escura de Ricci é proporcional ao escalar de curvatura, como descrito pelo princípio holográfico [28]:

$$\rho_X = -\frac{\alpha}{16\pi} R, \quad (4.29)$$

onde  $\alpha$  é uma constante a ser determinada. O tensor energia-momento correspondente é

$$T_{\mu\nu}^{RDE} = (\rho_X + p_X) u_\mu u_\nu + p_X g_{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

onde  $p_X$  é a pressão da energia escura, dada por

$$p_X = -\rho_X - \frac{1}{3} \frac{d\rho_X}{dX} = -\varsigma a^{-\eta}, \quad (4.31)$$

onde  $\varsigma = \left(\frac{2}{3\alpha} - \frac{1}{3}\right) f_0$ ,  $\eta = e^{-(4-\frac{2}{\alpha})X}$ ,  $a = e^X$  e  $f_0$  é uma constante de integração.

Para a equação (4.28), a densidade de energia se torna

$$\rho_X = \frac{3\alpha}{8\pi} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (4.32)$$

Para estudar as equações de campo e manter a validade do princípio cosmológico, o campo de bumblebee é escolhido como

$$B_\mu = (B(t), \vec{0}), \quad (4.33)$$

o que leva a equação (4.27) para

$$\left( V' - \frac{3\xi}{2\kappa} \frac{\ddot{a}}{a} \right) B = 0, \quad (4.34)$$

que fornece a relação entre a dinâmica do potencial e o fator de escala.

Ao resolvermos as equações (4.26) para a métrica (4.28), e considerando o tensor energia-momento (4.30), obtemos as equações modificadas de Friedmann para a energia escura de Ricci:

$$H^2(1 - \xi B^2) = \frac{1}{3}\kappa(\rho_X + V) + HB\dot{B} \quad (4.35)$$

$$\left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a}\right)(1 - \xi B^2) = \kappa p_X + \xi \left[4HB\dot{B} + \dot{B}^2 + B\ddot{B}\right]. \quad (4.36)$$

Com o uso das identidades de Bianchi, obtemos as equações para a conservação da energia

$$\dot{\rho} = -3H\rho - 3\frac{\xi}{\kappa}\frac{\ddot{a}}{a}B(HB + \dot{B}) + 3\frac{\xi}{\kappa}\frac{\ddot{a}}{a}B^2, \quad (4.37)$$

onde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ . Devido a complexidade das equações acima, não é possível obtermos uma solução analítica para  $a(t)$  e  $B(t)$ . Então, nos restringiremos para dois casos de solução. O primeiro caso consiste em considerar a constante de acoplamento  $\xi$  igual a zero. No segundo caso vamos procurar uma solução no vácuo, onde o campo bumblebee se torna uma constante que minimiza o potencial.

### 4.2.1 Caso 1: $\xi = 0$

Para este caso a equação (4.34) fornece  $V'B = 0$ , indicando que o campo de bumblebee contribue somente através de um potencial constante  $V(B^\mu B_\nu \pm b^2) = V_0$ . A primeira equação modificada de Friedmann, equação (??), se torna

$$H^2(1 - \xi B^2) = \frac{1}{3}\kappa(\rho_X + V). \quad (4.38)$$

Usando a equação (4.32), obtemos

$$\alpha\frac{\ddot{a}}{a} + (\alpha - 1)\frac{\dot{a}^2}{a^2} + c = 0, \quad (4.39)$$

onde  $c = \frac{1}{3}\kappa V_0$ . A solução da equação (4.39) é

$$a(t) = c_2 \cos^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} \left[ \frac{\sqrt{2\alpha-1}\sqrt{c}(t - \alpha c_1)}{\alpha} \right], \quad (4.40)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração. Para este, o parâmetro de desaceleração obtido é

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) \csc^2 \left( \frac{\sqrt{2\alpha - 1}\sqrt{c}(t - \alpha c_1)}{\alpha} \right) - 1. \quad (4.41)$$

Considerando o valor  $\alpha = 0.46$ , que é consistente com as observações experimentais Ref. [28], e um valor positivo para o potencial, o parâmetro de desaceleração  $q \rightarrow -1$ , indica que o universo está desacelerando em um ritmo acelerado, como mostra a Fig. 4.1

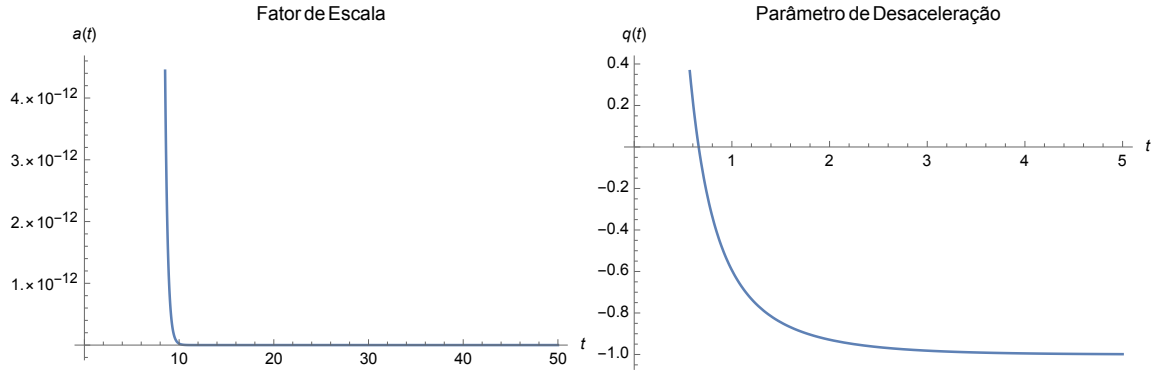


Figura 4.1: Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para  $\alpha = 0.46$  e  $V > 0$ .

Este resultado não está em acordo com as observações recentes, que indicam que o universo está se expandindo em um ritmo acelerado [65].

A escolha de um valor negativo para o potencial, Fig. 4.2, leva para um modelo cíclico do universo composto de fases aceleradas e desaceleradas, como visto em [66, 67, 68]

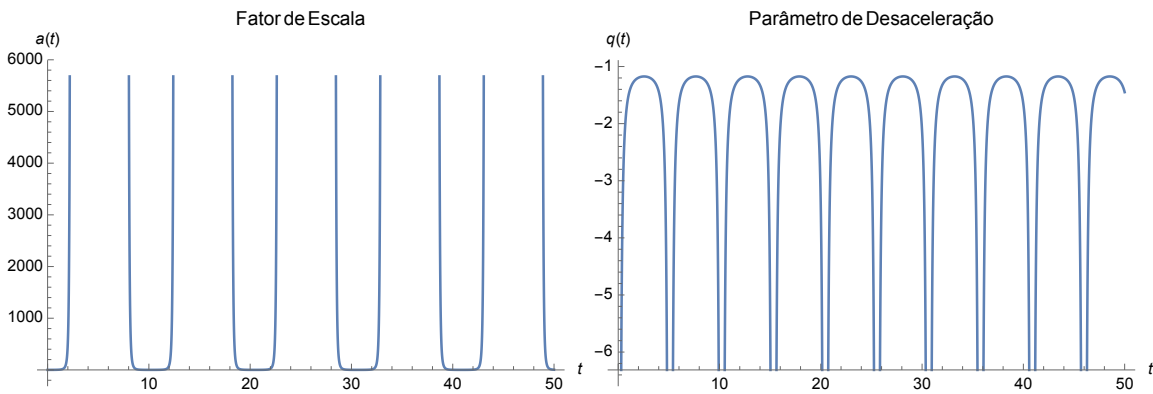


Figura 4.2: Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para  $\alpha = 0.46$  e  $V < 0$ .

Obtemos resultados similares para os valores  $\alpha > 0.5$  and  $V > 0$ , como visto em Fig. 4.3; E para  $\alpha < 0$  e  $V < 0$ , como visto em Fig. 4.4.

Temos duas possibilidades de valores para  $\alpha$  e  $V$  para obtermos resultados consistentes

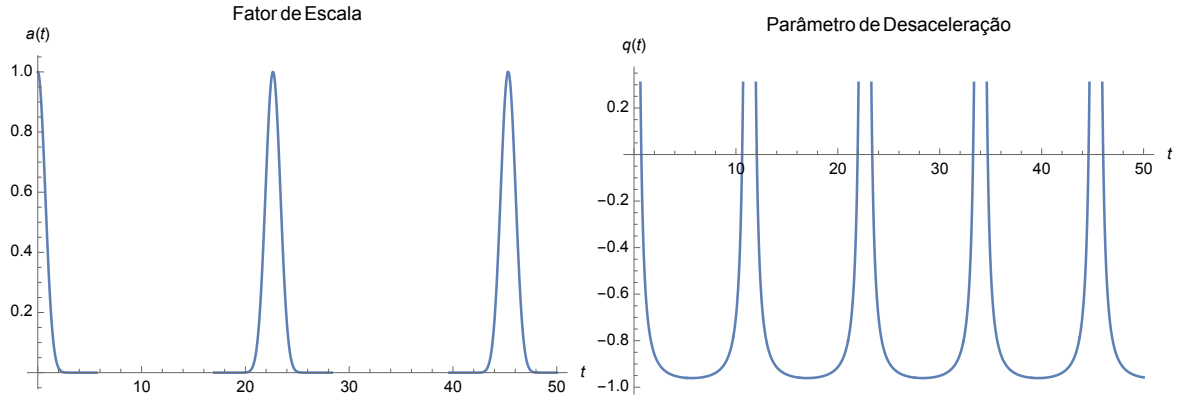


Figura 4.3: Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para  $\alpha = 0.5$  e  $V > 0$ .

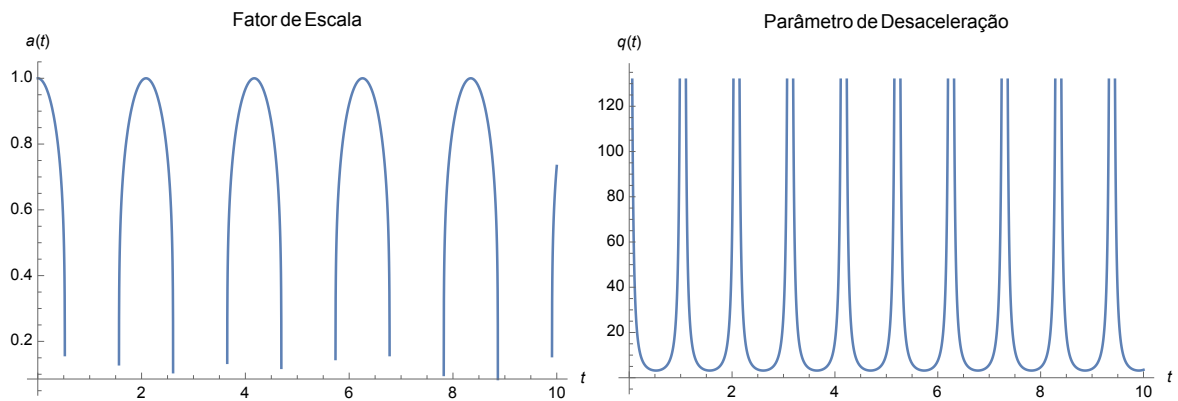


Figura 4.4: Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para  $\alpha < 0$  e  $V < 0$ .

com as observações recentes:  $\alpha > 0.5$  e  $V < 0$ , como visto em Fig 4.5; E  $\alpha < 0$  e  $V > 0$ , como mostra em Fig 4.6.

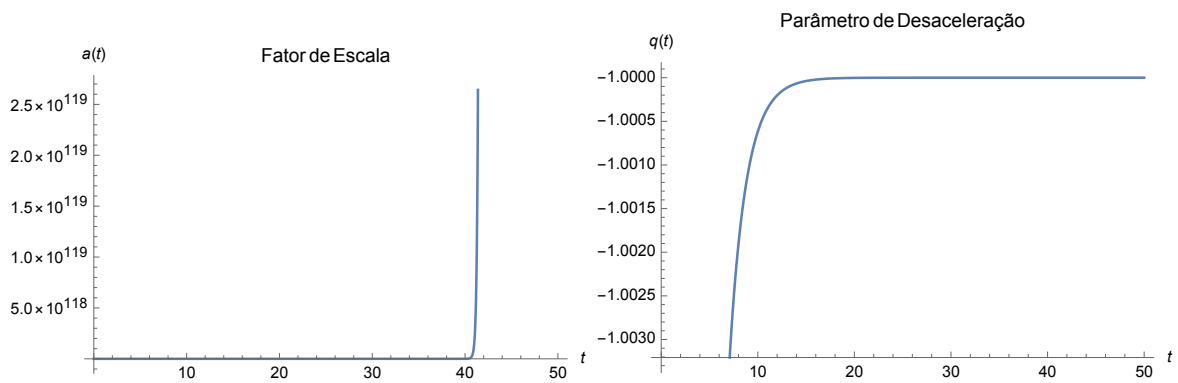


Figura 4.5: Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para  $\alpha > 0.5$  e  $V < 0$ .

Os dois resultados acima exibem um universo com expansão acelerada, e estão de acordo com os dados observacionais.

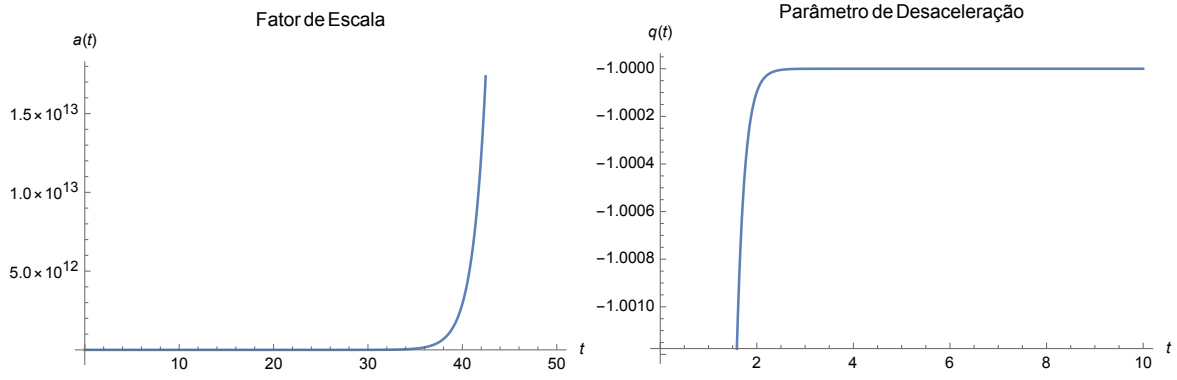


Figura 4.6: Evolução do fator de escala e parâmetro de desaceleração para  $\alpha < 0$  e  $V > 0$ .

### 4.2.2 Caso 2: $\xi \neq 0$

No vácuo, o campo de bumblebee se torna

$$B_\mu = (b, \vec{0}), \quad (4.42)$$

e as equações de Friedman modificadas, equações (4.35) e (4.36), se tornam

$$H^2(1 - \xi B^2) = \frac{1}{3}\kappa\rho_X - \xi b^2 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (4.43)$$

$$\left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a}\right)(1 - \xi B^2) = \kappa p_X. \quad (4.44)$$

Usando que  $H = \dot{a}/a$  e a equação (4.32), ficamos com

$$\frac{\ddot{a}}{a} + A\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0, \quad (4.45)$$

onde definimos

$$A = \frac{\xi b^2 + \alpha - 1}{\alpha - \xi b^2} = 0. \quad (4.46)$$

Resolvendo a equação (4.45), obtemos

$$a(t) = c_2 [(1 + A)t - c_1]^{\frac{1}{A+1}}, \quad (4.47)$$

e o parâmetro de desaceleração obtido é dado por

$$q = -A. \quad (4.48)$$

Se a constante  $A$ , equação (4.46), for um número positivo, o parâmetro de desaceleração será negativo e o universo exibirá uma expansão acelerada. Em adição, se a constante de acoplamento for zero, a expansão acelerada ocorrerá somente quando  $\alpha > 1$ .

Os resultados apresentados nesta seção estão publicados em [69].

### 4.3 Métrica Tipo-Gödel no Modelo Bumblebee

No trabalho [70], mostramos que a solução de Gödel na gravidade de bumblebee só acontece se o tensor de stress de bumblebee for nulo. Portanto, a quebra espontânea da simetria de Lorentz pode ser compatível com a existência das CTC's apenas em certas situações, tal que  $B_\mu$  é um vetor constante (assim, o tensor  $B_{\mu\nu}$  desaparece) que corresponde ao vácuo da teoria, enquanto em outros casos, a consistência é comprometida. Portanto, algumas formas de quebra espontânea de simetria permitem descartar as CTC's.

Agora iremos analisar a consistência da métrica tipo-Gödel com o modelo bumblebee, e estudar as suas questões de causalidade. Para facilitar os cálculos, vamos reescrever as equações no referencial de tetradas, que se tornam

$$\begin{aligned}
 G_{AC} = \kappa \left[ 2V' B_A B_C - B_{AD} B_C{}^D - \left( V + \frac{1}{2} B_{DE} B^{DE} \right) \eta_{AC} \right] \\
 + \xi \left[ \frac{1}{2} B^D B^E R_{DE} \eta_{AC} - B_A B^D R_{DC} - B_C B^D R_{DA} \right. \\
 + \frac{1}{2} \nabla_D \nabla_A (B^D B_C) + \frac{1}{2} \nabla_D \nabla_C (B^D B_A) \\
 \left. - \frac{1}{2} \nabla_D \nabla_E (B^D B^E) \eta_{AC} - \frac{1}{2} \square (B_A B_C) \right] + \kappa T_{AC}. \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

Para calcular as equações de campo, escolheremos o ansatz para o campo de bumblebee

$$B_A = (B(t), 0, 0, 0), \quad (4.50)$$

que satisfaz a condição de vácuo  $\eta^{AC} B_A B_C = \pm b^2$ .

Vamos começar a análise com o fluido perfeito com vorticidade  $\omega$ , densidade  $\rho$  e pressão  $p$ , tal que seu tensor energia-momento é

$$T_{AB}^{(M)} = (\rho + p) u_A u_B - p \eta_{AB}, \quad (4.51)$$

cujas componentes no referencial de tetradas são

$$T_{00}^{(M)} = \rho, \quad T_{11}^{(M)} = T_{22}^{(M)} = T_{33}^{(M)} = p, \quad (4.52)$$

onde a 4-velocidade é  $u_A = (1, 0, 0, 0)$ .

Para obtermos solução causal, vamos considerar a introdução de:

(i) O tensor energia-momento  $T_{AB}^{SF}$  associado ao campo escalar  $\Phi$  que no espaço tangente é

$$T_{AB}^{(S)} = \nabla_A \Phi \nabla_B \Phi - \frac{1}{2} \eta_{AB} \eta^{CD} \nabla_C \Phi \nabla_D \Phi, \quad (4.53)$$

onde  $\nabla_A$  é a derivada covariante com respeito a base  $\theta^A = e^A_B dx^B$ . Assumindo, por simplicidade, que

$$\Phi(z) = sz + \text{constante}, \quad (4.54)$$

as componentes não-nulas do tensor energia-momento associadas ao campo escalar são

$$T_{00}^{(S)} = -T_{11}^{(S)} = -T_{22}^{(S)} = T_{33}^{(S)} = \frac{s^2}{2}. \quad (4.55)$$

(ii) As componentes não nulas do tensor-energia momento associado ao campo eletromagnético, são

$$T_{00}^{(EM)} = -T_{11}^{(EM)} = -T_{22}^{(EM)} = -T_{33}^{(EM)} = \frac{e^2}{2}. \quad (4.56)$$

Assim, o tensor energia-momento se torna

$$T_{AB} = T_{AB}^{(M)} + T_{AB}^{(S)} + T_{AB}^{(EM)}. \quad (4.57)$$

Devido a dificuldade de resolvermos as equações de campo, é impossível obtermos uma solução analítica. Então vamos nos restringir a dois casos de solução. No primeiro caso, a constante de acoplamento  $\xi$  é nula. No segundo caso, buscaremos uma solução de vácuo, onde o campo bumblebee se torna uma constante que minimiza o potencial.

### 4.3.1 Caso 1: $\xi = 0$

Quando a constante de acoplamento é nula, a equação (4.27) fornece

$$V'B = 0, \quad (4.58)$$

forçando o campo bumblebee a repousar em um dos extremos do potencial, que o impede de evoluir com o tempo. E também, quando  $\xi = 0$ , obtemos  $V' = \dot{B} = \ddot{B} = 0$  e  $V = V_0$ , e a equação de campo (4.49) se torna

$$G_{AC} = -\kappa V_0 \eta_{AC} + \kappa T_{AC}. \quad (4.59)$$

Definindo a constante de Einstein  $\kappa = 1$ , e  $T_{AC} = T_{AC}^M$ , as componentes não nulas da equação de campo são

$$3\omega^2 - m^2 = \rho - V_0, \quad (4.60)$$

$$\omega^2 = p + V_0, \quad (4.61)$$

$$m^2 - \omega^2 = p + V_0. \quad (4.62)$$

Combinando as equações acima, obtemos

$$\rho = \omega^2 + V_0, \quad (4.63)$$

$$p = \omega^2 - V_0, \quad (4.64)$$

$$m^2 = 2\omega^2. \quad (4.65)$$

A equação (4.65) corresponde a solução de Gödel que leva a violação de causalidade. As equações acima têm uma grande semelhança com as equações da relatividade geral, com  $-V_0$  fazendo o papel da constante cosmológica.

Considerando a introdução do campo escalar, equação (4.53), as equações de campo

se tornam

$$3\omega^2 - m^2 = \rho - V_0 + \frac{s^2}{2}, \quad (4.66)$$

$$\omega^2 = p + V_0 - \frac{s^2}{2}, \quad (4.67)$$

$$m^2 - \omega^2 = p + V_0 + \frac{s^2}{2}. \quad (4.68)$$

Destas equações, obtemos

$$\rho = \omega^2 + V_0 - \frac{3}{2}s^2, \quad (4.69)$$

$$p = \omega^2 - V_0 + \frac{s^2}{2}, \quad (4.70)$$

$$m^2 - 2\omega^2 = s^2. \quad (4.71)$$

Devido a introdução do campo escalar, temos a liberdade de escolha do valor de  $m^2$ . Note que, se  $s^2 > 0$ , então  $m^2 = 4\omega^2$  é um valor possível, que leva a uma solução causal.

O valor positivo da densidade  $\rho$  e da pressão  $p$  são garantidos se o valor do potencial  $V_0$  está delimitado pelo intervalo

$$\frac{3}{2}s^2 - \omega^2 \leq V_0 \leq \frac{1}{2}s^2 + \omega^2, \quad (4.72)$$

que leva para

$$2\omega^2 \geq s^2, \quad (4.73)$$

implicando que

$$V_0 = 2\omega^2. \quad (4.74)$$

Este resultado leva para um solução causal, que é  $m^2 = 4\omega^2$ . E das equações (4.69) e (4.70), obtemos que  $\rho = p = 0$ .

Se consideramos a introdução do campo eletromagnético, ficamos com o tensor energia-

momento, equação (4.57). Assim, as equações de campo (4.69) a (4.71) se tornam

$$\rho = \omega^2 + \frac{e^2}{2} + V_0 - \frac{3}{2}s^2, \quad (4.75)$$

$$p = \omega^2 - V_0 - \frac{e^2}{2} + \frac{s^2}{2}, \quad (4.76)$$

$$m^2 - 2\omega^2 = s^2 - e^2, \quad (4.77)$$

e obtemos

$$\frac{3}{2}s^2 - \frac{e^2}{2} - \omega^2 \leq V_0 \leq \frac{1}{2}s^2 - \frac{e^2}{2} + \omega^2, \quad (4.78)$$

que leva para as equações (4.73) e (4.74), e para a solução causal com  $\rho = p = 0$ , somente se

$$e^2 = 0. \quad (4.79)$$

Portanto, a solução causal somente é possível para o caso com campo escalar.

### 4.3.2 Caso 2: $\xi \neq 0$

No vácuo,  $V' = V = 0$ , que leva a equação de campo (4.49), para

$$G_{AC} = \xi \left[ \frac{1}{2} B^D B^E R_{DE} \eta_{AC} - B_A B^D R_{DC} - B_C B^D R_{DA} \right] + T_{AC}. \quad (4.80)$$

As componentes não-nulas das equações de campo para o tensor energia-momento do fluido perfeito, equação (4.51), são

$$3\omega^2 - m^2 = -3\xi\omega^2 b^2 + \rho, \quad (4.81)$$

$$\omega^2 = -\xi\omega^2 b^2 + p, \quad (4.82)$$

$$m^2 - \omega^2 = -\xi\omega^2 b^2 + p, \quad (4.83)$$

que podem ser reescritas como

$$\rho = \omega^2(1 + 3\xi b^2), \quad (4.84)$$

$$p = \omega^2(1 + \xi b^2), \quad (4.85)$$

$$m^2 = 2\omega^2. \quad (4.86)$$

A equação (4.86) corresponde a solução de Gödel, que leva para a violação de causalidade. O raio crítico, equação (2.24), é modificado,

$$r_c = \frac{2}{m} \sinh^{-1}(1) = \frac{2}{\sqrt{\rho + p - 4\xi\omega^2 b^2}} \sinh^{-1}(1). \quad (4.87)$$

Ou seja, temos uma correção, que surge da violação de Lorentz, para o valor do raio crítico. Portanto, uma solução causal é possível quando  $\rho + p = 4\xi\omega^2 b^2$ , sendo que  $r_c \rightarrow \infty$ .

Podemos obter outra solução causal ao considerarmos o campo escalar, equação (4.53). Assim, as componentes não-nulas das equações de campo se tornam

$$\rho = \omega^2(1 + 3\xi b^2) - \frac{3}{2}s^2, \quad (4.88)$$

$$p = \omega^2(1 + \xi b^2) + \frac{s^2}{2}, \quad (4.89)$$

$$m^2 = 2\omega^2 + s^2. \quad (4.90)$$

Como na equação (4.71), a introdução do campo escalar fornece a liberdade de escolha para o valor de  $m^2$ . Então,  $m^2 = 4\omega^2$  é um valor possível, que leva para a solução causal tipo-Gödel.

Considerando a introdução do campo eletromagnético, equação (4.57), as componentes não-nulas das equações de campo são

$$\rho = \omega^2(1 + 3\xi b^2) + \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}s^2, \quad (4.91)$$

$$p = \omega^2(1 + \xi b^2) - \frac{e^2}{2} + \frac{s^2}{2}, \quad (4.92)$$

$$m^2 = 2\omega^2 + s^2 - e^2. \quad (4.93)$$

Devido a introdução do campo escalar e campo eletromagnético, a liberdade de escolha do valor de  $m^2$  se mantém. Assim, se  $s^2 - e^2 > 0$ , a solução causal com  $m^2 = 4\omega^2$  é possível.

Os resultados apresentados nesta seção foram publicados em [71].

Neste trabalho estudamos dois modelos de gravitação modificada. A geometria de Lyra e a gravidade de bumblebee.

Na geometria de Lyra, nossos resultados mostraram que as soluções das equações de campo dependem da escolha do vetor deslocamento  $\phi_\alpha$ . Para a escolha dada pela equação (3.73), a métrica de Gödel é uma solução das equações de Einstein na variedade de Lyra. Aqui as soluções usuais da GR são alteradas por um fator constante. Em adição, para um universo vazio, o parâmetro  $b^2$  é igual a constante cosmológica na geometria de Riemann. Para estudarmos as soluções tipo-Gödel, diferentes casos são considerados.

#### 1. Fluido perfeito como fonte de matéria:

- (i) Vetor deslocamento dado pela equação (3.85); Para  $\Lambda = 0$ , a solução original de Gödel é obtida para a condição  $m^2 = 2\omega^2$  que emerge naturalmente. A partir desta condição, o parâmetro  $b^2$  pode ser interpretado como uma constante cosmológica negativa. Para  $\Lambda \neq 0$ , a solução de Gödel é novamente obtida. O raio crítico para a violação de causalidade é calculado e uma condição para a solução causal é obtida.
- (ii) Vetor deslocamento dado pela equação (3.98); Com  $\Lambda = 0$ , duas classes de solução são consideradas. A primeira classe corresponde ao caso  $m^2 = 0$  e então  $b^2 = \omega^2 = \text{constante}$ . A segunda classe corresponde à  $m^2 > 0$ . Neste caso, temos dois casos diferentes: (a) Caso não-causal: Se  $b^2 = 0$ , a solução de Gödel com  $m^2 = 2\omega^2$  é recuperada; (b) Caso causal: Se  $b^2 = -\omega^2$ , a relação causal,  $m^2 = 4\omega^2$ , é obtida. Para  $\Lambda \neq 0$ , a solução causal é obtida e leva a um valor complexo para a vorticidade.

#### 2. Fontes de matéria - Fluido perfeito mais campo escalar:

- (i) Vetor deslocamento dado pela equação (3.85); Quando  $\Lambda = 0$ , a introdução do campo escalar fornece liberdade de escolha para o valor de  $m^2$  e as soluções causal e não-causal foram encontradas. Quando  $\Lambda \neq 0$ , a solução causal é obtida para  $2\omega^2 = \kappa e^2$ , que leva para  $b^2 = \frac{1}{2}\kappa(\rho + p)$ .
- (ii) Vetor deslocamento dado pela equação (3.98); Em ambos os casos,  $\Lambda = 0$  e  $\Lambda \neq 0$ , a solução causal foi determinada com um valor particular para o parâmetro  $b^2$ .

Portanto, nossos resultados mostraram que é possível evitar a violação de causalidade na geometria de Lyra escolhendo um valor particular para o parâmetro que surge da geometria. E para o fluido perfeito como fonte de matéria, a solução causal é determinada.

O estudo do modelo bumblebee aqui desenvolvido, tanto para o modelo de energia escura de Ricci, quanto para a métrica tipo-Gödel, divide-se em dois casos que dependem do valor da constante de acoplamento,  $\xi$ . A constante de acoplamento controla a interação não-mínima entre a gravidade e campo de bumblebee. O caso com  $\xi = 0$  leva a um potencial constante como sendo a contribuição do campo de bumblebee. Para o caso  $\xi \neq 0$ , a solução no vácuo é considerada, portanto, não há contribuição devido ao potencial.

Ao considerar o modelo de energia escura de Ricci no contexto do modelo bumblebee, usamos a métrica FRW para calcular o fator de escala e o parâmetro de desaceleração. Neste estudo encontramos os seguintes resultados:

- (i) Constante de acoplamento  $\xi = 0$ :

Quando a constante de acoplamento é zero, o campo de bumblebee repousa em um dos extremos do seu potencial, o que o impede de evoluir com o tempo. Neste caso, o fator de escala e o parâmetro de desaceleração dependem de um potencial constante  $V_0$ , e de  $\alpha$ , um parâmetro que vem do modelo de energia escura de Ricci. Além disso, a escolha de  $\alpha$  e  $V_0$  pode determinar um universo cíclico, com fases de aceleração e desaceleração, ou um universo apenas com aceleração.

- (ii) Constante de acoplamento  $\xi \neq 0$ :

No caso da constante de acoplamento diferente de zero, a solução no vácuo é considerada. Esta solução surge quando o campo bumblebee  $B_\mu$  permanece fixo em seu valor esperado de vácuo  $b_\mu$ . Este caso exhibe um fator de escala que leva a uma expansão acelerada. Portanto, nossos resultados mostram que o estado de expansão

acelerada do universo pode ser entendido por um modelo gravitacional com violação da simetria de Lorentz combinado com a densidade de energia escura de Ricci.

Além disso, nossos resultados mostram que o estado de expansão acelerada do universo pode ser entendido por um modelo gravitacional com violação da simetria de Lorentz combinado com a densidade de energia escura de Ricci.

A métrica tipo-Gödel no contexto do modelo de bumblebee foi analisada para os seguintes casos:

(i) Constante de acoplamento  $\xi = 0$ :

A primeira análise considera o fluido perfeito como fonte de matéria. Combinando as equações de campo, a solução de Gödel é obtida. Então a violação de causalidade é permitida. Ao comparar nossos resultados com os resultados da relatividade geral, o potencial  $V_0$  pode estar associado à constante cosmológica. Para obter uma solução causal, outras fontes de matéria são consideradas. Combinando fluido perfeito e campo escalar como fonte de matéria, surge a liberdade de escolher os parâmetros da métrica e, em seguida, é obtida uma solução causal do tipo-Gödel. Além disso, a positividade da densidade de energia e da pressão leva a mesma relação entre o potencial de bumblebee e a constante cosmológica. Uma terceira fonte de matéria é introduzida. Agora, o tensor energia-momento total é composto por fluido perfeito, campo escalar e campo eletromagnético. Para certas restrições na relação entre os campos escalar e eletromagnético, é possível uma solução causal.

(ii) Constante de acoplamento  $\xi \neq 0$ :

Tomando as equações de campo para o fluido perfeito como conteúdo da matéria, a solução de Gödel é recuperada. Aqui o raio crítico é calculado. Ele é modificado por correções devido à violação de Lorentz. Da mesma forma, como no primeiro caso, diferentes fontes de matéria são consideradas. Isso nos dá liberdade que nos permite obter condições que levam a uma solução do tipo-Gödel causal.

Portanto, ambas as soluções causal e não causal são permitidas no modelo de bumblebee.

Como extensão do trabalho até aqui desenvolvido, iremos estudar teoria de campos à temperatura finita na sua formulação de tempo real, conhecida como Thermo Field

---

Dynamics (TFD) [72, 73], baseada numa construção via operadores, que permite incorporar temperatura para o tratamento de sistemas quânticos em equilíbrio térmico. Usando TFD podemos estudar várias aplicações em gravitação e em teoria quântica de campos. Por exemplo, processos de espalhamento entre partículas a temperatura finita. E também temos o interesse em analisar o efeito Casimir a temperatura finita para diferentes modelos.

Para estudar processos de espalhamento envolvendo efeitos gravitacionais, iremos considerar a teoria gravitoeletromagnética (GEM). GEM descreve a dinâmica do campo gravitacional em uma maneira similar aquela do campo eletromagnético. A abordagem que será utilizada consiste em decompor o tensor de Weyl em duas partes, a gravitomagnética e a gravitoelétrica [74]. A lagrangiana da teoria inclui interações de gravitons e férmions, que nos permite calcular suas amplitudes de espalhamento e seções de choque.

## Referências Bibliográficas

- [1] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [2] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. Knop, P. Nugent, P. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. Groom, *et al.*, “Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 517, no. 2, p. 565, 1999.
- [3] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. Nolta, C. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, *et al.*, “First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)\* observations: determination of cosmological parameters,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 148, no. 1, p. 175, 2003.
- [4] A. De Felice and S. Tsujikawa, “f(R) Theories,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 13, no. 1, p. 3, 2010.
- [5] R. Bluhm, S.-H. Fung, and V. A. Kostelecký, “Spontaneous lorentz and diffeomorphism violation, massive modes, and gravity,” *Physical Review D*, vol. 77, p. 065020, 2008.
- [6] R. Jackiw and S.-Y. Pi, “Chern-Simons modification of general relativity,” *Physical Review D*, vol. 68, no. 10, p. 104012, 2003.
- [7] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Physical Review*, vol. 124, pp. 925–935, 1961.

- [8] H. Weyl, “Eine neue erweiterung der relativitätstheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 364, no. 10, pp. 101–133, 1919.
- [9] G. Lyra, “Über eine modifikation der riemannschen geometrie,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 54, no. 1, pp. 52–64, 1951.
- [10] D. K. Sen, “A static cosmological model,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 149, pp. 311–323, Jun 1957.
- [11] W. Halford, “Cosmological theory based on Lyra’s geometry,” *Australian Journal of Physics*, vol. 23, no. 5, pp. 863–870, 1970.
- [12] D. K. Sen and K. A. Dunn, “A scalar-tensor theory of gravitation in a modified riemannian manifold,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 12, no. 4, pp. 578–586, 1971.
- [13] H. Moradpour, N. Sadeghnezhad, S. Ghaffari, and A. Jahan, “Thermodynamic analysis of gravitational field equations in Lyra manifold,” *Advances in High Energy Physics*, vol. 2017, 2017.
- [14] K. P. Singh and M. R. Mollah, “Could the Lyra manifold be the hidden source of the dark energy?,” *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 14, no. 04, p. 1750063, 2017.
- [15] M. Abdel-Megied and E. Hegazy, “Bianchi type vi cosmological model with electromagnetic field in Lyra geometry,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 94, no. 10, pp. 992–1000, 2016.
- [16] H. Çağlar and S. Aygün, “Exact solutions of bulk viscous with string cloud attached to strange quark matter for higher dimensional frw universe in Lyra geometry,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 1722, no. 1, p. 050001, 2016.
- [17] C. Kiefer, “Quantum gravity—a short overview,” in *Quantum gravity*, pp. 1–13, Springer, 2006.
- [18] S. Carlip, D.-W. Chiou, W.-T. Ni, and R. Woodard, “Quantum gravity: A brief history of ideas and some prospects,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 24, no. 11, p. 1530028, 2015.

- [19] V. A. Kostelecký and S. Samuel, “Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory,” *Physical Review D*, vol. 39, no. 2, p. 683, 1989.
- [20] V. A. Kostelecký and R. Potting, “Cpt and strings,” *Nuclear Physics B*, vol. 359, no. 2-3, pp. 545–570, 1991.
- [21] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecký, C. D. Lane, and T. Okamoto, “Non-commutative field theory and lorentz violation,” *Physical Review Letters*, vol. 87, no. 14, p. 141601, 2001.
- [22] R. Gambini and J. Pullin, “Nonstandard optics from quantum space-time,” *Physical Review D*, vol. 59, no. 12, p. 124021, 1999.
- [23] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Cpt violation and the standard model,” *Physical Review D*, vol. 55, no. 11, p. 6760, 1997.
- [24] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Physical Review D*, vol. 58, no. 11, p. 116002, 1998.
- [25] H. Belich, T. Costa-Soares, M. Santos, and M. Orlando, “Violação da simetria de lorentz,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, no. 1, pp. 57–64, 2007.
- [26] J. D. Tasson, “What do we know about lorentz invariance?,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 77, no. 6, p. 062901, 2014.
- [27] V. A. Kostelecký, *CPT and Lorentz Symmetry*. WORLD SCIENTIFIC, 1999.
- [28] C. Gao, F. Wu, X. Chen, and Y.-G. Shen, “Holographic dark energy model from ricci scalar curvature,” *Physical Review D*, vol. 79, p. 043511, 2009.
- [29] M. J. Rebouças and J. Tiomno, “Homogeneity of riemannian space-times of gödel type,” *Physical Review D*, vol. 28, pp. 1251–1264, 1983.
- [30] G. ’t Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” *Conference Proceedings*, vol. C930308, pp. 284–296, 1993.
- [31] C. R. Stephens, G. ’t Hooft, and B. F. Whiting, “Black hole evaporation without information loss,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 11, no. 3, pp. 621–647, 1994.

- [32] L. Susskind, “The world as a hologram,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, no. 11, pp. 6377–6396, 1995.
- [33] K. Gödel, “An example of a new type of cosmological solutions of einstein’s field equations of gravitation,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, pp. 447–450, 1949.
- [34] S. R. Dahmen, “Gödel e Einstein: e quando o tempo não resiste à amizade?,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 28, pp. 531 – 539, 2006.
- [35] M. Novello, *O Que É Cosmologia? A Revolução do Pensamento Cosmológico*. Rio de Janeiro: Zahar, 2006.
- [36] P. M. Garnavich, R. P. Kirshner, P. Challis, J. Tonry, R. L. Gilliland, R. C. Smith, A. Clocchiatti, A. Diercks, A. V. Filippenko, M. Hamuy, C. J. Hogan, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, A. G. Riess, B.P. Schmidt, R. A. Schommer, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and L. Wells, “Constraints on Cosmological Models from [ITAL]Hubble Space Telescope[/ITAL] Observations of High-[CLC][ITAL]z[/ITAL][[/CLC] Supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 493, no. 2, pp. L53–L57, 1998.
- [37] S. Carneiro, “A Gödel-Friedmann cosmology?,” *Physical Review D*, vol. 61, no. 8, p. 083506, 2000.
- [38] Y. Hikida and S. J. Rey, “Can branes travel beyond CTC horizon in Gödel universe?,” *Nuclear Physics B*, vol. 669, pp. 57–77, 2003.
- [39] T. Clifton and J. D. Barrow, “The existence of Gödel, Einstein, and de Sitter universes,” *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 72, pp. 1–6, 2005.
- [40] C. Furtado, J. Nascimento, A. Petrov, and A. Santos, “Dynamical Chern–Simons modified gravity, Gödel Universe and variable cosmological constant,” *Physics Letters B*, vol. 693, no. 4, pp. 494–497, 2010.
- [41] C. Furtado, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov, and A. F. Santos, “Horava-Lifshitz gravity and Gödel universe,” *Physical Review D*, vol. 84, no. 4, p. 047702, 2011.

- [42] J. Fonseca-Neto, A. Petrov, and M. Rebouças, “Gödel-type universes and chronology protection in hořava–lifshitz gravity,” *Physics Letters B*, vol. 725, no. 4, pp. 412 – 418, 2013.
- [43] G. F. R. Ellis, “The arrow of time and the nature of spacetime,” *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, vol. 44, no. 3, pp. 242 – 262, 2013.
- [44] S. W. Hawking, “Chronology protection conjecture,” *Physical Review D*, vol. 46, pp. 603–611, 1992.
- [45] Z. Nekouee, J. Sadeghi, and A. Behzadi, “The comparing FRW and Gödel background with finsler and riemannian geometries,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1194, p. 012080, 2019.
- [46] D. Sofuoğlu, “Gödel universe in  $f(R,T)$  gravity,” *International Journal of Modern Physics*, vol. D28, no. 07, p. 1950089, 2019.
- [47] F. Ahmed, “Linear confinement of a scalar and spin-0 particle in a topologically trivial flat Gödel-type space-time,” *The European Physical Journal C*, vol. 79, p. 104, Feb 2019.
- [48] H. Hassanabadi, M. Hosseini, S. Zare, and M. Hosseinpour, “Study of bosons for three special limits of Gödel-type spacetimes,” *Few-Body Systems*, vol. 60, p. 12, Dec 2018.
- [49] J. F. García and C. Sabín, “Dirac equation in exotic spacetimes,” *Physical Review D*, vol. 99, p. 025008, 2019.
- [50] G. N. Remmen, “New spacetimes for rotating dust in  $(2 + 1)$ -dimensional general relativity,” *Physical Review D*, vol. 98, p. 124008, 2018.
- [51] F. Ahmed, “The energy-momentum distributions and relativistic quantum effects on scalar and spin-half particles in a Gödel-type spacetime,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, p. 598, Jul 2018.
- [52] E. O. Silva, “Ground state of a bosonic massive charged particle in the presence of external fields in a Gödel-type spacetime,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 133, p. 530, Dec 2018.

- [53] S. Chandrasekhar and J. P. Wright, “The geodesics in Gödel’s universe,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 47, no. 3, p. 341, 1961.
- [54] H. Stein, “On the paradoxical time-structures of Gödel,” *Philosophy of Science*, vol. 37, no. 4, pp. 589–601, 1970.
- [55] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 2004.
- [56] A. F. F. Teixeira, M. J. Rebouças, and J. E. Āman, “Isometries of homogeneous Gödel-type spacetimes,” *Physical Review D*, vol. 32, pp. 3309–3311, 1985.
- [57] J. E. Āman, J. B. Fonseca-Neto, M. A. H. MacCallum, and M. J. Rebouças, “Riemann-cartan spacetimes of Gödel-type,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 15, no. 4, pp. 1089–1101, 1998.
- [58] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [59] M. M. Som, A. K. Raychaudhuri, and J. L. Synge, “Cylindrically symmetric charged dust distributions in rigid rotation in general relativity,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 304, no. 1476, pp. 81–86, 1968.
- [60] W. Jesus and A. Santos, “On causality violation in Lyra geometry,” *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 15, no. 08, p. 1850143, 2018.
- [61] D. Mattingly, “Modern tests of lorentz invariance,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 8, p. 5, Sep 2005.
- [62] J. Ehlers and C. Lämmerzahl, *Special relativity: will it survive the next 101 years?*, vol. 702. Springer, 2006.
- [63] R. Bluhm, “Effects of Spontaneous Lorentz Violation in Gravity,” *PoS*, vol. QG-PH, p. 009, 2007.
- [64] D. Capelo and J. Páramos, “Cosmological implications of bumblebee vector models,” *Physical Review D*, vol. 91, p. 104007, 2015.

- [65] J. A. Frieman, M. S. Turner, and D. Huterer, “Dark energy and the accelerating universe,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 46, no. 1, pp. 385–432, 2008.
- [66] P. J. Steinhardt and N. Turok, “Cosmic evolution in a cyclic universe,” *Physical Review D*, vol. 65, p. 126003, 2002.
- [67] P. H. Frampton, “Holographic entanglement entropy and cyclic cosmology,” *Physics of the Dark Universe*, vol. 20, pp. 28 – 31, 2018.
- [68] G. Montani, A. Marchi, and R. Moriconi, “Bianchi i model as a prototype for a cyclical universe,” *Physics Letters B*, vol. 777, pp. 191 – 200, 2018.
- [69] W. Jesus and A. Santos, “Ricci dark energy in bumblebee gravity model,” *Modern Physics Letters A*, vol. 34, no. 22, p. 1950171, 2019.
- [70] A. F. Santos, W. D. R. Jesus, J. R. Nascimento, and A. Y. Petrov, “Gödel solution in the bumblebee gravity,” *Modern Physics Letters A*, vol. 30, no. 02, p. 1550011, 2015.
- [71] W. Jesus and A. Santos, “Gödel-type universes in bumblebee gravity,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 35, no. 09, p. 2050050, 2020.
- [72] Y. Takahashi and H. Umezawa, “Coll. phenomena, 2: 55, 1975,” *Reprinted in International Journal of Modern Physics*, vol. 10, p. 1996, 1755.
- [73] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, and A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications*. World Scientific, 2009.
- [74] J. Ramos, M. de Montigny, and F. C. Khanna, “On a lagrangian formulation of gravitoelectromagnetism,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 42, no. 10, pp. 2403–2420, 2010.

## Minhas Publicações

## On causality violation in Lyra Geometry

W. D. R. Jesus\* and A. F. Santos†

*Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso  
78060-900, Cuiabá, Mato Grosso, Brazil*

*\*willian.xb@gmail.com*

*†alesandroferreira@fisica.ufmt.br*

Received 9 February 2018

Accepted 17 April 2018

Published 15 May 2018

In this paper, the causality issues are discussed in a non-Riemannian geometry, called Lyra geometry. It is a non-Riemannian geometry originated from Weyl geometry. In order to compare this geometry with the Riemannian geometry, the Einstein field equations are considered. It is verified that the Gödel and Gödel-type metric are consistent with this non-Riemannian geometry. A non-trivial solution for Gödel universe in the absence of matter sources is determined without analogue in general relativity. Different sources are considered and then different conditions for causal and non-causal solutions are discussed.

*Keywords:* Lyra geometry; causality; Gödel-types universes.

Mathematics Subject Classification 2010: 51P05, 83C05, 83C10, 83F05

### 1. Introduction

General Relativity (GR) [1] is a relativistic theory of gravity that accurately explains several gravitational phenomena [2]. However, it faces some challenges of both observational and theoretical nature (see, e.g. the recent overview [3] and references therein), such as accelerated expansion of the universe and the presence of a mysterious form of matter which cannot be directly observed. In addition, there is still no complete and consistent quantum theory of gravity. From these facts emerges the possibility that GR may be modified. Several modified gravity theories have been developed, such as  $F(R)$  gravity [4, 5], bumblebee model [6], Chern-Simons gravity [7], Brans-Dicke theory [8],  $F(R,T)$  gravity [9], higher derivative gravity [10], hybrid metric-Palatini gravity [11], conformally coupled general relativity [12], bigravity [13], non-commutative space-times [14], de Sitter Horndeski models [15], gravity with Lorentz violation [16], orbital effects of Lorentz-violating gravitomagnetism [17], Chameleonic theories [18], generalized  $f(R, \Phi, X)$

†Corresponding author.

## Ricci dark energy in bumblebee gravity model

W. D. R. Jesus\* and A. F. Santos†

*Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso,  
78060-900, Cuiabá, Mato Grosso, Brazil*

*\*willian.xb@gmail.com*

*†alesandroferreira@fisica.ufmt.br*

Received 6 March 2019

Revised 15 March 2019

Accepted 19 March 2019

Published 17 May 2019

The Ricci dark energy is a model inspired by the holographic dark energy models with the dark energy density being proportional to Ricci scalar curvature. Here, this model is studied in the bumblebee gravity theory. It is a gravitational theory that exhibit spontaneous Lorentz symmetry breaking. Then, the modified Friedmann equation is solved for two cases. In the first case, the coupling constant  $\xi$  is equal to zero and in the second case a solution in the vacuum, where the bumblebee field becomes a constant that minimizes the potential, is considered. The coupling constant controls the interaction gravity-bumblebee.

**Keywords:** Ricci dark energy; bumblebee model; modified Friedmann equation.

**PACS No.:** 04.50.Kd

### 1. Introduction

General relativity describes gravitation at a classical level. Although it is a theory of gravity successfully tested, it does not explain some observational data. Observational results lead to evidences for a phase of accelerated expansion of the current universe.<sup>1–7</sup> This acceleration may be explained by a new component called dark energy that corresponds to approximately 70% of the energy content of the universe and its nature is still not clear at the present moment. The cosmological constant  $\Lambda$  is the simplest candidate to describe dark energy. It is a fundamental ingredient of the  $\Lambda$ -CDM model,<sup>8</sup> the most consistent model with the experimental observations. However, this model suffers from two major issues, the fine-tuning problem (the observed value of the cosmological constant is of the order of  $10^{-120}$  smaller

†Corresponding author.

## Gödel-type universes in bumblebee gravity

W. D. R. Jesus\* and A. F. Santos<sup>†</sup>

*Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso,  
78060-900, Cuiabá, Mato Grosso, Brazil*

*\*willian.xb@gmail.com*

*<sup>†</sup>alesandroferreira@fisica.ufmt.br*

Received 30 December 2019

Revised 10 March 2020

Accepted 27 March 2020

Published 24 April 2020

The bumblebee field coupled with gravity is considered. This gravitational theory exhibits spontaneous breaking of Lorentz symmetry. The Gödel-type universe is introduced and then the causality and its violation are studied. Causal and noncausal Gödel-type solutions are obtained for different content of matter. In addition, when the coupling constant, which controls the interaction between the bumblebee field and the gravitational field, is zero the bumblebee potential may be associated with the value of the cosmological constant of the general relativity. Furthermore, the case with the nonzero coupling constant is also investigated.

**Keywords:** Bumblebee gravity; Gödel-type universes; causal and noncausal solutions.

**PACS numbers:** 11.27.+d, 11.30.Qc

### 1. Introduction

Standard Model (SM) and General Relativity (GR) are examples of theories that describe the fundamental forces of nature. These theories have been extensively tested over the years and their theoretical predictions are confirmed experimentally. Although SM describes fundamental interactions at a quantum level, GR is a classical theory. So, at the present moment, a consistent quantum gravity theory, which unifies GR and quantum mechanics, has not been constructed. However, some models that unify SM and GR have been developed. A unified theory leads to a deeper understanding of nature. The physical effects of this unification theory

<sup>†</sup>Corresponding author.