



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática



---

# Das Películas de Sabão às Superfícies Mínimas

**Vivilene de Souza Sá**

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa**

Trabalho financiado pela Capes

Barra do Garças - MT

Agosto de 2020

# Das Películas de Sabão às Superfícies Mínimas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Vivilene de Souza Sá e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 26 de agosto de 2020.

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa  
Orientador

## **Banca examinadora:**

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa  
Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins  
Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

#### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

S111p Sá, Vivilene de Souza.  
Das Películas de Sabão às Superfícies Mínimas / Vivilene de  
Souza Sá. -- 2020  
xii, 113 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Márcio Lemes de Sousa.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de  
Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de  
Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia,  
2020.  
Inclui bibliografia.

1. Películas de Sabão. 2. Problema de Plateau. 3. Superfícies  
Mínimas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT  
UFMT/CUA/ICET - BARRA DO GARÇAS

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Das Películas de Sabão às Superfícies Mínimas

AUTORA: Mestranda Vivilene de Souza Sá

Dissertação defendida e aprovada em 26 de agosto de 2020.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Doutor Márcio Lemes de Sousa (Presidente Banca / Orientador) - Universidade Federal de Mato Grosso
2. Doutor Tibério Bittencourt de Oliveira Martins (Membro Interno) - Universidade Federal de Mato Grosso
3. Doutor Romildo da Silva Pina (Membro Externo) - Universidade Federal de Goiás

Barra do Garças, 26/08/2020.



Documento assinado eletronicamente por MARCIO LEMES DE SOUSA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, em 09/09/2020, às 17:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por TIBERIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, em 09/09/2020, às 20:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por Romildo da Silva Pina, Usuário Externo, em 11/09/2020, às 08:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufmt.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador 2821610 e o código CRC 1EFEAB9A.

*À Aisha, minha filha amada.*

# Agradecimentos

A Deus, pela vida e por guiar e iluminar todos os meus caminhos.

Ao meu orientador, professor Dr. Márcio Lemes de Sousa, por sua atenção, amizade e paciência, compreendendo as minhas dificuldades e ao mesmo tempo auxiliando a superá-las durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Obrigada por me apresentar e ensinar com zelo o incrível “universo” das superfícies mínimas.

A minha filha Aisha, pelo carinho e por ter compreendido as minhas ausências temporárias. Você é minha vida.

Ao meu esposo Dener, pelo apoio, amor e incentivo com palavras de superação durante todo esse percurso.

A minha mãe, pelo amor e cuidado com a minha filha durante todas as minhas viagens.

A todos os professores, pela dedicação na arte de ensinar. Muito obrigada por contribuírem de maneira ímpar na minha formação.

Aos meus colegas, pelo companheirismo e momentos de estudo tão necessários durante essa jornada. Só com auxílio mútuo, foi possível vencer mais esse desafio.

À Capes pelo auxílio financeiro.

*“E eu, que estou de bem com a vida,  
creio que aqueles que mais entendem de  
felicidade são as borboletas e as bolhas  
de sabão...”*

Friedrich Nietzsche

# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo inicial das curvas no espaço tridimensional e das superfícies parametrizadas regulares para finalmente abordar as propriedades geométricas das superfícies mínimas. Essas superfícies são geralmente associadas às películas de sabão, devido aos experimentos usando contornos fechados por arame mergulhados em uma mistura de água e sabão realizados por Plateau. O problema seria, sem grande rigor, obter uma superfície de área mínima que possui um dado contorno fechado no espaço como borda. A partir dos estudos realizados envolvendo as fascinantes superfícies mínimas, será sugerido ao final do trabalho que essas superfícies sejam abordadas de modo introdutório nas aulas de matemática do Ensino Médio, por meio da utilização de estratégias pedagógicas que interagem com a realidade concreta do discente numa abordagem contextualizada que permita ao aluno observar, interpretar e construir conhecimento nesse “universo” tão encantador que é o das superfícies mínimas.

**Palavras chave:** Películas de Sabão, Problema de Plateau, Superfícies Mínimas.

# Abstract

This work presents an initial study of curves in the three-dimensional space and the regular parameterized surfaces to approach finally the geometric properties of the minimal surfaces. These surfaces are generally associated with soap films, due to experiments using closed contours by immersed wires in a mixture of water and soap accomplished by Plateau. The problem would be, without great rigor, obtaining a surface of minimal area which has a determined closed contour in the space as border. From the studies carried out involving the fascinating minimal surfaces, it will be suggested at the end of the work that these surfaces be addressed in an introductory way in high school math classes, through the use of pedagogical strategies that interact with the student's concrete reality from a contextualized approach that allows the student to observe, interpret and build knowledge in this very charming "universe" which is the universe of minimal surfaces.

**Keywords:** Soap films, Plateau's Problem, Minimal Surfaces.

# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xii
Introdução	1
<b>1 Um breve histórico sobre as superfícies mínimas</b>	<b>3</b>
1.1 Contexto histórico . . . . .	3
<b>2 Curvas em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>10</b>
2.1 Curva diferenciável parametrizada . . . . .	10
2.2 Vetor tangente; comprimento de arco . . . . .	11
2.3 Teoria local das curvas no espaço . . . . .	13
<b>3 Superfícies regulares</b>	<b>22</b>
3.1 Superfície regular . . . . .	22
3.2 Plano tangente . . . . .	31
3.3 Primeira forma quadrática . . . . .	35
3.4 Aplicação normal de Gauss . . . . .	42
3.5 Segunda forma quadrática . . . . .	49
3.6 Curvaturas . . . . .	52
<b>4 Superfícies mínimas</b>	<b>65</b>
4.1 Propriedades das superfícies mínimas . . . . .	65

4.2	Algumas aplicações no ensino médio . . . . .	94
4.2.1	As películas de sabão . . . . .	95
4.2.2	O helicóide e as retas . . . . .	99
4.2.3	Superfícies mínimas em contextos diversos . . . . .	101
	<b>Considerações finais</b>	<b>105</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>109</b>
	<b>Apêndice: Material adicional</b>	<b>110</b>
A.1	Teoremas, definições e colorários adicionais . . . . .	110

# Lista de Figuras

1.1	Gaspar Monge. . . . .	3
1.2	Carl Friedrich Gauss. . . . .	4
1.3	Sophie Germain. . . . .	5
1.4	Joseph Louis Lagrange. . . . .	5
1.5	Joseph Plateau. . . . .	6
1.6	Jean Baptiste Marie Charles Meusnier. . . . .	7
1.7	Heinrich Ferdinand Scherk. . . . .	7
1.8	Alfred Enneper. . . . .	7
1.9	Celso José da Costa. . . . .	8
1.10	Douglas e Radó. . . . .	8
2.1	Hélice circular . . . . .	11
3.1	Vetores tangentes às curvas $u \rightarrow X(u, v_0)$ e $v \rightarrow X(u_0, v)$ . . . . .	24
3.2	Parametrizações da esfera . . . . .	26
3.3	Catenóide . . . . .	31
3.4	Helicóide . . . . .	37
3.5	Curvas coordenadas. . . . .	38
3.6	Justificativa geométrica - área . . . . .	39
3.7	Toro . . . . .	42
3.8	Vizinhanças de coordenadas . . . . .	44
3.9	Faixa de Möbius . . . . .	46
3.10	Aplicação normal de Gauss. . . . .	47
3.11	Parabolóide hiperbólico . . . . .	56
3.12	Ponto hiperbólico $(0, 0, 0)$ . . . . .	63
3.13	Pontos parabólicos . . . . .	64

4.1	Superfície mínima Scherk.	89
4.2	Superfície de Enneper.	94
4.3	Helicóide.	96
4.4	Catenóide.	96
4.5	Sólidos de revolução.	96
4.6	Superfície 1.	97
4.7	Superfície 2.	97
4.8	Superfície 3.	97
4.9	Superfície limitada pelo tetraedro.	98
4.10	Bolha de sabão.	98
4.11	Superfície Costa.	99
4.12	Superfície Costa.	99
4.13	Helicóide	100
4.14	Helicóide 1.	100
4.15	Helicóide 2.	100
4.16	Lata 1.	101
4.17	Objeto.	101
4.18	Procuradoria Geral da República do Estado do Paraná.	102
4.19	DNA.	102
4.20	Lata 2.	102
4.21	Museu do Louvre, Paris/França	102
4.22	Capela Loretto, Estado do Novo México/EUA	103
4.23	Gavinha.	103
A.1	Diferenciabilidade de $\varphi$ em $p$ .	111
A.2	Cilindro circular e hiperbolóide de revolução de uma folha.	113

# Introdução

“Bolha de sabão. Uma explosão colorida sem nenhum estrondo.”

(Maria Reginato Labruciano)

As superfícies mínimas possuem uma rica teoria desenvolvida ao longo dos anos na área da geometria diferencial e geralmente são associadas às películas de sabão, devido aos experimentos utilizando uma mistura de água e sabão usando contornos fechados por arame, realizados pelo físico Plateau, como meio de “visualizar” essas superfícies. Esse método possui um charme singular por sua simplicidade, além de ser fascinante aos nossos olhos.

Essas superfícies surgiram como resposta para o problema de minimizar uma área para um contorno fechado no espaço estudado inicialmente por Lagrange, que mais tarde ficou conhecido como problema de Plateau, devido aos seus experimentos com as películas de sabão. Apesar do termo superfície mínima remeter a ideia de superfícies com área mínima, é utilizado para designar todas as superfícies que possuem curvatura média nula em seus pontos. São exemplos dessas superfícies, além do plano no espaço tridimensional, o catenóide, o helicóide, a superfície Costa, entre outras.

Ainda hoje, o campo de estudo das superfícies mínimas é de grande interesse de muitos pesquisadores, além de possuir uma enorme aplicação nas mais diversas áreas, como na indústria e na arquitetura.

Neste trabalho faremos o estudo das características das superfícies mínimas demonstrando algumas de suas propriedades e, ao final iremos sugerir atividades com noções introdutórias do referido tema para serem trabalhadas nas aulas de matemática do Ensino Médio.

Desse modo, no capítulo 1 traremos um breve histórico envolvendo a construção do conhecimento em geometria diferencial no que tange às superfícies mínimas.

Nos capítulos 2 e 3, vamos estudar, respectivamente, as curvas no espaço tridimensional e as superfícies parametrizadas regulares, visto que para o estudo das superfícies mínimas é necessário que o leitor possua o mínimo de requisitos preliminares.

No capítulo 4, abordaremos as propriedades das superfícies mínimas e apresentaremos dentre as demonstrações, a de Meusnier (1776) na qual uma superfície mínima obtida pelo gráfico de uma função do tipo  $z = f(x, y)$  cujas curvas de níveis são retas é localmente um helicóide e a apresentada por Scherk em 1835, onde pela solução da equação diferencial parcial das superfícies mínimas por funções do tipo  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ , ele conseguiu obter outro exemplo de superfície mínima. E no final desse capítulo, iremos propor algumas atividades envolvendo conceitos introdutórios sobre superfícies mínimas para serem abordados no Ensino Médio.

# Capítulo 1

## Um breve histórico sobre as superfícies mínimas

Neste capítulo abordaremos um breve histórico envolvendo as superfícies mínimas. Para isso, utilizamos como referências, Eves (2011), Boyer (1974), Carmo (2005), Moreira Jr. e Elia (1987), Kawano (2015) e Carmo (2009).

### 1.1 Contexto histórico

As superfícies mínimas são estudadas na Geometria Diferencial, onde se utiliza o cálculo diferencial e integral para investigar o comportamento, em uma vizinhança de um ponto  $P$ , de uma curva ou superfície no espaço.

Gaspar Monge (1746-1818), pode ser considerado como o primeiro incentivador ao estudo de curvas e superfícies no espaço. Segundo Boyer (1974) ele é conhecido “como fundador da geometria pura moderna”.



Figura 1.1: Gaspar Monge.

Fonte: <https://www.linternaute.com/actualite/histoire/1039482-les-genies-precoces-de-l-histoire/1039497-gaspard-monge>

Em seguida, temos as contribuições relevantes atribuídas a Carl Friedrich Gauss

(1777-1885), publicada em sua obra, *Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas*, em 1827, onde introduziu as parametrizações de curvas e superfícies como uma forma de auxiliar a investigação e compreensão desses objetos de estudo. Nessa obra, Gauss inseriu a definição de curvatura de uma superfície  $S$  em um ponto  $P$  dessa superfície.

Considere as secções de  $S$  formadas pelos planos que contém a normal a  $S$  num ponto  $P$  de  $S$ . Dessas secções há uma de curvatura máxima  $k$  e uma de curvatura mínima  $k'$  em  $P$ . Essas duas secções em geral são perpendiculares entre si e suas curvaturas em  $P$  se chamam *curvaturas principais* de  $S$  em  $P$ . O produto  $K = kk'$  é chamado *curvatura total* ou *gaussiana* da superfície  $S$  em  $P$ . Se as duas curvaturas principais têm mesmo sentido, então  $K$  é positivo; se as duas curvaturas principais têm sentidos opostos, então  $K$  é negativo; se pelo menos uma das curvaturas principais é nula, então  $K$  é nula (Eves, 2011, p.603).

Dessa forma, Gauss descobriu que ao deformar uma superfície  $S$ , sem rasgar, franzir ou esticar, a curvatura total da superfície em cada ponto continua constante. Em seguida, ele demonstrou que a curvatura total da superfície  $S$  depende somente dos coeficientes da primeira forma quadrática, o que ficou conhecido como *Theorema Egregium*.



Figura 1.2: Carl Friedrich Gauss.

Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl\\_Friedrich\\_Gauss](https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss)

O próximo conceito importante para o desenvolvimento da geometria diferencial ocorreu em 1831, quando Sophie Germain (1776-1831) mostrou que a *curvatura média* ( $H$ ) de uma superfície  $S$  num ponto  $P$  dessa superfície é obtida por

$$H(P) = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  correspondem as duas curvaturas normais principais que passam por  $P$ .

As superfícies em que a curvatura média é nula em todos os seus pontos são denominadas como *superfícies mínimas*. Assim, em uma superfície mínima a soma das

curvaturas normais principais é igual a zero, ou seja, possuem valores absolutos iguais e sinais diferentes.



Figura 1.3: Sophie Germain.

Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Sophie\\_Germain](https://pt.wikipedia.org/wiki/Sophie_Germain)

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) contribuiu de maneira singular para o desenvolvimento do cálculo das variações. De acordo com Boyer (1974) “em sua forma mais simples o cálculo de variações trata de determinar uma relação funcional  $y = f(x)$  tal que uma integral  $\int_a^b g(x, y)dx$  seja máxima ou mínima”. Assim, a partir dos estudos relacionados ao cálculo variacional, Lagrange foi o primeiro a apresentar o problema de como se obter uma superfície de área mínima formada por um contorno fechado no espaço. Ele propôs esse problema com intuito de encontrar soluções para problemas que buscavam minimizar o comprimento de curvas, área de superfícies e outros.

Dessa forma, a denominação de superfície mínima foi atribuída por Lagrange a toda superfície que solucionava um problema variacional. Portanto, todas as regiões limitadas dessas superfícies são pontos críticos para uma função área e possui curvatura média igual a zero em todos os seus pontos.

Observamos que a terminologia “superfície mínima” não significa que todo o ponto crítico é um valor mínimo.



Figura 1.4: Joseph Louis Lagrange.

Fonte: [https://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis\\_Lagrange](https://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange)

Em torno de 1850, o físico belga, Joseph Plateau (1801-1883) criou o método de “visualizar” essas superfícies por meio da película de espuma de sabão, o que tornou esse problema conhecido como *problema de Plateau*. Nessa época, Plateau mergulhou contornos fechados por arame em uma mistura de água e sabão e retirou cuidadosamente obtendo superfícies mínimas. Isso foi possível porque ele descobriu que o efeito físico, denominado como tensão superficial, permite que essa sensível camada de uma superfície sem líquidos se comporte como uma película elástica, o que gera uma superfície de área mínima.

O problema seria, sem grande rigor, encontrar uma superfície  $S$  que possui a menor área dentre todas as superfícies delimitadas por um contorno fechado no espaço, ou seja, devemos encontrar uma superfície de área mínima  $S$  que possui uma curva  $C$  como borda.

As três leis geométricas de Plateau referentes a qualquer película de sabão, de acordo com Moreira Jr. e Elia (1987) são:

1. somente três películas se interceptam ao longo de uma linha;
2. o ângulo entre duas películas que se interceptam é  $120^\circ$ ;
3. quatro linhas, cada uma delas formada pela interseção de três películas, encontram-se em um ponto, e o ângulo entre um par de linhas adjacentes é  $109^\circ 28'$ .

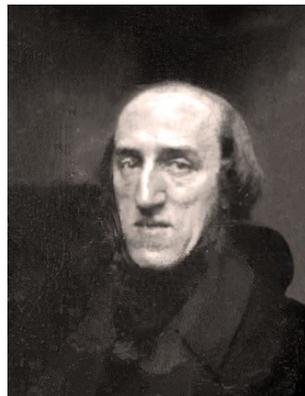


Figura 1.5: Joseph Plateau.

Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph\\_Plateau](https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Plateau)

Em 1776, Meusnier (1754-1793) definiu o catenóide e o helicóide, como sendo as duas primeiras superfícies mínimas, além do plano no espaço tridimensional. E somente em 1835, foram descobertas novas superfícies mínimas por Scherk (1798-1885).



Figura 1.6: Jean Baptiste Marie Charles Meusnier.  
Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean\\_Baptiste\\_Meusnier](https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Meusnier)



Figura 1.7: Heinrich Ferdinand Scherk.  
Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Scherk](https://pt.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Scherk)

Enneper (1830-1885) em 1864 apresentou uma superfície mínima representada por dados analíticos. Essa superfície ficou conhecida como a Representação de Enneper-Weierstress ou Representação de Weierstrass.



Figura 1.8: Alfred Enneper.  
Fonte: [http://www.enneper.net/ottoenneper/Alfred\\_Enneper.htm](http://www.enneper.net/ottoenneper/Alfred_Enneper.htm)

A última superfície mínima descoberta foi a superfície Costa, em 1982, pelo brasileiro Celso Costa. Segundo publicado por Kawano (2015) na Revista Galileu, Costa teve a ideia dessa superfície no início dos anos 80 após assistir a um filme.

“Eu assistia a um filme sobre escola de samba e um sambista desfilava com um bizarro chapéu de três abas. Naquele momento tive a inspiração crucial e final do modo como a figura geométrica da superfície que eu buscava se apresentava no espaço” (Kawano, 2015).

A descoberta dessa superfície impulsionou novos estudos e resoluções de problemas relacionados às superfícies mínimas. Como as equações da superfície Costa eram complicadas para reprodução visual no espaço tridimensional, ela estimulou o desenvolvimento da computação gráfica e sua imagem computacional foi reproduzida perfeitamente pelos americanos Hoffman e Meeks, após dois anos da sua descoberta.



Figura 1.9: Celso José da Costa.

Fonte: <http://www.abc.org.br/membro/celso-jose-da-costa>

Para encontrar uma solução matemática para o problema de Plateau houveram intensos estudos de muitos pesquisadores no mundo todo. No entanto, a resposta para esse problema foi encontrada em 1930 pelo matemático americano Jesse Douglas (1897-1965) e o húngaro Tibor Radó (1895-1965). Douglas recebeu o prêmio Bôcher e uma medalha Fields, em 1936, quando teve seu trabalho reconhecido.



(a) Jesse Douglas.



(b) Tibor Radó.

Figura 1.10: Douglas e Radó.

Fonte: <https://www.geni.com/people/Jesse-Douglas-Fields-Medal-1936/6000000042457855167> e <https://math.osu.edu/about-us/history/tibor-radó>

Ainda existem muitos matemáticos que buscam novas descobertas no que se refere às superfícies mínimas, seja uma outra solução para o clássico *problema de Plateau* ou a sua generalização.

# Capítulo 2

## Curvas em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo realizaremos um breve estudo sobre o comportamento das curvas regulares no espaço euclidiano tridimensional. As definições, as proposições e os exemplos são fundamentados em Carmo (2005), Tenenblat (2008), Lima (2016) e Delgado e Frensel (2019).

### 2.1 Curva diferenciável parametrizada

**Definição 2.1.** *Uma curva parametrizada diferenciável em  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$ , definida em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . A variável  $t \in I$  é o parâmetro da curva, e o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos pontos  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , é o traço da curva.*

Observemos que uma curva parametrizada diferenciável em  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in I$ , na qual as funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

**Definição 2.2.** *Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita regular se  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .*

**Exemplo 2.1.** *A curva parametrizada diferenciável dada por*

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

*$t \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $b \neq 0$ , tem por traço uma hélice circular contida no cilindro  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$ . Se dois pontos  $\alpha(t_1)$  e  $\alpha(t_2)$  possuem as duas primeiras coordenadas*

iguais, então as terceiras coordenadas são um múltiplo de  $2\pi b$ , conforme a figura (2.1).

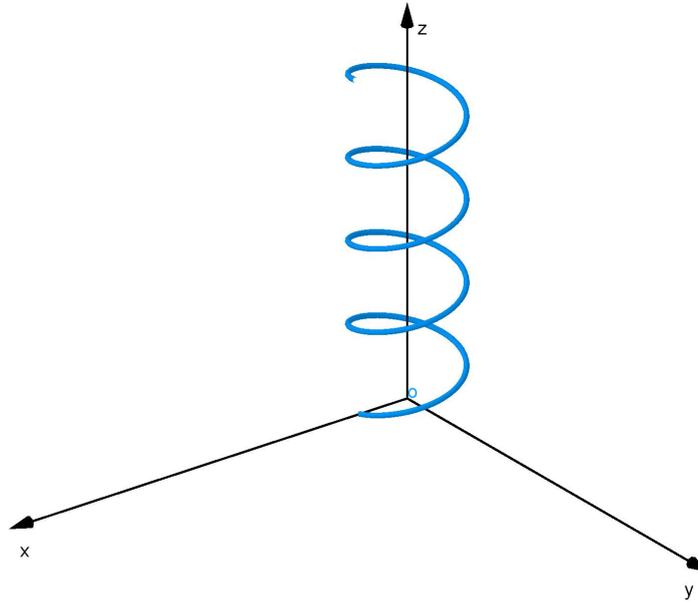


Figura 2.1: Hélice circular

**Definição 2.3.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada plana se existe um plano de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $\alpha(I)$ .

Observamos que qualquer reta contida em  $\mathbb{R}^3$  é um exemplo de curva plana.

## 2.2 Vetor tangente; comprimento de arco

Seja  $\alpha(t)$  uma curva parametrizada diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ , em que  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . O vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  é chamado *vetor tangente* a  $\alpha$  em  $t$ . A reta tangente à curva  $\alpha(t)$  em  $t_0 \in I$  é a reta dada pela função  $g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , ou seja, é a reta que passa por  $\alpha(t_0)$  na direção de  $\alpha'(t_0)$ .

**Definição 2.4.** Sejam  $\alpha(t)$  uma curva regular em  $\mathbb{R}^3$  e  $t_0, t_1 \in I$ ,  $t_0 \leq t_1$ . A função comprimento de arco de uma curva  $\alpha$  a partir de  $t_0$  é dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt, \quad (2.1)$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

**Definição 2.5.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada  $t_0, t_1 \in I$ ,  $t_0 \leq t_1$ ,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0. \quad (2.2)$$

A partir deste conceito de curva parametrizada pelo comprimento de arco, temos a seguinte proposição.

**Proposição 2.1.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, para todo  $t \in I$ ,  $|\alpha'(t)| = 1$ .

*Demonstração.* Suponhamos  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos  $t_0 \in I$ . Consideremos a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  que para cada  $t \in I$  associa  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ . Se  $t_0 \leq t$  então por hipótese  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0$  e se  $t \leq t_0$  então  $-s(t) = \int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt = t_0 - t$ . Logo para todo  $t \in I$ ,  $s(t) = t - t_0$ , onde  $s'(t) = 1$ . Como  $s'(t) = |\alpha'(t)|$ , concluímos que  $|\alpha'(t)| = 1$ , qualquer que seja  $t \in I$ .

Reciprocamente se  $|\alpha'(t)| = 1$ ,  $\forall t \in I$ , então evidentemente  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0$ . □

Observamos que uma parametrização  $\alpha$  de uma curva regular pode não estar parametrizada pelo comprimento de arco, mas podemos obter uma reparametrização  $\beta$ , com o mesmo traço de  $\alpha$ , e  $\beta$  estando parametrizada pelo comprimento de arco.

**Proposição 2.2.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então existe a função inversa  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$  e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

*Demonstração.* Como  $\alpha$  é uma curva regular, então

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

isto é,  $s$  é uma função estritamente crescente. Segue-se que existe a função inversa de  $s$ ,  $h : J \rightarrow I$ . Como  $\forall t \in I$ ,  $h(s(t)) = t$ , temos que  $\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$ , logo

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Podemos concluir então que  $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$ ,  $s \in J$  é uma reparametrização de  $\alpha$  e  $\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1$ .

Portanto, pela Proposição (2.1),  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco. □

## 2.3 Teoria local das curvas no espaço

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. O vetor tangente  $\alpha'(t)$  é unitário, logo o módulo  $|\alpha''(t)|$  da segunda derivada fornece a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. A partir disso temos a próxima definição.

**Definição 2.6.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . A curvatura de  $\alpha$  em  $s$  é o número real*

$$k(s) = |\alpha''(s)|. \quad (2.3)$$

**Exemplo 2.2.** *Consideremos a curva regular parametrizada pelo comprimento de arco definida por*

$$\alpha(s) = \left( \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), s \in (-1, 1).$$

*Temos que*

$$\alpha'(s) = \left( \frac{3(1+s)^{\frac{1}{2}}}{6}, \frac{-3(1-s)^{\frac{1}{2}}}{6}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{(1+s)^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{-(1-s)^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

e

$$\alpha''(s) = \left( \frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}}}{4}, \frac{(1-s)^{-\frac{1}{2}}}{4}, 0 \right),$$

então

$$k(s) = |\alpha''(s)| = \sqrt{\left( \frac{1}{4\sqrt{1+s}} \right)^2 + \left( \frac{1}{4\sqrt{1-s}} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{8(1-s^2)}}.$$

Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, logo  $|\alpha'(s)| = 1$ , então  $\alpha''(s)$  é ortogonal à  $\alpha'(s)$ , isto é,  $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ . Portanto,  $\forall$

ponto  $s \in I$  onde  $k(s) \neq 0$ , podemos definir um vetor unitário na direção  $\alpha''(s)$ .

**Definição 2.7.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0$ . O vetor*

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \quad (2.4)$$

*é denominado vetor normal a  $\alpha$  em  $s$ . A reta normal a  $\alpha$  em  $s_0 \in I$  é a reta paralela ao vetor normal  $n(s_0)$  que passa por  $\alpha(s_0)$ .*

Denotaremos o vetor tangente unitário de  $\alpha$  em  $s$  por  $t(s) = \alpha'(s)$ . Temos então que os vetores  $t(s)$  e  $n(s)$  são ortonormais e

$$t'(s) = k(s)n(s).$$

Em seguida definiremos um terceiro vetor para formar uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  junto com os vetores  $t(s)$  e  $n(s)$  e a notação que usaremos na definição (2.8) “ $\wedge$ ” denota o produto vetorial usual do  $\mathbb{R}^3$  que utilizamos para gerar um vetor perpendicular a dois vetores dados, e pode ser encontrado, por exemplo, em Tenenblat (2008).

**Definição 2.8.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0, \forall s \in I$ . O vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$  é o vetor*

$$b(s) = t(s) \wedge n(s).$$

Quando associamos a cada valor do parâmetro  $s$  o referencial ortonormal  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  construímos o *triedro de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ . O plano definido por  $t(s)$  e  $n(s)$  é chamado como *plano osculador*, o plano determinado por  $t(s)$  e  $b(s)$  é o *plano retificante* e o plano definido por  $n(s)$  e  $b(s)$  é o *plano normal*.

Podemos observar que  $b'(s)$  é paralelo ao vetor normal  $n(s)$ . De fato, derivando  $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ , usando as propriedades de produto vetorial, temos que

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) \\ &= (k(s)n(s)) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) \\ &= t(s) \wedge n'(s). \end{aligned}$$

Logo,  $b'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$ . Como  $|b(s)| = 1$ , então  $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$ , isto é,

$b'(s)$  é ortogonal a  $b(s)$ . Portanto,  $b'(s)$  é igual ao produto de  $n(s)$  por um número real, ou seja,  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ .

**Definição 2.9.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  tal que  $\alpha''(s) \neq 0$ ,  $s \in I$ . O número real  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é denominado torção de  $\alpha$  em  $s$ .

**Exemplo 2.3.** Consideremos uma hélice circular parametrizada pelo comprimento de arco

$$\alpha(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), s \in \mathbb{R}, a > 0, b \neq 0.$$

Vamos determinar o triedro de Frenet, a curvatura e a torção de  $\alpha$ .

Como  $t(s) = \alpha'(s)$ , então

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( -a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right).$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \frac{-a}{a^2 + b^2} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), \\ |\alpha''(s)| &= \sqrt{\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} \left( \cos^2 \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sin^2 \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)}, \\ k(s) &= |\alpha''(s)| = \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} n(s) &= \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), \\ n'(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} b(s) &= t(s) \wedge n(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \right), \\ b'(s) &= t(s) \wedge n'(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), \\ \tau(s) &= \langle b'(s), n(s) \rangle = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Portanto, a  $\tau(s)$  é uma constante.

Podemos observar que a torção pode ser negativa ou positiva diferentemente da curvatura  $k(s) \geq 0$ , se  $\alpha(s)$  é uma curva regular em  $\mathbb{R}^3$ . Como o triedro de Frenet de  $\alpha$  em  $s$  é um referencial ortonormal em  $\mathbb{R}^3$  podemos determinar os vetores  $t'(s)$ ,  $n'(s)$  e  $b'(s)$  como combinação linear de  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$ . Já temos que

$$\begin{aligned}t'(s) &= k(s)n(s), \\b'(s) &= \tau(s)n(s).\end{aligned}$$

Para obter  $n'(s)$ , como  $n(s) = b(s) \wedge t(s)$ , basta derivar, e substituir devidamente  $b'(s)$  e  $t'(s)$ , e teremos novamente a curvatura e a torção:

$$\begin{aligned}n'(s) &= b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) \\&= (\tau(s)n(s)) \wedge t(s) + b(s) \wedge (k(s)n(s)) \\&= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s).\end{aligned}$$

Sintetizando, iremos destacar as equações

$$\begin{cases}t'(s) = k(s)n(s), \\n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s), \\b'(s) = \tau(s)n(s),\end{cases} \quad (2.5)$$

que são chamadas de *fórmulas de Frenet*.

Até agora definimos o triedro de Frenet, a curvatura e a torção para uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Veremos a seguir que é possível obter a curvatura e a torção de uma curva regular com qualquer parâmetro, usaremos para demonstrar a próxima proposição o produto interno usual do  $\mathbb{R}^3$  que é denotado por “ $\langle, \rangle$ ”, e também pode ser encontrado, por exemplo, em Tenenblat (2008).

**Proposição 2.3.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de parâmetro  $t \in I$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, isto é,  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ . Sejam*

$k(s) > 0$  e  $\tau(s)$  a curvatura e a torção de  $\beta$  em  $s \in J$ , então

$$\begin{aligned} k(s(t)) &= \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \\ \tau(s(t)) &= \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Derivando  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$  em relação a  $t$ , temos

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t), \quad (2.6)$$

fazendo a segunda derivada, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \right] &= \frac{d}{dt}(\alpha'(t)) \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\beta}{ds} \right] \frac{ds}{dt} + \frac{d\beta}{ds} \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) &= \alpha''(t) \\ \frac{d^2\beta}{ds^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} &= \alpha''(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco temos que  $\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = 1$ , logo

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)| \quad (2.8)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= \frac{d}{dt} |\alpha'(t)| \\ &= \frac{d}{dt} \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}} 2\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \\ &= \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|} \end{aligned}$$

Assim, segue das equações 2.6 e 2.7 que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= \left( \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \right) \wedge \left( \frac{d^2\beta}{ds^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) \\ &= \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d\beta}{ds} \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right|.$$

Como  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco,  $\frac{d\beta}{ds}$  é ortogonal a  $\frac{d^2\beta}{ds^2}$ . Podemos concluir usando 2.8 que

$$\begin{aligned}k(s(t)) &= \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right| \\ &= \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{\left| \frac{ds}{dt} \right|^3} \\ &= \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.\end{aligned}$$

Vamos determinar a torção, utilizando os vetores normal e binormal de  $\beta$ , dados por

$$n(s(t)) = \frac{1}{k(s(t))} \frac{d^2\beta}{ds^2},$$

$$b(s(t)) = \frac{d\beta}{ds} \wedge n(s(t)).$$

Da equação,

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t),$$

temos

$$\frac{d\beta}{ds} |\alpha'(t)| = \alpha'(t),$$

isto implica em

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|},$$

e substituindo  $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$  e  $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|}$  na equação 2.7 obtemos

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^4}. \quad (2.9)$$

Substituindo a equação 2.9 e usando o valor da expressão de  $k(s(t))$ , temos

$$\begin{aligned} n(s(t)) &= \frac{1}{\frac{|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}} \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^4} \\ &= \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b(s(t)) &= \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \wedge \left( \frac{|\alpha'(t)|^2\alpha''(t) - \alpha'(t)\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|} \right) \\ &= \frac{1}{|\alpha'(t)|^2|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|} \left( |\alpha'(t)|^2\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \right) \\ &= \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}. \end{aligned}$$

Derivando a última igualdade em relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{db}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}(\alpha' \wedge \alpha'') |\alpha' \wedge \alpha''| - (\alpha' \wedge \alpha'') \frac{d}{dt}(|\alpha' \wedge \alpha''|)}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}, \quad (2.10)$$

substituindo  $\frac{d}{dt}(\alpha' \wedge \alpha'') = \alpha' \wedge \alpha'''$ ,  $\frac{d}{dt}|\alpha' \wedge \alpha''| = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha''', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|}$  na equação 2.10 temos

$$\begin{aligned} \frac{db}{ds} |_{\alpha'} &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''' |\alpha' \wedge \alpha''| - \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \langle \alpha' \wedge \alpha''', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|}}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2} \\ &= \frac{\alpha' \wedge \alpha'' |\alpha' \wedge \alpha''|^2 - (\alpha' \wedge \alpha'') \langle \alpha' \wedge \alpha''', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^3}, \end{aligned}$$

segue que

$$\frac{db}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha' \wedge \alpha'''}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|} - \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha''', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle \alpha' \wedge \alpha''}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|^3}.$$

A torção é obtida por

$$\begin{aligned}
\tau(s(t)) &= \left\langle \frac{db}{ds}(s(t)), n(s(t)) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\alpha' \wedge \alpha'''}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|} - \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha''', \alpha' \wedge \alpha'' \rangle \alpha' \wedge \alpha''}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|^3}, \frac{\alpha''(t) |\alpha'(t)|^2 - \alpha' \langle \alpha'', \alpha' \rangle}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|} \right\rangle \\
&= \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $k(s(t))$  e  $\tau(s(t))$  são a curvatura e a torção de  $\alpha$  em  $t$ , respectivamente.  $\square$

Este resultado é muito estudado na geometria das curvas, e que no caso do  $\mathbb{R}^2$ , quando uma curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , não é parametrizada pelo comprimento de arco, sua curvatura é dada por

$$k = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|\alpha'(t)|^3}, \quad (2.11)$$

veja, por exemplo, em Tenenblat (2008).

O próximo resultado nos ajudará no desenvolvimento do capítulo 4.

**Proposição 2.4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular de parâmetro  $t \in I$  dada implicitamente pela equação*

$$f(x, y) = c, \quad (2.12)$$

onde  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $\alpha(t) \subset U$ , para todo  $t \in I$ , então a curvatura de  $\alpha$  é dada por

$$k = \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_xf_yf_{xy} - f_{yy}f_x^2}{|\text{grad}f|^3}.$$

*Demonstração.* Como  $\alpha$  é dada implicitamente pela equação (2.12), temos que

$$f(\alpha(t)) = c. \quad (2.13)$$

Derivando (2.13) em relação  $t$  temos que:

$$\frac{d}{dt}(f(\alpha(t))) = 0$$

Como  $f$  e  $\alpha$  são diferenciáveis, pela regra da cadeia temos:

$$f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = 0,$$

ou ainda,

$$\langle \text{grad}f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0,$$

isto significa, que  $\text{grad}f(\alpha(t))$  é ortogonal a  $\alpha'(t)$ , então segue que

$$\begin{cases} x' = f_y, \\ y' = -f_x, \end{cases} \quad (2.14)$$

derivando (2.14) em relação a  $t$  e usando, novamente, a regra da cadeia, obtemos:

$$\begin{cases} x'' = f_{yx} \frac{dx}{dt} + f_{yy} \frac{dy}{dt}, \\ y'' = -f_{xx} \frac{dx}{dt} - f_{xy} \frac{dy}{dt}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x'' = f_{yx}f_y - f_{yy}f_x, \\ y'' = -f_{xx}f_y + f_{xy}f_x. \end{cases} \quad (2.15)$$

Além disso, temos que

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2} = \sqrt{(f_y^2) + (-f_x)^2} = |\text{grad}f| \quad (2.16)$$

substituindo as equações (2.14), (2.15) e (2.16) em (2.11) obtemos:

$$\begin{aligned} k &= \frac{f_y(-f_{xx}f_y + f_{xy}f_x) + f_x(f_{yx}f_y - f_{yy}f_x)}{|\text{grad}f|^3} \\ &= \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_xf_yf_{xy} - f_{yy}f_x^2}{|\text{grad}f|^3}, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Após este breve estudo referente às curvas em  $\mathbb{R}^3$  vamos estudar as superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$ .

# Capítulo 3

## Superfícies regulares

Neste capítulo, iremos estudar as superfícies regulares no espaço tridimensional. Introduziremos o conceito de superfície parametrizada regular em  $\mathbb{R}^3$ . Em seguida abordaremos a primeira e a segunda formas quadráticas para possibilitar o estudo das propriedades geométricas das superfícies regulares e de suas curvaturas. As definições, as proposições e os exemplos foram baseados em Carmo (2005), Tenenblat (2008), Delgado e Frensel (2019), Lima (2016) e Rodrigues e Agustini (2007).

### 3.1 Superfície regular

Iremos começar a definir uma superfície regular. O objetivo aqui é estabelecer um conjunto que seja localmente definido por dois parâmetros independentes, e em certo sentido, bidimensional que seja também suficientemente suave de forma que as noções usuais de Cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto.

**Definição 3.1.** *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ , tal que:*

(i)  *$X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ .*

(ii)  *$X$  é um homeomorfismo. Pela condição (i),  $X$  é contínua, logo  $X$  tem inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que também é contínua.*

(iii) *Para todo  $q = (u, v) \in U$ , a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é injetiva.*

A condição (i) significa que a aplicação

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

é diferenciável quando as funções coordenadas  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Pela injetividade da condição (ii) as superfícies regulares não possuem auto-interseções.

A condição (iii) garante a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície. Existem algumas formas equivalentes em que esta condição pode ser expressada. Analisemos algumas.

Uma aplicação  $X$  descrita na Definição (3.1) é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança) de  $p$ .

Sejam as bases canônicas  $e_1 = (0, 1)$ ,  $e_2 = (1, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ , a matriz Jacobiana ( $JX(q)$ ) (conforme a observação (6) do apêndice) associada a  $q = (u_0, v_0) \in U$  nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  é dada por

$$JX(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix},$$

em que

$$dX_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right) = X_u(q)$$

e

$$dX_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right) = X_v(q).$$

**Observação 1.** *As afirmações abaixo são equivalentes a condição (iii).*

- (a) *Os dois vetores coluna  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  da matriz Jacobiana são linearmente independentes;*

(b)  $X_u(u_0, v_0) \wedge X_v(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0)$  (vetor nulo);

(c) A matriz Jacobiana  $JX(u_0, v_0)$  tem posto 2, isto é, um dos determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

é diferente de zero em  $q = (u, v)$ .

Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um sistema de coordenadas locais de uma superfície regular  $S$ , um ponto  $(u_0, v_0) \in U$  e  $X(u_0, v_0) = q$  um ponto fixo em  $X$ . As curvas coordenadas de  $X$  em  $q$  são obtidas por

$$u \rightarrow X(u, v_0)$$

$$v \rightarrow X(u_0, v).$$

Os vetores tangentes às curvas coordenadas são  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ , conforme figura abaixo.

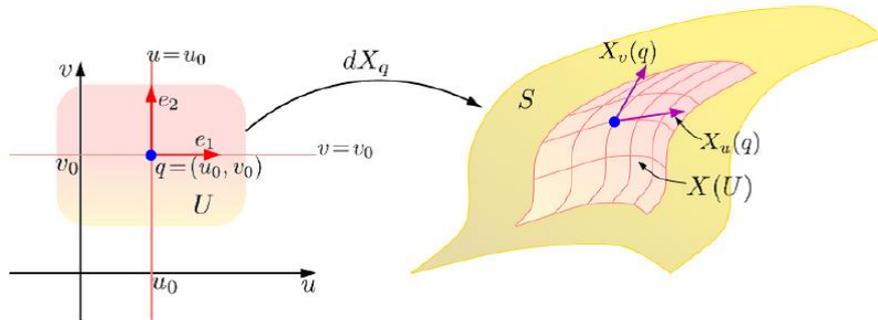


Figura 3.1: Vetores tangentes às curvas  $u \rightarrow X(u, v_0)$  e  $v \rightarrow X(u_0, v)$ .

Fonte: Delgado e Frensel (2019).

**Exemplo 3.1.** A esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular.

De fato, a aplicação  $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $X_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ ,  $(u, v) \in U$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$  é um sistema de coordenadas locais em  $S^2$ , de modo que a imagem de  $X_1 = (u, v)$  é o hemisfério superior da esfera, ou seja, acima do plano  $xy$ .

Vamos verificar agora as três condições da Definição (3.1).

Observamos que a função  $\sqrt{1 - u^2 - v^2}$  é diferenciável, visto que  $u^2 + v^2 < 1$ , logo a condição (i) é satisfeita.

Para verificar a condição (ii) podemos observar que  $X_1$  é bijetiva e que  $X_1^{-1}$  é a restrição da projeção  $X_1(u, v) = (u, v)$  ao conjunto  $X_1(U)$ , contínua em  $X_1(U)$ .

A condição (iii) pode ser verificada ao considerar a matriz Jacobiana de  $JX(u, v)$  dada por

$$JX(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}.$$

Observemos que,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1.$$

Portanto, a matriz  $JX(u, v)$  tem posto 2 e a condição (iii) é satisfeita.

Podemos cobrir a esfera inteira usando parametrizações semelhantes. Uma parametrização para o hemisfério inferior da esfera é dada por  $X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em que

$$X_2(u, v) = \left( u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2} \right), (u, v) \in U.$$

Observamos que  $X_1(u, v) \cup X_2(u, v)$  cobre a esfera com exceção do equador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Para cobrir a esfera toda são necessárias seis parametrizações. Seguem as demais parametrizações definidas utilizando os planos  $xz$  e  $zy$

$$\begin{aligned} X_3(u, v) &= \left( u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v \right), \\ X_4(u, v) &= \left( u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v \right), \\ X_5(u, v) &= \left( \sqrt{1-u^2-v^2}, u, v \right), \\ X_6(u, v) &= \left( -\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v \right). \end{aligned}$$

Deste modo, mostramos que  $S^2$  é uma superfície regular.

A figura (3.2) mostra geometricamente o que está acontecendo no Exemplo (3.1).

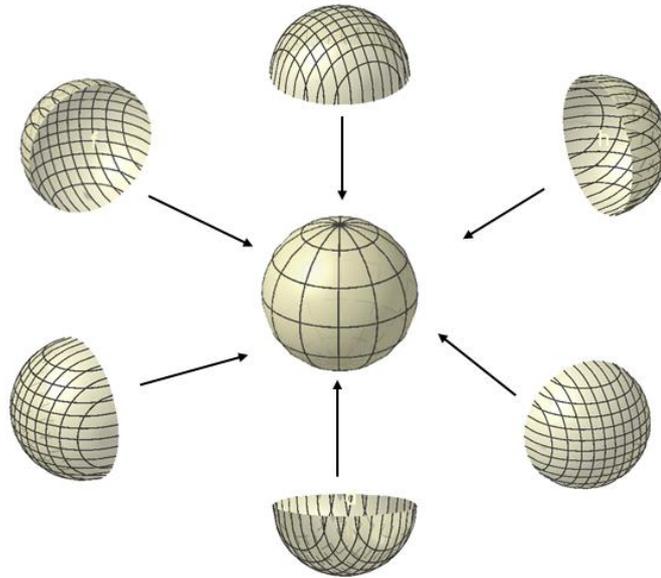


Figura 3.2: Parametrizações da esfera

Um fato interessante é que uma superfície, em geral, tem mais de uma maneira de ser parametrizada, por exemplo, a esfera acima tem ainda dois tipos conhecidos de parametrização, que são coordenadas geográficas (mais conhecidas como coordenadas esféricas) e projeção estereográfica. Veja, por exemplo, Carmo (2005).

Vimos que pode ser exaustivo determinar se uma superfície é regular utilizando a Definição (3.1). Dessa forma, demonstraremos algumas proposições que podem simplificar esse trabalho.

No próximo resultado, vamos mostrar alguns tipos especiais de superfícies que são os gráficos de função, em que é necessário apenas um único sistema de coordenadas para cobrir toda superfície.

**Proposição 3.1.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(u, v)$  é uma função real diferenciável, onde  $(u, v) \in U$ , aberto de  $\mathbb{R}^2$ , então a aplicação  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$  é a parametrização de uma superfície regular, que descreve o gráfico da função  $f$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que a aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma parametrização do gráfico de  $f$ , cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. Para isto, verificaremos as condições da Definição (3.1).

As funções coordenadas de  $X$  possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens, logo a aplicação  $X(u, v)$  é diferenciável e assim a condição (i) é satisfeita.

Podemos verificar que cada ponto  $(x, y, z)$  do gráfico é a imagem por  $X$  de um

único ponto  $(u, v) = (x, y) \in U$ . Logo,  $X$  é bijetiva, e como  $X^{-1}$  é a restrição do gráfico de  $f$  da projeção (contínua) de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ , então  $X^{-1}$  é contínua e dessa forma a condição (ii) é verificada.

Finalmente, a condição (iii) é satisfeita, já que a matriz Jacobiana de  $X(u, v)$  é igual a

$$JX(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix},$$

que tem posto 2, para todo  $(u, v) \in U$ .

Logo, o gráfico da função  $f$  é uma superfície regular.  $\square$

**Definição 3.2.** *Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado um valor crítico de  $F$ . Um ponto de  $\mathbb{R}^m$  que não é um valor crítico de  $F$  é dito um valor regular de  $F$ .*

Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então a matriz Jacobiana ( $JX(p)$ ) (conforme a observação (6) do apêndice) que também pode ser vista a matriz da  $df_p$  na base  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  é dada por

$$df_p = (f_x, f_y, f_z),$$

além disso, dizer que  $df_p$  não é sobrejetiva é equivalente a dizer que

$$f_x = f_y = f_z = 0 \text{ em } p.$$

Logo,  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f_x, f_y, f_z$  não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = a\}$$

**Proposição 3.2.** *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demonstração.* Seja  $p = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $f^{-1}(a)$ , como  $a$  é um valor regular de  $f$ , então podemos admitir  $f_z \neq 0$  em  $p$  (trocando os nomes dos eixos coordenados se necessário). Definimos a aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)) = (u, v, t).$$

A diferencial de  $F$  em  $p$  é dada por

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

donde

$$\det(dF_p) = f_z \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa (veja o Teorema (A.1.2) no apêndice), existem vizinhanças  $V$  de  $p$  e  $W$  de  $F(p)$  tais que  $F : V \rightarrow W$  é inversível e a inversa  $F^{-1} : W \rightarrow V$  é diferenciável. Segue que as funções coordenadas de  $F^{-1}$ , isto é, as funções

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \quad (u, v, t) \in W,$$

são diferenciáveis. Em particular,  $z = g(u, v, a) = h(x, y)$  é uma função diferenciável definida na projeção de  $V$  sobre o plano  $xy$ . Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\},$$

concluimos que o gráfico de  $h$  é  $f^{-1}(a) \cap V$ . Pela Proposição (3.1),  $f^{-1}(a) \cap V$  é um sistema de coordenadas locais em  $p$ , e conseqüentemente, todo ponto  $p \in f^{-1}(a)$  pode ser coberto por uma vizinhança de coordenadas, ou seja,  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular.  $\square$

**Exemplo 3.2.** *O elipsóide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{3.1}$$

é uma superfície regular. De fato, observemos que a equação (3.1) é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

pondo

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

temos que o elipsóide é o conjunto  $f^{-1}(0)$ . Como  $f$  é uma função diferenciável e

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f_z = \frac{2z}{c^2},$$

se anulam simultaneamente apenas no ponto  $(0, 0, 0)$  e  $f(0, 0, 0) = -1 \neq 0$ , então  $(0, 0, 0)$  não pertence a  $f^{-1}(0)$ .

Logo, 0 é o valor regular de  $f$ , portanto, pela Proposição (3.2)  $f^{-1}(0)$  é uma superfície regular.

No que segue, estaremos tratando uma curva regular  $C \subset \mathbb{R}^3$  com a seguinte propriedade: para cada ponto  $p \in C$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e um homeomorfismo diferenciável

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V \cap C,$$

tal que a diferencial  $d\alpha_t$  é injetiva para cada  $t \in I$ .

**Proposição 3.3.** *Seja  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ ,  $u \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $I$  aberto, uma curva regular tal que  $f(u)$  não se anula. Então, a aplicação*

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u)),$$

onde  $u \in I$  e  $v \in (0, 2\pi)$  é um sistema de coordenadas de uma superfície regular.

*Demonstração.* Como a curva regular  $\alpha$  é uma aplicação diferenciável, as funções coordenadas de  $X$  possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os vetores

$$\begin{aligned} X_u &= \left( f'(u) \cos v, f'(u) \operatorname{sen} v, g'(u) \right), \\ X_v &= \left( -f(u) \operatorname{sen} v, f(u) \cos v, 0 \right), \end{aligned}$$

são linearmente independentes, dado que

$$\begin{aligned} |X_u \wedge X_v|^2 &= \langle X_u \wedge X_v, X_u \wedge X_v \rangle \\ &= f^2(u) \left( g^2(u) + (f')^2(u) (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) \right) \\ &= f^2(u) \left[ (g')^2 + (f')^2 \right] \neq 0, \end{aligned}$$

$\alpha$  é uma curva regular e  $f$  não se anula. Agora, para mostrar que  $X$  é um homeomorfismo, primeiramente mostraremos que  $X$  é injetiva. De fato, como  $(f(u), g(u))$  representa uma curva regular que nunca se anula em  $u$  e  $z$ ,  $x^2 + y^2 = (f(u))^2$ , podemos determinar  $u$  de maneira única, daí,  $X$  é injetiva. Por outro lado, como  $(f(u), g(u))$  é uma parametrização da curva regular  $\alpha$ ,  $u$  é uma função contínua de  $z$  e  $\sqrt{x^2 + y^2}$  e, conseqüentemente, uma função contínua de  $(x, y, z)$  é uma função contínua, isto é,

$$u = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z).$$

Agora resta mostrar que  $v$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Para  $v \neq \pi$ , e como  $f(u) \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \tan \frac{v}{2} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{v}{2}}{\operatorname{cos} \frac{v}{2}} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{v}{2} \operatorname{cos} \frac{v}{2}}{2 \operatorname{cos}^2 \frac{v}{2}}, \end{aligned}$$

usando as relações trigonométricas  $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$  e  $\operatorname{cos}^2 \theta = \frac{1 + \operatorname{cos} 2\theta}{2}$ , obtemos

$$\tan \frac{v}{2} = \frac{\operatorname{sen} v}{1 + \operatorname{cos} v},$$

além disso lembremos que  $\operatorname{sen} v = \frac{y}{f(u)}$  e  $\operatorname{cos} v = \frac{x}{f(u)}$ , então temos que

$$\tan \frac{v}{2} = \frac{\frac{y}{f(u)}}{1 + \frac{x}{f(u)}} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

ou seja, para  $v \neq \pi$

$$v = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

portanto, para  $v \neq \pi$ ,  $v$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Pelo mesmo argumento, se  $v$  está em um pequeno intervalo em torno de  $\pi$ , obtemos

$$v = 2 \arctan \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

logo, concluímos que  $v$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Portanto,  $X^{-1}$  é contínua, isto é,  $X$  é uma parametrização de uma superfície regular.  $\square$

Observamos que essa aplicação  $X$  é chamada *superfície de revolução* da curva  $\alpha$  em torno do eixo  $0z$  e a curva  $\alpha$  é denominada como geratriz dessa superfície.

**Exemplo 3.3.** Seja  $\alpha(u) = \left(0, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right), u\right)$  uma catenária,  $u \in \mathbb{R}$ , onde  $a > 0$  é constante. A superfície com parametrização dada por

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{senu}, av),$$

$0 < u < 2\pi$ ,  $v \in \mathbb{R}$  é chamada de *catenóide*. Essa superfície de revolução é obtida pela rotação da catenária  $\alpha$  em torno do eixo  $0z$ .

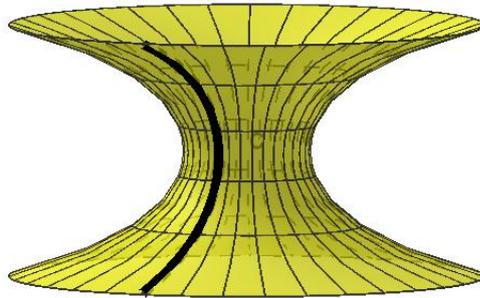


Figura 3.3: Catenóide

## 3.2 Plano tangente

Vimos que em uma superfície regular  $S$ , em um sistema de coordenadas locais  $X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , os vetores  $X_u$  e  $X_v$  são vetores linearmente independentes (conforme a Observação (1)) e tangentes à superfície  $S$  em um ponto  $p \in S$ , ou seja, tais vetores podem gerar um plano, o qual será tangente à superfície nesse ponto. Esse plano é chamado de *plano tangente*.

Para determinar esse plano iremos definir um vetor tangente à superfície em um ponto  $p$ , como sendo um vetor tangente a uma curva  $\alpha$  da superfície passando por  $p$ .

**Definição 3.3.** Se  $X(u, v)$  é uma parametrização local de uma superfície regular  $S$ , diremos que um vetor  $w \in \mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $S$  em  $q = (u_0, v_0)$  se  $w = \alpha'(t_0)$  e  $q = \alpha(t_0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ .

O vetor tangente  $w$  a  $S$  em um ponto  $q$  é o vetor velocidade  $\alpha'(0)$  de uma curva parametrizada  $\alpha = X \circ \beta$ , tal que  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , com  $\alpha(0) = q$ . Se  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , temos que

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}X \circ \beta(0) \\ &= \frac{d}{dt}X(u(t), v(t))(0) \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w.\end{aligned}$$

Portanto, o vetor  $w = \alpha'(0)$  é tangente à curva  $\alpha$  no ponto que tem coordenadas  $q = \alpha(0)$ .

**Definição 3.4.** *O plano tangente a  $S$  em  $(u_0, v_0)$  é o conjunto de todos os vetores tangentes a  $S$  em  $(u_0, v_0)$ , que denotamos por  $T_qS$ , onde  $q = (u_0, v_0)$ .*

Veremos agora que o plano tangente  $T_qS$  à superfície regular  $S$  em um ponto  $q = (u_0, v_0)$ , é o plano gerado pelos vetores linearmente independentes  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ .

**Proposição 3.4.** *Seja  $X(u, v)$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e  $q = (u_0, v_0)$ . Então,  $T_qS$  é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ .*

*Demonstração.* Se  $w \in T_qS$ , então pela Definição 3.3,  $w = \alpha'(t_0)$ ,  $q = \alpha(t_0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  e  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ . Logo,

$$\begin{aligned}w = \alpha'(t_0) &= \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t)))|_{t=t_0} \\ &= X_u(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + X_v(u(t_0), v(t_0))v'(t_0) \\ &= X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0) \\ &= aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),\end{aligned}$$

onde  $a = u'(t_0)$  e  $b = v'(t_0)$ . Portanto,  $w$  é uma combinação linear dos vetores  $X_u$  e  $X_v$  em  $q = (u_0, v_0)$ .

Reciprocamente, vamos supor que

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Logo, existe uma curva  $\alpha(t)$  da superfície de modo que  $(u'(0), v'(0)) = (u_0, v_0)$  e  $w = \alpha'(0)$ . De fato, considere que

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

em que  $u(t) = u_0 + at$  e  $v(t) = v_0 + bt$ .

Pela Proposição 3.4, temos que o plano  $T_qS$  é um plano de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores linearmente independentes  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ . Logo, a escolha de uma parametrização de  $X$  determina uma base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  de  $T_qS$ , ou seja, o plano tangente não depende da parametrização de  $X$  e é paralelo aos vetores  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ .  $\square$

Podemos observar que, geralmente,  $X_u$  e  $X_v$  não são unitários e nem ortogonais.

**Definição 3.5.** *Se  $X(u, v)$  é uma parametrização local da superfície regular  $S$  e  $q = (u_0, v_0)$ , dizemos que um vetor de  $\mathbb{R}^3$  é normal a  $X$  em  $q$  se é ortogonal a  $T_qS$ , isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a  $X$  em  $q$ .*

Em um plano tangente  $T_qS$ , há apenas uma direção normal e assim existem dois vetores unitários normais à superfície  $S$  no ponto  $q = (u_0, v_0)$ . Desta forma, podemos definir o vetor unitário normal a  $X$  em  $q$ , como o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q).$$

**Exemplo 3.4.** *Seja a aplicação  $X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ ,  $(u, v) \in U$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$  uma parametrização local da esfera unitária centrada na origem, cuja imagem é o hemisfério superior da esfera unitária.*

Vamos considerar o ponto  $q = (u_0, v_0) = (0, 0)$ . Pela Proposição (3.4), os vetores  $X_u$  e  $X_v$  formam uma base do plano tangente  $T_qS$ , então temos

$$X_u(0, 0) = (1, 0, 0),$$

$$X_v(0, 0) = (0, 1, 0).$$

Logo,

$$X_u(0, 0) \wedge X_v(0, 0) = (0, 0, 1).$$

Segue que,  $|(X_u(0,0) \wedge X_v(0,0))| = |(0,0,1)| = 1$ . Portanto, o vetor normal é  $N(0,0) = (0,0,1)$ .

A partir da noção de plano tangente temos a seguinte proposição sobre a diferencial de uma aplicação entre superfícies.

**Proposição 3.5.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares,  $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto  $V$  de  $S_1$  em  $S_2$ . Sejam ainda,  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$  com  $\alpha(t_0) = q$  e  $\beta = \varphi \circ \alpha$ , tal que,  $\beta(t_0) = \varphi(q)$  e  $\beta'(t_0)$  um vetor de  $T_{\varphi(q)}S_2$ . A aplicação  $d\varphi_q : T_qS_1 \rightarrow T_{\varphi(q)}S_2$  definida por  $d\varphi_q(w) = \beta'(t_0)$  é linear e não depende da escolha de uma curva  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Sejam  $X(u,v)$  e  $\bar{X}(\bar{u},\bar{v})$  parametrizações de  $S_1$  em uma vizinhança de  $q$  e de  $S_2$  em  $\varphi(q)$ , respectivamente. Suponhamos que  $\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$  e  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Como  $\beta = \varphi \circ \alpha$ , então

$$\begin{aligned}\beta(t) &= (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \circ (u(t), v(t)) \\ &= (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t))).\end{aligned}$$

Fazendo  $\beta'(t_0)$  na base  $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$ , obtemos

$$\begin{aligned}\beta'(t_0) &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha(t_0)) \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi_1(u(t_0), v(t_0)), \varphi_2(u(t_0), v(t_0))) \\ &= \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(t_0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(t_0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(t_0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(t_0) \right).\end{aligned}$$

Pela última igualdade,  $\beta'(t_0)$  depende somente da aplicação  $\varphi$  e do ponto  $(u'(t_0), v'(t_0))$  de  $w$  na base  $\{X_u, X_v\}$ . Isso mostra que o vetor  $\beta'(t_0)$  não depende da curva  $\alpha$ .

Por outro lado, a  $d\varphi_q$  é uma aplicação linear de  $T_qS_1$  em  $T_{\varphi(q)}S_2$  nas bases  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_qS_1$  e  $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$  de  $T_{\varphi(q)}S_2$ , conforme a matriz

$$\beta'(t_0) = d\varphi_q(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix}$$

Assim, concluímos que a diferencial  $d\varphi_q$  é linear. □

**Definição 3.6.** A aplicação linear  $d\varphi_q : T_qS_1 \rightarrow T_{\varphi(q)}S_2$  é denominada diferencial de  $\varphi$  em  $q$ .

### 3.3 Primeira forma quadrática

**Definição 3.7.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização (local) da superfície regular  $S$ ,  $q \in S$ , a aplicação dada por

$$I_q : T_qS \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \geq 0$$

é chamada primeira forma quadrática ou primeira forma fundamental de  $S$  em  $q$ .

Vamos expressar a primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  associada a uma superfície  $S$  dada pela parametrização local  $X(u, v)$  em um ponto  $q = (u_0, v_0)$ . Temos que um vetor  $w \in T_qS$  é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$\begin{aligned} I_q(w) &= |aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)|^2 \\ &= a^2\langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab\langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2\langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Fazendo,

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0), \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0), \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

obtemos os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_qS$ .

Portanto,

$$I_q(w) = a^2E(u_0, v_0) + 2abF(u_0, v_0) + b^2G(u_0, v_0). \quad (3.2)$$

As funções  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$  são diferenciáveis.

Observamos que  $E(u, v) > 0$  e  $G(u, v) > 0$  para todo  $(u, v)$ , visto que os vetores linearmente independentes  $X_u$  e  $X_v$  são não nulos.

A primeira forma fundamental possibilita a realização de medidas (comprimento de curvas, ângulo entre vetores tangentes e área de uma região) associadas a uma superfície sem a necessidade de mencionar o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Ressaltamos que como  $T_q S \subset \mathbb{R}^3$  a aplicação  $\langle w_1, w_2 \rangle_q$  é igual ao produto interno de  $w_1$  e  $w_2$ , como vetores em  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 3.5.** Consideremos a hélice circular,  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $\alpha(u) = (\cos u, \operatorname{senu}, au)$ ,  $a \neq 0$ . Para cada ponto  $\alpha(u)$  da hélice existe uma única reta ortogonal ao eixo  $Oz$ . A superfície obtida pela união dessas retas é chamada de helicóide. Uma parametrização do helicóide é dada por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{senu}, au), 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty.$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (-v \operatorname{senu}, v \cos u, a), \\ X_v &= (\cos u, \operatorname{senu}, 0). \end{aligned}$$

Logo, o cálculo dos coeficientes da primeira forma quadrática de  $X$  são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = v^2 \operatorname{sen}^2 u + v^2 \cos^2 u + a^2 = a^2 + v^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = -v \operatorname{senu} \cos u + v \cos u \operatorname{senu} + 0^2 = 0 \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = \cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u + 0^2 = 1. \end{aligned}$$

Portanto, em  $q = X(u, v)$ ,  $I_q(a' X_u + b' X_v) = (a^2 + v^2)a'^2 + b'^2$ .

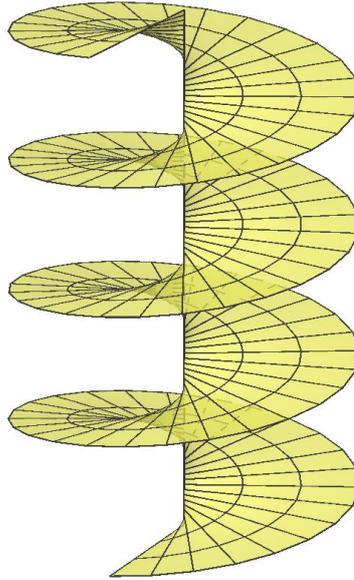


Figura 3.4: Helicóide

Seja uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow S$ , tal que  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , contida na superfície regular  $S$  em  $\mathbb{R}^3$ . Temos que

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(q(t)) + v'(t)X_v(q(t)),$$

onde  $\alpha'(t)$  é um vetor tangente à superfície  $S$  em  $q(t) = (u(t), v(t))$ .

Como o comprimento de arco  $s$  de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  é definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

temos que

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)|^2 &= \langle u'(t)X_u(q(t)) + v'(t)X_v(q(t)), u'(t)X_u(q(t)) + v'(t)X_v(q(t)) \rangle \\ &= (u'(t))^2 \langle X_u, X_u \rangle(q(t)) + 2u'(t)v'(t) \langle X_u, X_v \rangle(q(t)) + v'(t))^2 \langle X_v, X_v \rangle(q(t)) \\ &= (u'(t))^2 E(q(t)) + 2u'(t)v'(t) F(q(t)) + v'(t))^2 G(q(t)) \\ &= I_{q(t)}(\alpha'(t)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))} dt.$$

Para obter o ângulo  $\theta$  entre os vetores tangentes vamos considerar duas curvas regulares  $\alpha : I \rightarrow S$ ,  $\beta : I \rightarrow S$ , da superfície  $S$ , com interseção em  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ . Logo, o ângulo  $\theta$  formado pelas duas curvas nesse ponto é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

Em particular, o ângulo  $\varphi$  formado pelas curvas coordenadas de uma parametrização  $X(u, v)$  é definido por

$$\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|}(u_0, v_0) = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}.$$

Logo, as curvas coordenadas de uma superfície  $X(u, v)$  são ortogonais se, e somente se,  $F(u, v) = 0$ , para todo  $(u, v) \in U$ .

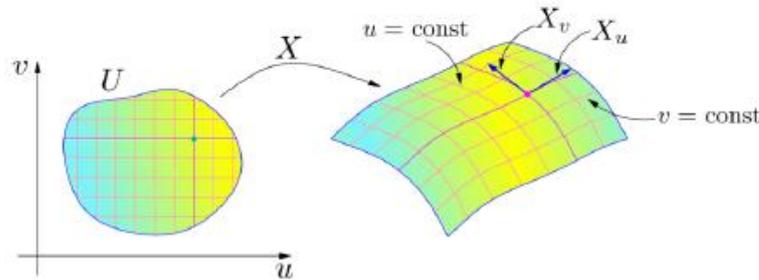


Figura 3.5: Curvas coordenadas.  
Fonte: Delgado e Frensel (2019)

Iremos definir a seguir a noção de área de uma região limitada de uma superfície regular  $S$ , utilizando a primeira forma fundamental.

Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um sistema de coordenadas locais de uma superfície regular e  $D$  uma região de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $D \subset U$ , sendo  $D$  fechado, limitado, com interior homeomorfo a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^2$  e fronteira homeomorfa a uma circunferência. Uma região da superfície regular  $S$  é denominada como  $X(D)$ .

**Definição 3.8.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um sistema de coordenadas locais de uma superfície regular e  $D \subset U$  uma região de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $X$  restrita ao interior de  $D$  é*

injetiva. A área da região  $X(D)$  é dada por

$$A(X(D)) = \int \int_D |X_u \wedge X_v| dudv.$$

Uma justificativa geométrica para a Definição 3.8 é que a norma do produto vetorial dos vetores linearmente independentes  $X_u$  e  $X_v$  em um ponto  $q \in D$ , corresponde a área do paralelogramo de lados  $X_u$  e  $X_v$ , cujo valor é aproximadamente igual à área de uma região em  $X(\bar{D})$ , onde  $\bar{D} \subset D$  é um retângulo com vértice em  $q$  e lados paralelos aos eixos coordenados  $u$  e  $v$ , conforme figura 3.6.

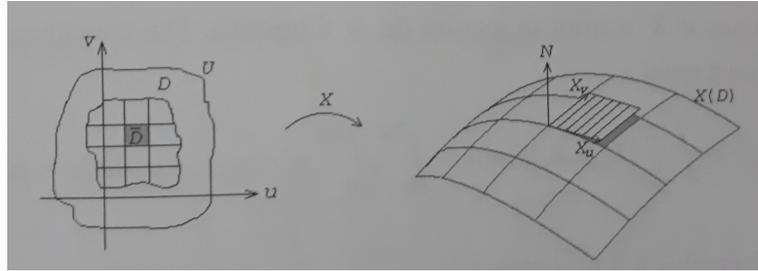


Figura 3.6: Justificativa geométrica - área  
Fonte: Tenenblat (2008)

Para colocar a área de  $X(D)$  em função da primeira forma fundamental, observemos que:

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \wedge \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |X_u \wedge X_v|^2 &= \langle X_u \wedge X_v, X_u \wedge X_v \rangle \\ &= \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \end{aligned}$$



Portanto,

$$A(X(D)) = \int \int_D |X_u \wedge X_v| dudv = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

onde  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X$ .

**Exemplo 3.6.** *Vamos calcular a área de uma superfície de revolução dada por*

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u),$$

onde  $0 < u < 2\pi$  e  $0 < v < 2\pi$ , cujo traço corresponde a um toro. Temos que

$$X_u = (-r \operatorname{sen} u \cos v, -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -r \cos u),$$

$$X_v = (-a \operatorname{sen} v - r \cos u \operatorname{sen} v, a \cos v + r \cos u \cos v, 0).$$

Logo, os coeficientes da primeira forma quadrática são obtidos por

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= r^2 \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + r^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + r^2 \cos^2 u \\ &= r^2 (\operatorname{sen}^2 u (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \cos^2 u) \\ &= r^2 (\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) = r^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \langle X_u, X_v \rangle &= ar \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \cos v + r^2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \cos u \cos v - ar \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \cos v \\ &\quad - r^2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \cos u \cos v + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = \langle X_v, X_v \rangle &= a^2 \operatorname{sen}^2 v + 2ar \operatorname{sen}^2 v \cos u + r^2 \operatorname{sen}^2 v \cos^2 u + a^2 \cos^2 v \\ &\quad + 2ar \cos^2 v \cos u + r^2 \cos^2 v \cos^2 u + 0 \\ &= a^2 (\operatorname{sen}^2 v \cos^2 v) + 2ar (\cos u (\operatorname{sen}^2 v \cos^2 v)) + r^2 (\cos^2 u (\operatorname{sen}^2 v \cos^2 v)) \\ &= a^2 + 2ar \cos u + r^2 \cos^2 u \\ &= (a + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

Consideremos a região  $D_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 + \varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon, 0 + \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\}$ , para

$\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Iremos primeiramente calcular a área da região  $X(D_\varepsilon)$ . Assim, pela Definição (3.8) temos que

$$\begin{aligned}
 A(X(D_\varepsilon)) &= \int \int_{D_\varepsilon} \sqrt{EG - F^2} dudv \\
 &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \sqrt{r^2((a+r\cos u)^2)} dudv \\
 &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (ar + r^2 \cos u) dudv \\
 &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (ar + r^2 \cos u) du \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} dv \\
 &= (aru + r^2 \operatorname{sen}u) \Big|_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} v \Big|_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \\
 &= (2\pi - 2\varepsilon) (ar(2\pi - 2\varepsilon) + r^2 \operatorname{sen}(2\pi - \varepsilon) - r^2 \operatorname{sen}\varepsilon) \\
 &= ar(2\pi - 2\varepsilon)^2 + r^2(2\pi - 2\varepsilon)(\operatorname{sen}(2\pi - \varepsilon) - \operatorname{sen}\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos a área do toro que denotaremos por  $T$ , isto é,

$$A(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(X(D_\varepsilon)) = 4\pi^2 ar.$$

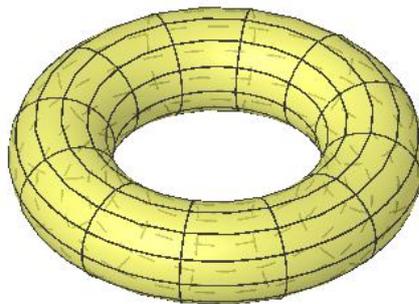


Figura 3.7: Toro

### 3.4 Aplicação normal de Gauss

Nesta seção faremos uma breve introdução ao conceito de superfícies orientáveis antes de definir a aplicação normal de Gauss.

**Definição 3.9.** *Uma superfície regular  $S$  é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, tal que se um ponto  $q \in S$  pertencer a duas vizi-*

nhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em  $q$ . A escolha de uma tal família é chamada orientação de  $S$ , e, neste caso,  $S$  é chamada orientável. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é chamada não-orientável.

Se a superfície  $S$  é orientada, uma parametrização  $X$  local de  $S$  é compatível com a orientação de  $S$  se, juntando  $X$  à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (portanto, a mesma) orientação de  $S$ .

**Definição 3.10.** *Seja uma superfície regular  $S$ . A aplicação diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada de campo diferenciável normal em  $S$ .*

**Exemplo 3.7.** *Uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável, uma vez que toda superfície que pode ser coberta por uma só parametrização é orientável.*

Daremos uma interpretação geométrica para a Definição 3.9.

Seja uma parametrização  $X(u, v)$  em  $q$ , onde existe um vetor unitário normal  $N$  a  $q$  definido por

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q). \quad (3.3)$$

Escolhendo outra parametrização  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$  em  $q$ . Temos que

$$\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} = (X_u \wedge X_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})},$$

onde  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  é o Jacobiano da mudança de coordenadas.

Logo, o vetor unitário normal  $N$  preserva ou troca de sinal, dependendo do  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  ser positivo ou negativo, respectivamente.

Portanto, denominamos de campo diferencial de vetores normais em um aberto  $U \subset S$ , a uma região diferenciável  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a qual associa a cada  $q \in U$  um vetor unitário normal  $N(q) \in \mathbb{R}^3$ ,  $q \in S$ .

**Exemplo 3.8.** *A faixa de Möbius  $S$ , com parametrização dada por*

$$X(u, v) = \left( \left( 2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \sin u, \left( 2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right), \quad (3.4)$$

onde  $0 < u < 2\pi$  e  $-1 < v < 1$ , é um exemplo clássico de uma superfície não orientável. De fato, a vizinhança de coordenadas dada pela expressão (3.4) omite os pontos do in-

tervalo  $u = 0$ . Na superfície  $S$ , tomemos agora  $Ox$  como origem dos  $u$ 's, obtemos uma outra parametrização  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$  dada por

$$\begin{aligned} x &= \left\{ 2 - \bar{v} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right\} \cos \bar{u} \\ y &= - \left\{ 2 - \bar{v} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right\} \operatorname{sen} \bar{u} \\ z &= \bar{v} \cos \bar{u}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

neste caso, a vizinhança de coordenadas locais dado em (3.5), omite o intervalo (em relação a variável  $u$  dada no sistema de coordenadas (3.4))  $u = \frac{\pi}{2}$ . Essas duas vizinhanças de coordenadas cobrem a faixa de Möbius  $S$ . Observemos que a interseção das duas vizinhanças de coordenadas não é conexa, mas é constituída de duas componentes conexas, conforme a figura (3.8),

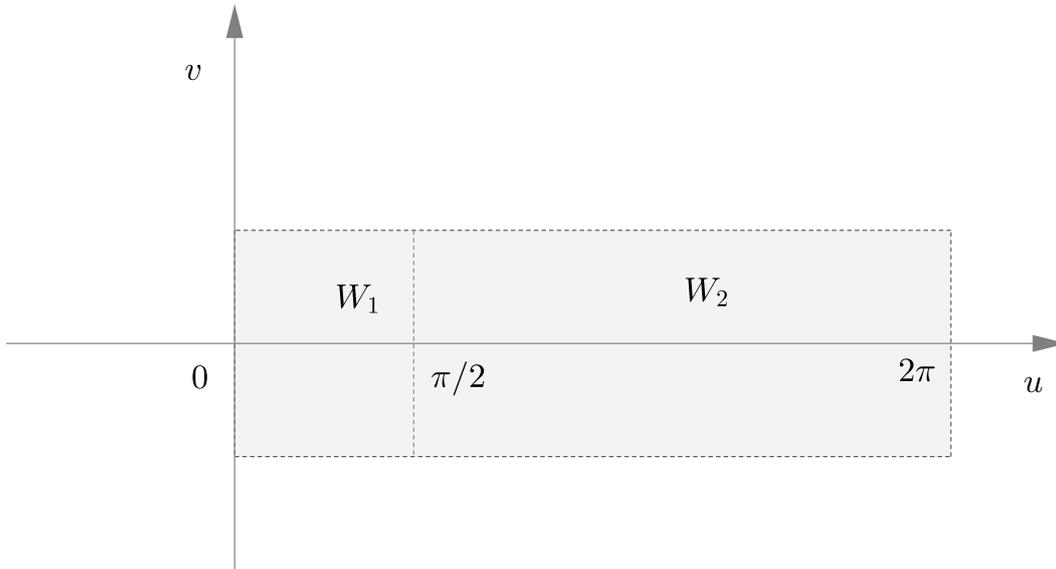


Figura 3.8: Vizinhanças de coordenadas

ou seja,

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ X(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\}, \\ W_2 &= \left\{ X(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notemos que, por um lado

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \operatorname{sen}\frac{\bar{u}}{2} + \cos\frac{\bar{u}}{2} \right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\frac{\bar{u}}{2} - \operatorname{sen}\frac{\bar{u}}{2} \right),\end{aligned}\tag{3.7}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \operatorname{sen}\frac{\bar{u}}{2} + \cos\frac{\bar{u}}{2} \right) \\ \cos\left(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\frac{\bar{u}}{2} - \operatorname{sen}\frac{\bar{u}}{2} \right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Segue das expressões (3.7) e (3.8) que

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{3\pi}{4}\right). \end{cases}\tag{3.9}$$

Como consequência da expressão (3.9), a mudança de coordenadas é dada por

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} &= v \end{aligned} \right\} \text{ em } W_1,\tag{3.10}$$

e

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{3\pi}{2} + u \\ \bar{v} &= -v \end{aligned} \right\} \text{ em } W_2.\tag{3.11}$$

Decorre das expressões (3.10) e (3.11) que

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = 1 > 0 \quad \text{em } W_1,$$

e

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -1 < 0 \quad \text{em } W_2.$$

Suponhamos que seja possível definir um campo diferenciável de vetores normais

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

então, pela equação (3.3)

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q)$$

para todo  $q$  na vizinhança de  $X(u, v)$ . Analogamente, podemos admitir

$$N(q) = \frac{\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}}}{|\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}}|}(q),$$

para todos os pontos da vizinhança coordenada  $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$ . Dependendo das eventuais mudanças, temos que o Jacobiano da mudança de coordenadas deve ser  $-1$  em  $W_1$  ou em  $W_2$ . Se  $q$  é um ponto dessa componente de interseção, então  $N(q) = -N(q)$ , o que é uma contradição.

Assim, concluímos que a superfície não pode ser orientável.

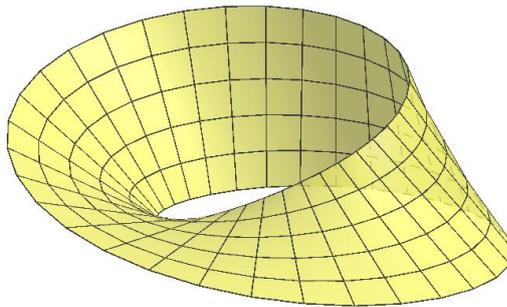


Figura 3.9: Faixa de Möbius

A partir de agora consideremos que  $S$  é uma superfície regular e possui orientação  $N$ .

**Definição 3.11.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , que toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

*é denominada como aplicação normal de Gauss.*

Em outras palavras, a aplicação diferenciável  $N : S \rightarrow S^2$  translada cada vetor unitário normal a  $S$  para a origem, conservando seu módulo e sua direção, formando uma esfera unitária centrada na origem.

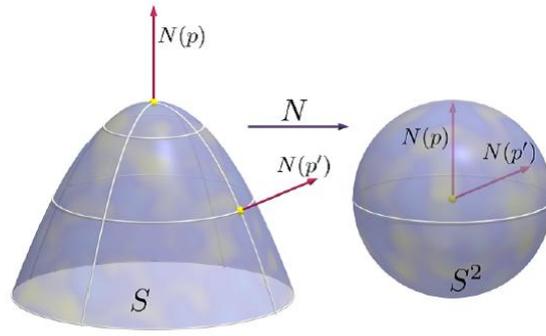


Figura 3.10: Aplicação normal de Gauss.  
Fonte: Delgado e Frensel (2019).

Podemos observar que a aplicação normal de Gauss é diferenciável, pois  $T_q S$  e  $T_{N(q)} S^2$  são espaços vetoriais iguais, logo a diferencial  $dN_q$  de  $N$  em  $q \in S$  é uma aplicação linear em  $T_q S$ . Esta aplicação  $dN_q : T_q S \rightarrow T_q S$  determina o quanto  $N$  se afasta de  $N(q)$  em uma vizinhança de  $q$ , ou seja, mede quanto a superfície  $S$  se afasta de  $T_q S$  em uma vizinhança de  $q$ .

**Proposição 3.6.** *Seja  $S$  uma superfície regular orientável. A diferencial  $dN_q : T_q S \rightarrow T_q S$  da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta de  $T_q S$ .*

*Demonstração.* Como  $dN_q$  é uma aplicação linear, resta mostrar que  $dN_q$  é auto-adjunta, isto é, vamos verificar que

$$\langle dN_q(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_q(w_2) \rangle, \quad (3.12)$$

onde  $\{w_1, w_2\}$  é uma base de  $T_q S$ . Seja  $X(u, v)$  uma parametrização da superfície regular  $S$  em  $q$  e seja  $\{X_u, X_v\}$  a base de  $T_q S$  associada a  $X$ . Consideremos uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  em  $S$ , logo

$$dN_q(\alpha'(t)) = dN_q(X_u u'(t), X_v v'(t)).$$

Fazendo  $\alpha(0) = q$ , temos

$$\begin{aligned} dN_q(\alpha'(0)) &= dN_q(X_u u'(0), X_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

Particularmente,  $dN_q(X_u) = N_u$  e  $dN_q(X_v) = N_v$ . Logo, para mostrar que  $dN_q$  é auto-adjunta, pela equação (3.12), é necessário provar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Como  $N$  é ortogonal ao plano  $T_qS$ , temos que

$$\langle N, X_u \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle N, X_v \rangle = 0. \quad (3.13)$$

Derivando as igualdades na expressão (3.13) em relação a  $v$  e  $u$  respectivamente, temos:

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0.$$

Segue que,

$$\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle$$

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle.$$

Pelo Teorema de Schwarz (Teorema (A.1.4) do apêndice),  $X_{uv} = X_{vu}$ , daí, segue que  $-\langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle$  e, então obtemos

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle.$$

Portanto, a diferencial  $dN_q$  da aplicação normal de Gauss é auto-adjunta.  $\square$

Veremos na próxima seção que podemos associar a aplicação linear auto-adjunta  $dN_q : T_qS \rightarrow T_qS$  a forma quadrática  $Q : T_qS \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $Q(w) = \langle dN_q(w), w \rangle$ ,  $w \in T_qS$ .

### 3.5 Segunda forma quadrática

**Definição 3.12.** *Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização da superfície regular orientável  $S$  e  $N$  uma aplicação normal de Gauss. A aplicação definida por*

$$II_q : T_q S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto II_q(w) = -\langle dN_q(w), w \rangle,$$

*é chamada segunda forma quadrática ou segunda forma fundamental de  $S$  em  $q$ , relativa a orientação  $N$ .*

A partir de agora consideremos que toda parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é compatível com a orientação  $N$  de  $S$ , ou seja, em  $X(U)$ , temos

$$N(u, v) = N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(u, v),$$

onde  $(u, v) \in U$ .

Vamos definir a segunda forma quadrática em um sistema de coordenadas locais.

Sejam  $X(u, v)$  uma parametrização local da superfície  $S$  em um ponto  $q \in S$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = q$ . Vamos convencionar que todas as funções abaixo possuem seus valores no ponto  $q$ , para sintetizar a notação.

Temos que o vetor tangente à curva  $\alpha(t)$  no ponto  $q$  é dado por  $\alpha' = X_u u' + X_v v'$  e  $N(\alpha(t)) = N(u(t), v(t))$ . Logo,

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como  $N_u$  e  $N_v \in T_q S$ , então podemos escrever esses vetores na base  $\{X_u, X_v\}$ , como

$$\begin{cases} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v, \end{cases} \quad (3.14)$$

e assim,

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v, \end{aligned}$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

onde  $dN$  é obtida pela matriz

$$dN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

na base  $\{X_u, X_v\}$ .

Observemos que esta matriz não é necessariamente simétrica. Entretanto, se a base  $\{X_u, X_v\}$  é ortonormal, a matriz  $dN$  é simétrica.

Podemos obter a segunda forma quadrática na base  $\{X_u, X_v\}$  dada por

$$\begin{aligned} II_q(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -((u')^2 \langle N_u, X_u \rangle + u' v' \langle N_u, X_v \rangle + v' u' \langle N_v, X_u \rangle + (v')^2 \langle N_v, X_v \rangle). \end{aligned}$$

Mas, pela Proposição (3.6),  $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$ , logo

$$II_q(\alpha') = -((u')^2 \langle N_u, X_u \rangle + 2u' v' \langle N_u, X_v \rangle + (v')^2 \langle N_v, X_v \rangle).$$

Fazendo

$$\begin{cases} e &= -\langle N_u, X_u \rangle, \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle, \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle, \end{cases} \quad (3.15)$$

obtemos os coeficientes da segunda forma quadrática. Portanto,

$$II_q(\alpha') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2. \quad (3.16)$$

Por outro lado, temos que  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ . Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\langle N, X_u \rangle &= \langle N_u X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}\langle N, X_u \rangle &= \langle N_v X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u}\langle N, X_v \rangle &= \langle N_u X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}\langle N, X_v \rangle &= \langle N_v X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Segue que, os coeficientes da segunda forma quadrática podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle, \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle.\end{aligned}$$

Iremos determinar em termos dos coeficientes da segunda forma quadrática os valores de  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ , da matriz  $dN$ , pelas expressões (3.14) e (3.15) obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} -e = \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f = \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}\langle X_u, X_v \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f = \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -g = \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}\langle X_u, X_v \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

onde  $E$ ,  $F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma quadrática na base  $\{X_u, X_v\}$ . Portanto, colocando a expressão (3.17) em termos matriciais, temos que

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

e, assim

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\
&= - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\
a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\
a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\
a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2},
\end{aligned}$$

são os valores para os coeficientes  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ , na base  $\{X_u, X_v\}$  da matriz  $dN$ .

As equações  $N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$  e  $N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$  expressas com os valores encontrados para  $a_{11}, a_{12}, a_{21}$  e  $a_{22}$  são as conhecidas **equações de Weingarten**.

### 3.6 Curvaturas

**Definição 3.13.** *Seja  $X(u, v)$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e  $q = (u_0, v_0)$ . A função curvatura normal  $k_n(w)$  de  $S$  em  $q$  é uma aplicação definida por*

$$\begin{aligned}
k_n : T_q S - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\
w \mapsto k_n(w) &= \frac{II_q(w)}{I_q(w)},
\end{aligned}$$

onde  $w \in T_q S$  é não-nulo.

Assim, podemos determinar a curvatura normal de uma curva em  $S$ .

**Definição 3.14.** *Seja  $\alpha$  uma curva regular da superfície  $S$ , parametrizada pelo comprimento de arco, passando por  $q \in S$ ,  $k$  é a curvatura de  $\alpha$  em  $q$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $\alpha$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $q$ . O número  $k_n = k \cos \theta$  é denominado a curvatura normal de  $\alpha \subset S$  em  $q$ .*

**Observação 2.** *A curvatura normal ( $k_n$ ) de  $\alpha$  em  $p$  não depende da orientação da curva  $\alpha$ , mas muda de sinal quando há uma mudança de orientação da superfície  $S$ .*

**Proposição 3.7.** (Meusnier). *Todas as curvas regulares de uma superfície  $S$  tendo em um ponto  $q \in S$  a mesma reta tangente, possuem neste ponto a mesma curvatura normal.*

**Observação 3.** *A Proposição (3.7), permite a definição de curvatura normal de  $S$  ao longo de uma dada direção  $w$  em  $T_q S$  no ponto  $q \in S$ . Dado um vetor unitário  $w \in T_q S$ , a interseção do traço de  $S$  com o plano que contém  $w$  e  $N(q)$  é a chamada seção normal da superfície  $S$  em  $q$  segundo uma direção  $w$ . Assim, a seção normal de  $S$  em  $q$  é o traço de uma curva regular plana em  $S$ , tal que o vetor normal  $n(q)$  é igual a  $\pm N(q)$  ou zero.*

Portanto, o valor absoluto da curvatura normal em  $q$  de uma curva regular  $\alpha(s)$  é igual a curvatura da seção normal de  $S$  em  $q$  ao longo de  $\alpha'(0)$ .

Voltemos agora à aplicação linear  $dN_q : T_q S \rightarrow T_q S$ . De acordo com o Teorema (A.1.1) do apêndice, para cada ponto  $q \in S$  existe uma base ortonormal  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_q S$  tal que  $dN_q(w_1) = -k_1 w_1$  e  $dN_q(w_2) = -k_2 w_2$  formadas pelos autovetores associados a  $k_1$  e  $k_2$ . Ademais, os autovalores  $k_1$  e  $k_2$ ,  $k_1 \geq k_2$  são os valores extremos da curvatura normal no ponto  $q$ , isto é, são o máximo e mínimo da segunda forma quadrática restrita ao círculo unitário de  $T_q S$ , novamente, segundo o Teorema (A.1.1).

**Definição 3.15.** *A curvatura normal máxima  $k_1 = k_n(w_1)$  e a curvatura normal mínima  $k_2 = k_n(w_2)$  são denominadas curvaturas principais de uma superfície  $S$  em  $q$ , onde  $w_1$  e  $w_2$  são chamados vetores principais, e suas direções em  $T_q S$  são chamadas direções principais.*

**Exemplo 3.9.** *Seja o sistema de coordenadas locais da esfera de raio  $a$*

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \cos v),$$

$$a > 0, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < \pi,$$

conhecida como coordenadas geográficas. Temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \operatorname{sen} v \cos u, 0), \\ X_v &= (a \cos v \cos u, a \cos v \operatorname{sen} u, -a \operatorname{sen} v). \end{aligned}$$

Logo, o vetor normal é

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(u, v) \\ &= \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 v \cos u, -a^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, -a^2 \operatorname{sen} v \cos u)}{a^2 \operatorname{sen} v} \\ &= (-\operatorname{sen} v \cos u, -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -\cos v), \end{aligned}$$

que aponta para o interior da esfera. As seções normais da esfera são círculos de raio  $a$ , com curvatura normal constante e igual a  $\frac{1}{a}$ . Assim, da Proposição (3.7) e Observação (3), temos

$$k_n(w) = \pm \frac{1}{a},$$

onde o sinal é resultante da parametrização de  $X$ .

**Exemplo 3.10.** O sistema de coordenadas locais

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma parametrização do parabolóide hiperbólico. Iremos calcular a curvatura normal em um ponto da superfície e encontrar as curvaturas principais. Temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, -2u), \\ X_v &= (0, 1, 2v), \\ X_{uu} &= (0, 0, -2), \\ X_{uv} &= (0, 0, 0), \\ X_{vv} &= (0, 0, 2), \\ N(u, v) &= \left( \frac{2u}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{-2v}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right). \end{aligned}$$

No ponto  $q = (0, 0)$ , os coeficientes da primeira e segunda forma quadrática são respecti-

vamente

$$E(0,0) = \langle (1,0,0), (1,0,0) \rangle = 1,$$

$$F(0,0) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = 0,$$

$$G(0,0) = \langle (0,1,0), (0,1,0) \rangle = 1,$$

e

$$e(0,0) = \langle (0,0,-2), (0,0,1) \rangle = -2,$$

$$f(0,0) = \langle (0,0,0), (0,0,1) \rangle = 0,$$

$$g(0,0) = \langle (0,0,2), (0,0,1) \rangle = 2.$$

Das equações (3.2) e (3.16), segue que:

$$I_q(w) = a^2 + b^2$$

e

$$II_q(w) = -2a^2 + 2b^2,$$

onde  $w = aX_u(0,0) + bX_v(0,0) \in T_qS$ . Pela Definição (3.13), para  $w \neq 0$ ,

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{-2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2},$$

para qualquer  $a, b$ , com  $a^2 + b^2 \neq 0$  temos

$$b^2 \leq a^2 + b^2,$$

ou seja,

$$\frac{b^2}{a^2 + b^2} \leq 1.$$

Daí,

$$k_n(w) = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2} + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \leq -\frac{2a^2}{a^2 + b^2} + 2 \leq 2$$

analogamente temos que

$$k_n(w) \geq -2.$$

Portanto,  $k_n(w)$  possui valor máximo em 2 e mínimo em  $-2$ , na direção de  $X_v$  e  $X_u$ , respectivamente.

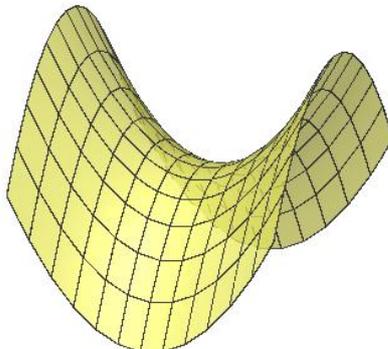


Figura 3.11: Parabolóide hiperbólico

**Definição 3.16.** *Seja  $S$  uma superfície regular. Se uma curva regular e conexa  $\alpha$  em  $S$  é tal que para todo  $q \in \alpha$  a reta tangente a  $\alpha$  é uma direção principal em  $q$ , então  $\alpha$  é dita uma linha de curvatura de  $S$ .*

**Exemplo 3.11.** *Todas as curvas regulares de um plano e de uma esfera são linhas de curvatura.*

**Definição 3.17.** *Sejam  $q \in S$  e  $dN_q : T_qS \rightarrow T_qS$  a diferencial da aplicação normal de Gauss. O determinante de  $dN_q$  é chamado a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $q$ . Em termos das curvaturas principais, temos que a curvatura Gaussiana é o produto entre  $k_1$  e  $k_2$ .*

$$K(q) = \det(dN_q) = k_1 k_2.$$

Podemos obter a curvatura Gaussiana  $K$  a partir dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas. Já vimos que os coeficientes  $a_{ij}$  da matriz de  $dN_q$  são:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - Fg}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
K &= \det(dN) \\
&= \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - \left( \frac{gF - Fg}{EG - F^2} \right) \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\
&= \frac{f^2F^2 - fgEF - efFG + egEG - egF^2 + fgEF + efFG - f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{f^2F^2 + egEF - egF^2 - f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{EG(eg - f^2) - F^2(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{(EG - F^2)(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2},
\end{aligned}$$

isto é,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (3.18)$$

**Definição 3.18.** *Sejam  $q \in S$  e  $dN_q : T_qS \rightarrow T_qS$  a diferencial da aplicação normal de Gauss. O negativo da metade do traço de  $dN_q$  é chamado a curvatura média de  $S$  em  $q$ . Em termos das curvaturas principais, temos que a curvatura média é a semi-soma de  $k_1$  e  $k_2$ .*

$$H(q) = -\frac{1}{2}\text{tr}(dN_q) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Para determinar a curvatura média  $H$  em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas, vamos lembrar que  $-k_1$  e  $-k_2$  são os autovalores de  $dN$ . Assim,  $k_1$  e  $k_2$  satisfazem, para algum  $w \in T_qS$ ,  $w \neq 0$ , a equação

$$dN(w) = -kw = -kI(w),$$

onde  $I$  é a aplicação identidade. Segue que, a aplicação linear  $dN + kI$  não possui inversa. Logo,

$$\det(dN + kI) = 0,$$

isto é,

$$\det \left[ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0,$$

segue que,

$$\begin{aligned}(a_{11} + k)(a_{22} + k) - (a_{12})(a_{21}) &= 0 \\ a_{11}a_{22} + a_{11}k + a_{22}k + k^2 - a_{12}a_{21} &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (3.19)$$

Como  $k_1$  e  $k_2$  são raízes da equação (3.19), concluímos que

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ &= -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{-eG + 2fF - gE}{EG - F^2} \right),\end{aligned}$$

isto é,

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right). \quad (3.20)$$

A partir das Definições (3.17) e (3.18), podemos determinar as curvaturas principais de  $S$  em  $q$  resolvendo o polinômio característico, que está na equação (3.19). Reescrevendo o mesmo temos:

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

onde  $2H = k_1 + k_2$  e  $K = k_1k_2$ . Logo,

$$\begin{aligned}k &= \frac{2H \pm \sqrt{4(H^2 - K)}}{2} \\ &= H \pm \sqrt{H^2 - K}.\end{aligned}$$

A relação acima, mostra que é possível encontrar as curvaturas principais a partir do conhecimento da curvatura média e da curvatura Gaussiana.

**Exemplo 3.12.** *Vimos no Exemplo (3.9) que a esfera com parametrização local*

$$X(u, v) = (a \operatorname{senv} \cos u, a \operatorname{senv} \operatorname{senu}, a \cos v)$$

$$a > 0, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < \pi,$$

*possui a curvatura normal constante  $k_n = \pm \frac{1}{a}$  para todo  $(u, v)$ . Logo, todo vetor unitário tangente é um vetor principal e as curvaturas principais são  $k_1 = k_2 = \pm \frac{1}{a}$ . Portanto,*

$$K \equiv k_1 k_2 \equiv \frac{1}{a^2} \quad e \quad H \equiv \frac{k_1 + k_2}{2} \equiv \pm \frac{1}{a}.$$

**Exemplo 3.13.** *Seja  $T$  um toro, com parametrização local dada por*

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{senv}, r \operatorname{senu}),$$

*$0 < u < 2\pi$ ,  $0 < v < 2\pi$  e  $r$  fixado com  $0 < r < a$ . Vamos determinar a curvatura Gaussiana e a curvatura média de um ponto qualquer do toro  $T$ . Já encontramos no Exemplo (3.6) os coeficientes da primeira forma quadrática, os quais são:*

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2.$$

*Então, resta calcular os coeficientes  $(e, f, g)$  da segunda forma quadrática. Temos que*

$$X_u = (-r \operatorname{senu} \cos v, -r \operatorname{senu} \operatorname{senv}, -r \cos u),$$

$$X_v = (-(a + r \cos u) \operatorname{senv}, (a + r \cos u) \cos v, 0),$$

$$X_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \operatorname{senv}, -r \operatorname{senu}),$$

$$X_{vv} = (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \operatorname{senv}, 0)$$

$$X_{uv} = (r \operatorname{senu} \operatorname{senv}, -r \operatorname{senu} \cos v, 0).$$

*Como o vetor unitário normal  $N$  é dado por  $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$ , e*

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2(a + r \cos u)^2} = r(a + r \cos u),$$

segue que,

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{X_u \wedge X_v}{r(a + r \cos u)}. \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da segunda forma quadrática são obtidos por

$$\begin{aligned} e = \langle N, X_{uu} \rangle &= \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{r(a + r \cos u)}, X_{uu} \right\rangle \\ &= \frac{1}{r(a + r \cos u)} \langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle \\ &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{r(a + r \cos u)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = \langle N, X_{uv} \rangle &= \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{r(a + r \cos u)}, X_{uv} \right\rangle \\ &= \frac{1}{r(a + r \cos u)} \langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle \\ &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{r(a + r \cos u)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g = \langle N, X_{vv} \rangle &= \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{r(a + r \cos u)}, X_{vv} \right\rangle \\ &= \frac{1}{r(a + r \cos u)} \langle X_u \wedge X_v, X_{vv} \rangle \\ &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{r(a + r \cos u)}. \end{aligned}$$

No que segue, calculando o valor de  $\det(X_u, X_v, X_{uu})$ ,  $\det(X_u, X_v, X_{uv})$  e  $\det(X_u, X_v, X_{vv})$  obtemos:

$$\begin{aligned}
\det(X_u, X_v, X_{uu}) &= \begin{vmatrix} -r \operatorname{sen} u \cos v & -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & -r \cos u \\ -(a + r \cos u) \operatorname{sen} v & (a + r \cos u) \cos v & 0 \\ r \cos u \cos v & -r \cos u \operatorname{sen} v & -r \operatorname{sen} u \end{vmatrix} \\
&= r^2 \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v (a + r \cos u) + r^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v (a + r \cos u) \\
&\quad + r^2 \cos^2 u \cos^2 v (a + r \cos u) + r^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v (a + r \cos u) \\
&= r^2 \cos^2 v (a + r \cos u) + r^2 \operatorname{sen}^2 v (a + r \cos u) = \\
&= r^2 (a + r \cos u);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(X_u, X_v, X_{uv}) &= \begin{vmatrix} -r \operatorname{sen} u \cos v & -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & -r \cos u \\ -(a + r \cos u) \operatorname{sen} v & (a + r \cos u) \cos v & 0 \\ r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & -r \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= r^2 \operatorname{sen} u \cos u \operatorname{sen} v \cos v (a + r \cos u) - r^2 \operatorname{sen} u \cos u \operatorname{sen} v \cos v (a + r \cos u) \\
&= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(X_u, X_v, X_{vv}) &= \begin{vmatrix} -r \operatorname{sen} u \cos v & -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & -r \cos u \\ -(a + r \cos u) \operatorname{sen} v & (a + r \cos u) \cos v & 0 \\ -(a + r \cos u) \cos v & -(a + r \cos u) \operatorname{sen} v & 0 \end{vmatrix} \\
&= r \operatorname{sen}^2 v \cos u (a + r \cos u)^2 + r \cos^2 v \cos u (a + r \cos u)^2 \\
&= r \cos u (a + r \cos u)^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
e &= \frac{r^2 (a + r \cos u)}{r (a + r \cos u)} = r, \\
f &= \frac{0}{r (a + r \cos u)} = 0 \\
g &= \frac{r \cos u (a + r \cos u)^2}{r (a + r \cos u)} = \cos u (a + r \cos u).
\end{aligned}$$

Finalmente, pela equação (3.18), a curvatura Gaussiana é obtida por

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{r(\cos u(a + r \cos u))^2}{r^2(a + r \cos u)^2} \\ &= \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}, \end{aligned}$$

e pela equação (3.20), a curvatura média do toro é dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{r(a + r \cos u)^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + \cos u(a + r \cos u)r^2}{r^2(a + r \cos u)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(r + a \cos u)(a + r \cos u)}{r^2(a + r \cos u)^2} \\ &= \frac{a + 2r \cos u}{2r(a + r \cos u)}. \end{aligned}$$

A seguir, veremos que a partir do sinal da curvatura Gaussiana em um ponto  $q$  podemos estudar o comportamento da superfície em pontos próximos de  $q$ .

**Definição 3.19.** *Seja  $X(u, v)$  uma parametrização local de uma superfície regular  $S$ . Dizemos que  $q = (u, v)$  é um ponto*

1. *elíptico se  $K(q) > 0$ , ou seja, as curvaturas principais possuem sinais iguais;*
2. *hiperbólico se  $K(q) < 0$ , ou seja, as curvaturas principais possuem sinais diferentes;*
3. *parabólico se  $K(q) = 0$  e  $H(q) \neq 0$ , ou seja, uma das curvaturas principais é não-nula;*
4. *planar se  $K(q) = 0$  e  $H(q) = 0$ , ou seja, as curvaturas principais são iguais a zero.*

**Exemplo 3.14.** *Todos os pontos de uma esfera  $S$  são pontos elípticos, pois de acordo com o Exemplo (3.12),*

$$K(q) > 0, \quad \forall q \in S.$$

**Exemplo 3.15.** *O ponto  $(0, 0, 0)$  do parabolóide hiperbólico  $X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto hiperbólico, pois como vimos no Exemplo (3.10) as curvaturas*

principais neste ponto são  $k_1 = 2$  e  $k_2 = -2$  e pela Definição (3.17), segue que para  $q = (0, 0, 0)$ , temos

$$K(q) = -4 < 0.$$

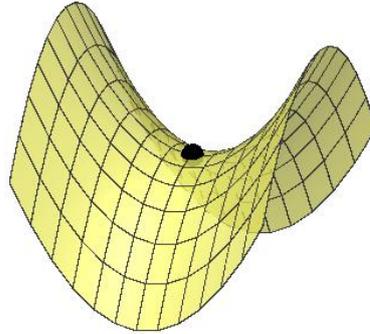


Figura 3.12: Ponto hiperbólico  $(0, 0, 0)$

**Exemplo 3.16.** Todos os pontos do cilindro, cujas coordenadas locais dadas por

$$X(u, v) = (\cos u, \operatorname{senu}, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

são pontos parabólicos, pois fazendo um simples cálculo temos

$$\left\{ \begin{array}{l} E(u, v) = 1 \\ F(u, v) = 0 \\ G(u, v) = 1 \\ e(u, v) = -1 \\ f(u, v) = 0 \\ g(u, v) = 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.18) e (3.20), obtemos

$$K \equiv 0 \quad e \quad H \equiv -\frac{1}{2}.$$

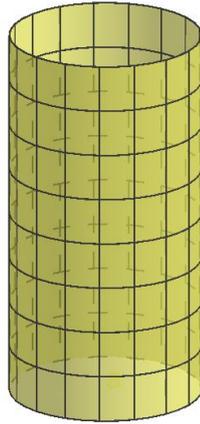


Figura 3.13: Pontos parabólicos

**Exemplo 3.17.** *Todo ponto de um plano é um ponto planar, pois usando o racíonio análogo mostramos que*

$$K \equiv 0 \quad e \quad H \equiv 0.$$

**Definição 3.20.** *Seja  $X(u, v)$  uma parametrização da superfície regular  $S$ . Um ponto  $q \in S$  é chamado um ponto umbílico de  $S$  quando as curvaturas principais  $k_1 = k_2$  em  $q$ , isto é, a curvatura normal  $k_n$  de qualquer vetor não-nulo é constante. Em particular, os pontos planares ( $k_1 = k_2 = 0$ ) são pontos umbílicos.*

**Exemplo 3.18.** *Todos os pontos de um plano e de uma esfera são pontos umbílicos.*

**Definição 3.21.** *Seja  $q \in S$ . Uma direção assíntota de  $S$  em  $q$  é uma direção de  $T_q S$  para a qual a curvatura normal é zero. Uma curva assíntota de  $S$  é uma curva conexa e regular  $\alpha \subset S$  tal que para cada  $q \in \alpha$  a reta tangente a  $\alpha$  em  $q$  é uma direção assíntótica.*

A partir da última definição, observamos que não existe direção assíntótica em um ponto elíptico.

**Exemplo 3.19.** *Seja uma superfície regular  $S$  e  $\alpha \subset S$  uma reta, então  $\alpha$  é uma linha assíntótica de  $S$ .*

As definições e proposições já apresentadas irão nos auxiliar no estudo das superfícies mínimas, as quais veremos no próximo capítulo.

# Capítulo 4

## Superfícies mínimas

Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades das interessantes superfícies mínimas. Veremos que essas superfícies especiais estão relacionadas ao problema, que consiste em encontrar uma superfície de menor área limitada por um contorno fechado no espaço, proposto por Lagrange para obter superfícies que minimizassem a área. Iremos compreender que todas as regiões limitadas das superfícies mínimas são pontos críticos da função área. As definições, teoremas, proposições, corolários e exemplos apresentados neste capítulo são fundamentados nos trabalhos de Barbosa e Colares (1986), Carmo (2005), Delgado e Frensel (2019), Fang (1996), Lawson (1973), Osserman (1969), Koiso (1984), Silva (2017), Couto (2018), Préve (2015), Carmo (2009) e Batista (2011).

### 4.1 Propriedades das superfícies mínimas

Começamos falando da definição de superfícies mínimas e algumas de suas propriedades.

**Definição 4.1.** *Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  que tem curvatura média igual a zero em todos os seus pontos é chamada de superfície mínima, isto é, se  $q \in S$*

$$H(q) \equiv 0.$$

**Observação 4.** *Se  $S$  é uma superfície mínima, então  $H \equiv 0$ . Logo, as curvaturas principais são  $k_1 = -k_2$ . Decorre que a curvatura gaussiana de  $S$  é  $K = k_1 k_2 = k_1(-k_1) = -k_1^2 \leq 0, \forall q \in S$ . Portanto, não existem superfícies mínimas com curvatura gaussiana*

$K > 0$ .

**Observação 5.** De acordo com o item 1 da Definição 3.19, não há pontos elípticos em superfícies mínimas.

Para esclarecer a utilização do termo “mínima” para essas superfícies, iremos introduzir a noção de variação.

**Definição 4.2.** Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização local de uma superfície regular  $S$ ,  $D \subset U$  uma região limitada de  $\mathbb{R}^2$  (tal que  $X$  restrita ao interior é injetiva) e  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, onde  $\bar{D}$  é a união de  $D$  com sua fronteira  $\partial D$ . A variação normal de  $X(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , é a aplicação diferenciável

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Um fato interessante é que para  $t$  suficientemente pequeno fixado,  $X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$  é uma parametrização local de uma superfície regular.

**Proposição 4.1.** Nas notações da Definição (4.2), para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  fixo, sejam  $X^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$  uma parametrização local de superfície regular,  $E^t$ ,  $F^t$ ,  $G^t$  os coeficientes da primeira forma quadrática de  $X^t$  e denotemos a área de  $X^t(D)$  por  $A(t)$ . Então,

$$A'(0) = - \int \int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2} dudv,$$

onde  $E$ ,  $F$ ,  $G$  são os coeficientes da primeira forma quadrática de  $S$ .

*Demonstração.* Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  fixo, a região  $X^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$  é uma superfície parametrizada com

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^t}{\partial u} &= X_u^t = X_u + thN_u + th_uN, \\ \frac{\partial X^t}{\partial v} &= X_v^t = X_v + thN_v + th_vN. \end{aligned}$$

Assim sendo, ao denotar por  $E^t, F^t, G^t$  os coeficientes da primeira forma quadrática de  $X^t$  e ao utilizar o fato de que

$$\begin{aligned}\langle X_u, N \rangle &= \langle X_v, N \rangle = 0, \\ \langle N_u, N \rangle &= \langle N_v, N \rangle = 0,\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}E^t &= \langle X_u, X_u \rangle + 2t\langle X_u, h_u N \rangle + 2th\langle X_u, N_u \rangle \\ &\quad + 2t^2h\langle h_u N, N_u \rangle + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_u h_u \\ &= E + th(\langle X_u, N_u \rangle + \langle X_u, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_u h_u, \\ F^t &= \langle X_u, X_v \rangle + t\langle X_u, h_v N \rangle + th\langle X_u, N_v \rangle \\ &\quad + t\langle h_u N, X_v \rangle + t^2\langle h_u N, h_v N \rangle + t^2h_u h_v \\ &\quad + th\langle X_v, N_u \rangle + t^2\langle h_u N, h_v N \rangle + t^2h^2\langle N_u N_v \rangle \\ &= F + th(\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u N_v \rangle + t^2h_u h_v, \\ G^t &= \langle X_v, X_v \rangle + 2t\langle X_v, h_v N \rangle + 2th\langle X_v, N_v \rangle \\ &\quad + 2t^2h\langle h_v N, N_v \rangle + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_v h_v \\ &= E + th(\langle X_v, N_v \rangle + \langle X_v, N_v \rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_v h_v,\end{aligned}$$

além disso, como

$$\begin{aligned}-e &= \langle X_u, N_u \rangle, \\ -2f &= \langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle, \\ -g &= \langle X_v, N_v \rangle,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}E^t &= E - 2the + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_u h_u, \\ F^t &= F - 2thf + t^2h^2\langle N_u N_v \rangle + t^2h_u h_v, \\ G^t &= G - 2thg + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_v h_v.\end{aligned}$$

Como já vimos na equação (3.20) que a curvatura média  $H$  da superfície  $S$  é definida por

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

obtemos a partir dos valores de  $E^t, F^t, G^t$  que

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= (E - 2the + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u)(G - 2thg + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v) \\ &\quad - (F - 2thf + t^2 h^2 \langle N_u N_v \rangle + t^2 h_u h_v)^2 \\ &= EG - F^2 - 2thgE - 2theG + 4thfF + R(t) \\ &= EG - F^2 - 2th(eG - 2fF + gE) + R(t) \\ &= EG - F^2 - 2th(2H(EG - F^2)) + R(t) \\ &= EG - F^2 - 4thH(EG - F^2) + R(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$E^t G^t - (F^t)^2 = (EG - F^2)(1 - 4thH) + R(t), \quad (4.1)$$

onde

$$\begin{aligned} R(t) &= t^2 \left( h^2 (E \langle N_v, N_v \rangle + 4eg + G \langle N_u, N_u \rangle - 2F \langle N_u, N_v \rangle - 4f^2) + Eh_v h_v + Gh_u h_u \right. \\ &\quad \left. - 2Fh_u h_v \right) + t^3 \left( h^3 (-2e \langle N_v, N_v \rangle - 2g \langle N_u, N_u \rangle + 4f \langle N_u, N_v \rangle) + h(2(-eh_v h_v \right. \\ &\quad \left. - gh_u h_u + h_u h_v (f + h))) \right) + t^4 \left( h^4 (\langle N_u, N_u \rangle \langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_v \rangle \langle N_u, N_v \rangle) \right. \\ &\quad \left. + h^2 (h_v h_v \langle N_u, N_v \rangle + h_u h_u \langle N_v, N_v \rangle) - 2h_u h_v \langle N_u, N_v \rangle - h_u^2 h_v^2 \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

é uma função tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t} = 0.$$

Assim,  $X^t$  é uma superfície parametrizada regular, se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno.

Além do mais, substituindo a equação (4.1) na área  $A(t)$  de  $X^t(\bar{D})$ , temos:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv \\ &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + R(t)} dudv, \end{aligned} \quad (4.3)$$

colocando  $EG - F^2$  em evidência na equação (4.3), temos

$$\int \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}(t)} \sqrt{EG - F^2} dudv, \quad (4.4)$$

onde  $\bar{R}(t) = \frac{R(t)}{EG - F^2}$ . Desse modo, se  $\varepsilon$  é pequeno,  $A$  é uma função diferenciável. Derivando  $A$  em relação a  $t$  na equação (4.4), temos:

$$\begin{aligned} A'(t) &= \int \int_{\bar{D}} \frac{1}{2\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}(t)}} \left( -4hH + \bar{R}'(t) \right) \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \int \int_{\bar{D}} \frac{1}{\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}(t)}} \left( -2hH + \frac{R'(t)}{EG - F^2} \right) \sqrt{EG - F^2} dudv. \end{aligned}$$

Aplicando a derivada em  $t = 0$ , obtemos

$$A'(0) = \int \int_{\bar{D}} \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{R}(0)}} \left( -2hH + \frac{R'(0)}{EG - F^2} \right) \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Pela equação (4.2)  $R(0) = 0$  e

$$\bar{R}(0) = \frac{R(0)}{EG - F^2} = 0 \quad R'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t} = 0,$$

logo,

$$A'(0) = - \int \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (4.5)$$

□

A partir de agora, estamos aptos para justificar a utilização da palavra mínima em superfícies com curvatura média igual a zero.

**Proposição 4.2.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e seja  $D \subset U$  um domínio limitado em  $U$ . Então  $X$  é **mínima** em  $D$  se, e somente se,  $A'(0) = 0$  para toda variação normal de  $X(\bar{D})$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $X$  é uma superfície mínima, então pela Definição (4.1),

$H \equiv 0$  em  $D$ , substituindo isto na equação (4.5), temos que  $A'(0) = 0$ .

Reciprocamente, vamos supor que  $A'(0) = 0$  e que  $H(q) \neq 0$ , para algum  $q \in D$ . Seja  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(q) = H(q)$ ,  $hH > 0$  e  $h$  é identicamente nula com exceção de uma pequena vizinhança de  $q$ . Então, novamente pela equação (4.5)

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2h^2 \sqrt{EG - F^2} dudv < 0,$$

para determinada variação da função  $h$ , e isto é uma contradição.

Portanto,  $X$  é uma superfície mínima em  $D$  se, e somente se,  $A'(0) = 0$ .  $\square$

Desse modo, qualquer região limitada  $X(\bar{D})$  de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de  $X(\bar{D})$ .

**Exemplo 4.1.** *Seja  $\Pi$  um plano que passa pelo ponto  $q = (a_0, b_0, c_0)$  e paralelo as direções dos vetores linearmente independentes  $w_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $w_2 = (a_2, b_2, c_2)$ , cuja parametrização é dada por*

$$X(u, v) = q + uw_1 + vw_2, (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

*Vamos mostrar que o plano é uma superfície mínima.*

*Como,*

$$X_u = (a_1, b_1, c_1),$$

$$X_v = (a_2, b_2, c_2),$$

$$X_{uu} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

*os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas são, respectivamente:*

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2,$$

e

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = 0,$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = 0,$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = 0.$$

Assim, a curvatura média é

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{0 \cdot (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - 2 \cdot 0 \cdot (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + 0 \cdot (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o plano  $\Pi$  é uma superfície mínima.

**Exemplo 4.2.** Seja o helicóide conforme figura (3.4), obtido pela parametrização dada por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{senu}, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Vamos calcular as curvaturas Gaussiana e média e determinar se a superfície  $X$  é mínima.

Já encontramos no Exemplo (3.5) os coeficientes da primeira forma quadrática, os quais são

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = v^2 + a^2,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1.$$

Temos que

$$X_{uu} = (-v \cos u, -v \operatorname{sen} u, 0),$$

$$X_{uv} = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

O vetor normal é dado por

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|},$$

onde  $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{v^2 + a^2}$ . Logo,

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{v^2 + a^2}}.$$

Usando o fato de que o produto vetorial de  $X_u$  e  $X_v \in \mathbb{R}^3$ , nesta ordem, é o único vetor  $X_u \wedge X_v \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$\langle X_u, X_v, w \rangle = \det(X_u, X_v, w), \forall w \in \mathbb{R}^3,$$

temos que os coeficientes da segunda forma quadrática são obtidos por

$$\begin{aligned} e = \langle N, X_{uu} \rangle &= \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{v^2 + a^2}}, X_{uu} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{v^2 + a^2}} \det(X_u, X_v, X_{uu}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = \langle N, X_{uv} \rangle &= \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{v^2 + a^2}}, X_{uv} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{v^2 + a^2}} \det(X_u, X_v, X_{uv}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g = \langle N, X_{vv} \rangle &= \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{v^2 + a^2}}, X_{vv} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{v^2 + a^2}} \det(X_u, X_v, X_{vv}). \end{aligned}$$

Calculando o valor de  $\det(X_u, X_v, X_{uu})$ ,  $\det(X_u, X_v, X_{uv})$  e  $\det(X_u, X_v, X_{vv})$  temos

$$\begin{aligned} \det(X_u, X_v, X_{uu}) &= \begin{vmatrix} -v \operatorname{sen} u & v \cos u & a \\ \cos u & \operatorname{sen} u & 0 \\ -v \cos u & -v \operatorname{sen} u & 0 \end{vmatrix} \\ &= -av \cos u \operatorname{sen} u + av \cos u \operatorname{sen} u = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(X_u, X_v, X_{uv}) &= \begin{vmatrix} -v \operatorname{sen} u & v \cos u & a \\ \cos u & \operatorname{sen} u & 0 \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \end{vmatrix} \\ &= a \cos^2 u + a \operatorname{sen}^2 u = a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(X_u, X_v, X_{vv}) &= \begin{vmatrix} -v \operatorname{sen} u & v \cos u & a \\ \cos u & \operatorname{sen} u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} e &= \frac{0}{\sqrt{v^2 + a^2}} = 0, \\ f &= \frac{a}{\sqrt{v^2 + a^2}} \\ g &= \frac{0}{\sqrt{v^2 + a^2}} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, a curvatura Gaussiana é

$$\begin{aligned}
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{0.0 - \left(\frac{a}{\sqrt{v^2+a^2}}\right)^2}{v^2 + a^2} = -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2}.
\end{aligned}$$

A curvatura média do helicóide é dada por

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{0.1 - 2\left(\frac{a}{\sqrt{v^2+a^2}}\right) \cdot 0 + 0 \cdot (v^2 + a^2)}{v^2 + a^2} = 0.
\end{aligned}$$

Como a curvatura média é nula, o helicóide é uma superfície mínima.

**Definição 4.3.** O vetor curvatura média de uma superfície parametrizada regular é o vetor  $\mathbf{H} = HN$ , onde  $H$  é a curvatura média e  $N$  é o vetor normal à superfície.

O significado geométrico da direção de  $\mathbf{H}$  é obtido da equação (4.5). De fato, escolhendo  $h = H$ , temos para essa variação particular,

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \sqrt{EG - F^2} dudv < 0.$$

Isso significa que se deformarmos  $X(\bar{D})$  na direção de  $\mathbf{H}$ , a área inicial é decrescente.

Veremos que o vetor curvatura média possui outra interpretação.

**Definição 4.4.** Uma superfície parametrizada regular  $S = X(u, v)$  é denominada como isotérmica se  $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$  e  $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ .

**Proposição 4.3.** Seja  $S = X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e suponha que  $S$  é isotérmica. Então

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

onde  $\lambda^2 = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ .

*Demonstração.* Como  $S$  é isotérmica,

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad \text{e} \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad (4.6)$$

ou seja, o coeficiente  $F$  da primeira forma quadrática é igual a zero. Derivando as duas equações de (4.6) em relação a  $u$  e  $v$ , respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} \langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle, \\ \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = 0. \end{cases}$$

Segue que,

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle.$$

Logo,

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0.$$

De modo análogo, derivando as duas equações de (4.6) em relação a  $v$  e  $u$ , respectivamente, obtemos

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0.$$

Como  $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = \langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0$ , segue que  $X_{uu} + X_{vv}$  é paralelo a  $N$ . Sendo a superfície  $S$  isotérmica, temos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{eG + Eg}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Ee + Eg}{E^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e + g}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$2\lambda^2 H = e + g = \langle N, X_{uu} \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = \langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle.$$

Portanto,

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 H N = 2\lambda^2 \mathbf{H}. \quad \square$$

**Definição 4.5.** Dada uma função diferencial  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

(i) O Laplaciano da função  $f$ , denotado por  $\Delta f$ , é definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, (u, v) \in U.$$

(ii) Dizemos que  $f$  é harmônica  $\forall (u, v) \in U$  se  $\Delta f = 0$ .

**Corolário 4.1.** Seja  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  uma superfície parametrizada regular e suponha que  $X$  é isotérmica. Então  $X$  é mínima se, e somente se, as suas funções coordenadas  $x, y, z$  são harmônicas.

*Demonstração.* Suponhamos que  $X$  é uma superfície mínima, então  $H \equiv 0$ . Pela Proposição (4.3) temos que

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H} = 0,$$

ou seja, para as funções coordenadas,  $x, y$  e  $z$  temos

$$x_{uu} + x_{vv} = y_{uu} + y_{vv} = z_{uu} + z_{vv} = 0, \quad (4.7)$$

logo, pela Definição (4.5) (ii), concluímos que as funções coordenadas  $x, y, z$  são funções harmônicas.

Reciprocamente, suponhamos que as funções coordenadas  $x, y$  e  $z$  sejam harmônicas, isto é, satisfazem as identidades (4.7), que em outras palavras,

$$X_{uu} + X_{vv} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = 0 = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

mas pela Proposição (4.3),

$$\lambda^2 = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \geq 0.$$

Se  $\lambda = 0$ , então  $X_u = X_v = 0$ , ou seja, a superfície  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  teria  $x, y, z$  constantes o que reduziria  $X(u, v)$  a um ponto, para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , o que é um absurdo.

Portanto,  $\lambda^2 > 0$ , e assim  $H \equiv 0$ , isto é,  $X$  é uma superfície mínima.  $\square$

No próximo exemplo daremos uma aplicação do Corolário (4.1).

**Exemplo 4.3.** *Seja a superfície  $S$  o catenóide com parametrização dada por*

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{senu}, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

*conforme figura (3.3).*

*Temos que*

$$\begin{aligned} X_u &= (-a \cosh v \operatorname{senu}, a \cosh v \cos u, 0), \\ X_v &= (a \sinh v \cos u, a \sinh v \operatorname{senu}, a), \\ X_{uu} &= (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \operatorname{senu}, 0), \\ X_{vv} &= (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{senu}, 0), \\ X_{uv} &= (-a \sinh v \operatorname{senu}, a \sinh v \cos u, 0). \end{aligned}$$

*Os coeficientes da primeira forma quadrática são obtidos por*

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= a^2 \cosh^2 v \operatorname{sen}^2 u + a^2 \cosh^2 v \operatorname{cos}^2 u \\ &= a^2 \cosh^2 v, \\ F = \langle X_u, X_v \rangle &= -a^2 \sinh v \cosh v \operatorname{senu} \cos u + a^2 \sinh v \cosh v \operatorname{senu} \cos u \\ &= 0, \\ G = \langle X_v, X_v \rangle &= a^2 \sinh^2 v \operatorname{cos}^2 u + a^2 \sinh^2 v \operatorname{sen}^2 u + a^2 \\ &= a^2 \sinh v + a^2 \\ &= a^2 (\sinh^2 v + 1) \\ &= a^2 \cosh^2 v. \end{aligned}$$

*Como  $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \cosh^2 v$  e  $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ , o sistema de coordenadas  $X$  é isotérmico.*

*Além do mais,*

$$X_{uu} + X_{vv} = (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \operatorname{senu}, 0) + (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{senu}, 0) = 0.$$

Portanto, pelo Corolário (4.1), o catenóide é uma superfície mínima. Iremos mostrar que esta superfície é a única superfície de revolução não-plana que é mínima.

Antes de enunciar o próximo teorema envolvendo as superfícies mínimas, vamos definir quando um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  é fechado, limitado e compacto.

**Definição 4.6.** *Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ .*

(i) *Dizemos que  $A$  é fechado se toda sequência convergente de pontos de  $A$  tem seu limite pertencente a  $A$ .*

(ii) *Dizemos que  $A$  é limitado se ele está contido em alguma bola de  $\mathbb{R}^3$ .*

(iii) *Dizemos  $A$  é compacto se é fechado e limitado.*

**Exemplo 4.4.** *A esfera e o toro são superfícies compactas. O parabolóide de revolução  $z = x^2 + y^2$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  é fechado e ilimitado, portanto não é uma superfície compacta. A faixa de Möbius é limitada mas não é fechada, logo não é compacta.*

**Teorema 1.** *Não existe superfície mínima que seja compacta.*

*Demonstração.* De fato, ao supor que a superfície mínima  $S$  é compacta, podemos obter  $R > 0$  suficientemente grande de modo que a superfície  $S$  esteja contida no interior de uma esfera  $S^2(R)$  de raio  $R$ . Diminuindo  $R$ , de forma contínua, irá existir um valor  $R_0 > 0$  tal que a esfera  $S^2(R_0)$  de raio  $R_0$  seja tangente a  $S$  em  $q \in S$ . A curvatura normal da esfera  $S^2(R_0)$  é dada por

$$k_n(w) = \frac{1}{R_0},$$

para todo  $w \in T_q S$ . Como as esferas  $S^2(R)$  e  $S^2(R_0)$  são tangentes em  $q$ , observemos que as curvaturas das seções normais de  $S$  em  $q$ , cada uma delas é maior ou igual do que as circunferências de raio  $R_0$  que correspondem as seções normais da esfera  $S^2(R_0)$  em  $q$ . Desse modo, as curvaturas principais de  $S$  em  $q$  são

$$k_1 \geq \frac{1}{R_0} > 0 \quad \text{e} \quad k_2 \geq \frac{1}{R_0} > 0.$$

Logo, a curvatura normal de Gauss de  $S$  em  $q$  é obtida por

$$K = k_1 k_2 \geq \frac{1}{(R_0)^2} > 0.$$

Portanto, como  $K > 0$  a superfície  $S$  não é mínima, pois se  $S$  fosse mínima,  $K \leq 0$ , contradição.  $\square$

Em geral, acredita-se que o estudo das superfícies mínimas iniciou com Lagrange em 1760. Ele considerava uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  como gráfico de uma função de classe  $C^2$ , tal que  $z = f(x, y)$ . Esta superfície possui elemento de área definido por

$$dM = (EG - F^2)dx \wedge dy = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}dx \wedge dy.$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma quadrática.

Lagrange queria encontrar uma superfície com menor área entre todas as superfícies que assumem um dado valor na fronteira de um conjunto aberto  $U$  do plano (com interior compacto e fronteira diferenciável).

Se  $z = f(x, y)$  é uma solução desse problema, vamos considerar então uma família de funções  $z_t = f(x, y) + t\eta(x, y)$ , onde  $\eta(x, y)$  é uma função diferenciável de classe  $C^2$ , que se anula na fronteira de  $U$ . Definindo,

$$A(t) = \int_{\bar{U}} [1 + (z_t)_x^2 + (z_t)_y^2]^{\frac{1}{2}} dx dy. \quad (4.8)$$

**Teorema 2.** *Seja  $z = f(x, y)$  uma solução do problema de Lagrange, então*

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0.$$

*Demonstração.* Como definimos no problema de Lagrange  $z_t = f(x, y) + t\eta(x, y)$ . Calculando as derivadas em  $z_t(x, y)$ , e substituindo na equação (4.8), obtemos

$$A(t) = \int_{\bar{U}} [(1 + f_x^2 + f_y^2) + 2t(f_x \eta_x + f_y \eta_y) + t^2(\eta_x^2 + \eta_y^2)]^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Fazendo  $p = f_x$ ,  $q = f_y$  e  $w = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$ , temos

$$A(t) = \int_{\bar{U}} [(w^2 + 2t(p\eta_x + q\eta_y) + t^2(\eta_x^2 + \eta_y^2))]^{\frac{1}{2}} dx dy. \quad (4.9)$$

Derivando a equação (4.9) em relação a  $t$ , obtemos

$$A'(t) = \int_{\bar{U}} \frac{(p\eta_x + q\eta_y) + t(\eta_x^2 + \eta_y^2)}{(w^2 + 2t(p\eta_x + q\eta_y) + t^2(\eta_x^2 + \eta_y^2))^{\frac{1}{2}}} dx dy.$$

Aplicando a derivada em  $t = 0$ , temos

$$A'(0) = \int_{\bar{U}} \left( \frac{p}{w} \eta_x + \frac{q}{w} \eta_y \right) dx dy.$$

Como

$$\frac{p}{w} \eta_x + \frac{q}{w} \eta_y = \left\langle \left( \frac{p}{w}, \frac{q}{w} \right), (\eta_x, \eta_y) \right\rangle$$

fazendo

$$\text{grad } g = \left( \frac{p}{w}, \frac{q}{w} \right) \quad \text{e} \quad \text{grad } f = \text{grad } \eta,$$

conforme Corolário (A.1.1) (ii) do apêndice, e lembrando que  $\Delta g = \text{div}(\text{grad } g)$  e sendo  $\vec{n}$  a normal exterior ao gráfico de  $g$ , e como estamos olhando para  $f$  como uma função em  $\mathbb{R}^3$  (o divergente e o gradiente são os usuais em  $\mathbb{R}^3$ ), como pode ser visto com maiores detalhes em Guidorizzi (2002). Assim obtemos:

$$A'(0) = \int_{\partial \bar{U}} \eta \left\langle \left( \frac{p}{w}, \frac{q}{w} \right), \vec{n} \right\rangle ds - \int_{\bar{U}} \eta \text{div} \left( \frac{p}{w}, \frac{q}{w} \right) dx dy. \quad (4.10)$$

Observemos, pela natureza do problema, que  $\eta|_{\partial \bar{U}} = 0$ , daí a equação (4.10) fica:

$$A'(0) = \int_{\bar{U}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{w} \right) \right) \eta dx dy.$$

Como  $z = f(x, y)$  representa a solução para o problema, então  $A(0)$  é um ponto de mínimo para a função  $A(t)$ , e desse modo,  $A'(0) = 0$ . Isso acontece para alguma função  $\eta$  escolhida em que a restrição de  $\eta$  à  $\partial \bar{U}$  é nula. Desse modo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{w} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Desenvolvendo os cálculos na equação (4.11) acima, temos que:

$$\frac{p_x w - p w_x}{w^2} + \frac{q_y w - q w_y}{w^2} = 0. \quad (4.12)$$

Como

$$p_x = f_{xx}, \quad q_y = f_{yy}, \quad w_x = \frac{f_x f_{xx} + f_y f_{xy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad w_y = \frac{f_y f_{yy} + f_x f_{yx}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

segue da equação (4.12) que

$$p_x w - p w_x + q_y w - q w_y = 0,$$

isto é equivalente a

$$f_{xx}(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}} - f_x \left( \frac{f_x f_{xx} + f_y f_{xy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + f_{yy}(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}} - f_y \left( \frac{f_y f_{yy} + f_x f_{yx}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = 0,$$

ou seja,

$$f_{xx}(1 + f_x^2 + f_y^2) - f_x(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) + f_{yy}(1 + f_x^2 + f_y^2) - f_y(f_y f_{yy} + f_x f_{yx}) = 0.$$

Logo

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0.$$

□

Desse modo, encontramos a equação diferencial parcial

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0, \quad (4.13)$$

que é uma condição necessária para a solução do problema apresentado por Lagrange, ou seja,  $z = f(x, y)$  deve satisfazer essa condição para gerar uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$ . Em geral, concluímos que as superfícies mínimas que são gráfico de função são pontos críticos do funcional  $A(t)$ .

Lagrange observou que uma função linear é solução para a equação (4.13) e assim pressupôs que existem outras soluções em alguma curva dada ao longo da fronteira de  $U$ .

Em 1776, Meusnier obteve uma interpretação geométrica para (4.13) e mostrou que a curvatura média da superfície  $z = f(x, y)$  era igual a zero, isto é,

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0,$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  correspondem as curvaturas principais, já introduzidas por Euler. Ele determinou soluções para a equação (4.13) com propriedades especiais como, por exemplo, uma solução na qual as curvas de nível são retas.

**Teorema 3.** *Seja  $S$  uma superfície mínima dada pelo gráfico da função  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se as curvas de nível de  $f$  são retas, então  $S$  é parte de um plano ou parte de um helicóide.*

*Demonstração.* Inicialmente, observamos que uma curva dada implicitamente por  $f(x, y) = c$ , pela Proposição (2.4) tem curvatura dada por

$$k = \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_x f_y f_{xy} - f_{yy}f_x^2}{|\text{grad } f|^3}.$$

Desse modo, usando a equação (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} k|\text{grad } f|^3 &= -(f_{xx}f_y^2 - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}f_x^2) \\ &= -(f_{xx}f_y^2 - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}f_x^2 + f_{xx} + f_{yy}) + f_{xx} + f_{yy} \\ &= -(f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2)) + f_{xx} + f_{yy} \\ &= f_{xx} + f_{yy}. \end{aligned}$$

Por hipótese, as curvas de nível da função  $f$  são retas, logo  $k = 0$  e  $f$  é uma função harmônica, ou seja,

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Portanto, a função  $f$  satisfaz o sistema de equações diferenciais parciais (4.14),

$$\begin{cases} f_{xx}f_y^2 - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}f_x^2 = 0 \\ f_{xx} + f_{yy} = 0 \\ f_{xy} = f_{yx} \end{cases} \quad (4.14)$$

Agora iremos integrar este sistema de equações e definir explicitamente  $f$ . Para isto, vamos usar os recursos de variáveis complexas, de acordo com o do Teorema A.1.5 e o Corolário A.1.2 do apêndice. Sejam

$$z = x + iy \quad \text{e} \quad w = f_x - if_y,$$

lembramos que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Observemos que  $f = \frac{1}{2} \text{Re} \int w dz$ , onde  $\text{Re}$  corresponde a parte real de um número complexo.

Se  $w \equiv 0$ ,  $f$  é constante. Suponhamos então que  $w \neq 0$ . Pelo sistema de equações (4.14) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (f_x - i f_y) \\ &= \frac{1}{2} (f_{xx} - i f_{xy} + i f_{yx} + f_{yy}) \\ &= \frac{1}{2} (f_{xx} + f_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário (A.1.2),  $w = w(z)$  é holomorfa. Ademais, lembremos também que, sendo  $\bar{z}$  o conjugado do complexo  $z$ , temos

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z),$$

daí,

$$\begin{aligned} w^2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \bar{w}^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) &= 2\text{Re} \left( \bar{w}^2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\ &= 2\text{Re} \left( (\overline{f_x - i f_y})^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (f_x - i f_y) \right) \right) \\ &= 2\text{Re} \left( \frac{1}{2} (f_x + i f_y)^2 (f_{xx} - i f_{xy} - i f_{yx} - f_{yy}) \right) \\ &= 2\text{Re} \frac{1}{2} ((f_x^2 - f_y^2) + 2i f_x f_y) ((f_{xx} - f_{yy}) - i(f_{xy} + f_{yx})) \\ &= -(f_x^2 f_{yy} + f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy}) + 2f_x f_y (f_{xy} + f_{yx}) + f_x^2 f_{xx} + f_y^2 f_{yy} \\ &= f_x^2 f_{xx} + f_y^2 f_{yy} + 2f_x f_y (f_{xy} + f_{yx}) \\ &= f_x^2 f_{xx} + f_y^2 f_{yy} + f_x^2 f_{yy} + f_y^2 f_{xx} \\ &= (f_y^2 + f_x^2) (f_{xx} + f_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

Como  $2\operatorname{Re}\left(\bar{w}^2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) = 0$ , ou seja,  $\bar{w}^2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$  é imaginário puro, isto é,

$$\bar{w}^2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = ig(z), \quad g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R},$$

onde  $g$  é uma função real.

Segue que,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{ig(z)}{|\bar{w}|^4} w^2,$$

e tomando  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $\rho(z) = \frac{g(z)}{|w|^4}$ , observamos que,  $\frac{\partial w}{\partial z} = i\rho(z)w^2$ .

Como  $w$  é holomorfa,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  também é holomorfa, logo  $\rho$  é holomorfa.

Escrevendo  $\rho = u + iv$ , e observando que  $\rho$  é uma função real, isto é,  $v \equiv 0$ , e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann  $u_x = v_y = 0, u_y = -v_x = 0$ , temos que  $\rho$  é constante.

Integrando

$$\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial z} = i\rho z,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{w^2} dw &= i\rho \int dz \\ -w^{-1} &= i\rho z + c_1 \\ w^{-1} &= -(i\rho z + c_1) \\ w &= -(i\rho z + c_1)^{-1}, \quad c_1 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

donde

$$\int w dz = - \int \frac{1}{i\rho z + c_1} dz = \begin{cases} c_2 z + c_3, & \text{se } \rho = 0, \\ \frac{i}{\rho} (\log(\rho z + c_1) + c_4), & \text{se } \rho \neq 0, \end{cases}$$

onde  $c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ .

Como  $f = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int w dz$ , vamos separar em dois casos:

(i) se  $\rho = 0$ , e fazendo  $c_2 = A_1 - iA_2, c_3 = A_3 + iA_4$ ,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(c_2 z + c_3) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(c_2 x + ic_2 y + c_3) \\ &= A_1 x + A_2 y + A_3. \end{aligned}$$

(ii) se  $\rho \neq 0$ , e lembrando que,  $\log z = \ln |z| + i \arg z$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{i}{\rho} \log(i\rho z + c_1) + c_4 \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{i}{\rho} (\ln |(i\rho z + c_1)| + i \arg(i\rho z + c_1)) + c_4 \right) \\ &= \frac{-1}{2\rho} \arg(i\rho z + c_1) + A_4. \end{aligned}$$

Fazendo  $c_1 = A_2 + iA_3$ , observamos que

$$\begin{aligned} i\rho(z) + c_1 &= i\rho(x + iy) + A_2 + iA_3 \\ &= (A_2 - \rho y) + i(A_3 + \rho x), \end{aligned}$$

lembramos que para  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , para  $x \neq 0$ ,  $\arg z = \arctan \frac{y}{x}$  e então

$$\arg(i\rho z + c_1) = \arctan \left( \frac{A_3 + \rho x}{A_2 - \rho y} \right),$$

$x, y \in \mathbb{R}$ , com  $y \neq \frac{A_2}{\rho}$ .

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{2\rho} \arctan \left( \frac{A_3 + \rho x}{A_2 - \rho y} \right) + A_4, \text{ se } \rho \neq 0; \\ f(x, y) &= A_1 x + A_2 y + A_3, \text{ se } \rho = 0, \end{aligned}$$

onde  $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}$ .

A partir dos resultados acima, observemos que se  $\rho = 0$ , a função  $f$  representa

uma parte do plano e, se  $\rho \neq 0$ ,  $f$  corresponde a uma parte do helicóide, dado por:

$$\begin{aligned} A_3 + \rho x &= u \operatorname{sen} v, \\ A_2 - \rho y &= u \operatorname{cos} v, \\ z - A_4 &= \frac{1}{2\rho} v. \end{aligned}$$

Portanto, provamos que uma superfície mínima obtida pelo gráfico de uma função  $z = f(x, y)$ , cujas curvas de nível são retas é localmente o helicóide.  $\square$

Em 1835, Scherk resolveu a equação (4.13) utilizando funções da forma  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  e encontrou outro exemplo de superfície mínima, como iremos ilustrar a seguir.

**Teorema 4. (Superfície de Scherk)** *Seja  $S$  uma superfície mínima dada pelo gráfico da função  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se*

$$f(x, y) = g(x) + h(y),$$

*então, ou  $S$  é um plano ou a menos de constantes*

$$f(x, y) = \frac{1}{a} \log \left( \frac{\operatorname{cos}(ax)}{\operatorname{cos}(ay)} \right),$$

*onde  $a$  é uma constante não nula.*

*Demonstração.* Por hipótese,  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ , então temos

$$\begin{cases} f_x = g'(x), & f_x = g''(x), \\ f_y = h'(y), & f_y = h''(y), \\ f_{xy} = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Além disso, temos que  $f$  é o gráfico de uma superfície mínima, então substituindo as expressões (4.15) na equação (4.13), a mesma se reduz a

$$(1 + h'^2(y))g''(x) + (1 + g'^2(x))h''(y) = 0. \quad (4.16)$$

Observemos que se

$$g''(x) = 0,$$

então

$$h''(y) = 0,$$

ou vice-versa. Neste caso, a solução de  $f$  é

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

que é um plano.

Vamos supor então que  $g''(x) \neq 0$  ou  $h''(y) \neq 0$ , neste caso, a equação (4.16) é equivalente a

$$-\frac{g''(x)}{1 + g'^2(x)} = \frac{h''(y)}{1 + h'^2(y)}, \quad (4.17)$$

onde  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, daí cada membro da equação (4.17) deve ser igual a uma constante  $a \neq 0$ , ou seja,

$$\begin{cases} -\frac{g''(x)}{1 + g'^2(x)} = a, \\ \frac{h''(y)}{1 + h'^2(y)} = a. \end{cases} \quad (4.18)$$

Resolvendo as equações diferenciais de (4.18) em  $g$  e  $h$ , determinaremos a solução para as funções  $g$  e  $h$ . Escolhendo resolver  $h$  e fazendo  $h'(y) = u$ , obtemos  $\frac{du}{dy} = h''(y)$ , e assim

$$\frac{du}{1 + u^2} = a dy. \quad (4.19)$$

Integrando, ambos os membros da equação (4.19), a menos de constantes, obtemos

$$\arctan u = ay,$$

ou seja,

$$u = \tan(ay),$$

daí,

$$h'(y) = \tan(ay), \quad \text{onde } -\frac{\pi}{2} < ay < \frac{\pi}{2}. \quad (4.20)$$

Podemos escrever  $h'(y) = \frac{dh}{dy}$ , e integrando novamente a equação (4.20), a menos de constantes, obtemos

$$h(y) = -\frac{1}{a} \log(\cos(ay)). \quad (4.21)$$

De modo análogo, obtemos que

$$g(x) = \frac{1}{a} \log(\cos(ax)). \quad (4.22)$$

Substituindo os valores encontrados nas equações (4.21) e (4.22) em  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ , temos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{a} \log(\cos(ax)) - \frac{1}{a} \log(\cos(ay)) \\ &= \frac{1}{a} \log\left(\frac{\cos(ax)}{\cos(ay)}\right). \end{aligned}$$

□

Portanto, o gráfico de  $f$  que encontramos no Teorema (4) é chamado de superfície mínima de Scherk.

Notemos que esta superfície é definida num domínio parecido a um tabuleiro de xadrez, com exceção dos vértices dos quadrados, onde esta função representa uma reta vertical.

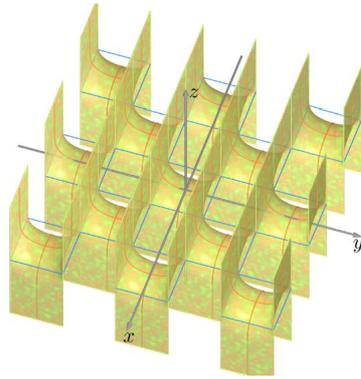


Figura 4.1: Superfície mínima Scherk.  
Fonte: Delgado e Frensel (2019)

**Proposição 4.4.** *Toda superfície mínima de revolução em  $\mathbb{R}^3$  é, a menos de um movimento rígido, parte de um catenóide ou parte de um plano.*

*Demonstração.* Consideremos uma superfície obtida por uma curva  $\alpha(t) = (v(t), f(t), 0)$  girando em torno do eixo  $Ox$ .

Se  $v'(t) = 0$  para todo  $t$  no qual a curva  $\alpha$  é definida, então  $v(t)$  é uma constante e a superfície gerada é parte do plano ortogonal ao eixo  $Ox$ , pois neste caso a curva  $\alpha$  é uma reta ortogonal ao eixo  $Ox$ .

Suponhamos agora que  $v(t)$  não é constante. Logo, existe um ponto  $t_0$  tal que  $v'(t) \neq 0$ , para algum  $t$  que pertence a uma vizinhança de  $t_0$ . Assim, consideremos a curva  $\alpha$  na forma  $(v, f(v), 0)$ , em uma vizinhança do ponto  $\alpha(t_0)$ . Parte da superfície gerada pela rotação de  $(v, f(v), 0)$  possui parametrização definida por

$$X(u, v) = (v, f(v) \cos u, f(v) \operatorname{senu}).$$

Inicialmente, vamos calcular os valores de  $E, F, G, e, f, g$ , coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas, respectivamente. Para isso, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} X_u = (0, -f(v) \operatorname{senu}, f(v) \cos u), \\ X_v = (1, f'(v) \cos u, f'(v) \operatorname{senu}), \\ X_{uu} = (0, -f(v) \cos u, -f(v) \operatorname{senu}), \\ X_{vv} = (0, f''(v) \cos u, f''(v) \operatorname{senu}), \\ X_{uv} = (0, -f'(v) \operatorname{senu}, f'(v) \cos u). \end{array} \right.$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
E = \langle X_u, X_u \rangle &= f^2(v) \operatorname{sen}^2 u + f^2(v) \operatorname{cos}^2 u = f^2(v), \\
F = \langle X_u, X_v \rangle &= -f'(v)f(v) \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u + f'(v)f(v) \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u = 0, \\
G = \langle X_v, X_v \rangle &= 1 + f'^2(v) \operatorname{cos}^2 u + f'^2(v) \operatorname{sen}^2 u = 1 + f'^2(v).
\end{aligned}$$

Então resta calcular os coeficientes da segunda forma quadrática. Como o vetor unitário normal  $N$  é dado por  $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$ , e

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{f^2(v)(1 + f'^2(v))},$$

logo,

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{f^2(v)(1 + f'^2(v))}}.$$

Assim, os coeficientes da segunda forma quadrática são obtidos por

$$\begin{aligned}
e = \langle N, X_{uu} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{f^2(v)(1 + f'^2(v))}} \langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle \\
&= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{f^2(v)(1 + f'^2(v))}};
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
f = \langle N, X_{uv} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{f^2(v)(1 + f'^2(v))}} \langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle \\
&= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{f^2(v)(1 + f'^2(v))}};
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
g = \langle N, X_{vv} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{f^2(v)(1 + f'^2(v))}} \langle X_u \wedge X_v, X_{vv} \rangle \\
&= \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{f^2(v)(1 + f'^2(v))}}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Calculando o valor de  $\det(X_u, X_v, X_{uu})$ ,  $\det(X_u, X_v, X_{uv})$  e  $\det(X_u, X_v, X_{vv})$  temos

$$\begin{aligned}
\det(X_u, X_v, X_{uu}) &= \begin{vmatrix} 0 & -f(v) \operatorname{senu} & f(v) \cos u \\ 1 & -f'(v) \cos u & f'(v) \operatorname{senu} \\ 0 & -f(v) \cos u & -f(v) \operatorname{senu} \end{vmatrix} \\
&= -f^2(v) \cos^2 u - f^2(v) \operatorname{sen}^2 u = -f^2(v); \tag{4.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(X_u, X_v, X_{uv}) &= \begin{vmatrix} 0 & -f(v) \operatorname{senu} & f(v) \cos u \\ 1 & -f'(v) \cos u & f'(v) \operatorname{senu} \\ 0 & -f'(v) \operatorname{senu} & f'(v) \cos u \end{vmatrix} \\
&= -f'(v) f(v) \cos u \operatorname{senu} + f'(v) f(v) \cos u \operatorname{senu} = 0; \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(X_u, X_v, X_{vv}) &= \begin{vmatrix} 0 & -f(v) \operatorname{senu} & f(v) \cos u \\ 1 & -f'(v) \cos u & f'(v) \operatorname{senu} \\ 0 & f''(v) \cos u & f''(v) \operatorname{senu} \end{vmatrix} \\
&= f''(v) f(v) \cos^2 u + f''(v) f(v) \operatorname{sen}^2 u = f''(v) f(v). \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (4.26), (4.27) e (4.28), respectivamente, nas expressões (4.23), (4.24) e (4.25), obtemos:

$$\begin{aligned}
e &= \frac{-f^2(v)}{\sqrt{f^2(v)(1+f'^2(v))}}, \\
f &= 0, \\
g &= \frac{f''(v)f(v)}{\sqrt{f^2(v)(1+f'^2(v))}}.
\end{aligned}$$

Como a superfície  $X$  é mínima, a curvatura média é igual a zero, isto é,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0.$$

Assim,

$$2H = \frac{\left(\frac{-f^2(v)}{\sqrt{f^2(v)(1+f'^2(v))}}\right)(1+f'^2(v)) - 2.0.0 + \left(\frac{f''(v)f(v)}{\sqrt{f^2(v)(1+f'^2(v))}}\right)(f^2(v))}{f^2(v)(1+f'^2(v))} = 0,$$

isto equivale a

$$\frac{f^2(v)}{\sqrt{f^2(v)(1+f'^2(v))}} \left( f(v)f''(v) - 1 - f'^2(v) \right) = 0 \quad (4.29)$$

Observemos que  $f(v) > 0$ , então a equação (4.29) se reduz a

$$f(v)f''(v) - 1 - f'^2(v) = 0,$$

e assim, chegamos na seguinte equação diferencial

$$-ff'' + f'^2 + 1 = 0. \quad (4.30)$$

Na equação (4.30) a variável independente está ausente, neste caso usando a transformação

$$\frac{df}{dv} = p, \quad (4.31)$$

a qual derivando, usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d^2f}{dv^2} = \frac{dp}{df} \frac{df}{dv} = p \frac{dp}{df}, \quad (4.32)$$

substituindo as expressões (4.31) e (4.32) na equação (4.30), temos que

$$-fp \frac{dp}{df} + p^2 + 1 = 0, \quad (4.33)$$

separando as variáveis em (4.33), obtemos

$$\frac{1}{f} df = \frac{p}{1+p^2} dp. \quad (4.34)$$

Integrando ambos os lados da equação (4.34) encontramos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{f} df &= \int \frac{p}{1+p^2} dp \\
\ln f &= \frac{1}{2} \ln(1+p^2) + \ln a, a \in \mathbb{R} \\
\ln f &= \ln(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \ln a \\
f &= a\sqrt{1+p^2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{f}{a}\right)^2 = 1 + p^2. \quad (4.35)$$

Isolando  $p$  na equação (4.35) temos

$$p = \sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2 - 1}.$$

Como,  $p = \frac{df}{dv}$ , segue que

$$\frac{df}{dv} = \sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2 - 1},$$

isto é,

$$\frac{df}{\sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2 - 1}} = dv. \quad (4.36)$$

Integrando a equação (4.36), obtemos

$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{f}{a}\right) = \frac{v}{a} + b,$$

portanto,

$$f(v) = a \operatorname{cosh}\left(\frac{v}{a} + b\right).$$

Isso mostra que obtemos uma catenária. Deste modo, a curva geradora  $\alpha$  coincide em toda a parte com o gráfico da função  $f(v)$ .  $\square$

Em 1864, segundo Carmo (2009), Enneper apresentou uma superfície mínima em

que quando o ponto  $(u, v)$  descreve uma região suficientemente pequena de  $\mathbb{R}^2$ , o ponto  $X(u, v)$  descreve uma superfície regular de  $\mathbb{R}^3$  que é mínima.

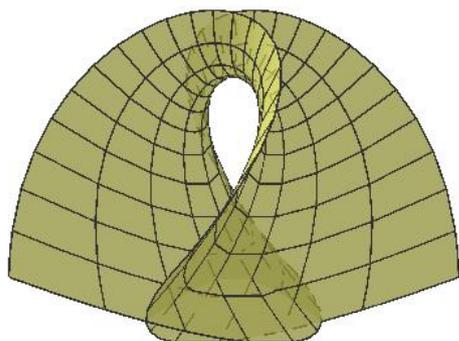
A superfície de Enneper possui duas auto-interseções ao longo de duas curvas da superfície. Isso ocorre na interseção da superfície com o plano  $y = 0$  e  $x = 0$ .

As funções que representam a superfície de Enneper são mais simples, pois envolvem somente somas e produtos.

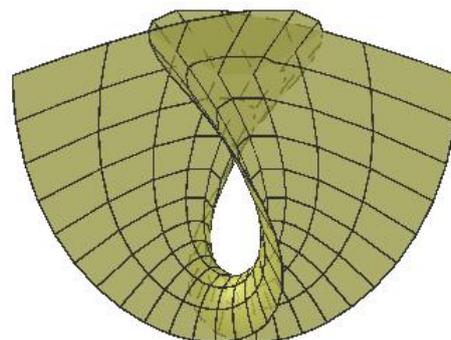
**Exemplo 4.5.** A Superfície de Enneper é a superfície mínima com parametrização dada por

$$X(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right),$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .



(a) Superfície de Enneper.



(b) Superfície de Enneper girada de  $\frac{\pi}{2}$  em relação ao eixo Oz.

Figura 4.2: Superfície de Enneper.

## 4.2 Algumas aplicações no ensino médio

Nessa seção abordaremos a presença de superfícies mínimas em contextos variados com o propósito de sugerir que essas superfícies sejam estudadas de maneira introdutória no Ensino Médio. Para esse fim, utilizamos como referências os trabalhos de Moreira Jr. e Elia (1987), Carmo (2009), Melo e Andrade (2018) e Silva e Silva (2014).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da área de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, a partir de um ambiente de ensino-aprendizagem, é possível desenvolver no discente uma competência na qual ele possa ser capaz de

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2019, p.540).

Nesse sentido, é que apresentamos algumas sugestões para uma introdução ao estudo das superfícies mínimas no Ensino Médio, associadas às situações-problemas matemáticos contextualizados e interdisciplinares, com o intuito de estimular a curiosidade, a investigação e o raciocínio matemático.

Para isso, além das películas de sabão que já são naturalmente associadas às superfícies mínimas, poderão ser utilizados objetos de uso cotidiano e/ou decoração, fotos de elementos da natureza e de construções arquitetônicas para que seja possível identificar as curvas referentes a essas superfícies contidas em contextos diversos.

#### 4.2.1 As películas de sabão

Já vimos que o método para “visualizar” as superfícies mínimas por meio das películas de sabão, foi criado pelo físico Plateau. Ele descobriu que devido às leis físicas da tensão superficial, essas superfícies formadas pelas películas de sabão possuem área mínima para um dado contorno fechado de arame. Dessa forma, sugerimos que sejam realizados alguns experimentos envolvendo as películas de sabão como meio para aguçar a curiosidade e interesse dos discentes, pois esses experimentos servem para verificar que a resposta para um problema proposto é verdadeira.

Para o desenvolvimento dessa atividade, propomos abordar inicialmente um breve histórico referente ao problema estudado por Lagrange, que seria, sem grande rigor, determinar uma superfície de menor área dentre todas as compreendidas em um contorno fechado no espaço.

Seguem abaixo dois experimentos para obter duas superfícies mínimas, por meio das películas de sabão.

1<sup>o</sup> Experimento: Obter uma superfície de área mínima, a partir de uma hélice, ou seja, o helicóide.

2<sup>o</sup> Experimento: Obter uma superfície de área mínima limitada por duas circunferências de mesmo diâmetro, coaxiais e paralelas, ou seja, o catenóide.



Figura 4.3: Helicóide.

Fonte: <http://bugman123.com/MinimalSurfaces/>

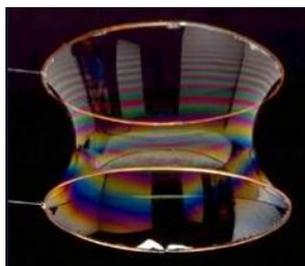
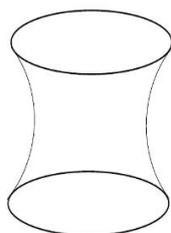


Figura 4.4: Catenóide.

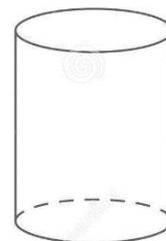
Fonte: <https://blog.matthen.com/post/4388587600/a-soap-film-between-two-circular-bubble-wands-will>

Durante o desenvolvimento da atividade propomos alguns questionamentos: quais as formas geométricas utilizadas para se obter essas superfícies? Seria possível obter essas superfícies utilizando outras formas geométricas? É possível obter um cilindro com essas duas circunferências de mesmo diâmetro coaxiais e paralelas? O que acontece se afastarmos as duas circunferências coaxiais e paralelas?

Nesse contexto, observamos que de posse do conhecimento de que as películas de sabão são superfícies que minimizam a área superficial, os discentes podem, por exemplo, identificar qual dos dois sólidos de revolução abaixo, com um contorno fixo possui a menor área.



(a) Catenóide.



(b) Cilindro.

Figura 4.5: Sólidos de revolução.

Concomitantemente, recomendamos que seja trabalhado de modo interdisciplinar alguns conceitos envolvendo a física, como a elasticidade temporária das películas de sabão e a sua tensão superficial.

Seguem abaixo outras superfícies, que possuem área mínima, formadas por películas de sabão e contornos fechados de arame em formatos variados.



Figura 4.6: Superfície 1.

Fonte: [https://matemateca.ime.usp.br/acervo/peliculas\\_sabao.html](https://matemateca.ime.usp.br/acervo/peliculas_sabao.html)

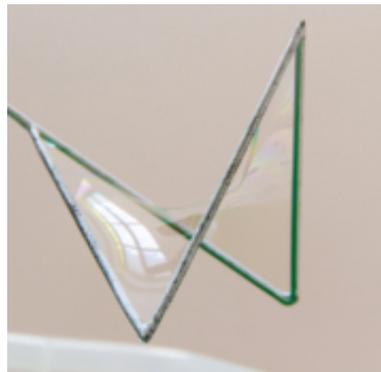


Figura 4.7: Superfície 2.

Fonte: [https://matemateca.ime.usp.br/acervo/peliculas\\_sabao.html](https://matemateca.ime.usp.br/acervo/peliculas_sabao.html)

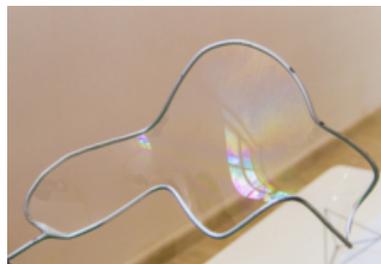


Figura 4.8: Superfície 3.

Fonte: [https://matemateca.ime.usp.br/acervo/peliculas\\_sabao.html](https://matemateca.ime.usp.br/acervo/peliculas_sabao.html)

Sugerimos em seguida, que sejam realizados mais dois experimentos, para observar que nem todas as superfícies formadas por películas de sabão são mínimas.

3º Experimento: Obter uma superfície de área mínima limitada pelas arestas de um tetraedro.

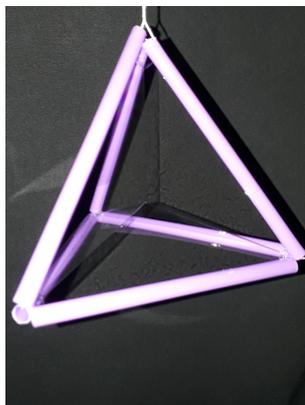


Figura 4.9: Superfície limitada pelo tetraedro.

4º Experimento: Obter as bolhas de sabão.



Figura 4.10: Bolha de sabão.

Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Bolha\\_de\\_sabão](https://pt.wikipedia.org/wiki/Bolha_de_sabão)

Recomendamos que seja enfatizado que a superfície obtida pela película de sabão usando o contorno fechado em forma de tetraedro possui área mínima, mas não é uma superfície mínima, pois possui singularidades ao longo de retas e, de acordo com a Definição 4.1, as superfícies mínimas são superfícies parametrizadas regulares. Em seguida, propomos discutir se as bolhas de sabão são superfícies mínimas por meio dos seguintes questionamentos: uma superfície mínima deve ter uma borda fixa? As bolhas de sabão atendem a essa propriedade?

Ao final sugerimos ressaltar que a superfície esférica apesar de ser o sólido que contém a menor área externa para um dado volume fixo, quando comparada a outras figuras geométricas, ela não é uma superfície mínima, por não ter curvatura média nula em todos os seus pontos, conforme cálculos realizados no Exemplo 3.12.

Finalmente, apresentar a Superfície Costa, uma superfície mínima descoberta por um brasileiro, o Celso José da Costa.

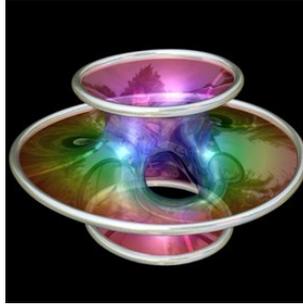


Figura 4.11: Superfície Costa.

Fonte: <https://www.obaricentrodamente.com/2017/08/a-superficie-costa.html>

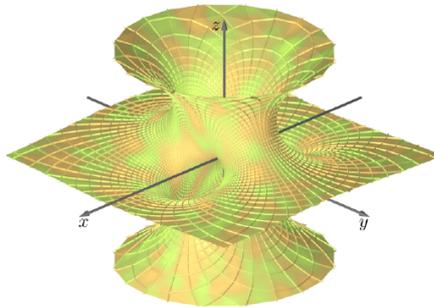


Figura 4.12: Superfície Costa.

Fonte: Delgado e Frensel (2019)

De acordo com Alberti e Duran (2014), em entrevista, Celso Costa disse que essa superfície possui “coordenadas em cima de um toro”, isto é, possui a “forma topológica de um toro menos três pontos”. Nesse trabalho não especificamos parametrizações para a Superfície Costa, visto que não encontramos nas publicações elencadas nas referências bibliográficas.

#### 4.2.2 O helicóide e as retas

O helicóide, conforme Exemplo 3.5, com parametrização dada por  $X(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{senu}, au)$ ,  $0 < u < 2\pi$ ,  $-\infty < v < \infty$ , é obtido por meio da união da hélice circular,  $\alpha(u) = (\cos u, \operatorname{senu}, au)$ ,  $a \neq 0$ , com retas paralelas ao plano  $xy$  que intersecta o eixo  $Oz$ , isto é, retas  $r_u = v(\cos u, \operatorname{senu}, 0) + (0, 0, au)$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , que passam por cada ponto da hélice. Assim, por todo ponto  $q$  que pertence ao helicóide passa uma reta inteiramente

contida nele, ou seja, o helicóide é uma superfície mínima regrada, conforme Definição A.1.4 do apêndice.

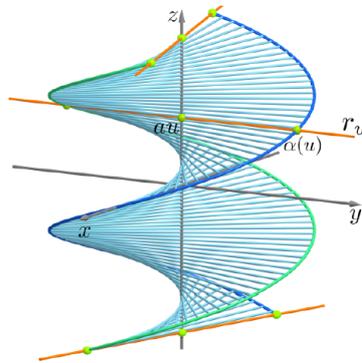


Figura 4.13: Helicóide  
Fonte: Delgado e Frensel (2019)

Diante desse contexto, sugerimos que seja produzido com os discentes do Ensino Médio um helicóide manualmente utilizando material concreto (palitos de sorvete e arame), para que os alunos possam verificar como ocorre a construção dessa superfície mínima utilizando as retas. Seguem abaixo, dois exemplos de helicóides construídos a partir de palitos de sorvete.

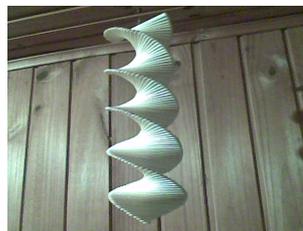


Figura 4.14: Helicóide 1.  
Fonte: <https://artesanatonarede.com.br/mensageiro-dos-ventos/>



Figura 4.15: Helicóide 2.  
Fonte: <http://palitoearte.blogspot.com/2011/05/>

### 4.2.3 Superfícies mínimas em contextos diversos

Podemos identificar diversas figuras que possuem as curvas das superfícies mínimas encontradas em contextos variados, como na natureza, arquitetura, objetos cotidianos, entre outros, que podem ser utilizadas para contribuir com o ensino e aprendizagem de forma significativa, a partir de observações investigativas dessas figuras com o intuito de reconhecer e estabelecer alguma relação com as superfícies mínimas.

Desse modo, apresentamos abaixo, algumas imagens que podem ser associadas a forma do catenóide.



Figura 4.16: Lata 1.

Fonte: <https://www.clubeextra.com.br/produto/109232/cappuccino-de-chocolate-classic-nescafe-lata-200g>



Figura 4.17: Objeto.

Fonte: <https://hiveminer.com/Tags/antitlastic%2Cforming>

Durante o desenvolvimento dessa atividade, além da observação criteriosa para o reconhecimento e identificação de formas relacionadas às superfícies mínimas, sugerimos que sejam realizadas algumas discussões referentes a sua utilização nas mais diversas áreas, como meio para o exercício da curiosidade, investigação, reflexão, pensamento lógico e análise crítica.

Exibimos agora algumas formas encontradas que lembram o helicóide.

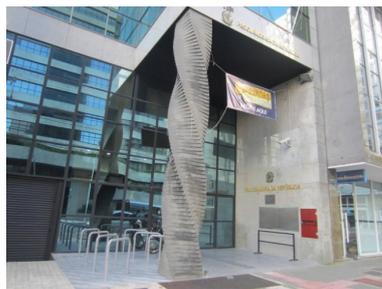


Figura 4.18: Procuradoria Geral da República do Estado do Paraná.

Fonte: <https://www.hojeemdia.com.br/primeiro-plano/politica/lava-jato-acha-pagamentos-de-operadores-do-pmdb-na-suiça-e-nas-bahamas-1.447947/procuradoria-da-republica-1.447963>



Figura 4.19: DNA.

Fonte: <https://www.istockphoto.com/br/foto/dna-molecules-on-the-beautiful-backdrop-gm629430458-111999121>



Figura 4.20: Lata 2.



Figura 4.21: Museu do Louvre, Paris/França

Fonte: <https://www.pinterest.fr/pin/292311832048235565/>



Figura 4.22: Capela Loretto, Estado do Novo México/EUA  
Fonte: <https://saopio.wordpress.com/tag/escada-de-sao-jose/>



Figura 4.23: Gavinha.  
Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Hélice\\_\(geometria\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Hélice_(geometria))

Ao analisar as figuras referentes as latas 1 e 2, com as formas do catenóide e helicóide, respectivamente, sugerimos os seguintes questionamentos: qual o motivo da utilização de uma forma geométrica mínima na indústria? Essas formas mínimas diminuem a quantidade de matéria-prima utilizada na fabricação desses recipientes? Se diminuir a quantidade de matéria-prima na produção, diminuem os custos? Quem recebe os lucros da utilização das formas mínimas? Qual material utilizado na fabricação dessas latas? Qual o tempo para decomposição desse material na natureza? Como a forma mínima reduz a quantidade de metal na fabricação das latas, isso pode contribuir de alguma forma com a preservação do meio ambiente?

No que tange à utilização de formas mínimas em construções arquitetônicas podemos estimular a discussão por meio das seguintes perguntas: qual forma mínima conseguimos identificar nessas construções? Por que essas formas mínimas devem ter sido utilizadas? Será que sua utilização está relacionada com a economia de material? Além da beleza da aparência visual, essas formas podem tornar essas construções mais resistentes? Elas podem contribuir para minimizar os efeitos naturais (desgastes físicos)? A utilização dessas formas representa uma evolução na arquitetura?

Finalmente, sugerimos enfatizar que existem na natureza algumas formas naturais que buscam o equilíbrio com o meio para continuarem a se desenvolver. Essas formas encontradas na natureza remetem a ideia de formas mínimas.

# Considerações finais

As superfícies mínimas possuem um abrangente campo de aplicações nas mais diversas áreas, sendo de grande interesse de pesquisadores. Neste trabalho, o objetivo principal era o estudo envolvendo propriedades dessas superfícies com o intuito de sugerir posteriormente que esse tema fosse abordado de modo introdutório e acessível nas aulas de matemática do Ensino Médio. Além das propriedades estudadas neste trabalho referente às superfícies mínimas, enfatizamos que a Representação de Weierstrass permite a obtenção de vários exemplos dessas superfícies por meio da utilização das funções de variáveis complexas associadas ao cálculo, como pode ser encontrado em Barbosa e Colares (1986).

Dessa forma, podemos verificar a partir dos estudos realizados, que apesar da complexidade do tema, que ele pode ser abordado no Ensino Médio, por meio da utilização de estratégias pedagógicas que interagem com a realidade concreta do discente, numa abordagem contextualizada que permita ao aluno observar, interpretar, questionar, construir e ampliar seu conhecimento. De acordo com a BNCC os discentes do Ensino Médio devem ser capazes de

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (Brasil, 2019, p.532).

Assim, enfatizamos que abordar as superfícies mínimas no Ensino Médio pode contribuir para o ensino-aprendizagem dos novos conceitos matemáticos de maneira significativa, prazerosa e interdisciplinar, despertando o interesse, a curiosidade e a investigação matemática no discente.

A partir de estímulos variados podemos aprender a ter um olhar observador,

crítico e investigador para as diferentes formas que nos cerca e nesse caso, reconhecer em muitas delas as formas das fascinantes superfícies mínimas.

# Referências Bibliográficas

- Alberti, V. e Duran, M. R. C. (2014). Entrevista Celso José da Costa. *Revista História Hoje*, 3(5):209–272.
- Barbosa, J. L. M. e Colares, A. G. (1986). *Minimal Surfaces in  $R^3$* . Monografias de Matemática. Rio de Janeiro: Impa.
- Batista, R. A. (2011). Tópicos de Geometria Diferencial. Dissertação de Mestrado, PROF-MAT - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro/SP.
- Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Ed. Edgar Blucher, São Paulo.
- Brasil, M. E. (2019). Base Nacional Curricular Comum. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 26 Set. 2019.
- Carmo, M. P. (2005). *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 2.ed. Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.
- Carmo, M. P. (2009). *Superfícies Mínimas*. Impa, Rio de Janeiro.
- Couto, L. F. S. (2018). O plano euclidiano como superfície mínima. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 9(10):28–36.
- Delgado, J. e Frensel, K. (2019). Geometria Diferencial I. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/delightful-downloads/2019/09/gdif.pdf>. Acesso em: 31 Dez. 2019.
- Eves, H. (2011). *Introdução à História da Matemática*. 5.ed. Ed. Unicamp, Campinas, SP.
- Fang, Y. (1996). *Lectures on Minimal Surfaces in  $R^3$* , v. 35. Ed. Australian National University, Australian.

- Guidorizzi, H. L. (2002). *Um Curso de Cálculo v. 3*. 5.ed. Ed. LTC, Rio de Janeiro.
- Guidorizzi, H. L. (2008). *Um Curso de Cálculo v. 2*. 5.ed. Ed. LTC, Rio de Janeiro.
- Kawano, C. (2015). A bolha de sabão em números. Como a arte inspirou a matemática (e vice-versa) no estudo de figuras geométricas. Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT656726-2680,00.html>. Acesso em: 24 Set. 2019.
- Koiso, M. (1984). On the Stability of Minimal Surfaces in  $R^3$ . *J. Math. Soc. Japan*, 36(3):523–541.
- Lawson, H. B. (1973). Lectures on Minimal Submanifolds. Dissertação de Mestrado, IMPA, Rio de Janeiro/RJ.
- Lima, R. F. (2016). *Introdução à Geometria Diferencial*. Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.
- Melo, M. e Andrade, L. (2018). Superfícies Mínimas e Bolhas de Sabão no Ensino Médio. *Revista Thema*, 15(1):51–62.
- Moreira Jr., E. S. e Elia, M. F. (1987). Películas de Sabão e o Seu Teor Didático. *Revista de Ensino de Física*, 9(1).
- Osserman, R. (1969). *A Survey of Minimal Surfaces*. Ed. Dover Publications, Inc., Nova York.
- Préve, D. T. (2015). Problemas Variacionais Isoperimétricos com Soluções de Revolução Descontínuas. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Rodrigues, L. B. e Agustini, E. (2007). Um Texto Sobre Superfícies Parametrizadas Regulares. *Famat em revista*, (9):95–146.
- Silva, L. N. e Silva, M. P. (2014). Uma introdução ao estudo de superfícies mínimas utilizando o geogebra. *Revista do Instituto Geogebra de São Paulo: ISSN: 2237-9657*, 3(2):120–131.

- Silva, S. F. (2017). Teoremas de semiespaço para superfícies mínimas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa/PB.
- Soares, M. G. (2001). *Cálculo em Uma Variável Complexa*. 2.ed. Ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.
- Tenenblat, K. (2008). *Introdução à Geometria Diferencial*. 2.ed. Ed. Edgard Blucher, São Paulo.

# Apêndice.

## A.1 Teoremas, definições e colorários adicionais

Nesta seção enunciaremos mais alguns teoremas com o objetivo de revisar alguns conceitos preliminares utilizados no decorrer deste trabalho. Para isto, utilizamos como referências Delgado e Frensel (2019), Carmo (2005), Guidorizzi (2002), Soares (2001) e Guidorizzi (2008).

**Teorema A.1.1.** *Seja  $A : W \rightarrow W$  uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal  $\{w_1, w_2\}$  de  $W$  tais que  $A(w_1) = \lambda_1 w_1$ ,  $A(w_2) = \lambda_2 w_2$  (isto é,  $w_1$  e  $w_2$  são os auto-vetores, e  $\lambda_1, \lambda_2$  são os auto-valores de  $A$ ). Na base  $\{w_1, w_2\}$ , a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(w) = \langle Aw, w \rangle$  sobre o círculo unitário de  $W$ .*

**Teorema A.1.2.** *(Função Inversa.) Seja  $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável e suponha que em  $p \in \mathbb{U}$  a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isoformismo. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e uma vizinhança  $W$  de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  possui inversa diferenciável  $F^{-1} : W \rightarrow V$ .*

**Definição A.1.1.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares e  $V_1$  um subconjunto aberto de  $S_1$ . Dizemos que uma parametrização contínua  $\varphi : V_1 \rightarrow S_2$  é diferenciável em  $p \in V$  se existem parametrizações  $X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  e  $X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  tais que  $p \in X_1(U_1)$ ,  $X_1(U_1) \subset V_1$ ,  $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$  e a aplicação  $X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$  é diferenciável em  $q = X_1^{-1}(p)$ .*

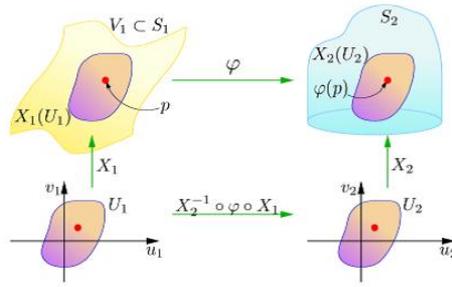


Figura A.1: Diferenciabilidade de  $\varphi$  em  $p$ .  
 Fonte: Delgado e Frensel (2019)

**Definição A.1.2.** *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Associamos a cada ponto  $p \in U$  uma aplicação Linear  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que é chamada a diferencial de  $F$  em  $p$ , e é definida da seguinte maneira. Sejam  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ . Pela regra da cadeia, a curva  $\beta = F \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  também é diferenciável. Então  $dF_p(w) = \beta'(0)$ .*

**Observação 6.** *A matriz de  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , isto é, a matriz*

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

*é chamada matriz jacobiana de  $F$  em  $p$ .*

**Teorema A.1.3.** *(da Divergência no plano) Seja  $\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j}$  um campo vetorial de classe  $C^1$  num aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $\bar{U} \subset \Omega$  um compacto, com interior  $U$  não vazio, cuja fronteira  $\partial \bar{U}$  é a imagem de uma curva fechada  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , de classe  $C^1$ , simples, regular e orientada no sentido anti-horário. Seja  $\vec{n}$  a normal unitária exterior a  $\bar{U}$ . Então*

$$\oint_{\gamma} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle ds = \int \int_{\bar{U}} \text{div} \vec{F} \, dx dy,$$

onde  $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ .

Em seguida iremos exibir um resultado que é consequência do Teorema (A.1.3) que são conhecidas como identidades de Green.

**Corolário A.1.1.** *Sejam  $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de classe  $C^2$ , sendo  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva regular, fechada, simples e orientada no sentido anti-horário, sendo a fronteira de um compacto  $\bar{U}$ , com interior não vazio e contido em  $\Omega$ . Além disso, seja  $\vec{n}$  a normal unitária exterior a  $\bar{U}$ . Então*

$$(i) \oint_{\gamma} \langle \text{grad } g, \vec{n} \rangle ds = \int \int_{\bar{U}} \Delta g \, dx dy;$$

$$(ii) \int \int_{\bar{U}} \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle dx dy = \oint_{\gamma} f \langle \text{grad } g, \vec{n} \rangle ds - \int \int_{\bar{U}} f \Delta g \, dx dy.$$

**Teorema A.1.4.** (Schwarz.) *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  aberto. Se  $f$  for de classe  $C^2$  em  $U$ , isto é, se existem as derivadas parciais até a segunda ordem em  $U$  e as mesmas sejam contínuas em  $U$ . Então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$$

para todo  $(x, y) \in U$ .

**Definição A.1.3.** *Seja  $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função complexa definida em  $\mathbb{U}$ . Dizemos que  $f$  é holomorfa em  $z_0 \in \mathbb{U}$ , se existe o limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

O número complexo  $f'(z_0)$  é a derivada complexa de  $f$  em  $z_0$ . Quando  $f$  é holomorfa em todos os pontos, dizemos somente que  $f$  é holomorfa.

**Teorema A.1.5.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , onde  $z = x + iy$ , uma função complexa tal que as derivadas parciais*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

existam em  $U$  e sejam contínuas no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ , então uma condição necessária e suficiente para que  $f$  seja holomorfa em  $z_0$  é que as funções  $u$  e  $v$  satisfazem as chamadas equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Uma consequência imediata do teorema (A.1.5) é:

**Corolário A.1.2.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , onde  $z = x + iy$ , uma função complexa com as hipóteses do teorema (A.1.5), então  $f$  é*

holomorfa  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$  se, e somente se,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde  $\bar{z}$  é complexo conjugado do número complexo  $z$ .

**Definição A.1.4.** Dizemos que uma superfície regular  $S$  é regrada quando por todo ponto  $p \in S$  passa uma reta inteiramente contida em  $S$ .

Vejamos outros exemplos de superfícies regradas.

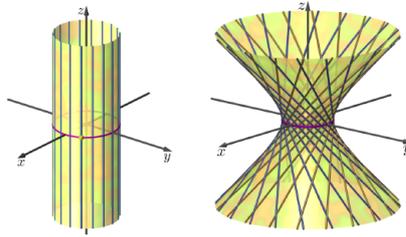


Figura A.2: Cilindro circular e hiperbolóide de revolução de uma folha.  
Fonte: Delgado e Frensel (2019)