Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Equações algébricas: história e ensino

Valcir Borges Vertuoso

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Djeison Benetti**

Coorientador: **Prof. Dr. Vinicius Machado Pereira dos Santos**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Agosto de 2019

Equações algébricas: história e ensino

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Valcir Borges Vertuoso e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 16 de agosto de 2019.

Prof. Dr. Djeison Benetti
Orientador

Prof. Dr. Vinicius Machado Pereira dos Santos
Coorientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Djeison Benetti
Prof. Dr. Vinicius Machado Pereira dos Santos
Profª. Dra. Anna Lígia Oenning Soares
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

V568e Vertuoso, Valcir Borges.
Equações algébricas: história e ensino / Valcir Borges Vertuoso. -- 2019
xi, 50 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Djeison Benetti.
Co-orientador: Vinicius Machado Pereira dos Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2019.
Inclui bibliografia.

1. História da matemática. 2. Equações algébricas. 3. Ensino de matemática. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática em Rede Nacional - Profmat
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Fone: (65) 3615-8576 - Email: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: **"Equações algébricas: história e ensino"**

Autor: **Valcir Borges Vertuoso**

defendida e aprovada em 16/08/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Djeison Benetti Djeison Binetti
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Coorientador Doutor Vinicius Machado Pereira dos Santos
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutora Anna Ligia Oenning Soares
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Junior Cesar Alves Soares Junior Cesar Alves Soares
Instituição: UNEMAT - Barra do Bugres

Cuiabá, 16/08/2019.

À minha genitora.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida.

À UFMT e ao programa PROFMAT pela oportunidade de profissionalizar os educadores matemáticos de todo Brasil.

Aos meus professores de mestrado em particular ao meu orientador professor Djeison Benetti e ao coorientador professor Vinicius M. Pereira dos Santos, pelo suporte e paciência durante todo processo de escrita deste trabalho.

Ao amigo Claudio pela parceria nos estudos que se iniciou desde o concurso Seduc-MT de 2017, passando pelo Exame Nacional de Qualificação (ENQ) e culminando na dissertação.

À colega Priscila por ceder materiais didáticos imprescindíveis para escrita desta dissertação e aos demais colegas de turma (Claudeir, Osvaldo, Adriana, Jaqueline Mariano, Jaqueline Soares, Juliano (e a Marcela também porque não?), Luiz, Ondrias, Paula, Vinícius, Zeila e Silvana) por proporcionarem momentos de estudos e diversão durante o curso.

Enfim, agradeço a todos os que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação.

Meu muito obrigado!

Seja a mudança que você quer ver no mundo.

Mahatma Gandhi

Resumo

Neste trabalho, apresentamos o processo de solução das equações algébricas desde as antigas civilizações até o início da modernidade. Exporemos, em suma, como se deu a busca de fórmulas resolutivas das equações algébricas usando radicais (operações que envolvem soma, subtração, multiplicação, divisão, radiciação e potenciação), culminando com as ideias do jovem matemático Èvariste Galois, que pôs fim à procura de uma fórmula geral para equações de grau igual ou superior a 5. Ao longo desse percurso, procuramos destacar a importância da história da matemática como um recurso para o ensino de matemática, em particular, para o ensino de equações algébricas.

Palavras chave: História da matemática. Equações algébricas. Ensino de matemática.

Abstract

In this paper, we present the solution process of solving algebraic equations took place from ancient civilizations to the beginning of modernity. We will expose, in short, how the search for solving formulas of algebraic equations using radicals (operations involving sum, subtraction, multiplication, division, root and potentiation), culminating with the ideas of the young mathematician Èvariste Galois, who ended the search for a general formula for equations of 5 or more. Along this route, we have sought to highlight the importance of the history of mathematics as a resource for teaching mathematics, in particular for teaching algebraic equations.

Keywords: History of mathematics. Algebraic equations. Mathematics teaching.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Desde os primórdios da humanidade, o pensamento matemático se fez presente e evoluiu de acordo com a necessidade do homem, seja no auxílio da produção, na comercialização ou no desenvolvimento de tecnologias. Porém, os dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), apresentados no dia 30 de agosto de 2018 pelo Ministério da Educação (MEC), apontam que a maioria dos alunos que terminam o ensino médio não aprende o básico em matemática[1]. Além disso é visível a falta de interesse e motivação por parte dos alunos em aprender matemática.

Vivenciando esta situação, enquanto professor de matemática da rede estadual de Mato Grosso desde 2011, é notável que, quando deixamos por um momento a aula expositiva tradicional e resgatamos um evento do passado, os alunos ficam curiosos e começam a questionar certos motivos e ações dos povos antigos. Por exemplo, no assunto *Conjuntos numéricos*, ao explicar os números naturais ($\mathbb{N}$), uso a história da matemática para esclarecer sobre a origem dos números e a necessidade do ato de contar, sobre a diferença da linguagem em diferentes povos e épocas, sobre os desenhos nas cavernas e as marcações nos ossos e tabletes de argila; enfim, todo o processo que levou o homem a quantificar os objetos sejam eles animados ou inanimados. Também esclareço que o algarismo zero veio a aparecer só séculos mais tarde e etc. Com essas observações, apesar de uma carreira docente ainda recente, pude perceber que, quando a história da matemática está vinculada ao assunto abordado, há uma maior compreensão por parte dos alunos, diferentemente de uma abordagem direta.

A partir dessa experiência individual, buscamos nessa dissertação ampliar a compreensão do uso da história da matemática em sala de aula, em particular como a história pode auxiliar o professor ao ensinar *Equações algébricas*. Na Base Nacional Comum Cur-

[1]Fonte: Ministério da Educação (2018b).

ricular (BNCC), observamos que a álgebra aparece desde os primeiros anos do ensino fundamental até o ensino médio. É claro que os alunos dos anos iniciais não vão resolver equações e fatorar polinômios, porém o pensamento algébrico é estimulado desde cedo. Dessa forma, mostramos como e em que contexto as equações algébricas apareceram ao longo da história e como o professor pode usar esses conhecimentos para melhorar sua ação docente através de exemplos.

A percepção da importância da história na educação, de acordo com Miguel e Miorim (2004), levou pesquisadores e educadores matemáticos a ampliar a presença do discurso histórico nas produções brasileiras destinadas à matemática escolar. Essa vertente mostra a história como recurso importante no ensino de matemática. As equações algébricas (assim chamadas hoje), por exemplo, apareceram em algumas das principais civilizações antigas como a Mesopotâmia, Egito e Grécia. Eles usavam as equações para resolverem problemas práticos do cotidiano. Surgem assim as primeiras fórmulas resolutivas de equações algébricas, como *a fórmula de Bhaskara*, e outras para encontrar as raízes de equações algébricas de grau 3 e 4. Tem-se também a corrida em busca de fórmulas resolutivas por meio de radicais de equações algébricas de grau superior ou igual a 5 até Èvariste Galois, que pôs fim a busca de tais fórmulas, mostrando que eram impossíveis de se encontrar. Podemos dizer que, até Galois, a história da álgebra coincide com a história das equações algébricas.

No primeiro capítulo, citamos algumas tendências no ensino de matemática, dando destaque para o uso da história da matemática em sala de aula segundo a concepção de educadores/pesquisadores. No segundo capítulo, mostramos como a noção de equações algébricas está presente nas civilizações dos babilônios, egípcios e gregos e a que problemas práticos estavam associadas. No terceiro capítulo, referente à idade moderna, mostramos a busca de soluções de equações algébricas de grau 3 em diante até as concepções de estruturas algébricas de Abel e Galois. Também é feito nesse capítulo uma discussão sobre a história da matemática no ensino de equações algébricas na educação básica. Nas considerações finais, destacamos que, após as leituras e os levantamentos bibliográficos, o uso da história em sala de aula pode ser um diferencial no processo de ensino de matemática.

Capítulo 1

O uso da história no ensino de matemática

A educação, nos últimos anos, tem enfrentado reformulações curriculares que sinalizam novas propostas pedagógicas para a sala de aula, considerando processos cognitivos, afetivos, motivacionais e metodológicos. Levando em consideração o atual cenário da matemática no Brasil, pesquisas em educação matemática têm aumentado significativamente e apontam novas perspectivas para as práticas pedagógicas relativas à escolha de métodos de ensino para tornar o conhecimento mais compreensivo e útil. De acordo com Groenwald et al. (2004), dentre as tendências mais expressivas no Brasil, cuja aplicação em sala de aula já apresentam resultados em diferentes artigos e relatos, temos a resolução de problemas[1], a modelagem matemática[2], os jogos e as curiosidades matemáticas[3], a etnomatemática[4], as novas tecnologias[5], o ensino através de projetos[6] e a história da matemática.

Fazendo um rápido levantamento no banco de dissertações do programa PROFMAT, do total de 4572 publicadas até a data de 10 de julho de 2019, encontramos 54 registros com o filtro *história* e 7 registros com os filtros *história* e *álgebra.* Porém, desses 7 registros, apenas o trabalho *A história da matemática e os exercícios problemas como ferramenta para o ensino de equações algébricas do 1º ao 4º graus*, de André Lo-

[1]Indicamos, para leitura complementar, Andrade (1998) e Polya (1978).
[2]Indicamos, para leitura complementar, Bassanezi (1994) e Barbosa (2003).
[3]Indicamos, para leitura complementar, Borin (1995) e Moura e Viamonte (2006).
[4]Indicamos, para leitura complementar, D'Ambrosio (1990) e Rosa e Orey (2003).
[5]Indicamos, para leitura complementar, Ponte et al. (2003) e Borba (1999).
[6]Indicamos, para leitura complementar, Veiga (2006) e Groenwald et al. (2004).

pes Teixeira de 2017, destaca a importância da história da matemática e a resolução de problemas no ensino de equações algébricas até o $4^{\underline{o}}$ grau. Dessa forma, pela quantidade total de dissertações, vemos que ainda há um número pequeno de materiais para que o professor da educação básica possa utilizar em suas aulas.

No Brasil, segundo Miguel e Miorim (2004), foi a partir da década de 1980 que ocorreu com maior intensidade a retomada da inclusão da história da matemática em textos direcionados à prática pedagógica de matemática. Nesse momento, o Movimento da Matemática Moderna[7] sofria fortes críticas. Segundo Viana e Silva (2007), no início do Movimento da Matemática Moderna, Lichnerowicz, um dos maiores defensores da implementação das ideias veiculadas por esse movimento nas escolas francesas, afirmava que a história não poderia trazer contribuições para o ensino de matemática. Por outro lado, a história da matemática é apontada por alguns pesquisadores como um recurso didático que pode trazer importantes contribuições à educação matemática e à formação de professores de matemática. Dentre eles, podemos citar: D'Ambrosio (1990, 1996, 1999), Miguel e Miorim (2004), Brito (2007), Nobre (1996) e Baroni e Nobre (1999).

É visto que o baixo desempenho dos alunos em matemática está relacionado a vários fatores, dentre eles, problemas sociais, dificuldades na assimilação do conteúdo e também resistências por parte dos responsáveis pelo ensino. A esse respeito, D'Ambrosio (1999) afirma que um dos maiores erros que acontece ao ensinar matemática é desvinculá-la das outras atividades humanas, já que as práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagens e nas tradições, ou seja: "é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretação dos mesmos. Em especial da matemática cujas raízes se confundem com a história da humanidade" (D'Ambrosio, 1999, p. 97).

De acordo com Baroni e Nobre (1999), os estudos e relatos sobre a participação da história na educação matemática têm se intensificado, sendo uma prática com enorme potencial de evolução. Assim, além do professor ter que conhecer o conteúdo matemático, é necessário que o professor conheça o processo/desenvolvimento histórico de tal assunto, pois é impossível usar a história como recurso didático sem conhecer o processo histórico de evolução dos conceitos matemáticos. Neste sentido, Balestri (2000) aponta algumas

[7]O Movimento da Matemática Moderna, de acordo com Eves (2004), nasceu em meados do século XX, quando grupos de pessoas interessadas pelo ensino de matemática concluíram que seria conveniente adaptar ao ensino dessa disciplina duas das principais características da matemática do século XX: (1) abstração e (2) análise das estruturas e modelos subjacentes (apud Balestri, 2000, p. 3).

contribuições da história da matemática para a formação de professores e para uma ação educativa:

- A história da matemática satisfaz a curiosidade do aluno e o motiva.
- A história da matemática ajuda veicular a matemática como uma criação humana, uma manifestação cultural.
- A história da matemática ajuda a mudar concepções a respeito da natureza da matemática.
- A história da matemática ajuda a compreender como o conhecimento escolar está organizado.
- A história da matemática fornece respostas a alguns "porquês".
- A história da matemática oferece contexto para a compreensão de tendências da educação matemática.
- A história da matemática oferece um campo comum aos interesses de especialistas de várias áreas do conhecimento, favorecendo a realização de trabalhos multidisciplinares.
- A história da matemática auxilia na compreensão da noção de rigor matemático e da dimensão estética da matemática.
- A história da matemática contribui para valorização da dimensão ético-política da matemática.

Além disso, o conhecimento da história da matemática possibilita perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas resultaram de desafios que os povos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após o processo de formalização. Isso é confirmado por Nobre (1996) ao constatar que muitos conhecimentos matemáticos são transmitidos como se fossem obtidos de forma natural e apresentados desprovidos de erros e dificuldades. O autor destaca a necessidade de observar que a forma acabada na qual hoje se encontra o conceito matemático esconde modificações sofridas ao longo de sua história e que isso deve ser levado em conta na elaboração de atividades de ensino. Assim, verifica-se que é necessário uma fundamentação histórica sólida para que essa proposta proporcione, ao aluno e ao professor, a oportunidade de levantar questões sobre temas que, muitas vezes, aparecem como inquestionáveis e intocáveis.

O uso da história da matemática em sala de aula não deve se resumir à simples narração ou datação de acontecimentos históricos. A história da matemática deve ir além de datas, nomes e lugares, ela deve ser vista como um recurso didático que abre um leque de possibilidades para o trabalho com diferentes conteúdos. Muitos livros didáticos já trazem a biografia dos matemáticos e, na introdução de alguns conceitos, apresentam a sua origem histórica. Porém, a forma que esses dados são abordados por alguns professores faz com que sirvam como simples informações transmitidas aos alunos, considerando a história apenas como uma curiosidade. Nesse sentido,

> é muito importante destacar aspectos socioeconômicos e políticos na criação matemática, procurando relacionar com o espírito da época, com o que se manifesta nas ciências em geral, na filosofia, nas religiões, nas artes, nos costumes, na sociedade como um todo (D'Ambrosio, 1996, p. 13).

> [O] professor acaba reduzindo a história a um amontoado de nomes e datas, utilizando-se muitas vezes de fontes não seguras e não confiáveis que adotam concepções, informações ou demonstrações errôneas, além de não levarem em conta os aspectos sociais, culturais e políticos que servem como pano de fundo para produção daquele conhecimento. O estímulo que a história da matemática pode vir a oferecer acaba sendo momentâneo e sem muita eficácia, uma vez que o pensamento crítico do aluno não é requisitado (Lara, 2013, p. 54).

A história da matemática não é um ramo isolado, ou seja, não há uma data específica para a origem da matemática e sua evolução não se deu de forma isolada, mas sim através de saberes e fazeres ligados a diferentes realidades e épocas. E para que a história tenha uma importância significativa na educação, o professor pode "utilizar a história da matemática como recurso metodológico de ensino: trazer a biografia dos matemáticos para a sala de aula; desenvolver temas por meio da história; mostrar as origens de termos matemáticos; e estudar textos do passado" (Estrada *apud* Lara, 2013, p. 53). Corroborando com esse pensamento, Brito afirma que:

> A história da matemática não deve fazer parte das aulas como coadjuvante, por meio da narração de fatos isolados, mas deve sugerir caminhos para a problematização em forma de atividades que visem à construção de conceitos por parte dos alunos. É importante que os professores tenham a oportunidade de elaborar atividades com esta história e de utilizá-la em suas aulas, pois, nesse processo pressupõe a articulação entre pesquisa e ensino, teoria e prática, os docentes se percebem produtores de novos conhecimentos e a história da matemática assume plenamente seu potencial de formação (Brito, 2007, p. 15).

Com essa visão de história, Lara (2013) propõe ao professor que os alunos pesquisem sobre a construção histórica de alguns conceitos relacionados ao conteúdo a ser trabalhado em sala. Assim, o aluno é levado a investigar conhecimentos matemáticos a partir da perspectiva de uma determinada civilização em uma determinada época. É importante que o professor, ao propor essa pesquisa, tenha delimitado o tema e o conteúdo programático para aquele momento, pois

> ao se dedicar apenas a uma civilização, a pesquisa se torne muito ampla, levando o aluno a se defrontar com conteúdos que ainda não seriam estudados naquele período letivo. Isso pode ocasionar dúvidas durante a investigação, podendo desviar do foco que o professor pretende atingir, uma vez que o seu ano letivo está vinculado ao conteúdo programático (Lara, 2013, p. 56).

Além do uso da história da matemática em forma de pesquisa, defendida por Lara (2013), Miguel e Miorim (2004) também defendem que a matemática pode ser ensinada através de problemas históricos, pois "o fato de resolver um problema histórico é por si só uma atividade motivadora, e o fato do problema estar vinculado à história já elevaria, quase que automaticamente, o seu potencial motivador" (Miguel e Miorim, 2004, p. 48). Ainda, a utilização de problemas históricos, segundo Swetz (1989), é eficaz porque: 1) possibilita o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos, propriedades e métodos matemáticos que são ensinados; 2) constitui veículo de informação cultural e sociológica; 3) refletem as preocupações práticas ou teóricas das diferentes culturas em diferentes momentos históricos; 4) constitui meio de aferimento da habilidade matemática de nossos antepassados; 5) permite mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Levando em consideração a realidade e os questionamentos dos alunos, salientamos que o uso da história esteja vinculada com o cotidiano do aluno, pois mesmo noções básicas de matemática, as quais muitas vezes passam despercebidas, tiveram um desenvolvimento histórico e importante na sociedade. Desmistificando a ideia de que a matemática é uma ciência isolada das demais, Miguel e Miorim defendem que é possível encontrar na história objetivos pedagógicos que levam os alunos a perceber:

> (1) A matemática como criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar a generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (Miguel e Miorim, 2004, p. 53).

Se a história contribui para a formação do pensamento matemático dos alunos, é importante que o professor também esteja atento aos estudos e pesquisas acerca da utilização da história, pois assim ele poderá perceber e articular a matemática com outras disciplinas e assuntos da grade curricular. Ao conceber a história de modo que ela não atue apenas como um "repertório fixo e invariável de objetos, técnicas, métodos e problemas transpostos de forma mecânica" (Miguel e Miorim, 2004, p. 177), o professor pode utilizar-se da história da matemática em suas aulas de forma que a mesma participe como

> [um] conjunto heterogêneo de formas simbólicas produzidas por comunidades de memória envolvidas com diferentes práticas sociais e produtoras de diferentes jogos de linguagem e que constituem e condicionam, em todo e qualquer momento presente, a produção e apropriação subjetiva da matemática e da educação matemática escolares por parte dos alunos (Miguel e Miorim, 2004, p. 177).

No capítulo a seguir apresentamos situações-problemas que levaram os antigos povos a estabelecer as primeiras conexões com aquilo que hoje conhecemos por *Equações algébricas.*

Capítulo 2

Equações algébricas na antiguidade

Neste capítulo, mostraremos a origem das equações algébricas a partir dos principais métodos utilizados pelos povos das civilizações da Mesopotâmia (Babilônia), do Egito e da Grécia para resolver problemas. Destacamos que os exemplos apresentados aqui podem ser utilizados pelo professor em sala de aula para construir uma perspectiva de ensino de matemática a partir da história da matemática.

2.1 As equações algébricas na Mesopotâmia, no Egito e na Grécia

Os povos que habitavam a Mesopotâmia, região localizada entre os rios Tigre e Eufrates, são frequentemente chamados de civilização da babilônia, embora tal designação não esteja inteiramente correta. Boyer afirma que

> a cidade da Babilônia não foi a princípio, nem foi sempre em períodos posteriores, o centro da cultura associada com os dois rios, mas a convenção sancionou o uso informal do nome "Babilônia" para a região durante o período de cerca de 2000 até aproximadamente 600 a.C. (Boyer, 1974, p. 18).

De acordo com Rosa e Orey (2013) e Baumgart (1992), os relatos que se tem da história e cultura babilônicas, provém de achados em tabletes de barro, os quais mostravam que os babilônios tinham um rico conhecimento, não só de matemática[1], mas também em outras áreas, como direito e astronomia. As informações que se têm afirmam que os babilônios

[1]A rigor, o termo "matemático" empregado ao longo deste trabalho se refere às pessoas que se dedicavam ao estudo da natureza e/ou certas especulações de caráter abstrato-filosófico. Somente no século XIX, após o estabelecimento das ciências físicas e da natureza, é que a matemática se destaca como uma área particular de conhecimento.

usavam uma escrita cuneiforme (através de cunhas) e adotavam o sistema sexagesimal posicional em seus cálculos.

Os primórdios do pensamento e simbologia algébrica, de acordo com Baumgart (1992), provavelmente se originaram na Babilônia, em que desenvolveram sua própria linguagem e, com ela, métodos numéricos sofisticados para resolução de problemas. O mais importante a respeito dos babilônios, conforme Stewart (2012), é que eles começaram a entender como resolver as equações, isto é, encontrar o valor de uma quantidade desconhecida a partir de evidências circunstanciais. Ainda, conforme o autor, uma equação era uma espécie de quebra-cabeça. O quebra-cabeça pode ser fácil: "Duas vezes um número é 60. Qual é o número que procuramos?". Ou pode ser muito mais difícil: "Eu multiplico um número por si mesmo e acrescento 25. O resultado é dez vezes o número original. Qual é o número que procuramos?". Tentativa e erro podem levar até o número 5, mas tentativa e erro não é uma maneira eficaz de resolver. E se mudarmos 25 para 23, por exemplo? Ou 26? De acordo com Stewart (2012), os babilônios desprezavam tentativa e erro, pois conheciam um segredo mais poderoso. Eles conheciam uma regra, um procedimento padrão, que resolvia essas equações. Até onde sabemos, eles foram os primeiros a perceber que tais técnicas existiam.

Muitos dos problemas dos babilônios estavam atrelados a situações práticas de pesagens e medições de terra. Como exemplo, mostraremos como os babilônios usavam a noção, atualmente conhecida como equação, para o comércio.

Exemplo 1. De acordo com Sautoy (2008a), a maneira como os babilônios encontravam o peso de alguns alimentos era através de balanças[2]. Nessas balanças os babilônios manipulavam quantidades de alimentos e gins (gin era uma medida de peso da Babilônia). Uma massa equivalente a 1 mana (1 mana = 60 gins) era usada para manter a balança em equilíbrio. Por exemplo, para se calcular a massa de um rolo de paus de canela, eles faziam os seguintes procedimentos. Primeiro, adicionavam na balança quatro vezes o peso de um rolo de paus de canela junto com 20 gins. Sendo x a massa do rolo de paus de canela, em notação moderna, temos a seguinte equação $4x + 20 = ?$.

[2] A utilização de balanças para resolver problemas relacionados ao comércio, de acordo com Sautoy (2008b), também era utilizada pelos chineses, os quais resolviam até *sistemas de equações*.

Figura 2.1: Passo 1

Em seguida, adicionavam a metade dos itens que se encontrava na balança, isto é, 2 rolos de canela e 10 gins. Em notação moderna, a equação fica $4x + 2x + 20 + 10 =?$, isto é, $6x + 30 =?$.

Figura 2.2: Passo 2

Os babilônios perceberam que a quantidade resultante (massa que equilibrava a balança) era equivalente a 1 mana, que era adicionado na outra bacia da balança. Em notação moderna, a equação fica $6x + 30 = 60$.

Figura 2.3: Passo 3

Eles tinham, então, 60 gins de um lado da balança e, do outro, 6 rolos de paus de canela e um total de 30 gins. Como a intenção deles era saber o peso de um único rolo de paus de canela, no próximo passo, retira-se 30 gins dos dois lados da balança, mantendo-se o equilíbrio. Em notação moderna, subtraindo 30 em ambos os lados, temos $6x + 30 - 30 = 60 - 30$, isto é, $6x = 30$.

Figura 2.4: Passo 4

Logo, os 6 rolos de canela deveriam pesar 30 gins. Como haviam 6 rolos de massas iguais, eles concluíam, com facilidade, que cada rolo de paus de canela deveria pesar 5 gins. De fato, resolvendo a equação $6x = 30$, temos $x = 5$. Com isso, surge uma das primeiras equações da história.

Os babilônios também utilizavam um método bem interessante para o cálculo de áreas, o que nos leva a crer que eles conheciam um procedimento para resolver equações do segundo grau. Eles resolviam em termos geométricos, por um método conhecido hoje como *completamento de quadrados*. Vamos abordar um exemplo extraído de Stewart (2012):

Exemplo 2. *Encontre o lado de um quadrado em que a área mais dois dos lados seja igual a 24.*

Em termos modernos, se o lado mede x, então $x^2 + 2x = 24$. Resolvendo algebricamente, temos $x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x - 4) = 0$. Logo $x = -6$ ou $x = 4$. Portanto, como não consideravam medidas negativas, concluímos que a lado do quadrado mede 4 unidades. Porém, os babilônios resolviam estes tipos de problemas (equações quadráticas) usando meios geométricos, isto é, o método de completar quadrados. Dessa forma, os babilônios representavam a equação $x^2 + 2x = 24$ conforme mostra a figura 2.5:

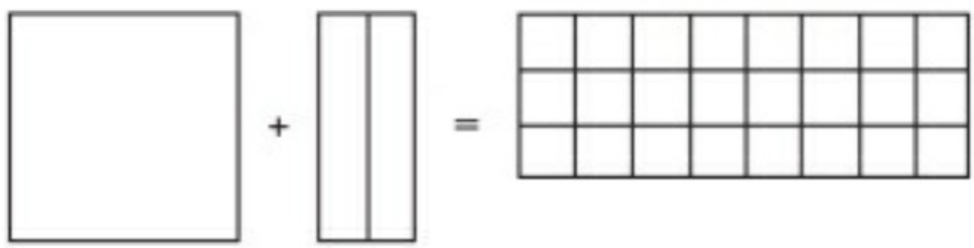

Figura 2.5: Visão geométrica de uma equação quadrática. Fonte: Stewart (2012).

Definida a unidade de área, transcrevemos o enunciado do problema em termos geométricos: temos um quadrado de lado desconhecido, somado com dois filetes retangulares com dimensão vertical igual ao lado do quadrado e dimensão horizontal igual a uma unidade. Assim, a área das duas figuras à esquerda do sinal de igual é equivalente a 24 unidades de área, representados pelos quadradinhos à direita do sinal de igual. O próximo passo consiste em colar os dois filetes retangulares nos lados do quadrado, obtendo uma forma como um quadrado sem um canto. Dessa forma, a figura 2.6 sugere que devemos "completar o quadrado" acrescentando o quadradinho que falta (o quadrado sombreado anexado aos dois lados da igualdade).

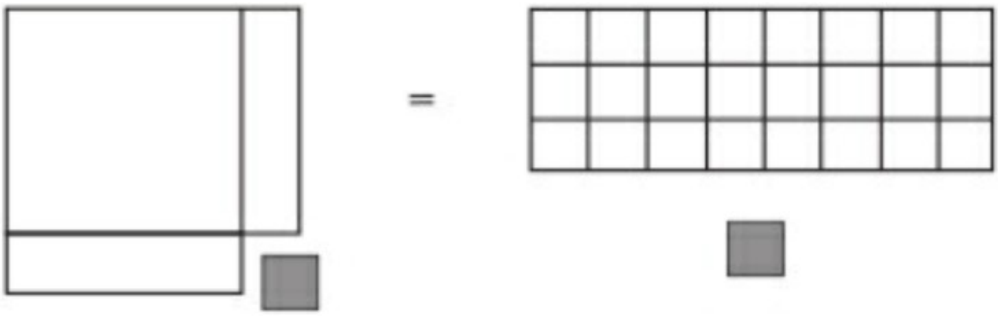

Figura 2.6: Completando o quadrado. Fonte: Stewart (2012).

Agora, temos um quadrado à esquerda e 25 unidades à direita. Vamos rearranjar essas 25 unidades em um quadrado 5×5, conforme a figura 2.7.

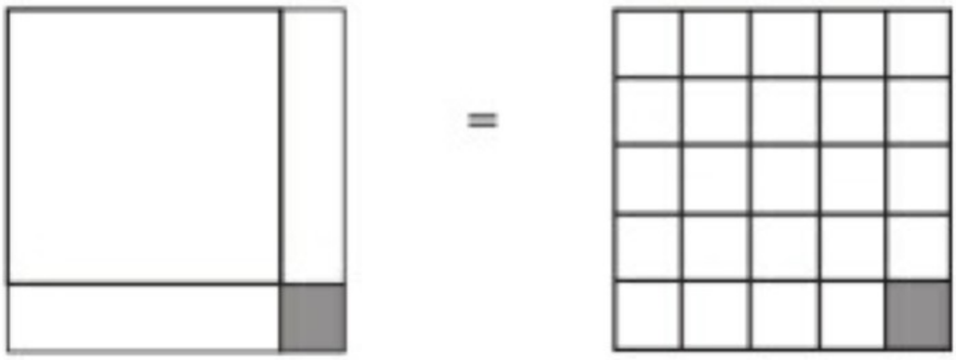

Figura 2.7: Solucionando. Fonte: Stewart (2012).

Como a área das duas figuras são iguais, temos que o valor do lado do quadrado (a incógnita x) mais uma unidade é igual a 5. Portanto, deduz-se que a medida do lado do quadrado é 4. Essa descrição geométrica corresponde com precisão ao método babilônico de resolução de equações quadráticas. Lembrando que a raiz negativa da equação não era considerada pelos babilônios, uma vez que a solução por eles buscada estavam relacionadas a comprimentos e medidas.

Vale ressaltarmos, de acordo com Baumgart (1992), que além dos procedimentos geométricos, os babilônios também resolviam as equações quadráticas de maneira retórica em que onde o conhecimento era totalmente verbal. Além de retórica, a álgebra como conhecemos hoje passou por algumas fases ao longo da história. Podemos classificá-la em três fases: álgebra retórica, sincopada e simbólica:

> [...]por exemplo, ainda que originalmente a palavra "álgebra" refira-se a equações, esse termo hoje tem um significado muito mais amplo, e uma definição satisfatória requer um enfoque em duas fases: (1) Álgebra Antiga (elementar) que é o estudo das equações e métodos de resolvê-las. (2) Álgebra moderna (abstrata) que é o estudo das estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos. O desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios: o retórico (ou verbal), o sincopado (no qual eram usadas abreviações de palavras) e simbólica (uso de símbolos) essa última passou por várias modificações até tornar-se estável ao tempo de Isaac Newton (por volta do ano 1700). Apesar de notar que mesmo hoje não há uma conformidade no uso de símbolos (Baumgart, 1992, p. 3).

De acordo com Baumgart (1992), a álgebra simbólica que conhecemos hoje começou a despontar por volta do ano 1500. Vejamos algumas representações de escrita de equações:

- **Viète (1591):** $IQC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N$ aequatur 120, equivalente à simbologia moderna $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$.

- **Harriot (1631):** $aaa - 3bba == +2ccc$, equivalente à simbologia moderna $a^3 - 3b^2a = 2c^3$.

- **Descartes (1637):** $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$, equivalente à simbologia moderna $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.

- **Wallis (1693):** $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, equivalente à simbologia moderna $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Os babilônios, por exemplo, usavam uma linguagem equivalente a tabela 2.1:

Tabela 2.1: Notação algébrica simbólica na Babilônia.

Simbologia Moderna	**Significado Geométrico**	**Quantidade Babilônica**
x	comprimento	ush
y	largura	sag
x^2	quadrado	lagab
z	altura	sukud
xy	área	asha
xyz	volume	sahar

Fonte: Joseph (2010).

Apesar dos babilônios não possuírem símbolos para representar os termos desconhecidos das equações algébricas, vemos que, de acordo com a tabela 2.1, o pensamento abstrato estava presente no pensamento lógico-matemático dos babilônios, pois os termos *ush* para denominar o comprimento e *sag* para a largura podem representar, respectivamente, as incógnitas x e y na simbologia algébrica atual. Com essas notações, podemos considerar que provavelmente muitos dos problemas algébricos babilônios eram decorrentes de situações geométricas. Uma ideia de como estes termos eram empregados pelos babilônios, pode ser ilustrado pelo seguinte texto:

> Multipliquei comprimento e largura obtendo área 10. O excesso do comprimento sobre a largura multiplicou por si mesmo e o resultado por 9 e esta área é aquela obtida multiplicando o comprimento por si mesmo. Quais são o comprimento e a largura? (Knudsen, 1985, p. 1).

Hoje escrevemos tal problema, considerando x e y como o comprimento e a largura, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{cases} x.y = 10, \\ 9(x-y)^2 = x^2. \end{cases}$$

Além das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão para auxiliar nos cálculos, os babilônios:

> [...] dispunham de tabletes com a mesma função de nossas “tabuadas”. A maioria das operações realizadas pelos babilônios usava diretamente estes tabletes. No caso da multiplicação, elas eram fundamentais. Basta observar que os cálculos elementares, ou seja, aqueles que são os correspondentes a nossa tabuada, incluem multiplicações até 59×59. Isso torna necessária a presença de tabletes com “tabuadas”, mesmo para os escribas mais experientes (Pitombeira e Roque, 2012, p. 12).

Conforme Joseph (2010), alguns tabletes continham procedimentos que correspondiam a problemas que resolveríamos hoje por meio de equações. Por exemplo, o processo que os babilônios utilizavam para encontrar a solução de equações da forma $ax = c$, era similar ao que se ensina hoje na educação básica, cuja solução é $x = \frac{c}{a}$, com $a \neq 0$. Como $x = \frac{c}{a}$ é equivalente a $x = \left(\frac{1}{a}\right)c$, os babilônios recorriam a essas “tabuadas” onde tinham os valores possíveis de $\frac{1}{a}$. Caso não fosse uma fração sexagesimal regular, eles usavam uma aproximação adequada. Além de tabletes com essas “tabuadas” que continham resultados de operações, existiam outras que continham procedimentos, como se fossem exercícios resolvidos. Em resumo, os problemas de matemática da antiga babilônia eram principalmente de três tipos:

> (1) problemas relacionados a forma, área e volume, que seriam descritos hoje como geometria; (2) problemas envolvendo incógnitas que foram resolvido por métodos que eram uma combinação de procedimentos algorítmicos e álgebra geométrica, como completar os quadrados; e (3) aritmética aplicada envolvendo problemas de levantamento, alocação de mão-de-obra e construção (Joseph, 2010, p. 152-153).

Através dos tabletes, podemos notar também que, além do modelo de resolver equações através do método de completar quadrados, os babilônios desenvolveram um procedimento retórico para a resolução de tais equações[3].

Os babilônios resolviam as equações através de procedimentos específicos, sob a forma de um exemplo típico, que levava a uma resposta. Mas, é claro, eles sabiam que exatamente o mesmo procedimento funcionaria se os números fossem mudados. Por isso, de acordo com Pitombeira e Roque (2012), os demais problemas que envolviam equações algébricas eram resolvidos basicamente seguindo uma “receita”, isto é, um conjuntos de passos e algoritmos que eram similares aos problemas já resolvidos. Ou seja, havia uma gama de problemas que serviam de base para a solução dos demais, existindo assim um certo padrão nos algoritmos usados nas soluções. E essa observação é realmente notória, embora os algoritmos fossem enunciados para casos particulares, não significa que não houvesse um certo tipo de generalidade, pelo contrário, a técnica utilizada por eles, se traduzidas para a linguagem algébrica atual, recai justamente nas fórmulas resolutivas de equações do segundo grau dos dias de hoje. Em resumo, eles sabiam como resolver equações quadráticas; e o método que utilizavam, embora não a forma como o expressavam, é o mesmo que se emprega modernamente.

O procedimento retórico adotado pelos babilônios para a resolução de equações quadráticas revela uma técnica simples, porém bem sucedida, que representa a capacidade desse povo para desenvolver um procedimento matemático que os permitia solucionar uma determinada situação-problema, direcionando-os para o desenvolvimento de um método geral para a sua resolução. Segundo Joseph (2010), os babilônios eram capazes de determinar as soluções positivas[4] de uma equação quadrática ao resolverem problemas que se

[3]É importante salientar que na tábua de argila cuneiforme babilônia os problemas eram escritos em base sexagesimal que era a base numérica utilizada pelos babilônios. Para a utilização nesse texto, os problemas foram traduzidos para a base decimal. Exemplos e operações podem ser encontrados em Pitombeira e Roque (2012).

[4]Nas civilizações mais antigas (babilônios, egípcios, chineses, gregos, hindus, etc.) não se usavam números negativos no sentido próprio. Eram admitidas operações de subtração e multiplicação que envolvessem, por exemplo, a subtração de um número maior de um menor (Pitombeira e Roque, 2012, p. 169).

encaixam nos seguintes tipos de equações (na linguagem moderna):

(1) $x^2 + bx = c \quad (b > 0 \text{ e } c > 0)$;

(2) $x^2 - bx = c \quad (b > 0 \text{ e } c > 0)$;

(3) $ax^2 + bx = c \quad (a \neq 0, b > 0 \text{ e } c > 0)$;

(4) $ax^2 - bx = c \quad (a \neq 0, b > 0 \text{ e } c > 0)$.

Seguindo o modelo babilônio (usando sempre valores positivos para a, b e c), obtemos as fórmulas resolutivas abaixo:

- Equação do item (1):

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}. \tag{2.1}$$

- Equação do item (2):

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}. \tag{2.2}$$

- Equação do item (3):

$$x = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}\right) \times \frac{1}{a}. \tag{2.3}$$

- Equação do item (4):

$$x = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} + \frac{b}{2}\right) \times \frac{1}{a}. \tag{2.4}$$

Mostraremos a seguir um exemplo extraído de Stewart (2012):

Exemplo 3. *Encontre o lado de um quadrado cuja área menos o lado é 870.*

- Pegue metade de 1. Isto é, $\frac{1}{2}$.
- Multiplique $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$. Isto é, $\frac{1}{4}$.
- Some $\frac{1}{4}$ a 870. Isto é, $870\frac{1}{4}$.

- $870\frac{1}{4}$ é o quadrado de $29\frac{1}{2}$.
- Agora some $\frac{1}{2}$ a $29\frac{1}{2}$.
- O resultado é 30, que é o lado do quadrado.

O método retórico adotado pelos babilônios é eficaz porque se baseia nos procedimentos geométricos de completamento de quadrados. Dessa forma, em vez de desenhar os quadrados todas as vezes, os babilônios resolviam apenas seguindo os passos. Reescrevendo usando a fórmula 2.2, temos

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 870} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3481}{4}} + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} + \frac{1}{2} = \frac{60}{2} = 30.$$

Em relação as equações algébricas de grau 3, de acordo com Joseph (2010), os babilônios também dispunham de tabelas (além das tabelas de multiplicação e recíprocos) que continham valores para a expressão $n^3 + n^2$, onde n era um número inteiro compreendido entre 1 a 50. Através dessas tabelas os babilônios eram capazes de resolver facilmente equações do tipo $x^3 + x^2 = c$. Assim, para resolver a equação (já traduzida para base decimal) $x^3 + x^2 = 252$, eles checavam a tabela e conferiam que a solução é $x = 6$. Para equações cúbicas do tipo $ax^3 + bx^2 = c$, Joseph (2010) afirma que os babilônios faziam a conversão de $ax^3 + bx^2 = c$ para os moldes que continham nas tabelas, isto é, para o formato $n^3 + n^2 = c$. Por exemplo, de acordo com Baumgart (1992), para resolver a equação $2x^3 + 3x^2 = 540$, o que os babilônios provavelmente faziam era multiplicá-la por 4 e fazer a substituição $y = 2x$, obtendo $y^3 + 3y^2 = 2160$. Assim, fazendo $y = 3z$, esta última transforma-se em $z^3 + z^2 = 80$. Consultando as tabelas, encontra-se como uma solução $z = 4$; e portanto 6 é a raiz da equação original. Quanto às equações algébricas de graus superiores a 3, “os babilônios dispunham de uma abstração impressionante ao tratar de equações do tipo $ax^4 + bx^2 = c$ e $ax^8 + bx^4 = c$, reconhecendo-as como equações quadráticas disfarçadas” (Boyer, 1974, p. 25).

Em comparação com a álgebra retórica babilônica, da qual se tem informações através de achados em tabletes de barro, os registros que se tem da matemática egípcia provêm basicamente de papiros. As evidências matemáticas da civilização egípcia são bem menores do que a dos babilônios, provavelmente devido a maior facilidade na preservação da argila do que do papiro, conforme afirmam Pitombeira e Roque (2012). De acordo com

Eves (2004), dois dos papiros egípcios mais famosos são o *papiro de Rhind*[5] e o *papiro de Moscou*[6]. Com as informações contidas nos papiros, Pitombeira e Roque (2012) afirmam que os egípcios detinham conhecimento para resolver equações do primeiro grau, isto é, equações do tipo $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, enquanto que as equações do segundo grau eram bem pouco abordadas. O método para solucionar equações do primeiro grau ficou conhecido mais tarde pelo nome *método da falsa posição.* Tal método consiste em adotar um valor (de preferência um valor que venha facilitar os cálculos) para considerar como solução. A partir dai é feito um "ajuste" para que então o valor final seja encontrado. De acordo com Boyer (1974), esse valor desconhecido (a incógnita) era chamada pelos egípcios de "*aha*".

Exemplo 4. *Método da falsa posição.*

Consideremos a equação

$$ax = b. \tag{2.5}$$

Escolha um valor arbitrário x_0 e calcule então o valor de ax_0, que chamaremos de b_0. Na prática, x_0 é escolhido a fim de facilitar os cálculos. Por exemplo, se a é uma fração com denominador 13, é conveniente escolher $x_0 = 13$. Dessa forma, os denominadores serão eliminados e, consequentemente, os cálculos ficarão mais simples. Tomando então um valor x_0, a equação 2.5 se torna

$$ax_0 = b_0. \tag{2.6}$$

Como a equação original é igual a b, para se obter esse valor basta multiplicar ambos os membros da equação 2.6 por $\dfrac{b}{b_0}$. Fazendo isso obtemos:

$$ax_0 \times \frac{b}{b_0} = b_0 \times \frac{b}{b_0}.$$

[5]De acordo Pitombeira e Roque (2012), o papiro de Rhind recebeu este nome por ter sido comprado pelo escocês Alexander Henry Rhind, entre os anos de 1856-1857 em uma de suas viagens ao Egito. O papiro de Rhind é um texto matemático em forma de manual, contendo 85 problemas e é a principal fonte de informação da matemática egípcia antiga, também conhecido como papiro de Ahmes, pelo fato de que seu conteúdo fora copiado pelo escriba Ahmes por volta do ano 1650 a.C. Atualmente esse papiro, juntamente com toda a coleção egípcia que pertencera a Rhind, faz parte do acervo do Museu Britânico (Londres).

[6]O papiro de Moscou, datado cerca de 1850 a.C., ou papiro de Golenischev é um texto matemático que contém 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado. O papiro, que foi adquirido no Egito em 1893 pelo colecionador russo Golenischev, agora se encontra no Museu de Belas-Artes de Moscou. Ele foi publicado com um comentário editorial em 1930. Tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de três polegadas de altura (Eves, 2004, p. 69).

Ou seja,

$$a \times \left(x_0 \times \frac{b}{b_0} \right) = b_0 \times \frac{b}{b_0} = b.$$

Portanto,

$$x = x_0 \times \left(\frac{b}{b_0} \right)$$

é a solução de $ax = b$.

O exemplo a seguir foi extraído de Pitombeira e Roque (2012) e consiste no problema 24 do papiro de Rhind.

Exemplo 5. *Uma quantidade, com 1/7 dela adicionado, torna-se 19. A pergunta é: Qual o valor dessa quantidade?*

Solução pelo método egípcio (falsa posição)

Se a quantidade procurada fosse igual a 7, teríamos

$$7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 7 + 1 = 8.$$

Como a resposta deve ser 19, multiplicamos por $\frac{19}{8}$, obtendo

$$\left(7 \times \frac{19}{8} \right) + \frac{1}{7} \times \left(7 \times \frac{19}{8} \right) = 8 \times \frac{19}{8} = 19.$$

Assim, $7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$ é a raiz procurada.

Solução utilizando álgebra moderna

Seja x a quantidade desconhecida. Equacionando o problema, temos

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \Leftrightarrow \frac{8}{7}x = 19 \Leftrightarrow x = \frac{19 \times 7}{8} = \frac{133}{8}.$$

Portanto, $x = \frac{133}{8}$ é a solução.

De acordo com Boyer (1974), em relação às equações algébricas de grau dois, não há relatos que provam que os egípcios resolviam equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Entretanto, no *papiro de Berlim*[7] há dois problemas que, para a linguagem moderna, equivale a equações quadráticas mistas, isto é, equações com termos como x^2, x e y. Assim, aparece na história pela primeira vez a noção de *sistemas de equações*. De acordo com Kline (1972), o único tipo de equação do segundo grau que aparece no papiro de Berlim é a equação $ax^2 = b$. Neste papiro aparece pela primeira vez a solução de uma equação do 2º grau. Na verdade, os problemas dão origem a um sistema de duas equações, sendo uma equação quadrática com duas incógnitas (x e y), e outra linear também com x e y. À respeito das equações algébricas de grau superiores a 2, não há fontes que indicam que os egípcios lidavam com tais equações.

A destreza matemática dos babilônios e egípcios era surpreendente e durante quase 2 mil anos, conforme afirma Sautoy (2008a), lideraram o progresso intelectual no mundo antigo. Porém, Garbi (2007) afirma que os gregos, por volta do ano 300 a.C., tinham expandido seu império até a antiga Mesopotâmia e trouxeram de lá os conhecimentos de geometria e também técnicas de resolver problemas. Interessados pela matemática dos antigos babilônios e reconhecendo sua utilidade, os gregos passaram a questionar tais técnicas, surgindo assim o que conhecemos hoje como "prova matemática".

De acordo com Garbi (2007), Tales (640 a.C. - 564 a.C.) foi o primeiro grande matemático grego que, após visitar o Egito e a Babilônia, trouxe para a Grécia o estudo da geometria. O domínio que os gregos tiveram sobre a geometria ainda permitiu-lhes resolver alguns tipos de equações usando apenas régua e compasso. De acordo com Wagner (2007), as construções com régua e compasso tiveram grande importância no desenvolvimento da matemática grega. Na Grécia antiga, a palavra *número* era usada só para os inteiros e uma fração era considerada apenas uma razão entre números. Na verdade, a noção de número real ainda não era concebida, e eles usavam a noção de *grandeza* no lugar de número. Dessa forma, na álgebra grega, *resolver* passou a ser sinônimo de *construir*. Por exemplo, $ax = b$ não tinha significado, pois o lado esquerdo era associado a área de um retângulo enquanto que o lado direito ao comprimento de um segmento de reta. Ou seja, um segmento de reta não pode ser igual a uma área. Vamos mostrar, de acordo com Wagner (2007), como os gregos resolviam a equação $ax = bc$ usando régua e compasso[8].

[7]O papiro de Berlim é outro dos documentos egípcios que permite conhecer a matemática desenvolvida pelos egípcios. Data aproximadamente de 1800 a.C. e encontra-se no museu de Berlim. Foi comprado por A. H. Rhind em 1850, na mesma época que o papiro de Rhind, mas encontrava-se em muito mau estado e só foi analisado e restaurado cerca de 50 anos mais tarde. Ainda assim, o papiro de Berlim encontra-se parcialmente estragado (Joseph, 2010, p. 105).

[8]Além das equações de primeiro grau, os gregos também desenvolveram técnicas de resolução de

Exemplo 6. *Resolver a equação $ax = bc$ usando régua e compasso.*

Constrói-se o retângulo $OADB$ com $OA = a$ e $OB = b$ conforme a figura 2.8. Sobre o lado OA toma-se um ponto C tal que $OC = c$ (se $c > a$, C está no prolongamento de OA) e traça-se CE paralelo a OB que intersecta OD em P. Traça-se então por P a paralela XY a OA e a solução é $x = OX$ (ou seja, o valor de x é o comprimento do segmento OX).

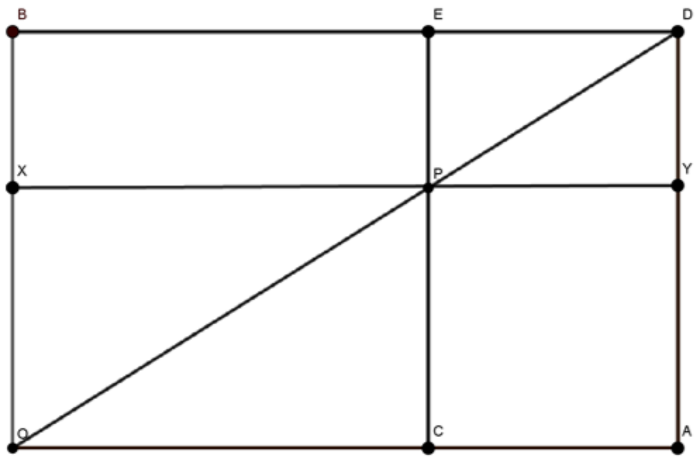

Figura 2.8: Resolvendo a equação $ax = bc$. Fonte: Wagner (2007).

A justificativa é que são congruentes os triângulos OAD e OBD, OCP e OXP e, ainda, PYD e PED. Portanto, os retângulos $CAYP$ e $XPEB$ têm a mesma área e, consequentemente, $OCEB$ e $OAYX$ também. Daí, $OC \cdot OB = OA \cdot OX$.

Contudo, deve-se a Tales a primeira profunda transformação pela qual passou o pensamento matemático, sendo ele quem introduziu o conceito de que verdades matemáticas precisam ser demonstradas. Garbi (2007) afirma que Tales deu o início às demonstrações provando que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, que qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais, que um ângulo inscrito num semicírculo é sempre reto e que feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais produzem segmentos proporcionais, dentre outras. Além de Tales, Garbi (2007) afirma que Pitágoras (586 a.C. - 500 a.C.), poucas décadas depois, seguindo a linha de Tales, foi responsável por algumas demonstrações, dentre elas a mais famosa, o *teorema dos triângulos retângulos.* Ou seja, em qualquer triângulo retângulo, sendo a a medida da

equações quadráticas usando régua e compasso. Para mais exemplos e resoluções, recomendamos o livro *Construções Geométricas* de Wagner (2007).

hipotenusa e b, c a medida dos catetos, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, produzindo pela primeira vez na Europa uma equação do 2º grau.

Após Tales e Pitágoras, Teodoro (cerca de 470 a.C.), Hípias (cerca de 460 a.C.), Zenão (cerca de 450 a.C.), Hipócrates (460 - 380 a.C.) e Platão (427 a.C. - 347 a.C.) contribuíram para o avanço da matemática. Dentre os matemáticos da época, por volta de 300 a.C., surgiu um que sintetizou todo conhecimento matemático reunido até então. Este homem foi Euclides (cerca de 300 a.C.), responsável por escrever o mais célebre livro matemático de todos os tempos: *Os Elementos*. Euclides manteve o conceito de Tales (as verdades devem ser provadas), mas ressaltou que nem todas as verdades podem ser provadas; e que as mais elementares devem ser admitidas sem demonstração, ou seja, postas como postulados. Com efeito, no início dos *Elementos*, de acordo com Garbi (2007), Euclides agrupa cinco postulados de natureza geométrica e cinco postulados em noções comuns, válidas genericamente, em que as noções comuns foram:

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.
3. Se iguais forem subtraídos a iguais, os resultados serão iguais.
4. Coisas coincidentes são iguais entre si.
5. O todo é maior do que a parte.

Embora não tenha sido diretamente enunciada por Euclides, Garbi (2007) afirma que outra verdade é aceitável: 6. Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais. Essas verdades são a chave, usadas na álgebra moderna, para a solução de equações do primeiro grau. Suponha, por exemplo, a equação:

$$6x + 5 = 35.$$

Pela verdade 3, se subtrairmos dos dois lados o número 5, a igualdade é mantida. Assim,

$$6x + 5 - 5 = 35 - 5 \Leftrightarrow 6x = 30.$$

Pela verdade 6, se dividirmos os dois lados pelo número 6, a igualdade é mantida. Logo,

$$\frac{6x}{6} = \frac{30}{6} \Leftrightarrow x = 5.$$

Dessa maneira, encontrou-se um método geral para resolução de equações do primeiro grau. Generalizando:

$$ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a},\ a \neq 0.$$

2.2 As equações algébricas nos árabes e nos hindus

Quando nos referimos às equações algébricas e às fórmulas resolutivas, a primeira que nos remete ao pensamento é a fórmula de Bhaskara. Como o intuito de nosso trabalho é destacar o processo de criação de tais fórmulas resolutivas, dedicaremos esta seção para mostrar o período histórico em que se aparece pela primeira vez a palavra *álgebra* e o nome *Bhaskara*. De acordo com Stewart (2012), a partir do momento em que se considerou a fórmula resolutiva de equações do 2º grau, o pensamento matemático foi elevado a um novo patamar durante o segundo milênio da era cristã.

De acordo com Garbi (2007), por volta do ano 570, na cidade de Meca na Arábia, nascia Maomé, cujo império viria a sacudir o mundo desde a Europa até a Índia. Por volta dos 40 anos de idade, Maomé iniciou seus ensinamentos islâmicos compilando-os no livro chamado *Corão*. Al-Mansur (sucessor de Maomé), que reinou de 754 a 775, reconheceu a importância do saber e, após construir a cidade de Bagdad, as margens do rio Tigre, decidiu fazer dela a nova Alexandria. Em seu reinado os conhecimentos científicos não foram deixados de lado. Pelo contrário, tiveram grande apoio e incentivo, dentre os quais podemos citar a visita dos matemáticos hindus com a introdução do eficiente sistema indiano de numeração. Os sucessores de Al-Mansur, continuaram com o mesmo pensamento, inclusive ordenando que fossem traduzidos para o árabe todos os manuscritos antigos que pudessem ser encontrados. Dentre eles, *Os Elementos* de Euclides e diversas obras de matemáticos da antiguidade clássica, como Arquimedes, Apolônio e outros. Al-Mamun, que reinou entre 813 e 833, convidou para sua corte muitos dos melhores cientistas do mundo, dentre eles estavam o matemático e astrônomo Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa Al-Khwarizmi (783-850), de quem herdamos as palavras *algarismo* e *algoritmo*. Al-khwarizmi escreveu o livro sobre equações chamado: *Al-kitab al-jabr wa'l Muqabalah*, que quer dizer *O livro da Restauração e do Balanceamento*. De acordo com Garbi (2007), a palavra *Al-jabr* era empregada por Al-khwarizmi para designar operações em que, por exemplo, a equação $x - 2 = 5$ passa a $x = 7$, significando uma "restauração" de $x - 2$ de modo a obter o valor da incógnita x. E foi assim que surgiu a palavra *álgebra*, tão usada na matemática e que está diretamente relacionada às noções comuns de Euclides.

Dentre os matemáticos e astrônomos que a Índia produziu no primeiro milênio da era cristã, podemos citar Varahamihira (cerca de 505), Brahmagupta (cerca de 630), Bhaskara (1114-1185) e outros. Garbi (2007) inclusive relata que a fórmula que leva o nome de Bhaskara não foi descoberta por ele e, sim, pelo matemático hindu Sridhara (991-?) um século antes em uma obra que não chegou até nós. A fórmula geral para solução das equações do 2º grau, amplamente conhecida e adotada como *fórmula de Bhaskara* nos livros didáticos do Brasil, fundamentou-se na ideia de reduzir o grau da equação do 2º grau para uma equação do 1º grau, através da extração de raízes quadradas. Método este já utilizado pelos antigos babilônios.

Exemplo 7. Seja a equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0.$$

Portanto,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Agora, como extrair a raiz quadrada de $x^2 + \frac{b}{a}x$ se este binômio não é um quadrado perfeito? A resposta, como mencionado anteriormente, consiste em somar uma certa quantidade em ambos os membros da equação de forma que o lado esquerdo tornasse um quadrado perfeito. Seguindo esse procedimento, a quantidade a ser somada é $\frac{b^2}{4a^2}$, pois $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ é um quadrado perfeito. Assim,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Como $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo as raízes quadradas de ambos os membros, obtemos:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Ou seja,

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dessa forma,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.7}$$

Na fórmula 2.7, o termo $b^2 - 4ac$ é conhecido como *discriminante* e representado por Δ. Estudando o sinal de Δ, sabemos hoje que:

- se $\Delta > 0$ há duas raízes (soluções) distintas;
- se $\Delta = 0$ há duas raízes (soluções) iguais;
- se $\Delta < 0$ há duas raízes (soluções) complexas.

Exemplo 8. No problema clássico de encontrar dois números, x e y, conhecendo sua soma S e produto P, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = S, \\ xy = P. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x, \\ xy = P. \end{cases}$$

Substituindo $y = S - x$ em $xy = P$, temos $x(S - x) = P$. Reorganizando temos a equação quadrática $x^2 - Sx + P = 0$ e, usando a fórmula 2.7, encontramos

$$x_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}. \tag{2.8}$$

Substituindo x_1 e x_2, respectivamente, em $y = S - x$ temos:

$$y = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}. \tag{2.9}$$

Estes resultados, que envolvem soma e produto, mais tarde foram essenciais para aquisição de novas fórmulas resolutivas de equações de graus superiores a 2.

Através da fórmula resolutiva de equações do 2º grau, constatou-se que algumas equações quadráticas poderiam conduzir a raízes "estranhas", ou seja, apareciam raízes quadradas de números negativos ($\Delta < 0$). Por exemplo, seja a equação $x^2 + 2x + 8 = 0$. Aplicando a fórmula 2.7, temos $x = -1 \pm \sqrt{-7}$. De acordo com Garbi (2007), o termo

$\sqrt{-7}$ era desconhecido na época, o que levou os matemáticos a interpretar que algumas equações do $2^{\underline{o}}$ grau eram impossíveis ou não tinham solução. Só após alguns séculos que os matemáticos compreenderam o significado das raízes quadradas de números negativos, conforme veremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Equações algébricas na idade moderna

Neste capítulo, mostraremos a busca pelas fórmulas resolutivas de equações algébricas, de grau igual ou superior a 3 no período que compreende a transição para a modernidade. Também é feita uma breve discussão de como a história da matemática pode ser utilizada no ensino de equações algébricas.

3.1 A busca de soluções de equações algébricas

Encontrar a solução de uma equação algébrica consistiu num dos maiores desafios dos matemáticos desde a antiga Babilônia. Quando falamos, na modernidade, de equações algébricas estamos nos referindo a uma igualdade do tipo

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0 \tag{3.1}$$

com $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, ..., n)$ e $a_n \neq 0$. A solução de uma equação algébrica é dada pelos valores x (incógnita) de modo que a igualdade 3.1 seja satisfeita. Nesta exposição, apresentamos os métodos clássicos para resolver as equações algébricas com grau $1 \leq n \leq 4$, em que se procura determinar expressões (fórmulas) para obtenção das soluções (raízes) de uma equação algébrica em função de seus coeficientes, envolvendo somente as operações algébricas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) e mais a extração de raízes quadradas, cúbicas, etc. Esse procedimento é chamado de *solução por radicais* da equação algébrica.

O primeiro tipo de equação, já usado a mais de dois milênios pelos egípcios e babilônios, são as equações de 1º grau, isto é, equações algébricas do tipo $ax+b=0$, com $a \neq 0$. Na equação $ax+b=0$, o que segue, das noções comuns de Euclides, é que $x = -\frac{b}{a}$. Para as equações algébricas de grau 2, isto é, equações do tipo $ax^2+bx+c=0$, com $a \neq 0$, temos a fórmula resolutiva 2.7, explicitada no capítulo anterior. Após as buscas e questionamentos sobre equações do 2º grau, iniciou-se então a busca pela solução de equações do 3º grau. A pergunta consistia na possibilidade ou não de se resolver uma equação algébrica com grau maior ou igual a 3 usando solução por radicais. Contudo, algumas noções de equações algébricas de 3º grau, de acordo com Caraça (1951), já se manifestavam em problemas práticos relacionados ao volume dos cubos. Um desses problemas, de acordo com Wagner (2007), vem de uma lenda grega:

> Para acabar com uma peste que assolava a cidade de Atenas, o oráculo de Apolo na ilha de Delos, exigiu que fosse construído um novo altar com o dobro do tamanho do que lá existia (em forma de cubo). Reza a lenda que os atenienses construíram um novo altar dobrando as arestas do antigo, o que, naturalmente multiplicou o volume do altar por oito (a nova aresta, claro, deveria ser $\sqrt[3]{2}$ vezes a anterior). Devido a falha na solução do problema, a peste continuou e dizimou um grande número de atenienses (Wagner, 2007, p. 91).

O problema de *duplicar o cubo* é conhecido como um dos problemas clássicos da matemática grega. Assim, começaram os estudos acerca da relação do comprimento das arestas de um cubo com o seu volume, surgindo as primeiras equações cúbicas da história. De acordo com Caraça (1951), um desses problemas (já traduzido para a linguagem algébrica moderna) consistia: seja v o volume de um cubo de aresta x e v' o volume de um paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual a aresta do cubo. Determinar x de modo que $v = v' + 1$. Como $v = x^3$ e $v' = 3x$, o problema leva imediatamente à equação $x^3 = 3x+1$, ou seja, $x^3 - 3x - 1 = 0$. Esses tipos de problemas não só levaram os matemáticos da época a tentar encontrar maneiras para resolvê-los, como também pareciam impossíveis de serem solucionados (no caso da matemática grega, restrita apenas às soluções possíveis de serem construídas com régua e compasso).

Dependendo das fontes utilizadas, percebemos que existem inconsistências a respeito de algumas datas e relatos da história da matemática. Baumgart afirma, por exemplo, que não se sabe se as equações de 3º grau surgiram a partir de problemas práticos: "Essa descoberta, um produto do Renascimento[1] italiano, está cercada de mistério - a

[1]O termo Renascimento foi empregado pela primeira vez em 1855, pelo historiador francês Jules Michelet (1798-1874), ao se referir ao descobrimento do mundo e do homem. Alguns anos depois, o historiador suíço Jacob Burckhardt(1818-1897), ampliou este conceito definindo a época como o renascimento

história ainda não a esclareceu" (Baumgart, 1992, p. 47). De fato, vemos que haviam problemas relacionados às equações cúbicas ainda entre os gregos. Talvez devamos ao Renascimento seu resgate e a busca por fórmulas resolutivas gerais.

O Renascimento foi um movimento cultural, econômico e político que surgiu na Itália no século XIV, se consolidou no século XV e se estendeu até o século XVII por toda a Europa. Inspirado nos valores da antiguidade clássica e gerado pelas modificações estruturais da sociedade, resultou na reformulação total da vida medieval, dando início à idade moderna. Ele teve seu epicentro na Itália, devido ao florescimento de cidades como Veneza, Gênova, Florença, Roma e outras. Estas cidades enriqueceram com o desenvolvimento do comércio no mediterrâneo dando origem a uma rica burguesia mercantil que, em seu processo de afirmação social, se dedicou às artes, juntamente com alguns príncipes e papas. Neste período, as ciências tiveram um grande florescimento na Europa, que não se deu de forma abrupta mas, de acordo com Baumgart (1992), devido aos seguintes fatores:

1. Facilidade de manipular trabalhos numéricos através do sistema de numeração indo-arábico, muito superior aos sistemas (tais como o romano) que requeriam o uso do ábaco.

2. Invenção da imprensa com tipos móveis (por volta do ano 1450), colaborando para a difusão do novo sistema de numeração e simbolismo algébrico.

3. Ressurgimento da economia, sustentando a atividade intelectual, pela retomada do comércio e a expansão marítima, facilitando o intercâmbio de ideias tanto quanto de bens.

De acordo com Baumgart (1992), foi através de Leonardo Fibonacci (1170-1240) que a matemática dos árabes e gregos entrou na Europa. Ele fez traduções de textos matemáticos, como *Os Elementos*, e publicou a obra *Liber Abaci* (Livro do ábaco). No *Liber Abaci*, além das traduções, o autor resolvia as equações no estilo retórico e geral de Al-Khwarizmi e defendia veementemente o uso dos numerais indo-arábicos. Apesar da resistência e desconfiança aos "novos" numerais, gradualmente eles foram sendo adotados. E "foi desta forma que os algarismo indo-arábicos começaram a expulsar da aritmética, em 1202, os desconfortáveis algarismos romanos" (Garbi, 2007, p. 30). Mas o pensamento

da humanidade e da consciência moderna, após um longo período de decadência (Oliveira et al., 2016, p. 99).

algébrico na Europa concretiza-se com o francês René Descartes (1596-1650), cuja principal contribuição foi o trabalho sobre geometria analítica plana, *Lo géométrie*. Descartes também aprimorou o simbolismo da álgebra, já iniciado por François Viète (1540-1603), e introduziu o atual sistema de expoentes inteiros, positivos. Grande parte de *Lo géométrie* consiste naquilo que hoje chamamos *teoria das equações*, e contém a regra de sinais de Descartes para determinar o número de raízes positivas e negativas de uma equação. Descartes usava as letras finais do alfabeto (x, y, z) para as variáveis e as primeiras letras (a, b, c) para as constantes. Muito parecido com que fizera Viète, no século XVI, que tinha usado vogais para variáveis e consoantes para constantes. De acordo com Oliveira et al. (2016), é durante este período de estabilidade política e prosperidade econômica que a Itália, ou melhor, os matemáticos italianos, tiveram as condições ideais para buscarem resultados anteriormente tidos como impossíveis.

Nessa época viveram matemáticos que foram importantes no campo das equações algébricas de grau 3 e 4. Dentre eles destacamos Scipione Del Ferro (1465-1526), Nicollo Fontana (1499-1557), conhecido por Tartaglia, e Girolamo Cardano (1501-1576). Nesse período, de acordo com Oliveira et al. (2016), os matemáticos ganhavam a vida desafiando-se uns aos outros em disputas públicas de resolução de problemas, nas quais ao vencedor era reservado um prêmio em dinheiro e, eventualmente, a ajuda econômica de um patrono rico. As chances de alguém vencer um tal desafio aumentavam se ele soubesse como resolver problemas que os outros não sabiam. E foi em um desses desafios que apareceu pela primeira vez a solução algébrica de uma equação cúbica. De acordo com Garbi (2007), o primeiro a desenvolver um método algébrico para resolver equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$ foi Scipione Del Ferro, professor da Universidade de Bolonha, Itália, na passagem do século XV ao século XVI. Porém, Del Ferro ao falecer, levou consigo os detalhes relacionados ao seu método. Embora, não tenha jamais publicado o seu resultado, revelou o seu método aos seus discípulos Annibale della Nave (XV-XVI), seu enteado, e ao seu aluno Antônio Maria Fiore (XV-XVI), um veneziano que, em posse desta valiosa informação, passou a participar desses desafios.

Nesse período também viveu Nicollo Fontana, um dos mais proeminentes matemáticos italianos do século XVI e mais conhecido por seu apelido Tartaglia. Ele nasceu na cidade de Bréscia, Itália, em 1499. Apesar de ter uma vida bastante conturbada[2], era

[2]Em 1512, Bréscia foi tomada pelas tropas francesas, e como resultado da violência Nicollo Fontana foi ferido na boca o que lhe provocou permanente defeito na fala, daí o apelido "Tartaglia" que quer dizer

bastante conhecido por seu talento matemático. Talento este que o tornou professor de ciências em Verona, Vicenza, Bréscia e Veneza. Em 1535, de acordo com Lima (1991), Tartaglia foi desafiado por Fiore para uma competição matemática, porém para espanto de Fiore, que detinha do método herdado de Del Ferro, Tartaglia, ao saber que Fiore detinha de tal segredo, encontrou um método que não só resolvia as equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$ como também encontrou uma fórmula geral para solução de equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, o que Fiore desconhecia. De posse deste conhecimento, Tartaglia foi o vencedor da competição.

De acordo com Garbi (2007), os últimos anos de Tartaglia foram amargurados por uma briga com Girolamo Cardano (1501-1576), um matemático italiano que, além de médico famoso em Milão, foi também astrônomo e conhecido como o fundador da *Teoria das probabilidades*. Cardano, ao saber que Tartaglia dispunha de um método para a solução das equações cúbicas, persuadiu Tartaglia a contar seu método, sob a promessa de jamais divulgá-lo. Contudo, Cardano quebrou a promessa e, em 1545, fez publicar na *Ars Magna*[3] a fórmula revelada por Tartaglia, acrescentando que a mesma fórmula já havia sido descoberta por Scipione Del Ferro 30 anos antes. No final, a fórmula descoberta por Del Ferro, e redescoberta melhorada por Tartaglia, é hoje conhecida como fórmula de Cardano.

Após este relato, vamos à dedução da fórmula. Lembrando que Tartaglia descobriu fórmulas para a solução de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$ e não para a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Começamos, então, esclarecendo que qualquer equação geral de terceiro grau pode ser reescrita na forma $x^3 + px + q = 0$ fazendo uma simples substituição $x = y + m$, com $m \neq 0$, e calculando m de modo a anular o termo de 2º grau. Vejamos:

Exemplo 9. Seja a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Substituindo $x = y + m$, obtemos:

$$a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0$$
$$a(y^3 + 3m^2y + 3my^2 + m^3) + b(y^2 + 2my + m^2) + cy + cm + d = 0$$
$$ay^3 + 3m^2ay + 3may^2 + am^3 + by^2 + 2bmy + bm^2 + cy + cm + d = 0.$$

gago (Garbi, 2007, p. 35).

[3]Conhecido como um dos maiores compêndios algébricos da época: a *Arts Magnae Sive de Regulis Algebraics*, mais conhecida como *Ars Magna*, publicada por Cardano em 1545 em Nurenberg, Alemanha (Garbi, 2007, p. 34).

Reorganizando, em função de y, temos

$$ay^3 + (3am + b)y^2 + (3m^2a + 2bm + c)y + am^3 + bm^2 + cm + d = 0. \tag{3.2}$$

Fazendo $3am + b = 0$ $\left(\text{isto é, } m = \dfrac{-b}{3a}\right)$ e substituindo na equação 3.2, obtemos

$$ay^3 + \left[3\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 a + 2b\left(\frac{-b}{3a}\right) + c\right] y + a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b}{3a}\right) + d = 0.$$

Reorganizando e simplificando, obtemos

$$ay^3 + \left(\frac{-b^2}{3a} + c\right) y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

Como $a \neq 0$, vamos dividir ambos os membros da equação por a. Logo,

$$y^3 + \left(\frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0. \tag{3.3}$$

Fazendo $p = \left(\dfrac{-b^2}{3a^2} + \dfrac{c}{a}\right)$ e $q = \left(\dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a}\right)$, a equação 3.3 fica

$$y^3 + py + q = 0. \tag{3.4}$$

Portanto, se soubermos resolver a equação 3.4, obtemos x que é $y + m$. Assim, Tartaglia deu uma resposta geral e não apenas particular ao problema. Para a equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, de acordo com Lima (1991), Tartaglia supôs que a solução era composta de duas parcelas e escreveu

$$x = A + B.$$

Elevando ao cubo ambos os membros, obtemos

$$x^3 = (A + B)^3,$$
$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B).$$

Como $A + B = x$, segue que

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx.$$

Isto é,

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0. \tag{3.5}$$

Veja que a equação 3.5 é do tipo $x^3 + px + q = 0$. Assim, $p = -3AB$ e $q = -(A^3 + B^3)$, sendo equivalente ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A^3 + B^3 = -q, \\ A^3B^3 = \dfrac{-p^3}{27}. \end{cases}$$

Assim, A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto. Das fórmulas 2.8 e 2.9, temos

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ ou } A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

e

$$B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ ou } B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Como $x = A + B$, temos então a fórmula para a equação do terceiro grau

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{3.6}$$

A equação 3.6 ficou conhecida por *fórmula de Cardano*. É importante lembrarmos que a simbologia usada na época era totalmente diferente de hoje e muito difícil. Garbi (2007) relata que uma equação que hoje escreveríamos como $2x^3 + 5x = 17$ era escrita como 2cub'p : 5reb'ae$\overline{q}$lis17.

Exemplo 10. *Resolver a equação* $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.

Devemos reduzir a equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$ para o tipo $y^3 + py + q = 0$. Para tanto, fazemos a substituição $x = y + \dfrac{-b}{3a}$. Como $a = 1$, $b = -6$, $c = 6$ e $d = -5$, substituindo na equação 3.4 encontramos $p = -6$ e $q = -9$. Dessa forma, obtemos a equação $y^3 - 6y - 9 = 0$. Pela fórmula 3.6, temos

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} = 3.$$

Daí, segue que $x = 5$, sendo 5 uma solução da equação.

Com a fórmula de Cardano só é possível encontrar uma das três possíveis soluções da equação. Na época de Cardano e Tartaglia, de acordo com Guimarães (2006), ainda não se tinha conhecimento dos números complexos, porém foi através da equação de 3º grau que a matemática, em particular a álgebra, teve uma considerável evolução com a descoberta do conjunto dos números complexos. Assim,

> graças ao método de solução das equações do terceiro grau, que foi desenvolvido por Tartaglia, há uma considerável mudança dos rumos da álgebra dos números. Independentemente de a equação de terceiro grau que desejemos resolver ter raízes reais, e uma raiz real ela certamente possui, ela passará pela solução de uma equação do segundo grau que, via de regra, possui soluções complexas. Em outras palavras, para que essa solução possa ser obtida, é necessário tratar com uma nova categoria de números, diretamente associados a uma quantidade dada por $i = \sqrt{-1}$ e que foram denominados por L. Euler como números imaginários. Em outras palavras, a solução dessa equação de terceiro grau exigiu o desenvolvimento de uma álgebra dos números complexos (Guimarães, 2006, p. 57).

A pergunta que nos resta agora é: como encontrar as demais soluções? Para responder a essa pergunta, Garbi (2007) afirma que na mesma época, Rafael Bombelli (1526-1572), ao resolver por cálculo direto a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, constatou que 4 era uma solução. No entanto, ao resolver a mesma equação pelo método de Cardano-Tartaglia, Bombelli chegou ao seguinte resultado:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Como Bombelli encontrara anteriormente $x = 4$ como raiz, ele deu início a uma tentativa de conciliar os dois resultados. Assim, em 1572, conforme afirma Garbi (2007), Bombelli revelou em seu livro intitulado *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica* que seu método se baseava no "pensamento rude", segundo o qual $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Assim supondo, Bombelli escreveu $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$; $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$ e deduziu que $a = 2$ e $b = 1$, pois

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}.$$

Analogamente, $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$ encontrando $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$.

O leitor deve estar questionando o fato de Bombelli assumir que $(\sqrt{-1})^2 = -1$ nos desenvolvimentos de $(2 + \sqrt{-1})^3$ e $(2 - \sqrt{-1})^3$. A ideia de Bombelli adotar $(\sqrt{-1})^2 = -1$ foi justamente para conciliar com o resultado $x = 4$. Dessa maneira, conforme Garbi (2007), Bombelli criou regras para trabalhar com os números do tipo $\sqrt{-1}$. São elas:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) &= -1;\\
(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) &= 1;\\
(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) &= -1;\\
(\pm 1)\sqrt{-1} &= \pm\sqrt{-1};\\
(\pm 1)(-\sqrt{-1}) &= \mp\sqrt{-1}.
\end{aligned}
$$

Bombelli criou também a regra para a soma de dois números do tipo $m + n\sqrt{-1}$, em que

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}.$$

Dessa maneira, estavam lançadas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da matemática: *a Teoria dos números complexos*.

Os estudos acerca das soluções das equações de 3º grau e a insuficiência para a obtenção de todas as raízes, perpetuou ainda por muito tempo, pois a ideia de número complexo, de acordo com Baumgart (1992), só seria aperfeiçoada por Leonhard Euler (1707 - 1783) no ano de 1777. Dentre as inúmeras propostas consagradas por Euler, a que nos vem de imediato é o famoso i significando $\sqrt{-1}$. Antes mesmo do aperfeiçoamento dos números complexos, muitos matemáticos voltaram seus olhares para as equações de 4º grau. E, nessa fase, quem entra em cena para a obtenção de um método geral para a solução das equações quárticas é Ludovico Ferrari, nascido em Bolonha em 1522 e falecido com apenas 38 anos de idade. Ferrari foi o mais famoso dos discípulos de Cardano.

Conforme mencionado, na época de Cardano e Tartaglia era comum desafios entre os matemáticos. Conta-se, de acordo com Garbi (2007), que Zuanne de Tanini submeteu a Cardano um problema que envolvia a equação do 4º grau $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$. Após tentar várias vezes e falhar, Cardano propôs o problema para Ferrari. Este não só encontrou a solução para o problema como também conseguiu um método para a solução geral das equações de 4º grau. O método descoberto por Ferrari, conforme Baumgart (1992), também foi publicado por Cardano no *Ars Magna* em continuidade à solução dada por Tartaglia para equações de 3º grau.

De acordo com Garbi (2007), Ferrari, ao analisar a equação geral do 4º grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$, percebeu que ela podia ser transformada em outra do tipo $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ fazendo a substituição $x = y + m$ e calculando m

de modo a anular o termo de 3º grau. Assim, conforme relata o autor, Ferrari adotou os seguintes procedimentos para a solução das equações quárticas:

Exemplo 11. Solução para as equações de 4º grau de Ludovico Ferrari.

Dada a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$, fazendo a substituição $x = y + m$ e calculando m de modo a anular o termo de 3º grau, temos

$$a(y+m)^4 + b(y+m)^3 + c(y+m)^2 + d(y+m) + e = 0;$$
$$a(y^4+4my^3+4m^2y^2+4m^3y+m^4)+b(y^3+3my^2+3m^2y+m^3)+c(y^2+2my+m^2)+d(y+m)+e=0;$$
$$ay^4+4amy^3+4am^2y^2+4am^3y+am^4+by^3+3bmy^2+3bm^2y+bm^3+cy^2+2cmy+cm^2+dy+dm+e=0.$$

Rearranjando a equação em y, obtemos

$$ay^4+(4am+b)y^3+(6am^2+3bm+c)y^2+(4am^3+3bm^2+2cm+d)y+(am^4+bm^3+cm^2+dm+e)=0.$$

Assim, Ferrari adotou m de forma a anular o termo de 3º grau, isto é, $4am + b = 0$ ou $m = \dfrac{-b}{4a}$. Substituindo este valor na equação acima e reorganizando em y, obtemos

$$y^4 + \underbrace{\left[-\frac{3}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}_{p} y^2 + \underbrace{\left[\frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right)\right]}_{q} y +$$

$$+ \underbrace{\left[-\frac{3}{256}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right) + \left(\frac{e}{a}\right)\right]}_{r} = 0, \tag{3.7}$$

que está na forma reduzida $y^4+py^2+qy+r = 0$ e $x = y-\dfrac{b}{4a}$. Analisando estes resultados, Ferrari concluiu que, ao se resolver a equação incompleta $x^4+px^2+qx+r = 0$, consegue-se resolver qualquer equação do 4º grau. Olhando a equação $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, Ferrari procurou reagrupar os termos de modo que nos dois lados da igualdade tivessem polinômios quadrados perfeitos. Se esse agrupamento fosse possível, bastaria então extrair as raízes quadradas para se obter uma equação do 2º grau em cada lado e, assim, o problema estaria resolvido. Dessa forma, Ferrari escreveu a equação $x^4+px^2+qx+r = 0$ como

$$x^4 + (p+\alpha)x^2 + (r+\beta) = \alpha x^2 - qx + \beta. \tag{3.8}$$

Veja que a adição dos números α e β, que são números a ser determinados de forma que ambos os lados da equação 3.8 tornem-se quadrados perfeitos, não altera a equação original $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Assim, para que a equação 3.8 tenha quadrados perfeitos em ambos os membros da igualdade, Ferrari concluiu que seria necessário e suficiente que o discriminante dos trinômios, que aparecem nos dois lados da equação, sejam iguais a zero, ou seja: $(p+\alpha)^2 - 4(r+\beta) = 0$ para o lado esquerdo e $(-q)^2 - 4\alpha\beta = 0$ para o lado direito.

De $(-q)^2 - 4\alpha\beta = 0$, temos $\beta = \dfrac{q^2}{4\alpha}$. Substituindo este valor em $(p+\alpha)^2 - 4(r+\beta) = 0$, segue que

$$(p+\alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0.$$

Ou ainda,

$$(p+\alpha)^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} = 0.$$

Reorganizando em α, obtemos $\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$, que é uma equação do 3º grau em α. Assim, encontra-se o valor de α e β, substitui-se na equação 3.8 e extraem-se as raízes quadradas:

$$\sqrt{x^4 + (p+\alpha)x^2 + (r+\beta)} = \pm\sqrt{\alpha x^2 - qx + \beta}.$$

De acordo com Garbi (2007), Ferrari percebeu que para cada sinal tem-se uma equação do 2º grau, ambas com duas soluções, isto é, seu método permite encontrar as 4 raízes da equação quártica de uma forma semelhante ao que acontece na fórmula de Bhaskara para as quadráticas.

Uma pergunta que pode ocorrer na transição da equação cúbica em α para a solução final é: o que aconteceria se a equação do 3º grau em α tivesse três soluções? Como a cada valor de α correspondem quatro raízes, poderia ocorrer de uma equação do 4º grau ter $3 \times 4 = 12$ raízes? A resposta é não! Vejamos a explicação de acordo com Garbi (2007): dados x_1, x_2, x_3 e x_4 raízes de uma equação do 4º grau, Ferrari, ao reduzir o problema a um par de equações do 2º grau, coloca duas raízes em uma delas e as outras duas em outra, ou seja, há três maneiras de se agrupar as raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 em dois blocos com duas raízes. Vejamos:

Tabela 3.1: Possíveis maneiras de agrupar as raízes das equações quárticas.

	1ª equação	2ª equação
forma 1	x_1x_2	x_3x_4
forma 2	x_1x_3	x_2x_4
forma 3	x_1x_4	x_2x_3

Fonte: Garbi (2007).

Portanto, Ferrari mostrou que cada valor de α corresponde apenas a uma das três formas diferentes de se agrupar raízes duas a duas, mas estas são sempre as mesmas independentes da raiz α.

Vejamos a seguir dois exemplos: o primeiro, extraído de Costa (2016), mostra a solução de uma equação de grau 4 completa e o segundo, extraído de Garbi (2007), mostra o fato mencionado e explicado na tabela 3.1.

Exemplo 12. *Resolva a equação $x^4-2x^3-3x^2+8x-4=0$ usando o método de Ferrari.*

Fazendo os cálculos com $x=y-\dfrac{b}{4a}$ e usando as fórmulas para p, q e r obtidas na equação 3.7, temos

$$y^4-\frac{9}{2}y^2+4y-\frac{15}{16}=0.$$

O próximo passo é encontrar α e β tais que

$$y^4-\left(\frac{9}{2}-\alpha\right)y^2-\left(\frac{15}{16}-\beta\right)=\alpha y^2-4y+\beta, \tag{3.9}$$

com ambos os lados quadrados perfeitos. Para isto o discriminante de ambos os lados deve ser igual a zero, isto é,

$$\left[-\left(\frac{9}{2}-\alpha\right)\right]^2-4\left[-\left(\frac{15}{16}-\beta\right)\right]=0 \tag{3.10}$$

e

$$(-4)^2-4\alpha\beta=0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \beta=\frac{4}{\alpha}.$$

Substituindo $\beta=\dfrac{4}{\alpha}$ na equação 3.10 e, simplificando, temos $\alpha^3-9\alpha^2+24\alpha-16=0$. Através da fórmula de Cardano-Tartaglia temos $\alpha=1$ como solução. Logo, $\beta=4$. Substituindo os valores de α e β na equação 3.9, obtemos

$$y^4-\left(\frac{9}{2}-1\right)y^2-\left(\frac{15}{16}-4\right)=1y^2-4y+4.$$

Reorganizando, temos

$$\left(y^2-\frac{7}{4}\right)^2=(y-2)^2.$$

Dessa forma, $y^2-\dfrac{7}{4}=y-2$ cuja raiz é $y_1=y_2=\dfrac{1}{2}$ (raiz dupla) e $y^2-\dfrac{7}{4}=-y+2$ cujas raízes são $y_3=\dfrac{3}{2}$ e $y_4=-\dfrac{5}{2}$. Da substituição $x=y-\dfrac{b}{4a}$, temos $x=y+\dfrac{1}{2}$.

Portanto, temos as seguintes soluções: para $y_1 = y_2 = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$, para $y_3 = \dfrac{3}{2}$, $x = 2$ e, para $y_4 = -\dfrac{5}{2}$, $x = -2$. Portanto, por simples verificação, constatamos que 1, 2 e -2 realmente são soluções da equação $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$.

Exemplo 13. *Resolver a equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ pelo método de Ferrari.*

Como a equação já está na forma reduzida, devemos encontrar α e β tais que:

$$x^4 - (15 - \alpha)x^2 + (24 + \beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta, \tag{3.11}$$

com ambos os lados quadrados perfeitos. Para isto, calculamos os discriminantes igualando-os a 0, isto é,

$$[-(15 - \alpha)]^2 - 4(24 + \beta) = 0 \tag{3.12}$$

e

$$10^2 - 4\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{25}{\alpha}.$$

Substituindo $\beta = \dfrac{25}{\alpha}$ na equação 3.12, obtemos $\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$, cujas soluções são $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = 25$. Para $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 25$. Substituindo estes valores na equação 3.11, extraindo as raízes quadradas e simplificando, obtemos $x^2 - x - 12 = 0$, cujas soluções são $x_1 = 4$ ou $x_2 = -3$, e $x^2 + x - 2 = 0$, cujas soluções são $x_3 = -2$ ou $x_4 = 1$. Portanto, $x_1 = 4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$ e $x_4 = 1$ são as raízes da equação do 4º grau. Para $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 25/4$. Substituindo estes valores na equação 3.11, extraindo as raízes quadradas e simplificando, obtemos $x^2 - 2x - 8 = 0$, cujas soluções são $x_1 = 4$ ou $x_2 = -2$, e $x^2 + 2x + 3 = 0$, cujas soluções são $x_3 = 1$ ou $x_4 = -3$. Portanto, $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ e $x_4 = -3$ são as raízes da equação do 4º grau. Para $\alpha_3 = 25$, $\beta_3 = 1$. Substituindo estes valores na equação 3.11, extraindo as raízes quadradas e simplificando, obtemos $x^2 - 5x + 4 = 0$, cujas soluções são $x_1 = 4$ ou $x_2 = 1$, e $x^2 + 5x + 6 = 0$, cujas soluções são $x_3 = -3$ ou $x_4 = -2$. Portanto, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$ e $x_4 = -2$ são as raízes da equação do 4º grau. Logo, indiferente do valor de α, as raízes são sempre -3, -2, 1 e 4. O que muda é o modo de se reagrupar os termos da equação de modo a obter os quadrados perfeitos em ambos os lados da igualdade 3.11.

De maneira geral, vemos que o método de Ferrari depende diretamente do método de Cardano-Tartaglia. Assim, o método de Ferrari também não funcionava (para a época) quando a equação cúbica de Cardano-Tartaglia apresentava

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0,$$

isto é, quando apareciam raízes quadradas de números negativos. Apesar do longo caminho da história das equações algébricas, não é exagero dizer que os rumos da matemática e a criação de uma álgebra moderna se deram no campo das equações de 5º grau e sua solubilidade. A busca na história da matemática para encontrar uma fórmula geral para as equações de 5º grau reuniu matemáticos como Descartes (1596-1650), Gauss (1777-1855), Paolo Ruffini (1765-1822), Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833), Fourier (1768-1830), Cauchy (1789-1857), dentre outros. Se passam quase três séculos sem que descobrissem se as equações de 5º grau podiam ou não ser resolvidas por radicais. A busca da solubilidade das equações quínticas, de acordo com Baumgart (1992), se deu a partir de 1813, quando o matemático Paolo Ruffini afirmou não existir uma expressão que resolvesse as equações de grau maior que quatro. Porém, os trabalhos mais conhecidos foram de Niels Henrik Abel (1802-1829) e, posteriormente, Èvariste Galois (1811-1832).

Niels Abel, que nasceu em 1802 na cidade de Finnöy, Noruega, provou desde cedo grande capacidade na matemática. Após fracassos em vencer as equações de 5º grau, Abel começou a indagar se uma solução algébrica geral era realmente possível. Em 1824, de acordo com Baumgart (1992), Abel acreditando ter provado a impossibilidade de se resolver uma equação quíntica por radicais, publicou por sua própria custa (em Christiania, hoje Oslo) a prova de tal impossibilidade. Embora Abel tenha afirmado ter conseguido mostrar que, para $n > 4$, a equação polinomial geral não pode ser resolvida algebricamente, seu trabalho não foi considerado pelos matemáticos da época. A rigor, conforme afirma Baumgart (1992), Abel não conseguiu ter alcançado plenamente os objetivos que pretendia, isto é:

1. Encontrar todas as equações, de qualquer grau, algebricamente resolúveis.

2. Determinar se uma dada equação é ou não resolúvel algebricamente.

De acordo com Garbi (2007), mesmo não sendo Abel o responsável por demonstrar efetivamente sobre a insolubilidade das equações algébricas de grau superior a 4, ele teve grandes contribuições para a matemática (principalmente na álgebra), tendo o adjetivo *abeliano* se tornado uma espécie de homenagem ao seu nome. Nos anos seguintes Abel foi tomado pela tuberculose, doença incurável à época, vindo a falecer em 1829. A demonstração de Abel juntamente com os estudos de Lagrange, levou outro jovem matemático da mesma época, Èvariste Galois, a investigar sobre a solubilidade das equações de grau superior a 4. Galois pôs fim à procura de uma fórmula geral para equações de grau igual ou superior a 5, criando um novo conceito de álgebra abstrata.

Entre o final do século XVIII e meados do século XIX, a França viveu um período de intensa agitação política. Nesse período, a França, influenciada pela revolução industrial e pelo iluminismo, vivia o que hoje conhecemos como Revolução Francesa, a qual alterou profundamente o contexto político e social do país. Foi em meio a essa agitação que nasceu Èvariste Galois, no dia 25 de outubro de 1811 em Bourg la-Reine, filho de Adelaine-Marie e Nicolas-Gabriel Galois, um fervoroso político republicano. Desde muito jovem, Galois mostrava grande interesse pela matemática e, de acordo com Stewart (2003), na maior parte do tempo Galois recorria a leitura de grandes obras matemáticas passando a dominar os princípios e tratados matemáticos, como *Os Elementos* de Euclides, as obras de Legendre, Lagrange e campos do Cálculo e da Análise. De acordo com Garbi (2007), desde muito cedo, Galois já havia produzido muitos trabalhos e artigos matemáticos (embora nem todos foram publicados), dos quais podemos destacar: *Demonstração de um teorema sobre frações contínuas*, *Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo*, *Memória sobre as condições de resolubilidade das equações por radicais*, dentre outras. Nos trabalhos sobre as equações algébricas, Galois já vislumbrava uma forma revolucionária de abordar tais equações. Nestes trabalhos, apareciam o conceito hoje conhecido por “grupo”, o qual foi uma criação exclusiva de Galois.

É importante salientarmos que nem todos trabalhos de Galois foram publicados oficialmente. De acordo com Garbi (2007), quando os trabalhos eram submetidos para avaliação, geralmente aos matemáticos de renome da época como Cauchy e Fourier, estes trabalhos eram “perdidos” e consequentemente, além de outros motivos, não eram publicados. Não se sabe ao certo sobre a “genialidade matemática” de Galois, mas, de acordo com Oliveira et al. (2016), podemos afirmar que o contexto social (introdução dos números indo-arábicos, invenção da imprensa, revolução industrial, expansão marítima e comercialização, fontes matemáticas traduzidas dos árabes, disputas matemáticas, políticas e etc) influenciou diretamente não só Galois, mas grande parte dos matemáticos da época. Devido ao conturbado contexto político que se passava na França, Galois, com seu gênio revolucionário (possivelmente herdado de seu pai), foi fervoroso nas causas republicanas, fato este que culminou na sua prisão ao ir contra os ideais da monarquia francesa. Na prisão, onde Galois passaria quase todo final de sua vida, continuou produzindo conhecimento matemático ligados à busca das soluções das equações algébricas.

De acordo com Stewart (2003), Galois permaneceu na prisão até o final de abril de 1832 e, neste período, foi desafiado para um duelo. Uma noite antes do confronto, Galois, acreditando que aquela seria a sua última oportunidade de registrar suas ideias, trabalhou intensamente durante a noite tentando explicar as questões relativas às soluções das equações de grau 5 e superiores. Dessa forma, Galois endereça seus últimos manuscritos ao seu melhor amigo Auguste Chevalier e ao seu irmão Alfred, pedindo que os publicassem na *Revue Encyclopedique.* De acordo com Garbi (2007), na manhã de 30 de maio de 1832, Galois e seu rival se enfrentam. Galois é quem recebe o primeiro disparo, ferindo-o no abdômem. Algumas horas depois do duelo, Alfred recebe a notícia e leva-o ao hospital, porém no dia seguinte Galois veio a falecer. Após sua morte, Auguste Chevalier publica os manuscritos de Galois. Entretanto, os trabalhos só começaram a receber reconhecimento 14 anos depois. Joseph Liouville, em 1846, estuda e decifra os trabalhos deixados por Galois, publicando-os em seu *Journal de Mathematiques* sob o título de *Obras Matemáticas de Èvariste Galois.*

Com a Teoria de Galois, outros problemas puderam ser resolvidos ou provados serem insolúveis. Dentre eles podemos citar os três problemas clássicos dos gregos: *duplicação do cubo, trissecção do ângulo* e a *quadratura do círculo.* Não é surpreendente que os gregos tiveram dificuldade em lidar com esses problemas, pois, de acordo com Stewart (2003), tais construções são impossíveis (usando apenas régua não graduada e compasso) e a prova para tal insolubilidade provem da Teoria de Galois, mais precisamente da *Teoria de extensão de corpos.* Com essa nova perspectiva de álgebra, Galois pode responder com precisão quais eram/são as limitações das construções com régua e compasso[4]. Nesse sentido, o estudo da Teoria de Galois engloba um campo bastante amplo e depende de bases matemáticas preliminares que fogem ao escopo deste trabalho. De qualquer forma, pode-se dizer que a Teoria de Galois, de acordo com Garbi (2007), é um dos mais importantes pilares da matemática moderna, com aplicações diversas na Álgebra, Geometria, Teoria das Equações, Física e etc.

[4]Para um estudo aprofundado sobre a Teoria de Galois e os problemas clássicos dos gregos, recomendamos Stewart (2003).

3.2 O uso da história das equações algébricas no ensino de matemática

A álgebra faz parte do conhecimento humano e surge inicialmente da necessidade do homem em resolver problemas práticos do cotidiano. Atualmente o campo da álgebra é abrangente, tendo inúmeras aplicações desde às engenharias até à computação. Por isso, ela é essencial no ensino de matemática nos níveis fundamental e médio. Reconhecendo sua relevância na formação do aluno, foi homologado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que a unidade temática *álgebra* fosse desenvolvida desde os anos iniciais da educação básica. O documento da BNCC reitera que

> [...] é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita (Ministério da Educação, 2018a, p. 270).

Nesse aspecto, está incluso as habilidades e competências dos alunos a lidarem com problemas que recaem em equações algébricas. Contudo, o que vemos atualmente é que muitos alunos chegam ao ensino médio com uma grande defasagem; muitos não conseguem resolver uma equação de primeiro grau e acabam privados desse conhecimento algébrico básico. Parte disso ocorre em virtude da ênfase exagerada que se dá aos aspectos técnicos e abstratos da álgebra.

A perspectiva de ensino através da história da matemática surge assim como uma alternativa ao modelo mecanicista e "oficinalizante" de apresentação dos conteúdos. Ao ensinarmos equações do primeiro grau, por exemplo, podemos mostrar como problemas práticos eram abordados pelas antigas civilizações. Um exemplo interessante. neste caso, é o método egípcio da falsa posição. Em relação às equações do segundo grau, podemos usar a história para mostrar como os babilônios as resolviam sem o uso de fórmulas e símbolos, mas a partir de um conjunto de passos atrelado à ideia de completamento de quadrados. Para as equações algébricas de grau 3 em diante, normalmente, em sala de aula, buscamos uma raiz pelo teorema D'Alembert e então fatoramos-a usando divisão, reduzindo seu grau. Usamos com frequência, para a fatoração dessas equações algébricas, o dispositivo prático de Briot-Ruffini. Nesta etapa, o aluno pode questionar a existência de uma fórmula que permita calcular de maneira direta as raízes dessas equações. A história pode então mostrar como se deu a busca pelas fórmulas resolutivas das equações de grau maior ou igual a 3, mencionando inclusive as contribuições de Abel e Galois. Os procedimentos de resolução de equações algébricas, através de fórmulas resolutivas, abordados neste trabalho, podem inclusive ser utilizados no ensino superior, uma vez que, em muitas ocasiões, tais fórmulas e procedimentos não são suficientemente abordados.

Ao nosso ver é importante a narrativa histórica das equações algébricas porque foi a partir dessa "corrida pelas fórmulas resolutivas" que a álgebra teve um avanço significativo, atrelada inclusive ao surgimento dos números complexos. No que compete ao uso da história no ensino de matemática, é consenso que ela possibilita ao professor e ao aluno entender como os conceitos matemáticos foram construídos ao longo do tempo em diferentes civilizações, estimulando o interesse dos alunos tanto pela história como pela matemática.

Considerações finais

A motivação para a realização deste trabalho, conforme elucidado na introdução, se deu pela percepção de que a história da matemática utilizada na sala de aula desperta a curiosidade e interesse dos alunos. Ao iniciar um relato histórico de um determinado assunto percebemos que os alunos, antes desmotivados e desinteressados, começam a questionar e participar de forma mais ativa na aula. Considerando que o papel do professor, além de ensinar os conteúdos do currículo escolar, também é de se manter atualizado e atento com as tendências educacionais, nos esforçamos aqui para contribuir com uma melhora da qualidade do ensino de matemática em sala de aula. Contudo, sabemos claramente que o professor e seu método de ensino têm limitações sérias, oriundas muitas vezes da infraestrutura das unidades escolares e do contexto social de cada aluno/escola.

Ao menos, por meio da história, é possível transmitir ao educando uma nova perspectiva de matemática, diferente daquela que aparece nos livros didáticos, cuja impressão que se tem é que a mesma já nasceu “equacionada”. Considerando as potencialidades da história, observamos que os conceitos matemáticos tiveram um longo processo de transformação e desenvolvimento. Ao apresentar a história da resolução das equações algébricas, mostramos que a matemática não é uma ciência isolada e distante da experiência humana. De modo geral, não estamos defendendo que as técnicas e as fórmulas devam ser abandonadas, apenas entendemos que é importante mostrarmos aos alunos que, além dos padrões e propriedades por trás das fórmulas e operações, existe todo um desenvolvimento da história e da prática humana. Com essa abordagem, esperamos aqui propiciar aos alunos, e, sobretudo, aos professores que atuam na educação básica, um material que lhes permita relacionar o conhecimento atual com o antigo. Esperamos, portanto, ter contribuído para a inserção da história no ensino de matemática.

Referências Bibliográficas

Andrade, S. d. (1998). Ensino aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas. *Rio Claro: Revista Educação Matemática. Unesp.*

Balestri, R. D. (2000). A participação da História da matemática na formação de professores de matemática na óptica de professores/pesquisadores. *Revista Ponte*, página 15.

Barbosa, J. C. (2003). Modelagem matemática na sala de aula. *Revista Perspectiva*, 27(98).

Baroni, R. L. e Nobre, S. (1999). *A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática.* In: Bicudo, Maria A (org.) Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. Ed. UNESP, São Paulo, páginas 129–136.

Bassanezi, R. C. (1994). Modelagem matemática. *Revista Dynamis, Blumenau*, 1(7):55–83.

Baumgart, J. K. (1992). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra.* Ed. Atual, São Paulo.

Borba, M. C. (1999). *Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento.* In: Bicudo, Maria A (org.) Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. Ed. UNESP, São Paulo, páginas 285–295.

Borin, J. (1995). Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para o ensino de matemática. *Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática. CAEM-IME-USP.*

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática, tradução: Elza. F. Gomide.* Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Brito, A. d. J. (2007). A história da matemática e da educação matemática na formação de professores. *Educação Matemática em Revista*, 13(22).

Capibaribe, I. (2018). Nossa história. Disponível em URL: http://www.institutocapibaribe.com.br/instituto/nossa-historia, acesso em: 19/04/2019.

Caraça, B. d. J. (1951). *Conceitos fundamentais da matemática*. Ed. Gradiva, Lisboa.

Costa, L. C. d. (2016). A evolução na resolução das equações algébricas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande/PB.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. Editora Ática, São Paulo, SP.

D'Ambrosio, U. (1996). História da matemática e educação. *Cadernos Cedes*, 40:7–17.

D'Ambrosio, U. (1999). *A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática*. In: Bicudo, Maria A(org.)Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. Ed. UNESP, páginas 97–115, São Paulo.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H.* Editora da Unicamp, Campinas-SP.

Garbi, G. G. (2007). *O romance das equações algébricas*. Ed. Livraria da Física, São Paulo.

Groenwald, C. L. O., da Silva, C. K., e Mora, C. D. (2004). Perspectivas em educação matemática. *Revista Acta Scientiae*, 6(1):37–56.

Guimarães, P. S. (2006). *Equações algébricas*. Ed. UFSM, Santa Maria.

Joseph, G. G. (2010). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*. Ed. Princeton University Press, New Jersey.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.* Ed. Alianza, Madrid.

Knudsen, C. A. (1985). A teoria das equações algébricas. *Revista do Professor de Matemática*, volume 7.

Lara, I. C. M. (2013). O ensino da matemática por meio da história da matemática: possíveis articulações com a etnomatemática. *Revista VIDYA*, 33(2):12.

Lima, E. L. (1991). *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Ed. SBM, Rio de Janeiro.

Miguel, A. e Miorim, M. (2004). *História na educação matemática: propostas e desafios.* Ed. Autêntica, Belo Horizonte.

Ministério da Educação (2018a). Base Nacional Comum Curricular. Disponível em URL:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf, acesso em: 05/07/2019.

Ministério da Educação (2018b). Press Kit Saeb 2017. Disponível em URL:http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2018/documentos/presskit_saeb2017.pdf, acesso em: 25/07/2019.

Moura, P. C. e Viamonte, A. J. (2006). Jogos matemáticos como recurso didáctico. *Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa.*

Nobre, S. (1996). Alguns "porquês" na história da matemática e suas contribuições para a educação matemática. *Cadernos Cedes*, 40:29–35.

Oliveira, J. L. R., Ramos, E. M. A. d. M., et al. (2016). O desenvolvimento da álgebra e a escola italiana renascentista. *Revista de matemátca, ensino e cultura (Rematec)*, 11(22):99–120.

Pitombeira, J. B. e Roque, T. M. (2012). *Tópicos de história da Matemática.* Ed. SBM, Rio de Janeiro.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas.* Ed. Interciência, Rio de Janeiro.

Ponte, J. P. d., Oliveira, H., e Varandas, J. M. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. *Revista Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*, páginas 159–192.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem! *Revista Boletim de Educação Matemática, (Bolema)*, 16(20):1–16.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2013). Etnomatemática e modelagem: a análise de um problema retórico babilônio. *Repositório Institucional da UFOP*.

Sautoy, M. (2008a). The story of maths ep01 the language of the universe. Vídeo disponível em URL:https://www.youtube.com/watch?v=mJbChZrXDJE, acesso em: 05/07/2019.

Sautoy, M. (2008b). The story of maths ep02: The genious of the east. Vídeo disponível em URL:https://www.youtube.com/watch?v=83bVWgU-7ik. Acesso em: 17/08/2019.

Stewart, I. (2003). *Galois Theory*. Chapman Hall/CRC Mathematics Series, Third Edition. Ed. Taylor & Francis, London.

Stewart, I. (2012). *Uma história da simetria na matemática*. Ed. Zahar, Rio de Janeiro.

Swetz, F. J. (1989). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. *Revista Mathematics teacher*, 82(5):370–377.

Veiga, I. P. A. (2006). Projeto de ação didática: uma técnica de ensino para inovar a sala de aula. *Técnicas de ensino: novos tempos, novas configurações. Campinas, SP: Papirus*, páginas 69–84.

Viana, M. d. C. V. e Silva, C. M. (2007). Concepções de professores de matemática sobre a utilização da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem. *Encontro Nacional de História da Matemática*, páginas 1–9.

Wagner, E. (2007). *Construções geométricas*. Ed. SBM, Rio de Janeiro.