Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Cadeias de Markov: uma conexão para conceitos de matrizes, probabilidades e grafos no ensino médio

Cristina Aparecida dos Santos
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto**

Barra do Garças - MT
Abril de 2022

Cadeias de Markov: uma conexão para conceitos de matrizes, probabilidades e grafos no ensino médio

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Cristina Aparecida dos Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 28 de abril 2022.

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa
Prof. Dr. Manoel Rodrigo Moreira

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S237c Santos, Cristina Aparecida dos.
Cadeias de Markov : uma conexão para conceitos de matrizes, probabilidades e grafos no ensino médio / Cristina Aparecida dos Santos. -- 2022
xiii, 86 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Adilson Antônio Berlatto.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia, 2022.
Inclui bibliografia.

1. Ensino Médio. 2. Matrizes. 3. Probabilidade. 4. Grafos. 5. Cadeia de Markov. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: CADEIAS DE MARKOV: UMA CONEXÃO PARA CONCEITOS DE MATRIZES, PROBABILIDADES E GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

AUTORA: MESTRANDA **CRISTINA APARECIDA DOS SANTOS**
Dissertação defendida e aprovada em **28** de **ABRIL** de **2022**.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **DOUTOR ADILSON ANTÔNIO BERLATTO** (Presidente Banca / **ORIENTADOR**)
INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
2. **DOUTOR MÁRCIO LEMES DE SOUSA** (Membro interno)
INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
3. **DOUTOR MANOEL RODRIGO MOREIRA** (Membro Externo)
INSTITUIÇÃO: INSTITUTO FEDERAL DE MATO GROSSO
4. **DOUTOR TIBÉRIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS** (Suplente)
INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

BARRA DO GARÇAS, 26/05/2022.

Documento assinado eletronicamente por **TIBERIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 26/05/2022, às 14:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Manoel Rodrigo Moreira**, **Usuário Externo**, em 26/05/2022, às 16:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **ADILSON ANTONIO BERLATTO**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 26/05/2022, às 18:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **MARCIO LEMES DE SOUSA**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 27/05/2022, às 23:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4760936** e o código CRC **8A09A8C7**.

Dedico este trabalho aos meus amados filhos, Marco Antônio, Ana Clara e Cecília, ao meu Esposo, Angelo, e à minha mãe. Enfim, àqueles que tenham me apoiado nesta caminhada.

Agradecimentos

Agradeço...

a Deus, pela força de cada dia. Pelo aprendizado que vem das vivências, das quais me mostraram que a nossa vida é para amar e dedicar;

a meu esposo, Angelo, que mesmo sofrendo for falta de minha companhia, tentou me tranquilizar para que eu pudesse dedicar e não desaminar, pela compreensão, principalmente nos momentos mais difíceis dessa longa caminhada e que sem seu apoio, seria muito difícil concluir.

aos meus, mais que amados filhos, Marco Antônio, Ana Clara e Cecília, mesmo estando ausente, compreenderam, foram gentis e amáveis, e isso me fortalecia para continuar.

a minha amada mãe, exemplo de mulher, que sempre orou por mim e me ensinou a ser melhor.

aos meus irmãos, em especial, a Denise, que é uma mulher forte e guerreira, que me apoia sempre e Deborah, que não mede esforços para me socorrer.

aos colegas do ProfMat 2017 e 2019, pela força, apoio, tardes e tardes de estudos, cumplicidade e otimismo compartilhado.

ao professor Márcio pela paciência, exemplos e amparo em diversos momentos.

ao orientador, Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto, por todos os ensinamentos, atenção, tempo dedicado e exemplo de profissional.

Muito obrigado a todos.

Sempre me pareceu estranho que aqueles que estudam seriamente Matemática acabem tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem; não é a posse, mas a aquisição; não é a presença, mas o ato de atingir a meta.

Carl Friedrich Gauss.

Resumo

Cadeias de Markov são processos estocásticos que possuem uma propriedade especial: a probabilidade referente ao que acontece no futuro depende apenas do que acontece no presente. Para abordá-las, se faz necessário partir de conceitos de matrizes e probabilidades que são conteúdos estudados geralmente na segunda série do ensino médio. Este trabalho apresenta as cadeias de Markov conectando estes dois conteúdos ao estudo de grafos.

Palavras chave: Ensino Médio; Matrizes; Probabilidade; Grafos; Cadeia de Markov.

Abstract

Markov chains are stochastic processes that have a special property: the probability regarding what happens in the future depends only on what happens in the present. To approach them, it is necessary to start from the concepts of matrices and probabilities that are contents usually studied in the second year of high school. This work presents the Markov chains connecting these two contents to the study of graphs.

Keywords: High School; Matrices; Probability; Graphs; Markov Chain.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Um modelo matemático ajuda a entender o comportamento de um sistema, pois assim é possível observar com antecedência o que pode ocorrer para administrá-lo da melhor forma. No entanto, um sistema real recebe uma quantidade boa de incertezas, seja de ações humanas, seja de intempéries naturais ou até outras interferências que dificultam a exatidão do modelo. Imagine, por exemplo, um sistema que descreve as órbitas planetárias em torno do Sol: sempre há fatos não previstos no sistema que acabam interferindo, como meteoros, naves, satélites, explosões solares, entre outros. Nesse sentido, com o intuito de minimizar as perdas causadas pelas incertezas, entram, para medir as possibilidades, os processos estocásticos (modelos que evoluem no decorrer do tempo de forma probabilística).

Neste trabalho, apresentamos a teoria necessária e problemas, nos quais é possível observar que os raciocínios utilizados nas resoluções são semelhantes, uma vez que todos tem uma característica comum: calcular um estado futuro baseando apenas no estado atual, ou seja, o histórico não altera o futuro, apenas o estado presente interfere. É um processo desmemoriado. Como exemplo:

Exemplo 1. Adaptado do Exemplo 4 (Anton e Rorres, 2016, p. 286)

Suponha que uma onça marcada possa migrar entre duas reservas em busca de comida. Tendo por base dados sobre os recursos de alimento, os pesquisadores concluem que o padrão mensal de migração da onça pode ser modelado pelo seguinte esquema, como pode ser visto na Figura 1:

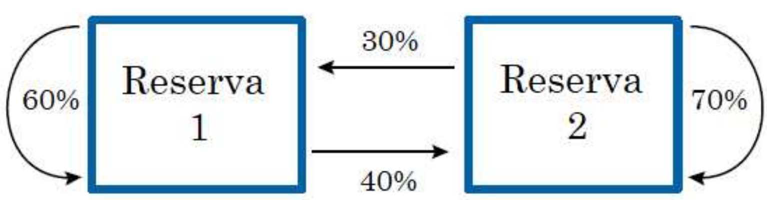

Figura 1: Representação da transição de uma onça em busca de alimento entre duas reservas

Os valores apresentados são as frequências relativas do animal permanecer ou mudar de reserva em busca de alimento. Problemas assim, em que a situação muda com o tempo, neste caso entre um mês e outro, e que a incerteza impera, mas que é possível obter a probabilidade da ocorrência seguinte dado que se tem a atual. A migração ou permanência depende de onde a onça está, pode ser interpretado como uma cadeia de Markov. Abaixo, Anton e Rorres apresentam uma ideia para, inicialmente, estendermos o que é uma cadeia de Markov:

> Suponha que um tal sistema mude com o tempo de um estado para outro e que, em instantes predeterminados, observemos o estado do sistema. Se o estado do sistema em qualquer observação não puder ser predito com certeza, mas se a probabilidade de um certo estado ocorrer puder ser predita unicamente a partir do conhecimento do estado do sistema na observação imediatamente anterior, então o processo de mudança de um estado para outro é denominado uma **cadeia de Markov** ou **processo de Markov**. (Anton e Rorres, 2016, p. 553)

Observemos que a exposição acima não é uma definição. Nesse sentido, uma cadeia de Markov é um processo estocástico que possui uma propriedade especial: a probabilidade referente ao que acontece no futuro depende apenas do que acontece no presente, ou seja, o que ocorre no futuro é independente do passado.

Esse modelo desempenha cada vez mais um grau de importância para resolver problemas de diversas áreas, como, economia, genética, comunicação e muitas outras, destacando que o propósito é prever um estado futuro apenas com relação ao estado atual do sistema. Em geral, em sistemas determinísticos, muitas variáveis são deixadas fora para facilitar (até mesmo para tornar possível) os cálculos. Essas variáveis estão, de certo modo, inseridas nas probabilidades em processo estocástico.

A motivação da escolha do tema é a possibilidade de visualizar aplicações dos conteúdos de matrizes, probabilidades e grafos. Os dois primeiros assuntos estão presentes no ensino médio, todavia, poucos livros didáticos trazem situações que dimensionem estudos para que os alunos vislumbrem aplicações que os levem a conectar conceitos da etapa que estão com algo um pouco mais avançado e que aticem sua curiosidade e vontade de aprender matemática. A teoria de grafos não é contemplada no currículo do ensino médio, mas acreditamos que seja possível levar os alunos dessa fase a compreendê-la, uma vez que se assemelha a alguns objetos da geometria. Assim, o nosso trabalho propõe o que a BNCC - Base Nacional Comum Curricular, estabelece como propósito para o ensino médio:

> ... que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (Brasil–MEC, 2018, p.529)

Em outras palavras, o trabalho oportuniza exploração dos conceitos matemáticos citados, dentro de turmas, a partir do segundo ano do ensino médio, colocando em discussão situações modeladas por cadeias de Markov. Para tal, levantaremos os conceitos matemáticos que sustentam o estudo de cadeias de Markov e aprestaremos problemas que favoreça nosso intento: fornecer um material para professores trabalharem cadeias de Markov utilizando grafos com seus alunos do ensino médio.

Trabalhos como os de Britto (2014), Castro (2015), Silva (2020) e Soares Jr. (2014) que propõem a mesma temática, cadeias de Markov, apresentam, também abordagens interessantes para sala de aula . Da proposta de Britto, reiteramos os objetivos que ela elenca, reforçando a importância da discussão das cadeias de Markov no ensino médio:

> - Mostrar a utilização de matrizes em outras áreas do conhecimento, áreas estas que a maioria dos estudantes supõe não utilizar matemática de forma mais aprofundada.
> - Permitir aos alunos enxergar matriz como uma forma interessante e eficiente.
> - Mostrar a importância de ferramentas matemáticas (probabilidade e matrizes) na previsão de diversas situações futuras, previsões estas muito importantes para a tomada de decisões por parte de diversos profissionais (administradores, economistas, biólogos e tantos outros) em determinadas áreas de atuação.
> - Reforçar as informações a respeito de cadeias de Markov estudadas.
> - Trabalhar a multiplicação de matrizes cujas entradas são probabilidades e resolver sistemas lineares.
> - Mostrar que o uso de tecnologias pode ser útil quando a resolução de um problema envolve muitos cálculos e permitir que o aluno se utilize dessas tecnologias. (Britto, 2014, p.29)

Para ambientar, o texto é construído para professores do ensino médio, sendo os conceitos abordados na perspectiva para esse público, ocorrendo alguns aprofundamentos necessários para que estes docentes, atuantes no segmento, possam ter um entendimento necessário para trabalhar a proposta.

Usamos, no decorrer do texto e quando convir, contexto histórico, uma vez que estes fatos vem acompanhados de interessantes problemas e também de certas curiosidades que despertam o interesse de interlocutores em geral, em particular de discentes, como enfatizado por Hefez:

> De fato, segundo a M.A.A. (Mathematical Association of America), o conhecimento da história da Matemática mostra aos alunos que ela é uma importante conquista humana, geralmente desenvolvida de forma intuitiva e experimental a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber. (Hefez e Fernandez, 2016, p.XII)

O presente trabalho está dividido da seguinte forma:

No primeiro capítulo revisitamos conceitos que são pré-requisitos para estudar cadeias de Markov. Assim, começamos com matrizes, desde definição, operações e propriedades. Como esperamos que os discentes saibam operar com matrizes inserimos no trabalho uma seção sobre cálculo matricial online - conhecido como *Matrix Calculator*- com o objetivo de que uma apresentação do tema de cadeias de Markov não se perca em contas demoradas de matrizes racionais. O capítulo também traz, as definições de probabilidade, probabilidade condicional e de variáveis aleatórias.

No capítulo sobre grafos, por ser um conceito que não é abordado no ensino médio, o texto vai desde a conceituação de grafos, definições e muitos exemplos para que o público destino se aproprie do conceito sem dificuldades. A parte de representação dos objetos desta teoria é bastante visual, sendo uma forma interessante de inserir conceitos e propriedades, observando isso em esboços simples.

O terceiro capítulo, apresentamos os conceitos de Processos Estocásticos e cadeias de Markov de modo bem simples, em uma linguagem clara e voltada para que professores o utilizem como fonte de pesquisa, podendo aplicá-lo na íntegra como um projeto de aprofundamento em matemática, uma vez que colocamos inúmeros exemplos com o propósito de proporcionar compreensão dos conceitos discutidos no texto.

Por fim, no último capítulo, colocamos alguns problemas para trabalhar em sala de aula com as respectivas discussões e também deixamos alguns problemas propostos para a exploração do público alvo.

Capítulo 1

Matrizes e Probabilidades

Neste capítulo, abordamos alguns tópicos essenciais de Álgebra Linear, em particular, Matrizes, e Probabilidade para o nosso estudo. Estes conceitos irão nos auxiliar no desenvolvimento da teoria de cadeias de Markov. A construção é de um texto pensado e voltado para o ensino médio, e àqueles que, por ventura, sentirem necessidade de aprofundamento de estudo, sugerimos as referências utilizadas: Anton e Rorres (2016), Hefez e Fernandez (2016), Boldrini et al. (1980), Morgado et al. (2016), Meyer (1983) e Morgado e Carvalho (2015).

1.1 Matrizes

Matrizes é um conteúdo geralmente introduzido no ensino médio, cujo entendimento e aplicabilidade variam dos níveis mais básicos aos mais avançados. Para a compreensão do objeto desejo deste trabalho: cadeias de Markov, apresentamos a teoria que acreditamos ser necessária aos docentes e estudantes da etapa acima citada. Nesse sentido, a princípio, bastaria abordar multiplicação e produto entre matrizes. Todavia, para deixar a construção mais completa, partimos de alguns aspectos históricos, passando por definições e então, operações entre matrizes. Algumas demonstrações são colocadas com o propósito de permitir uma maior fluência para compreensão e extensão dos conceitos e definições, bem como possibilitar desenvolvimento e aprofundamento do conteúdo.

1.1.1 Aspectos históricos

Um problema fundamental em vários ramos da ciência é a resolução de sistemas de equações, e nos livros didáticos sempre apresentam uma ligação entre a resolução de sistemas de equações lineares e estudo de matrizes, mas esta ligação vem de muito tempo atrás. Nesse sentido, apresentamos o problema abaixo, que pode ser encontrado em (Eves, 2002, p.268):

Exemplo 2. (d) Problema 1, Capítulo VIII (Nove capítulos sobre a arte da matemática)[1]. Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma qualidade regular e um feixe de uma má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?

[1]Este livro, do período Han (206 a.C. - 221 d.C), contém 246 problemas sobre diversas situações, entre elas: mensuração de terras, agricultura, sociedades, impostos, solução de equações e propriedades de triângulos. O problema em questão é do Capítulo 8 desta obra

O enunciado acima é traduzido no seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+z & = & 39 \\ 2x+3y+z & = & 34 \\ x+2y+3z & = & 26, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

que aparece exposto dessa forma em Boyer [1974], mas sem o contexto apresentado por Eves [2002]. Boyer nos mostra como o autor dos *Nove capítulos*, supostamente, propôs a resolução desse tipo de sistema de equações lineares simultâneas

> ...
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 1 | 2 | 3 |
> | 2 | 3 | 2 |
> | 3 | 1 | 1 |
> | 26 | 34 | 39 |
>
> para reduzi-la
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 0 | 0 | 3 |
> | 0 | 5 | 2 |
> | 36 | 1 | 1 |
> | 99 | 24 | 39 |
>
> efetuando operações sobre colunas na matriz A segunda forma representava as equações 36z = 99, 5y + z = 24 e 3x + 2y + z = 39, das quais facilmente são calculados sucessivamente os valores de z, y e x. (Boyer, 1974, p.144)

Numa linguagem atual, (1.1) pode ser apresentado assim:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

Ainda no viés histórico e nos apoiando em Boyer (1974) e Eves(2002), que discorrem o processo evolutivo das grandes civilizações, no que tange o conhecimento matemático, colocam que o homem já havia se deparado com situações em que o emprego de sistemas lineares era realizado, e que tal conhecimento primitivo evoluiu ao longo dos séculos de história. Todavia, muito se perdeu no decorrer dos séculos, sejam pela forma em que os registros eram feitos, sejam por incêndios, intencionais ou não. Pautados nesses historiadores, apresentaremos outro caminho para a construção da teoria de matrizes, além dos sistemas de equações, como visto acima, blocos numéricos, mas podemos acreditar que essa ideia não foi a primeira, uma vez que os quadrados mágicos, historicamente, apareceram antes.

> Nenhuma abordagem da matemática chinesa antiga, por mais breve que seja, pode deixar de mencionar o quadrado mágico chamado *lo-shu*. Um dos clássicos matemáticos chineses mais antigos é o *I-King* ou *Livro das Permutações*. Nele aparece um diagrama numérico conhecido como *lo-shu*, posteriormente desenhado como se vê na Figura 64. Trata-se do exemplo conhecido mais antigo de quadrado mágico; conta uma lenda que o primeiro a vê-lo foi o imperador Yu, por volta de 2200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga divina que lhe apareceu às margens do rio Amarelo. Como se vê na Figura 64 é um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas; nós pretos para números pares e brancos para números ímpares.

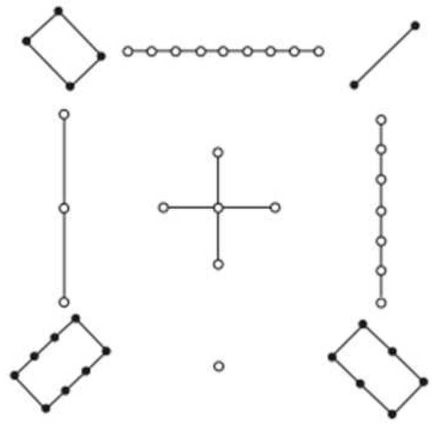

Figura 1.1: Casco tartaruga que corresponde a Figura 64 da citação

> Um quadrado mágico de ordem n é um arranjo quadrado de n^2 inteiros distintos dispostos de maneira tal que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm mesma soma, chamada constante mágica do quadrado. (Eves, 2002, p.268-269)

Nesse sentido, na sua forma tradicional trata-se de uma malha quadriculada, uma tabela, de $n \times n$ (n natural), ou seja um conjunto de números organizados em filas horizontais (linhas) e verticais (colunas) de forma que a soma dos números que constitui cada fila, tenham o mesmo valor, e o mesmo ocorre em cada uma das diagonais, e que cada célula, na sua maioria estão ocupadas por números naturais variando de um a n^2. por exemplo, um quadrado mágico de ordem 3 (três linhas e três colunas).

Exemplo 3. Vejamos um quadrado mágico de ordem 3 (três linhas e três colunas).

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Esse exemplo é o mais simples, sendo fácil verificar que é um quadrado mágico. Para construí-lo, devemos distribuir os números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 colocando todos eles sem repetição, numa tabela 3×3, de modo que, a soma dos três números dispostos em cada linha, coluna ou diagonal resultem em 15.

Ainda na China, no início do século XIII,

> ...Nos livros de Chu encontra-se a apresentação mais acabada dos métodos matriciais comuns hoje em dia e seu método de eliminação e substituição já foi comparado ao de J. J. Sylvester (1814-1897). (Eves, 2002, p.246)

Porém não se utilizava a simbologia que é utilizada hoje, esta só apareceu no século XIX. Entre os séculos XIII e XIX, diversos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da teoria de Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes, dentre eles: Gabriel Cramer (1704-1752), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Wilhelm Jordan (1842-1899), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Arthur Cayley (1821-1895).

Acompanhando os elementos históricos, percebemos que a formalização da teoria de Matrizes, passou por sistemas lineares e determinantes e que se deu ao longo de séculos, através da necessidade de resolver problemas e curiosidades de alguns matemáticos em explorar as ideias.

1.1.2 Definição e representação de Matriz

Várias ciências apresentam informações organizadas em linhas e colunas, e não temos dúvidas de que a teoria de Matrizes facilitam, significativamente, o estudo de diversos fenômenos em muitas áreas, como a computação gráfica, engenharia e química. Por exemplo, na computação gráfica, a manipulação de imagens se dá através de transformações geométricas, que são definidas a partir de operações entre matrizes. Hefez e Fernandes (p.11, 2016) corroboram dizendo:

> As matrizes são ferramentas básicas da Álgebra Linear, pois além de fornecerem meios para a resolução dos sistemas de equações lineares, elas também representarão as transformações lineares entre espaços vetoriais, ...

Veja abaixo, uma tabela, que traz as informações organizadas em linhas e colunas:

Exemplo 4. (Adaptado (Boldrini et al., 1980, p.1))

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
Pessoa X	1,68	68	35
Pessoa Y	1,55	54	22
Pessoa Z	1,72	65	27

> Estes conceitos aparecem naturalmente na resolução de muitos tipos de problemas e são essenciais, não apenas porque eles "ordenam e simplificam" o problema, mas também porque fornecem novos métodos de resolução. Chamamos de matriz uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. (Boldrini et al., 1980, p.1)

Traduzindo o Exemplo 4, em uma representação muito mais prática, temos:

$$\begin{pmatrix} 1,68 & 68 & 35 \\ 1,55 & 54 & 22 \\ 1,72 & 65 & 27 \end{pmatrix}$$

Nesse sentido, a seguir definiremos formalmente uma matriz. Para nosso trabalho, optamos em considerar, como elementos, números reais.

Definição 1. (Hefez e Fernandez, 2016, p.11)
Dados m e n em $\mathbb{N}$, definimos uma matriz real de ordem m por n, ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados entradas da matriz.

Exemplo 5. Vejamos os exemplos de matrizes abaixo:

(a) $[5]$ é uma matriz 1×1, pois possui uma linha e uma coluna;

(b) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×3, uma vez que apresenta duas linhas e três colunas.

No Exemplo 5, o item (a) só tem uma entrada que é o número 5. Já no item (b), as entradas da primeira linha são dadas pelos números reais 2 , $\frac{1}{6}$ e $\frac{4}{6}$ da segunda linha são 0 , -4 e 1. É usual usar a indicação de uma matriz arbitrária por A e suas entradas por a_{ij}, lê-se: elemento a com índices ij, sendo que estes índices indicam a linha (i) e a coluna (j), nessa ordem, onde o elemento se encontra.

Uma matriz $m \times n$ com entradas $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e i,j $\in \mathbb{N}$ pode ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ou por $A = \ (a_{ij})_{m \times n}$ ou simplesmente por $A = \ (a_{ij})$, quando a ordem da matriz estiver subentendida. Também são utilizadas outras notações para matriz, além de parênteses, como os colchetes.

Exemplo 6. Vejamos abaixo uma matriz representada com seus elementos entre colchetes

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

onde: $a_{11} = 2$; $a_{12} =$ -1; $a_{21} = 4$ e $a_{22} = 3$.

1.1.3 Algumas matrizes especiais

Dependendo dos valores de m ,n, ou até mesmo pela natureza de seus elementos, uma matriz recebe um nome especial a partir das características que as diferenciam umas das outras. Para definirmos estas matrizes, usaremos as definições apresentadas por Boldrini et al. (1980).

Consideremos uma matriz $m \times n$, com m linhas e n colunas. Nesse sentido:

Definição 2. Matriz Quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

No caso de matrizes quadradas $A_{m \times n}$ podemos dizer simplesmente A é uma matriz quadrada de ordem m. Se A é uma matriz quadrada de ordem m, as entradas a_{ij}, com $i \in \mathbb{N}$ e $i = j$, formam a diagonal principal de A.

Exemplo 7. Neste exemplo, temos uma matriz quadrada de ordem 3 e uma matriz quadrada de ordem 1, respectivamente.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1,68 & 68 & 35 \\ 1,55 & 54 & 22 \\ 1,72 & 65 & 27 \end{pmatrix};$$

(b)

$$(5).$$

Definição 3. Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Em outras palavras, uma matriz é nula quando todas as suas entradas são o número zero.

Exemplo 8. Temos aqui, uma matriz nula de ordem 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 4. Matriz Coluna é aquela em que possui uma única coluna ($n = 1$).

Exemplo 9. Vejamos um exemplo para matriz coluna. Neste exemplo, temos uma matriz 3×1, três linhas e uma coluna.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 5. Matriz Linha é uma matriz que possui uma única linha ($m = 1$).

Exemplo 10. A matriz abaixo é um exemplo de matriz linha 1 x 2, uma linha e duas colunas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 6. Matriz Diagonal é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos.

Exemplo 11. Vejamos uma matriz diagonal de ordem 3:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Observe que todos os elementos, exceto os da diagonal principal, são nulos.

Definição 7. Matriz Identidade é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Outro modo de identificá-la é observarmos as entradas da diagonal principal serem sempre o número um e os demais todos iguais ao número zero, então é identidade. Comumente é utilizada a seguinte indicação para uma matriz identidade, I_n, onde n é a ordem da matriz.

Exemplo 12. Este exemplo é uma matriz identidade de ordem 2, podendo ser indicada por I_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 8. Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada ($m = n$) onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, para $i > j$, $a_{ij} = 0$. Já uma matriz é dita Matriz Triangular Inferior quando é uma matriz quadrada ($m = n$) onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, para $i < j$, $a_{ij} = 0$.

Exemplo 13. Vejamos uma matriz diagonal superior de ordem 4:

(a)

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que todas as entradas abaixo da diagonal principal são nulas.

Agora, temos um exemplo de uma matriz diagonal inferior de ordem 4:

(b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Definição 9. Matriz Simétrica é aquela onde ($m = n$) e $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 14. A matriz abaixo é um exemplo para matriz simétrica de ordem 5:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $a_{12} = a_{21} = 1$, do mesmo modo, $a_{31} = a_{13} = 5$.

1.1.4 Operações

Ao utilizar matrizes surge a necessidade natural de efetuar certas operações, como adição e multiplicação. Para a adição, usamos uma soma algébrica convencional entre os elementos correspondentes (mesmo índice), nesse sentido só podemos somar matrizes que tenham a mesma ordem. Já na multiplicação, é diferente, não podemos simplesmente multiplicar os elementos correspondentes. Vejamos no decorrer dos próximos parágrafos exemplificações e a formalização desses conceitos através de definições e propriedades.

Exemplo 15. Vejamos a partir das informações, explicitadas nas Tabelas 1.1 e 1.2, como é possível iniciar o cálculo de operações entre matrizes.

Tabela 1.1: Dados dos estados da Amazônia Legal Brasileira (ALB) que mais ocorrem desmatamento - 2018

Estados da Amazônia Legal Brasileira que mais ocorrem desmatamento - 2018 (km^2)	
Estado	2018
Pará	2 744
Mato Grosso	1 490
Amazonas	1 045
Rondônia	1 316

Fonte: INPE (2020)

Tabela 1.2: Dados dos estados da Amazônia Legal Brasileira que mais ocorrem desmatamento - 2019

Estados da Amazônia Legal Brasileira que mais ocorrem desmatamento - 2019 (km^2)	
Estado	2019
Pará	4 172
Mato Grosso	1 702
Amazonas	1 434
Rondônia	1 257

Fonte: INPE (2020)

Se desejar pode montar uma terceira tabela que dê o desmatamento nos dois anos, para isso basta somar os elementos (áreas desmatadas) correspondente das duas tabelas anteriores. Para isso, colocaremos as colunas numéricas na forma de matrizes colunas, como segue:

$$\begin{pmatrix} 2744 \\ 1490 \\ 1045 \\ 1316 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4172 \\ 1702 \\ 1434 \\ 1257 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6916 \\ 3192 \\ 2479 \\ 2573 \end{pmatrix}$$

ou seja,

Tabela 1.3: Dados dos estados da Amazônia Legal Brasileira que mais ocorrem desmatamento - 2018 e 2019

Dados dos estados da ALB que mais ocorrem desmatamento (km^2) em 2018 e 2019	
Estado	área
Pará	6 916
Mato Grosso	3 192
Amazonas	2 479
Rondônia	2 573

Fonte: Autora

Suponha, agora, que para o ano de 2022, o triplo da área de 2019 será desmatada. Assim, a matriz de estimativa será:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4172 \\ 1702 \\ 1434 \\ 1257 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12516 \\ 5106 \\ 4302 \\ 3771 \end{pmatrix}.$$

Nesses exemplos, temos situações de soma de duas matrizes e multiplicação de um número por uma matriz, que serão definidas formalmente a seguir, junto com multiplicação entre duas matrizes. Para definirmos as operações entre matrizes, consideraremos Hefez e Fernandez (2016).

Definição 10. *(Soma de Matrizes)* Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a soma de A e B, denotada $A + B$, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

A adição de matrizes tem propriedades semelhantes para a mesma operação nos reais.

Proposição 1. Se A, B e C são matrizes de mesma ordem $m \times n$, então:

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade da adição);

(ii) $A + B = B + A$ (comutatividade da adição);

(iii) $A + 0 = 0 + A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$ (elemento neutro);

(iv) $A + (-A) = 0$.

Demonstração. Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem, $m \times n$, tais que $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, então:

(i)

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij})) \\ &= (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) \\ &\overset{(1)}{=} ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) \\ &= (A + B) + C. \end{aligned}$$

Como as entradas das matrizes são números reais, considerou-se a associatividade da adição do conjuntos dos reais em (1).

(ii)

$$\begin{aligned} A+B &= (a_{ij})+(b_{ij}) \\ &= (a_{ij}+b_{ij}) \\ &\overset{(2)}{=} (b_{ij}+a_{ij}) \\ &= (B+A). \end{aligned}$$

Em (2) foi considerada a comutatividade da adição dos números reais.

(iii)

$$\begin{aligned} A+O &= (a_{ij})+(o_{ij}) \\ &= (a_{ij}+o_{ij}) \\ &= (a_{ij}) \\ &= A. \end{aligned}$$

Considerou-se que o 0 é elemento neutro para a adição de números reais.

(iv)

$$\begin{aligned} A+(-A) &= (a_{ij})+(-(a_{ij})) \\ &= (a_{ij})+(-a_{ij}) \\ &= (a_{ij}-a_{ij}) \\ &= O. \end{aligned}$$

Considerou-se que a_{ij} é simétrico de $-a_{ij}$, assim como todo $a \in \mathbb{R}$ é simétrico de $-a \in \mathbb{R}$.

□

Definição 11. (Produto Escalar) Dada a matriz $A = \ (a_{ij})$, definimos o produto de A pelo número real k, como sendo a matriz $kA = \ (ka_{ij})$.

Proposição 2. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer matrizes A e B e k e k' em $\in \mathbb{R}$:

(i) $k(A+B) = kA + kB$;

(ii) $(k+k')A = kA + k'A$;

(iii) $k(k'A) = (kk')A$;

(iv) $1A = A$.

Demonstração. Sejam A, B matrizes de mesma ordem, $m \times n$, tais que $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e k um elemento de $\mathbb{R}$, então

(i)

$$\begin{aligned} k(A+B) &= k\left[(a_{ij})+(b_{ij})\right] \\ &= k\left(a_{ij}+b_{ij}\right) \\ &\overset{(3)}{=} (k(a_{ij}+b_{ij})) \\ &= (k(a_{ij}+b_{ij}) \\ &\overset{(4)}{=} (ka_{ij})+(kb_{ij}) \\ &= kA+kB. \end{aligned}$$

Em (3) foi utilizada a definição $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$ e em (4), a distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais.

(ii)

$$\begin{aligned} (k+k')A &= (k+k')(a_{ij}) \\ &= ((k+k')\cdot a_{ij}) \\ &= (ka_{ij}+k'a_{ij}) \\ &= (ka_{ij})+(k'a_{ij}) \\ &= k(a_{ij})+k'(a_{ij}) \\ &= kA+k'A. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} k(k'A) &= k\,[k'(a_{ij})] \\ &= k\,[(k'a_{ij})] \\ &= (kk'a_{ij}) \\ &= kk'(a_{ij}) \\ &= (kk')A. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} 1A &= 1\cdot(a_{ij}) \\ &= (1\cdot a_{ij}) \\ &= (a_{ij}) \\ &= A. \end{aligned}$$

Considerou-se o fato do número 1 ser o elemento neutro na multiplicação de números reais.

□

A próxima definição é a de multiplicação de matrizes.

> A definição de produto de matrizes foi apresentada por Arthur Cayley (Inglaterra, 1821-1895), no trabalho intitulado "A Memoir on the Theory of Matrices", publicado em 1858 na revista Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Neste trabalho, Cayley notou que a multiplicação de matrizes como ele a definiu, simplificava em muito o estudo de sistemas de equações lineares. Também observou que esta multiplicação deixava de apresentar propriedades importantes, como a comutatividade e a lei do corte, e que uma matriz não nula não é necessariamente invertível. (Hefez e Fernandez, 2016, p.16)

O produto de duas matrizes é definido somente quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz. Se A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $n \times p$, então seu produto é uma matriz $m \times p$.

Definição 12. *(Produto de Matrizes)* Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ duas matrizes. O produto de A por B é denotado por $AB = C$ e cada elemento de cada entrada c_{ij} da matriz $AB = C$, $C = [c_{ij}]_{m\times p}$, ou seja,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \dots & * & \dots & * \\ * & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ * & \dots & c_{ij} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ * & \dots & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$.

A obtenção de cada elemento da matriz produto, como já mencionado, é realizada como um produto interno, uma vez que é uma espécie de multiplicação e soma ao mesmo tempo dos elementos envolvidos na linha e coluna das duas matrizes envolvidas. Daí não podemos dar nome a cada elemento resultante do produto entre as matrizes de "produto", por não ser uma multiplicação comum. O cálculo para obter cada elemento da matriz produto ocorre do seguinte modo: multiplica-se ordenadamente o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna, o segundo elemento da linha com o segundo elemento da coluna e assim por diante. Por fim, soma-se todos os produtos realizados.

Exemplo 16. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

a primeira é uma matriz 2×2 e a segunda uma matriz, 2×3, observemos que o números de colunas da primeira é igual ao número de colunas da segunda, então podemos efetuar a multiplicação entre elas.

Note que o elemento c_{22} é dado pela soma dos produtos entre os elementos correspondentes da segunda linha da matriz A pelos elementos da segunda coluna da matriz B, conforme segue abaixo:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 1 \cdot 3 + 2 \cdot\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Por fim:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 +\ 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 +\ 1 \cdot\ 0 & 0 \cdot (-1) +\ 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 +\ 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 +\ 2 \cdot\ 0 & 1 \cdot (-1) +\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposição 3. Desde que as operações sejam possíveis, temos:

(i) $A(B+C) = AB+AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição);

(ii) $(A+B)C = AC+BC$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à adição);

(iii) $(AB)C = A(BC)$ (associatividade);

(iv) $AI = IA = A$ (existência de elemento identidade), sendo I a matriz identidade[2].

Demonstração. (i) Suponha a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e as matrizes $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ de mesma ordem, $n \times p$, então:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= A \cdot [(b_{ij}) + (c_{ij})] \\ &= A \cdot [(b_{ij} + c_{ij})] \\ &= A \cdot (b_{ij} + c_{ij}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(b_{kj} + c_{kj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

(ii) Suponha as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de mesma ordem, $m \times n$, e a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $n \times p$, então

$$\begin{aligned} (A+B)C &= [(a_{ij}) + (b_{ij})] \cdot C \\ &= [(a_{ij} + b_{ij})] \cdot C \\ &= (a_{ij} + b_{ij}) \cdot C \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{kj}) \cdot c_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}c_{kj} + b_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} \\ &= AC + BC. \end{aligned}$$

(iii) Suponha que as matrizes A, B e C sejam de ordem $n \times r$, $r \times s$ e $s \times m$, respectivamente. Seja $D = AB$, então

$$\begin{aligned} (AB)C &= D \cdot C, \quad \text{onde} \quad D = (d_{ij})_{n\times s} \\ &= \sum_{l=1}^{s} d_{il}c_{lj}, \quad \text{como} \quad D = AB \\ &= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj} \qquad (1.2) \\ &= \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kl}c_{lj} \end{aligned}$$

Por outro lado,

[2]Neste caso, a matriz identidade deve ter sua ordem igual ao número de linhas e colunas de A, ou seja, A tem que ter a mesma ordem que I, $n = m$ (matriz quadrada). Outro modo de definir a matriz identidade: $I = (e_{ij})$; se $i = j$, então $e_{ij} = 1$; se $i \neq j$, então $e_{ij} = 0$.

$$
\begin{aligned}
A(BC) &= A\cdot Z, \quad \text{onde} \quad Z=(z_{ij})_{n\times m}\\
&= \sum_{k=1}^{r} a_{il}z_{lj}, \quad \text{como} \quad Z=BC\\
&= \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\sum_{l=1}^{s} b_{kl}c_{lj}\\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\\
&\overset{(5)}{=} \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kl}c_{lj},
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Em (5), foi utilizado propriedade de somatório duplo Logo (1.2) = (1.3), portanto $(AB)C = A(BC)$.

(iv) Suponha $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem $m\times n$, $I_n=(e_{ij})$, matriz identidade de ordem n, com

$$
e_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{se} \quad i=j\\ 0, & \text{se} \quad i\neq j\end{cases}
$$

e $I_m=(h_{ij})$, matriz identidade de ordem m com

$$
h_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{se} \quad i=j\\ 0, & \text{se} \quad i\neq j\end{cases}
$$

então $A\cdot I_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_{kj}$, segue que a entrada de índices ij de $A\cdot I_n$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_{kj} &= a_{i1}e_{1j}+a_{i2}e_{2j}+\ldots+a_{ij}e_{jj}+\ldots+a_{in}e_{nj}\\
&= a_{i1}\cdot 0+a_{i2}\cdot 0+\ldots+a_{ij}\cdot 1+\ldots+a_{in}\cdot 0_{nj}\\
&= a_{ij}
\end{aligned}
$$

que é a entrada de índices ij de A. Logo, $A\cdot I_n = A$. Analogamente, demonstra-se que $I_m\cdot A = A$. Daí segue que $A\cdot I_n = I_m\cdot A = A$.

□

[3]Se tivermos uma tabela retangular, com n linhas, m colunas e com entradas a_{ik}, a soma das linhas é igual à das colunas o que justifica a troca da ordem dos somatórios $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.

1.2 O cálculo de operações entre matrizes através do aplicativo *Matrix Calculator*

O uso de tecnologias no ensino de matemática está defendido em todas as etapas da educação básica pela BNCC, que coloca as ferramentas digitais em certo destaque, desde as competências gerais, passando pelas competências específicas e habilidades das quatro áreas: Linguagens e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias. Sendo o nosso trabalho nesta última área, destacamos duas passagens do documento que defende a cultura digital, a quinta competência geral:

> Utilizar tecnologias digitais de comunicação e informação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas do cotidiano (incluindo as escolares) ao se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e resolver problemas. (Brasil–MEC, 2018, p.9)

E a quinta competência específica de Matemática:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil–MEC, 2018, p. 533)

Nesse viés, utilizar ferramentas que viabilizem o aprofundamento e a ampliação da aprendizagem é estar atualizado com a proposta da BNCC, além do que, é atraente ao estudante a utilização de ferramentas digitais que levem o desenvolvimento de autonomia, seja trabalhada de forma colaborativa ou individual. Dessa forma, e partindo da familiaridade e destreza que os jovens possuem no manuseio de dispositivos eletrônicos (smartphones e computadores) em jogos, acesso de redes sociais ou até em pesquisas, que sugerimos um aplicativo que pode ser assumido com a finalidade de imprimir rapidez nos cálculos de operações entre matrizes: *Matrix Calculator*. Assim, é de se esperar que a ferramenta, além de permitir que os alunos possam aprofundar e ampliar seu entendimento sobre o conhecimento de matrizes, abasteça de motivação a discussão a sala de aula.

O *Matrix Calculator* é uma calculadora de matriz para soluções graduais de operações matriciais gratuitas. Os comandos são simples com explicações detalhadas para todos os cálculos. Permite que façamos adição, subtração, multiplicação e potência de matrizes, entre outros cálculos disponíveis no aplicativo. Podemos encontrá-lo, no computador, no endereço https://matrixcalc.org/pt/ e usá-lo online. Outra opção, baixar o aplicativo no celular, que pode ser feito entrando na *Play Store*, digitando na janela de pesquisa “matriz calculadora”, vai aparecer vários aplicativos, porém a intenção é ter uma versão já em português e que tenha o mesmo layout do disponível via computador, daí o caminho segue ilustrado abaixo.

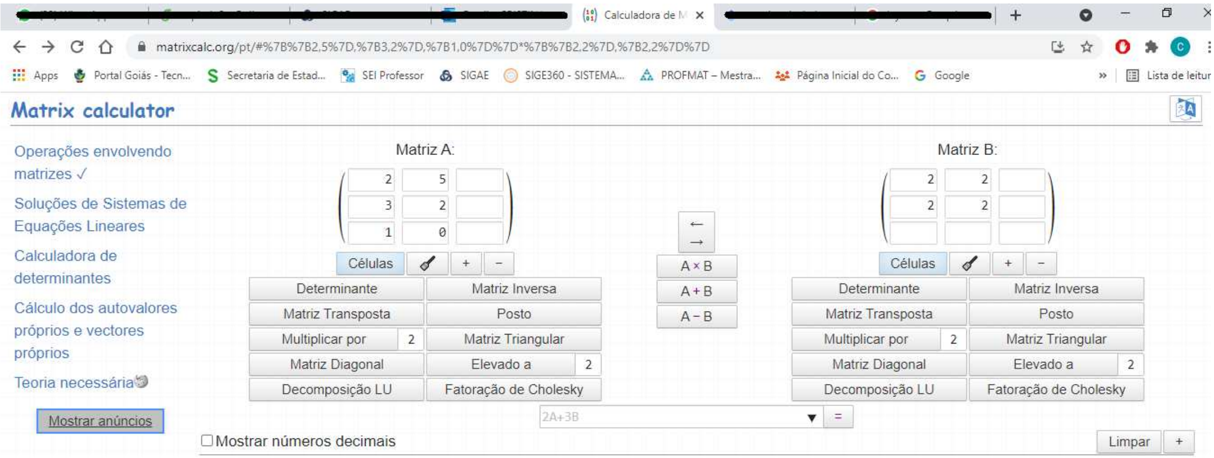

Figura 1.2: Layout *Matrix Calculator* Computador

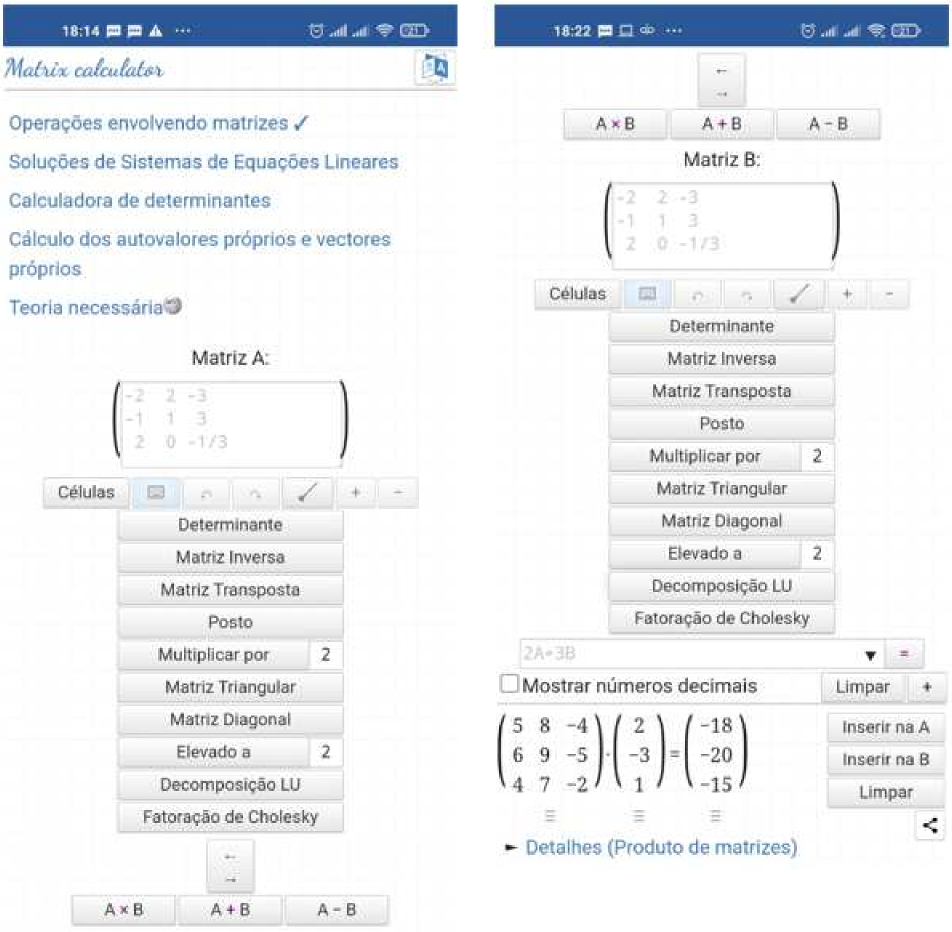

Figura 1.3: Layout *Matrix Calculator* Smartphone Sequência de Tela

Dentro do site, ou aplicativo, as matrizes estão no formato 3 x 3, se for necessário aumentar ou diminuir a ordem da matriz, basta clicar nas setas de + ou -, conforme indicado na Figura 1.4.

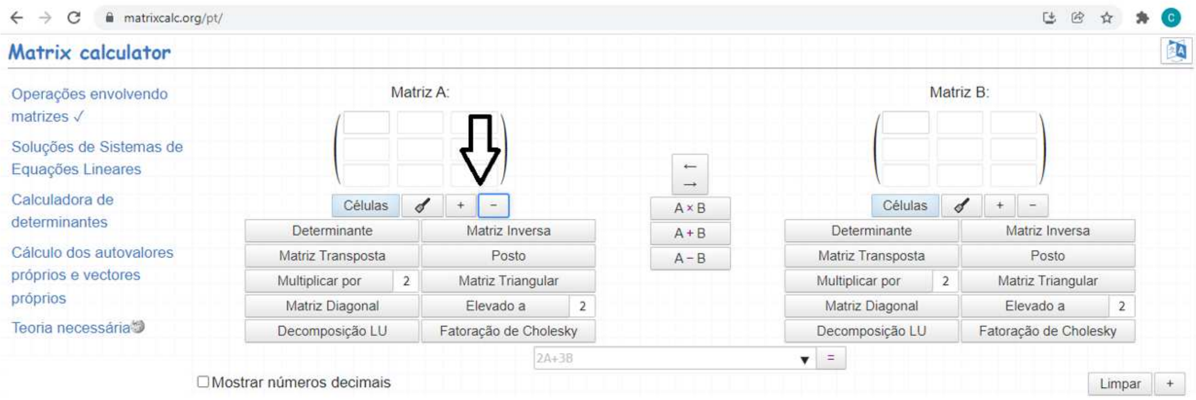

Figura 1.4: Layout *Matrix Calculator* aumentar e diminuir ordem da matriz

No terceiro capítulo, veremos que para aplicar a proposta deste trabalho, teremos que calcular potências de matrizes. Nesse sentido, por exemplo, para calcular o cubo de uma matriz quadrada P (P^3), temos que dar entrada nos elementos nos espaços conforme a ordem desejada e clicar em "Elevado a" e colocar a potência 3, conforme ilustrado na Figura 1.5.

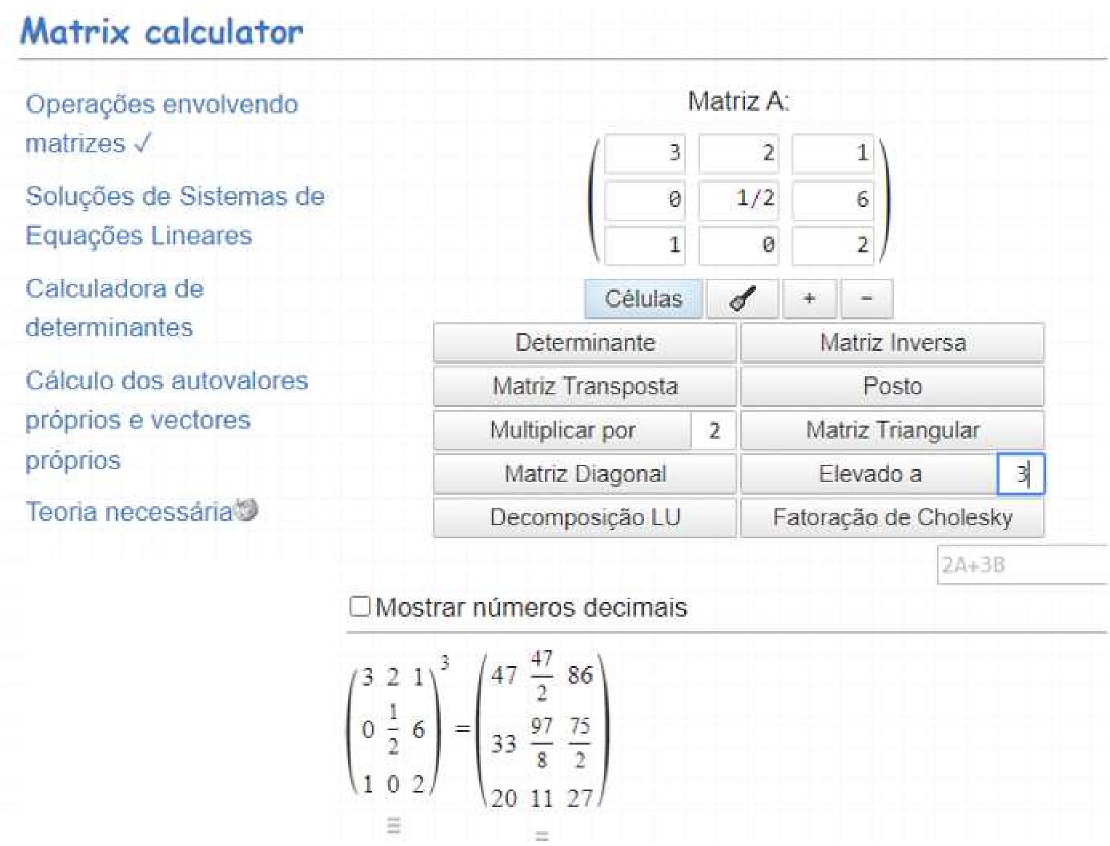

Figura 1.5: Layout *Matrix Calculator* - Cálculo de Potência

Estando dentro do *Matrix Calculator*, é explorar a fim de familiarizar e descobrir seu potencial. Lembramos que não é a única ferramenta que permite executar as operações entre matrizes, existem muitas outras. Mais uma vez reiteramos que partimos do pensamento de que os estudantes compreendem a multiplicação de matrizes quadradas; assim o uso do aplicativo vem adequadamente ajudar na agilidade dos cálculos, bem como trazer a tecnologia disponível para conhecimento dos mesmos, esperando também que produza interesse durante uma apresentação do tema.

1.3 Probabilidades

Nesta seção, elencamos conceitos e definições de probabilidade, que são necessários para o estudo de cadeias de Markov.

Exemplo 17. No final de cada ano é comum shopping centers promoverem sorteios de veículos entre seus consumidores. Joana, no decorrer de suas compras, pegou suas notas fiscais e trocou por sete cupons e os depositou em uma urna para concorrer. Ana fez o mesmo, e depositou dez cupons. No dia do sorteio contabilizaram quinze mil cupons. É possível medir a possibilidade de cada uma ganhar o carro?

Este exemplo mostra o quão natural nasce a noção de probabilidade em situações do cotidiano. Todavia iremos fortalecer nossa base para nos remeter ao estudo de cadeias de Markov.

A "Teoria da Probabilidade", "Cálculo de Probabilidades" ou simplesmente "Probabilidade" é uma ramo da matemática que modela fenômenos não determinísticos, ou seja, fenômenos que o acaso possui papel preponderante, pois possui diversas aplicações e cada avanço aumenta sua influência em diversas áreas, como por exemplo para estatística e processos estocásticos.

1.3.1 Aspectos históricos

Acredita-se que a teoria da probabilidade teve origem em meados do século XVII, tendo como motivação os jogos de azar. Para reforçar essa crença, citamos Eves (2011, p.307) que coloca: "Como jogador inveterado, Cardano (Jerônimo Cardano (1501-1576)) escreveu um manual do jogador em que abordou algumas questões interessantes de probabilidade." Já, Boyer (1974, p.265), relata que o ponto de partida da moderna teoria das probabilidades se deu em meados do século XVII, quando Chevalier de Méré (1607 - 1684), amigo de Blaise Pascal (1623-1662) propôs algumas questões de como dividir a aposta num jogo de dados que necessite ser interrompido. A propósito do problema colocado pelo jogador De Méré a Pascal, iniciou-se uma troca de correspondência entre Pascal e o matemático Pierre de Fermat(1601 - 1665), que posteriormente motivou outro matemático, Huygens(Christiaan Huygens (1629-1695)), que em 1957 fez uma publicação chamada " De rationciniis in ludo aleae", cuja tradução é " Sobre o raciocínio em jogos de dados". Ambos colocam que os jogos de azar como força motriz. Nesse sentido, não podemos deixar de mencionar alguns outros matemáticos que contribuíram para a construção dos conceitos de probabilidade, dentre eles: Jacob Bernoulli (1654 - 1705), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Lenis Poisson (1781 - 1840).

1.3.2 Conceitos iniciais

Definição 13. Um experimento é aleatório se, ao ser repetido nas mesmas condições, é impossível prever antecipadamente o resultado. Em contrapartida, um experimento é *determinístico* se, quando repetido nas mesmas condições, conduz ao mesmo resultado.

Exemplo 18. As situações abaixo são exemplos de experimentos aleatórios.

(i) E_1 : A retirada de uma carta de um baralho;

(ii) E_2 : Lançar um dado e observar o número na face superior;

(iii) E_3 : Lançar uma moeda quatro vezes e observar a sequência obtidas de caras (K) e coroas (C);

(iv) E_4 : O sorteio de um cupom entre 15.000 (Exemplo 18).

As situações estudadas no ensino médio, bem como o nosso trabalho se restringem a espaços amostrais finitos, mas a teoria da probabilidade trata também de espaços infinitos.

Identificada a situação descrita no experimento, o próximo passo consiste em descrever todos os possíveis resultados do experimento e calcular esse número (as vezes não é um número, pode ser possível uma infinidade de resultados), ou seja, explicitar qual é o conjunto dos possíveis resultados do experimento.

Definição 14. O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento é denominado espaço amostral. Usamos S, mas também se usa a letra grega Ω para indicar espaço amostral.

É importante estudarmos o número de resultados em um espaço amostral S, para indicar esse número usaremos $n(S)$. Assim, pela natureza do espaço amostral, temos três possibilidades: finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável. Quando o espaço amostral é finito ou infinito enumerável, é chamado *espaço amostral discreto.* Caso contrário, vamos chamá-lo de *espaço amostral contínuo.* Nos experimentos listados acima, todos possuem espaço amostral finito, como veremos logo mais. Para visualizarmos um exemplo que trata com espaço amostral infinito enumerável, sugerimos Morgado(2015, p.157), que elucida a seguinte situação:

Exemplo 19. Dois jogadores, A e B, lançam sucessivamente um par de dados até que um deles obtenha soma de pontos 7, caso em que a disputa termina e o vencedor é o jogador que obteve soma 7. Se A é o primeiro a jogar, qual é a probabilidade de A ser o vencedor?

Veja que é possível nunca sair soma 7, daí espaço amostral infinito.

Definição 15. Evento é um conjunto de resultados possíveis de um experimento, ou seja, é um subconjunto do espaço amostral. O número de elementos de um evento A qualquer é representado por $n(A)$.

Exemplo 20. Do Exemplo 19 e na ordem dos experimentos, respectivamente, S_1, S_2, S_3 e S_4, são os conjuntos que representam os espaços amostrais, $n(S_1)$, $n(S_2)$, $n(S_3)$ e $n(S_4)$, a quantidade de elementos que cada espaço amostral tem, A, B, C e D são eventos definidos e por fim $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ e $n(D)$ o número de elementos que cada evento possui:

(i) $S_1 = \{$Ás de Ouro, 2 de Ouro, 3 de Ouro,..., Valete de Ouro, Rei de Ouro, Ás de Espadas, 2 de Espadas, 3 de Espadas,...,Valete de Espadas, Rei de Espadas, Ás de Paus, 2 de Paus, 3 de Paus,..., Valete de Paus, Rei de Paus, Ás de Copas, 2 de Copas, 3 de Copas,..., Valete de Copas, Rei de Copas $\}$, assim $n(S_1) = 52$ e se A é o evento sair um 9 de paus, então $n(A) = 1$, pois temos em um baralho apenas um 9 de paus;

(ii) $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então $n(S_2) = 6$ e se B é o evento definido por sair um número ímpar menor que 4, então $B = \{1,\ 3\}$, daí $n(B) = 2$;

(iii) $S_3 = \{$todas as sequências possíveis da forma $(a_1, a_2, a_3, a_4)\}$, onde cada $a_i = (K)$ ou (C), na i-ésima jogada. Nesse sentido, $n(S_3) = 16$ e D é o evento sair mais caras do que coroas, então

$$\begin{aligned} D = \{&(K, K, K, K), (K, K, K, C), (K, K, C, K),\\ &(K, C, K, K), (C, K, K, K)\}, \end{aligned}$$

daí, $n(C) = 5$;

(iv) $S_4 = \{1, 2, 3, 4, ..., 14998, 14999, 15000\}$, logo $n(S_4) = 15.000$ e sendo S o evento definido por sair bilhetes depositados por Ana, então $n(S) = 10$.

Em S_1 e S_3, podemos observar que o resultado de um experimento nem sempre é um número.

Iremos, agora, definir os vários tipos de eventos, para tal, seja

Definição 16. Seja S S um espaço amostral, $n(S) > 0$, A e B eventos quaisquer de S, então:

1. Um evento é dito *Elementar* quando é um subconjunto unitário de S.
2. Um evento A é chamado de *Certo* se A for o próprio S.
3. Um evento A é *Impossível* se $A = \emptyset$.
4. Um evento A é chamado *União* se A for a reunião de outros eventos.
5. Um evento A é chamado *Interseção* se A for a interseção de outros eventos.
6. Dois eventos A e B são chamados *Mutuamente Exclusivos* quando $A \cap B = \emptyset$. Em outras palavras, A e B são mutuamente exclusivos se, e somente se, não podem ocorrer simultaneamente.
7. Um evento $\bar{A}$ é complementar do evento A, se $\bar{A} = \{x \in S | x \notin A\}$, ou ainda, $S - A$.

Exemplo 21. A seguir, veremos os tipos de eventos que acabamos de definir.

Considere o lançamento de um dado comum (não viciado) e a observação da face voltada para cima. O espaço amostral desse experimento é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(i) Evento Elementar: A ocorrência de um número múltiplo de 4, $A = \{4\}$;

(ii) Evento Certo: a ocorrência de um número natural menor que 7, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$;

(iii) Evento Impossível: A ocorrência de um número múltiplo de 7, $C = \emptyset$;

(iv) Evento União: Seja D a ocorrência de um número par, $D = \{2,4,6\}$ e E sendo a ocorrência de um número primo, $E = \{2, 3, 5\}$, então A∪B= $\{2, 3, 4, 5, 6\}$;

(v) Evento interseção: consideremos os mesmos eventos D e E do Evento União. O evento $D \cap E = \{2\}$

(vi) Eventos Mutuamente Exclusivos: Seja D a ocorrência de um número par, $D = \{2, 4, 6\}$ e G a ocorrência de um número ímpar, $G = \{1, 3, 5\}$, então D e G são Mutuamente Exclusivos, pois $D \cap G = \emptyset$;

(vii) Evento Complementar: Seja G o mesmo evento do item anterior. O evento $\bar{G}$, sendo a ocorrência de um número não ímpar, ou seja, um número par, $\bar{G} = \{2, 4, 6\}$ é um evento complementar uma vez que $\bar{G}$ = S - G.

Definição 17. Dizemos que um espaço amostral é equiprovável quando a chance de ocorrência de cada um de seus eventos elementares é sempre a mesma.

O experimento E_2 do Exemplo 19 gera um espaço equiprovável, uma vez que qualquer face tem chances iguais de ocorre. A menos que se especifique o contrário, todos os espaços amostrais aqui citados serão considerados equiprováveis.

Definição 18 (Probabilidade Clássica). *(Cardano*[4]*, Pascal e Laplace)* Sejam S um espaço amostra finito, equiprovável e não-vazio, e A um de seus eventos. Define-se a probabilidade do evento A como

$$P(A) = \frac{\text{números de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{n(A)}{n(S)},$$

onde $n(A)$ e $n(S)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de S, como já mencionado logo após as definições de espaço amostra e evento.

1.3.3 Propriedades

Sejam S um espaço amostral, $n(S) > 0$, A e B eventos quaisquer de S, então;

(i) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;

(ii) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(iii) $P(S) = 1$;

(iv) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

[4] A definição de probabilidade como quociente do número de "casos favoráveis" foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Liber de ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576).(Morgado e Carvalho, 2015, p.112)

Demonstração. (i) Temos que $A \subset B$, então $n(A) \leq n(B)$.

Como $n(S) > 0$, podemos dividir tanto $n(A)$ quanto $n(B)$ por $n(S)$, logo:

$$\frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)}$$

Portanto, $P(A) \leq P(B)$.

(ii) Provemos inicialmente que P(A)$\geq$ 0.

Temos que $n(A) \geq 0$ e $n(S) > 0$, daí $\dfrac{n(A)}{n(S)} \geq 0$, logo

$$P(A) \geq 0. \tag{1.4}$$

Agora, provemos que $1 \geq P(A)$.

Como $n(S) > 0$ e $n(S) \geq n(A)$, então $\dfrac{n(S)}{n(S)} \geq \dfrac{n(A)}{n(S)}$, segue então

$$P(S) \geq P(A). \tag{1.5}$$

Das expressões (1.4) e (1.5), temos que $0 \leq P(A) \leq 1$.

(iii) Por definição $P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = 1$.

(iv) Como A e B são mutuamente excludentes, então $n(A \cap B) = \emptyset$, então $A \cup B = n(A) + n(B)$, como $n(S) > 0$, segue então que:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = P(A) + P(B).$$

Portanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

$\square$

Exemplo 22. No lançamento de uma moeda honesta, temos as três condições da definição satisfeitas, considerando A o evento sair cara e B, sair coroa. Temos que o espaço amostral S é dado por { cara, coroa}, logo n$S = 2$. Assim:

(i) $0 \ \leq P\left(A\right) = \dfrac{1}{2} \leq 1$ e $0 \leq P\left(B\right) = \dfrac{1}{2} \leq 1$;

(ii) $P(S) = 1$, pois $P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = \dfrac{2}{2} = 1$;

(iii) Sabemos que simultaneamente não ocorre cara e coroa, então

$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) = 0,5 + 0,5 = 1.$

Exemplo 23. No lançamento de um dado não viciado, qual é a probabilidade de se obter face maior que 4?

O espaço amostral é dado por: $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, assim, $n(S) = 6$ e o subconjunto B : obter face maior que 4 é o nosso evento, logo $B = \{5{,}6\}$ e $n(B) = 2$;

Assim, aplicando a definição, obtemos: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{6}$, logo $P(B) = \dfrac{1}{3}$.

Exemplo 24. Considere um baralho usual composto de 52 cartas divididas em 4 naipes, cada naipe com 13 cartas,como descrito no Exemplo 21. Sabemos que as cartas de dois naipes são vermelhas e dois são pretas. Retirando ao acaso uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de que seja uma figura? Uma carta preta?

O espaço amostral S é exatamente o descrito por S_1 (Exemplo 21). Então $n(S) = 52$ e considerando o evento C : retirar uma figura, desse modo, $n(C) = 12$, calculando a probabilidade de C ocorrer, temos: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{12}{52}$, logo $P(C) = \dfrac{3}{13}$;

Agora consideremos o subconjunto D, definido D : retirar uma carta preta. Então $n(D) = 26$. Segue então que, $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{26}{52}$, portanto $P(D) = \dfrac{1}{2}$;

e D : retirar uma carta preta, desse modo ; $n(D) = 26$.

1.3.4 Diagrama de árvore

Certos experimentos discretos podem ser visualizados por diagramas. Experimentos repetidos também. Nesse caso, por um diagrama no formato de árvore pode ser o mais didático. Tal diagrama é conhecido por árvore de possibilidades. Esse tipo de diagrama é útil no entendimento do espaço amostral do experimento, pois permite visualizar como se dá a obtenção dos valores de probabilidades associados aos eventos. É uma ótima ferramenta para visualizar a estrutura de um problema.

O campo de estudo do diagrama de árvore permite a visualização gráfica de diferentes níveis de detalhamento de um problema e é simples e natural de se construir. Por isso, trata-se de uma ferramenta comumente usada para organizar informação. Ele é feito desenvolvendo-se os galhos da árvore em diferentes níveis de detalhe, podendo ser desenvolvido tanto horizontalmente quanto verticalmente na página.

Exemplo 25. Uma urna contém 2 bolas azuis, 6 brancas e 4 cinzas. Se duas bolas são retiradas ao acaso, sequencialmente, sem reposição da primeira, qual a probabilidade de que ambas sejam brancas? E de que ambas sejam da mesma cor?

Para montarmos nosso diagrama, partimos do cálculo da probabilidade para a primeira retirada de um bola de cada cor. Assim, vamos considerar o espaço amostral:

$$S = \{A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, C_1, C_2, C_3, C_4\},$$

o que nos dá, $n(S) = 12$.

A : bola azul, $n(A) = 2$, então $P(A) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

B : bola branca, então $P(B) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

C : bola cinza, então $P(C) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

Como as bolas são retiradas sem reposição, então para a segunda retirada temos reduzir nosso espaço amostral, que passa a ser $n(A) = 11$, e os cálculos das probabilidades também mudam. Vejamos no diagrama 1.6.

Observando o diagrama, Figura 1.6, fica fácil obter as probabilidades desejadas. Vejamos sair ambas brancas:

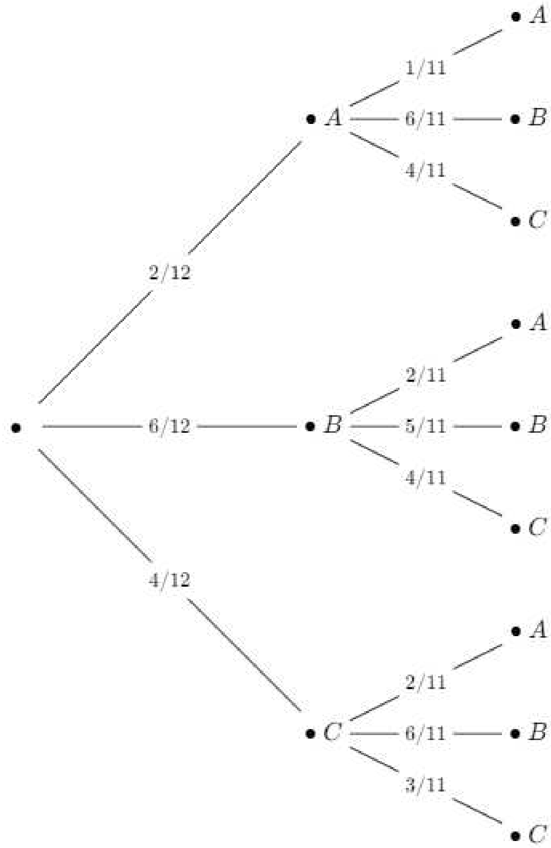

Figura 1.6: Diagrama de possibilidades

Verificando no diagrama, notamos que existe apenas um caminho para sair ambas brancas, passando por $\frac{6}{12}$ e $\frac{5}{11}$. Logo:

$$P(BB) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132}.$$

Logo, $P(BB) = \frac{5}{22}$.

Agora, obteremos a probabilidade de sair ambas da mesma cor: Veja que quando consideramos sair da mesma cor, devemos levar em consideração sair ambas azuís, ou ambas brancas, ou ainda, ambas cinzas. Buscando no diagrama, temos três ramos em que isso acontece:

- o ramo que passa pelo caminho bola azul e bola azul: $\frac{2}{12}$ e $\frac{1}{11}$;
- o ramo que passa pelo caminho bola branca e bola branca: $\frac{6}{12}$ e $\frac{5}{11}$ e
- o ramo que passa pelo caminho bola cinza e bola cinza é $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{11}$.

Segue então, que a probabilidade de obter ambas azuis é:

$$P(AA) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132};$$

e a probabilidade de obter tanto na primeira retirada, quanto na segunda bolas brancas é:

$$P(BB) = \frac{30}{132};$$

e a probabilidade de obter as duas cinzas é:

$$P(CC) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132};$$

Portanto, a probabilidade pedida é: $P(\text{ambas da mesma cor}) = \frac{2}{132} + \frac{30}{132} + \frac{12}{132} = \frac{44}{132} = \frac{1}{3}$.

1.3.5 Probabilidade Condicional

A situação a seguir ajuda a compreendermos o conceito de probabilidade condicional, que, como o nome sugere, é a probabilidade de ocorrer um evento condicionado à ocorrência de outro evento.

Exemplo 26. Dez amigas se reuniram para fazer um consórcio de viagem, onde cada uma recebeu uma ficha com número de um a dez. Todo mês, durante 10 meses, receberá o prêmio aquela que for contemplada com a ficha correspondente à bolinha em sorteio no mês. No momento do primeiro sorteio, a pessoa que ficou responsável declarou, após sortear a bolinha, que o número que saiu é par. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja maior ou igual que 6?

Vejamos que antes do sorteio da bolinha, todas do grupo tinham esperança de ser contempladas , pois o espaço amostral era $S = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, porém quando a responsável pelo sorteio afirmou que o número sorteado era par, o espaço amostral ficou reduzido a $A = \{\ 2, 4, 6, 8, 10\}$. Uma boa maneira de visualizarmos a situação e utilizar um diagrama, como ilustrado na Figura 1.7.

Considerando o subconjunto B como o evento sair número maior ou igual que seis. A garantia de que o número sorteado é par reduz o espaço amostral ao evento A. Logo, um elemento do subconjunto B só poderá ocorrer na interseção de A e B. Dessa forma, a probabilidade P de ocorrer B, dado que já ocorreu A, é

$$P = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{5}.$$

Definição 19 (Probabilidade Condicional). Dados dois eventos A e B, com $P(A) > 0$, a probabilidade condicional de B dado A é o número

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

que é denotado por

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{1.6}$$

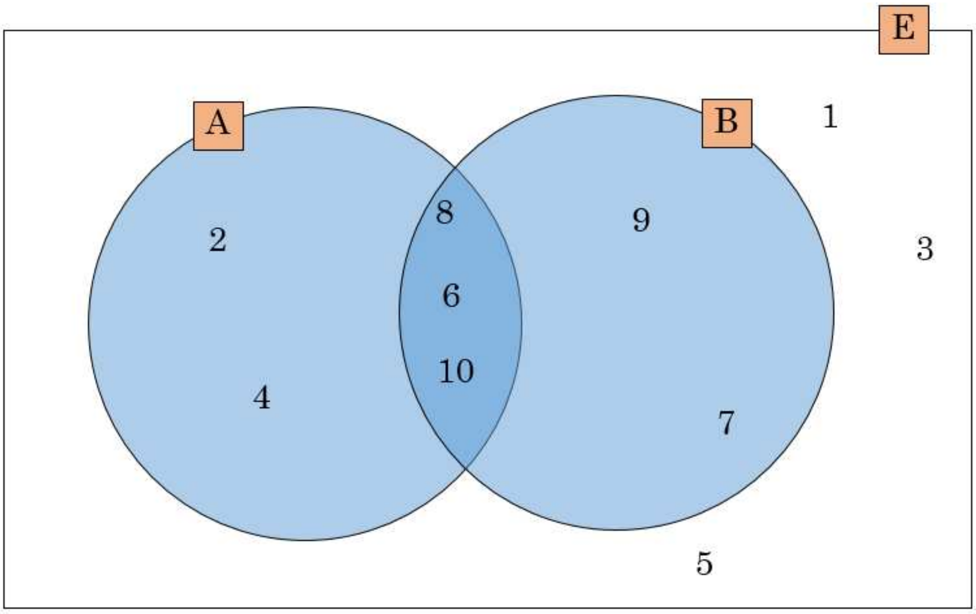

Figura 1.7: Diagrama de Venn

De (1.6) podemos escrever:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}.$$

Exemplo 27. Ao lançar um dado honesto, se o resultado obtido foi par, qual a probabilidade dele ser maior ou igual a 5?

O experimento do lançamento de um dado produz o seguinte espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então $n(S) = 6$. Agora, vejamos os eventos:
A : sair resultado par, então $A = \{2{,}4{,}6\}$ e $n(A) = 3$ e
B : sair um número maior ou igual a 5, segue então que, $B = \{5{,}6\}$ e desse modo, $n(B) = 2$. Queremos calcular a probabilidade do resultado ser maior ou igual a 5, assim:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

Veja que, $(A\cap B) = \{6\}$, então $n(A\cap B) = 1$ dessa forma,

$$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6} \text{e} P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6},$$

portanto,

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{3} = \frac{1}{3}.$$

Definição 20 (Independência). Dados dois eventos A e B, A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1.7}$$

Exemplo 28. Uma moeda é lançada duas vezes. Obtemos nesse caso o espaço amostral equiprovável S dado por

$S = \{$CC, CK, KC, KK$\}$, em que K representa cara e C representa coroa.

Consideremos o evento A em que coroa ocorra no primeiro lançamento e B o evento em que cara ocorra no segundo lançamento. Temos que

$P(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ e $P(B) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Por outro lado, a probabilidade de que coroa ocorra no primeiro e cara ocorra no segundo lançamento é dada por

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Consequentemente, A e B são eventos independentes.

1.3.6 Teorema da Probabilidade Total

Teorema 4. (Castro, 2015, p.14) Sejam $A_1, A_2, \cdots A_n$ uma partição [5] do espaço amostral S e B um evento qualquer de S, então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i) \tag{1.8}$$

Demonstração. Como $\cup_{i=1}^{n} A_i = S$, segue que $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$. Os eventos $(A_i \cap B)$ são mutuamente exclusivos dois a dois, ou seja, não há intersecção entre eles, pois $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\ i \neq j$. Daí,

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)) \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 5. (Castro, 2015, p.15) Sejam $A_1, A_2, \cdots A_n$ uma partição do espaço amostral S, B e C dois eventos quaisquer de S, então

$$P(B \mid C) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i \cap C) \cdot P(A_i \mid C) \tag{1.9}$$

[5] Se $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\ i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$.

Demonstração. Vejamos que

$$
\begin{aligned}
P(B \mid C) &= P\Big(B \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \mid C\Big) \\
&= \frac{P\Big(B \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)\Big) \cap C}{P(C)} \\
&= \frac{P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\Big(B \cap A_i\Big) \cap C\Big)}{P(C)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(B \cap A_i \cap C)}{P(C)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(B \cap A_i \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(A_i \cap C)}{P(A_i \cap C)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(B \cap A_i \cap C)}{P(A_i \cap C)} \cdot \frac{P(A_i \cap C)}{P(C)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i \cap C) \cdot P(A_i \mid C)
\end{aligned}
$$

.

□

1.3.7 Variáveis Aleatórias

No Exemplo 27, o dado era lançado uma única vez. A seguir, propomos outro experimento, agora lançando o dado duas vezes.

Exemplo 29. O nosso experimento é lançá-lo duas vezes, assim o nosso espaço amostra é o seguinte: S ={(1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1) (1,2) (2,2) (3,2) (4,2) (5,2) (6,2) (1,3) (2,3) (3,3) (4,3) (5,3) (6,3) (1,4) (2,4) (3,4) (4,4) (5,4) (6,4) (1,5) (2,5) (3,5) (4,5) (5,5) (6,5) (1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6)}

Para cada para (x, y) de S, seja X o número de vezes que 5 aparece. Neste caso, $X \in \{0, 1, 2\}$, pois X pode aparecer ou não no par, por exemplo: em $(6, 6)$ ele não aparece, já em $(5, 1)$, aparece uma vez. Nesse sentido, é possível definir uma função X, na qual podemos associar cada par do espaço amostral com um elemento do conjunto $\{0, 1, 2\}$.

Do mesmo modo, podemos observar os exemplos abaixo e definir funções X para cada experimento.

Exemplo 30. Na descrição de uma peça manufaturada são empregadas empregando apenas as categorias defeituosa e não defeituosa. Podemos definir uma função X, onde associaremos cada elemento do espaço amostral, uma das categorias, com um elemento do conjunto $X \in \{0, 1\}$.

Exemplo 31. Uma urna contém duas bolas vermelhas (V) e oito bolas pretas (P). São sorteadas duas bolas ao acaso, sem reposição. Neste caso, S = {(V,V), (V,P), (P,P), (P,V)}, a cada par podemos associar um elemento do conjunto {0,1,2} através da função X, sendo X: número de bolas vermelhas retiradas.

Podemos representar a situação por uma árvore de possibilidades, conforme a Figura1.8.

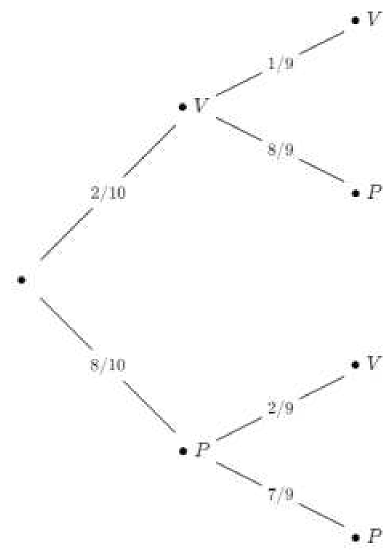

Figura 1.8: Diagrama de possibilidades para sorteio de duas bolas

Usaremos o conceito de probabilidade condicional, uma vez que a probabilidade da segunda retirada depende da primeira bola que sai, quando calculamos a probabilidade da segunda bola, o espaço amostral reduzirá, ou seja, sempre que calculamos $P(A|B)$, estaremos calculando $P(B)$ em relação ao espaço amostral reduzido A, em lugar de fazê-lo em relação ao espaço amostral original, assim:

A probabilidade de retirar a segunda bola vermelha, dada que a primeira bola retirada também foi vermelha e dada por:

$$P(V|V) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}.$$

Do mesmo modo ocorre para calcular a probabilidade de retirar a segunda bola vermelha, dada que a primeira bola retirada foi preta:

$$P(V|P) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45.}$$

Calculando de modo semelhante as demais probabilidades, temos

$$P(P|P) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45};$$

$$P(P|V) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$$

Em muitas situações experimentais, o interesse é na mensuração de alguma coisa e no seu registro como um número, independente de o espaço amostral ser ou não formado por resultados numéricos, como acontece no segundo exemplo acima: atribuímos um número a cada resultado do experimento, associamos zero às peças sem defeito e um para as peças com defeito. Portanto, variáveis aleatórias são variáveis numéricas às quais iremos associar modelos aleatórios. Veremos que uma variável aleatória tem um número para cada resultado de um experimento.

Definição 21 (Variável Aleatória). Sejam E um experimento e S um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X, que associe a cada elemento $s \in S$ um número real, $X(s)$, é denominada variável aleatória.

Assim, quando desejamos atribuir um número real x a todo elemento s de espaço amostral S, queremos $x = X(s)$, que é o valor de uma função X do espaço amostral nos números reais, isso é feito através da variável aleatória, que é uma regra de associação de um valor numérico a cada ponto do espaço amostral. Temos dois tipos de variáveis aleatórias: discretas e contínuas. Definiremos apenas as variáveis aleatórias discretas, uma vez que é ela que será utilizada no estudo de cadeias de Markov.

Definição 22 (Variável Aleatória Discreta). Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X for finito ou infinito enumerável, denomina-se X de variável aleatória discreta.

Isto é, os valores possíveis de X, podem ser postos em lista como $x_1, x_2, \ldots, x_n$. No caso finito, a lista acaba, e no caso infinito enumerável, a lista contínua indefinidamente.

Vejamos abaixo alguns exemplos de variáveis aleatórias discretas:

Exemplo 32. O seguinte experimento aleatório consiste em observar a face superior no lançamento de duas moedas.

Nesse caso, o espaço amostral pode ser definido da seguinte forma:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\},$$

em que $s_1 = (cara, cara)$, $s_2 = (cara, coroa)$, $s_3 = (coroa, cara)$ e $s_4 = (coroa, coroa)$. Se definimos a variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos: $X(s_1) = 2$, $X(s_2) = 1$, $X(s_3) = 1$ e $X(s_4) = 0$, ou seja, a variável aleatória X assume os valores $X \in \{0, 1, 2\}$. Assim,

- $X = 0$; corresponde ao evento (s_4). Veja que $P(X = 0) = P(X = \{s_4\}) = \dfrac{1}{4}$.
- $X = 1$, corresponde ao evento $(s_2) \cup (s_3)$. Observe que $P(X = 1) = P(X = \{s_2, s_3\}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
- $X = 2$, corresponde ao evento (s_1), e $P(X = 2) = P(X = \{s_4\}) = \dfrac{1}{4}$.

Vejamos essa associação na Figura1.9.

Exemplo 33. Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por observação do sexo (M: masculino e F: feminino) das crianças em famílias com três filhos.

$$S = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}$$

estabelecendo a associação $s_1 =$ (MMM); $s_2 =$ (MMF); $s_3 =$(MFM); $s_4 =$(FMM);$s_5 =$ (MFF), $s_6 =$(FMF); $s_7 =$ (FFM) e $s_8 =$(FFF). Definimos X : número de crianças do sexo masculino (M). Então X assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}. Portanto X é uma variável aleatória discreta.

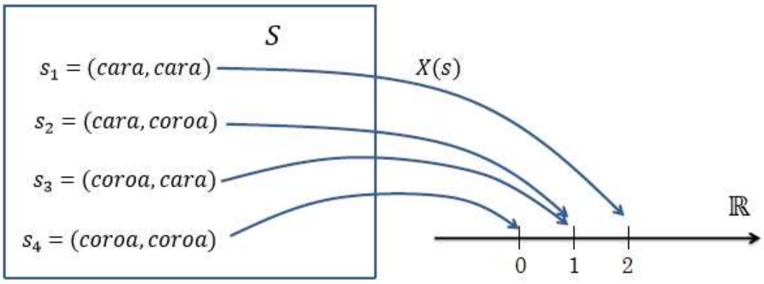

Figura 1.9: Descrição da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas.

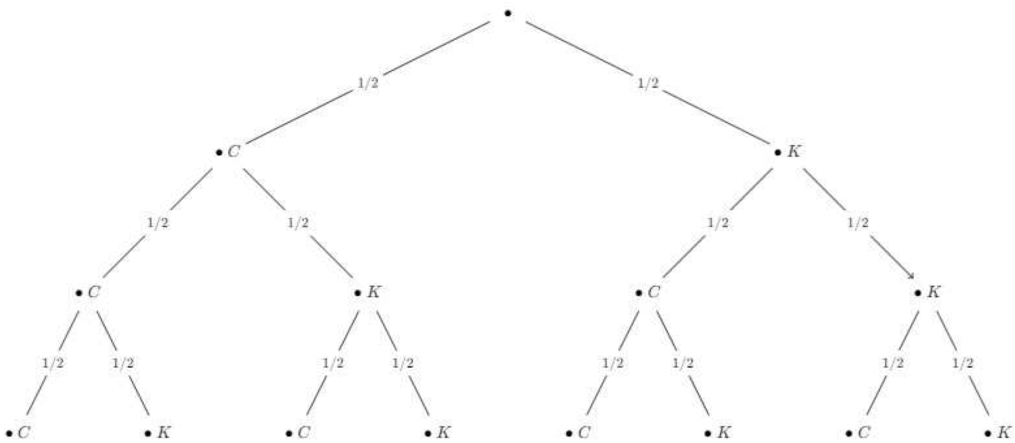

Figura 1.10: Diagrama de Possibilidades para lançamento de uma moeda três vezes

Exemplo 34. Considere o experimento de lançar uma moeda honesta três vezes e observar as faces que ocorrem.

Observemos o Diagrama de possibilidades, Figura 1.10:
Assim, um espaço amostral é o conjunto

$$\begin{aligned} S &= \{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C),\\ &\quad (C,K,K),((K,C,K),(C,C,K),(C,C,C)\}. \end{aligned}$$

Para cada s em S, definimos $X(s)$ como o número de caras(K) ocorrida(s) nos três lançamentos. Logo, os valores possíveis para X, são: 0, 1, 2 ou 3. Portanto X é uma variável aleatória discreta.

Exemplo 35. Lançamento de uma moeda honesta repetidamente até que ocorra a face coroa(C). O resultado é a observação das faces que ocorrem.

Um espaço amostral para o experimento pode ser dado pelo conjunto: S ={(K), (K,C), (K,K,C),(K,K,K,C),(K,K,K,K,C),(K,K,K,K,K,C), $\cdots$}
Definindo $X(s)$ como o número de caras ocorridas em s, para cada s em S, temos como imagem o conjunto S_X ={0,1,2,3,4,5,$\cdots$}. Logo, X é variável aleatória discreta, todavia com imagem infinita enumerável.

Capítulo 2

Grafos

Muitas situações podem ser descritas por grafos. Nesse sentido, apresentamos alguns conceitos desta teoria de modo que venha contribuir para o estudo de cadeias de Markov, e por que não, em outras aplicações, visto que é uma teoria que abrange muitas áreas. Neste capítulo, o objetivo é apresentar teoria básica de grafos.
Para pensarmos:

Exemplo 36. 1. ***Problema 1 (adaptado Jurkiewicz, 2019 p.3):*** Ligue Eletricidade, Gás e Saneamento básico às três casas [6] sem que as linhas se cruzem. É possível?

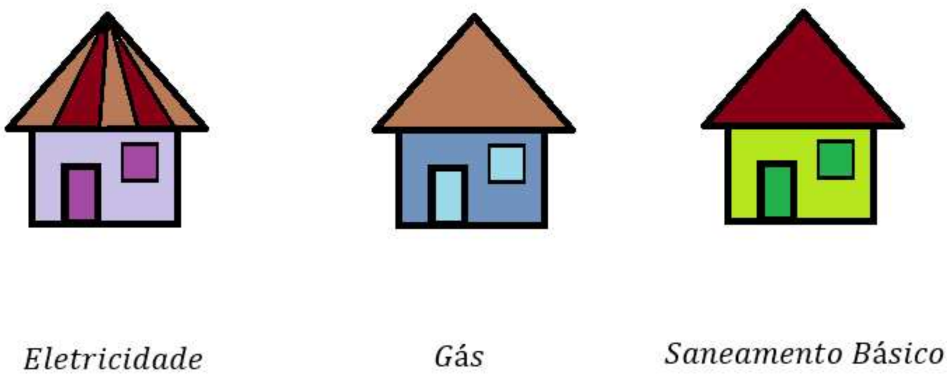

Figura 2.1: O problema das três casas
Fonte: Autora, 2022

Problema 2 (adaptado PRIMEIRA FASE - NÍVEL 3 - OBMEP 2009): A Figura 2.2 mostra a planta de um shopping que tem seis setores, indicadas pelas letras de A até F. João entrou no shopping, percorreu todas os setores e foi embora tendo passado exatamente duas vezes por um dos acessos e uma única vez por cada um dos outros. O acesso pelo qual João passou duas vezes liga quais setores?

[6]Problema clássico intitulado "Problema das três casas", cuja solução não existe nas condições dadas.

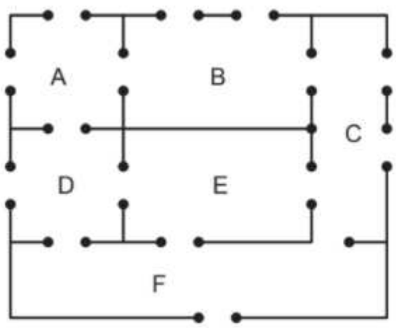

Figura 2.2: Passeio no Shopping
Fonte: OBMEP (2009)

Os dois problemas apresentados podem ser tratados do mesmo modo: um conjunto de pontos e ligações entre eles. Essa estrutura chamamos de grafo. O texto, a seguir foi construído a partir de Assis (2016) , ?, Lucas (2019) , Nogueira (2015) e Favaro (2017).

2.1 Breve histórico

A formalização da teoria de grafos é recente: o primeiro teorema registrado está datado de 1736, feito por Euler[7] para solucionar o problema chamado das Pontes de Konigsberg.

O problema mencionado trata da cidade do Konigsberg, que é cortada pelo rio Prególia, formando assim, duas ilhas, que na época eram ligadas por sete pontes, conforme a Figura 2.3.

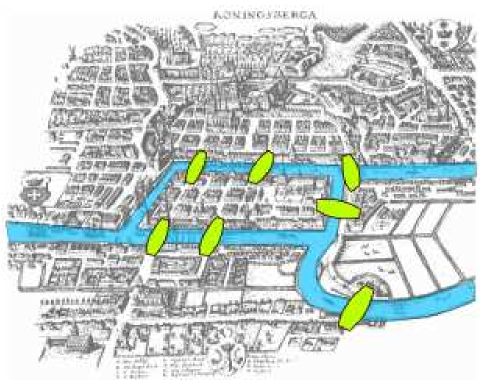

Figura 2.3: As sete pontes de Konigsberg
Fonte: Giuscã (2005)

O Centro de Difusão e Ensino Matemateca do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP) possui um acervo de objetos para

[7]Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista suíço, é um dos grandes matemáticos da história e, certamente, o mais prolífico de todos os tempos. Seus trabalhos contêm inúmeras contribuições fundamentais a diversas áreas da matemática (da teoria dos números até a probabilidade), da física (acústica, ótica), da astronomia (do movimento planetas e cometas até a geofísica e o estudo das marés), da mecânica (da teoria dos corpos rígidos à ciência naval), da lógica, da filosofia e até da música.

divulgação da matemática, colocando como objetivo prestar serviços referentes à divulgação da Matemática para o público em geral e, em particular, para estudantes de todos os níveis de ensino. Nesse sentido, um dos materiais em seu acervo é um tabuleiro interativo para simular o problema em questão, podendo colocar sete, menos ou mais pontes, dispondo-as onde desejar. Observe a Figura 2.4.

Figura 2.4: "As sete pontes de Konigsberg" - Tabuleiro representando as sete pontes de Königsberg - acervo da Matemateca IME-USP
Fonte: Argentom (2017)

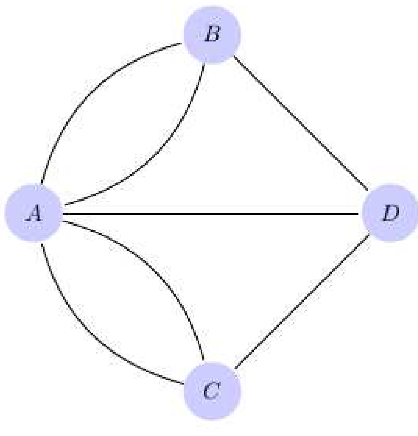

Figura 2.5: Modelo matemático do Problema "As sete pontes de Konigsberg"
Fonte: Autora, 2022

A síntese do desafio era atravessar todas as pontes da cidade passando uma única vez em cada uma delas.

Outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da teoria dos grafos durante o século XIX: Kirchhoff[8], Cayley[9] e Hamilton[10]. Também no século XIX, o matemático Sylvester[11] apresenta, de modo pioneiro o termo graph no sentido de grafo. No século seguinte, após 1970, a teoria cresceu, impulsionada pelo desenvolvimento acelerado dos computadores.

2.2 O que é um Grafo?

Na Figura 2.5, temos uma representação bem sucinta do problema das pontes de Konigsberg, que nos permite visualizar o problema de modo mais simples. Essa representação sugere como Euler representou o problema: ele utilizou pontos para cada região de terra e segmentos de retas para ligar os pontos, indicando, assim as pontes. Nessa descrição temos um grafo. Segundo (Assis, 2016, p.14) "É um modelo ou estrutura matemática que representa relações entre objetos. Grafos podem ser utilizados na definição ou resolução de problemas em diversas áreas."

Exemplo 37. (Favaro, 2017, p.15):

A escola XX promoverá um campeonato de futebol entre as turmas $6A$, $6B$, $7A$, $7B$, $8A$ e $8B$. Na primeira rodada, cada turma efetuará apenas um jogo com cada uma das outras turmas. Nesse sentido, para obter o número de jogos dessa rodada basta listá-los ou então, fazer uma associação de pontos para cada turma e os jogos serão representados por linhas (Figura 2.6)

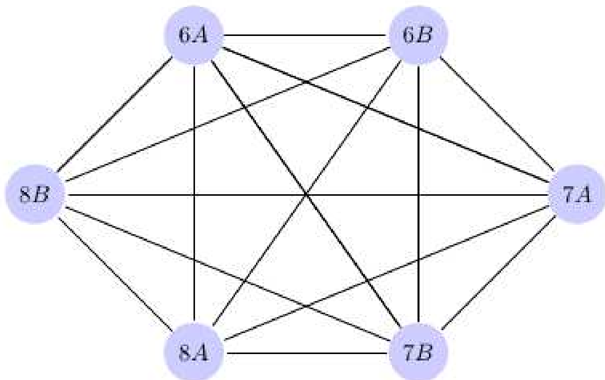

Figura 2.6: Representação jogos a serem realizados no campeonato de futebol
Fonte: Autora, 2022

Desses exemplos, é possível tirarmos as primeiras noções de um grafo. Contudo, para que um grafo seja bem definido, são necessário dois conjuntos:

1. V : o conjunto dos vértices;

[8] O físico alemão Gustav Kirchhoff (1824-1887) foi o primeiro a utilizar modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos.

[9] O matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) fez uso da teoria das árvores para enumerar todos os isômeros para certos hidrocarbonetos.

[10] O matemático irlandês William Hamilton (1805-1865) contribuiu para o desenvolvimento da óptica, dinâmica, álgebra e teoria dos grafos.

[11] O matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897)

2. A : o conjunto das arestas;

   Além desses conjuntos, também é necessário:

3. lei para estabelecer uma relação entre V e A.

No Exemplo 39, V é formado pelas turmas, enquanto que A é formado pelos jogos a serem realizados.

2.3 Definição, representações e outros conceitos

O aluno do Ensino Médio nem sempre se apropria das definições, teoremas, dos objetos matemáticos do modo que os textos apresentam, seja por falta de preparação ou por não ter desenvolvido a abstração necessária para compreensão. Assim, se faz necessário que, em textos voltados para esse público, apresentem a teoria de um modo mais intuitivo, usando exemplos ou relacionando os novos objetos a outros já assimilados, na caso de grafos, geometria básica.

Definição 23. Um grafo é um tripla $G = (V, A, f)$ é definido pelo par de conjuntos V e A, onde:

- V é um conjunto não vazio, cujos elementos são chamamos de vértices (ou nós);
- A é um conjunto (podendo ser vazio), cujos elementos são denominados **arestas** (ou **arcos**);
- f é uma função que associa cada aresta a um par não-ordenado de vértices em V.

Cada aresta tem um ou dois vértices associados a ela, chamados de suas **extremidades**. Diz-se que cada aresta **liga** ou **conecta** suas extremidades.

Definição 24. Dois vértices são adjacentes ou vizinhos quando estes forem extremos de uma mesma aresta.

Definição 25. Duas arestas são adjacentes ou vizinhas quando possuírem o mesmo extremo.

Exemplo 38. Na sala de aula X, com oito alunos selecionados, decidiu-se fazer uma pesquisa para avaliar quem deveria ser o líder de uma atividade. Como Ana e Fernando eram os mais aplicados, o professor pediu para que eles nomeassem dois possíveis candidatos para a função.

Certo que os alunos indicados por eles seriam amigos em comum aos dois, e sabendo dos elos de amizade entre estes alunos, ele listou:

- Ana é amiga de Betina, Carlos, Eduarda e Geni;
- Betina é amiga de Ana, Fernando e Geni;
- Carlos é amigo de Ana e Douglas;
- Douglas é amigo de Carlos e Eduarda;
- Eduarda é amiga de Ana, Douglas e Geni;

- Fernando é amigo de Betina e Geni;
- Geni é amiga de Ana, Betina, Eduarda e Fernando.

Analisando essas relações de amizades, provavelmente, quais devem ser os dois indicados de Ana e Fernando?

Num primeiro momento, podemos fazer a seguinte representação ilustrada na Figura 2.7:

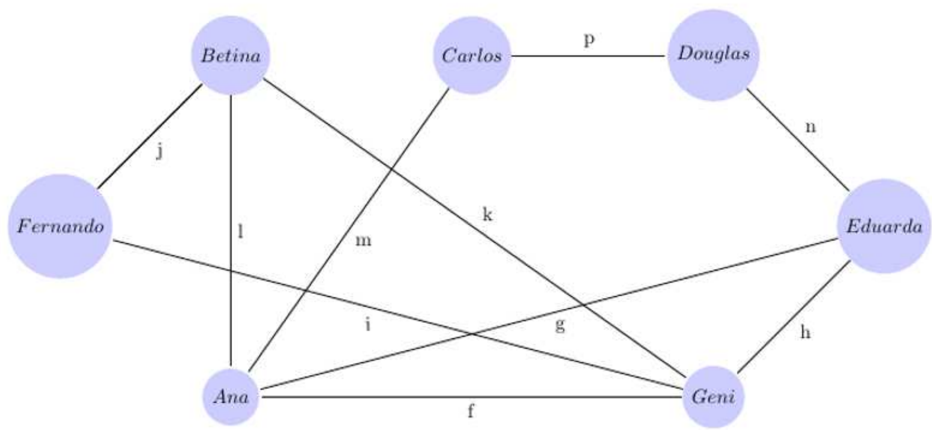

Figura 2.7: Representação dos Elos de amizade
Fonte: Autora, 2022

Na próxima figura, associamos os nomes de cada aluno a um ponto identificado pela letra inicial do seu nome.

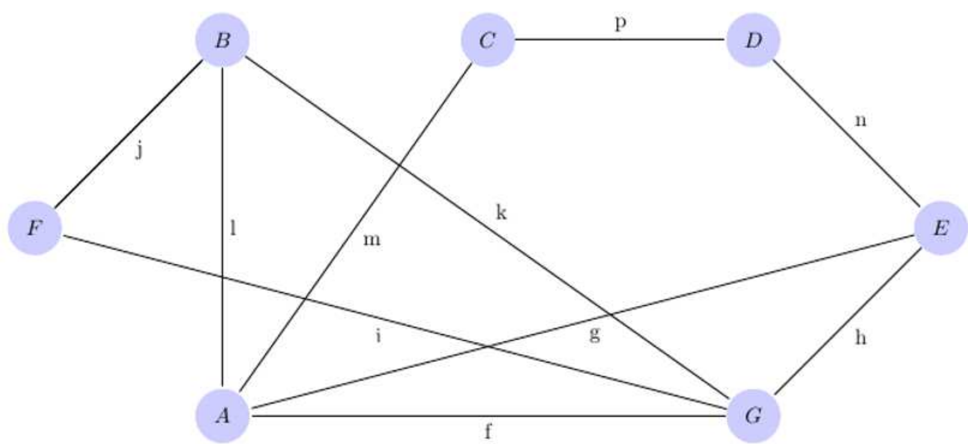

Figura 2.8: Grafo que representa os elos de amizade
Fonte: Autora, 2022

Na Figura 2.8, os pontos são os vértices (letras maiúsculas), os segmentos, são as arestas, identificadas pelas letras minúsculas. Agora, identificaremos os conceitos de vértices e arestas adjacentes.

- Os vértices B e E são adjacentes, assim como, C e D, A e G, B e A.

- as arestas l e g são adjacentes, assim como, p e n, m e f, i e h.

Observando essa última figura, podemos apontar os alunos indicados de Ana e Fernando: Betina e Geni.

Nos exemplos apresentados neste capítulo, até o presente momento, trouxemos esquemas que representam grafos, mas estes, por sua vez, não se apresentam apenas por esquemas, possuem outras formas de representação.

2.4 Representações

Destacamos as seguintes representações:

Definição 26 (Esquemas ou Diagramas). A representação de um grafo por *Esquemas ou Diagramas* é aquela em que os vértices são simbolizados por pontos e as arestas por segmentos de retas.

Podemos Visualizar essa representação na Figura 2.7. Nesse exemplo, temos como o conjunto de vértices

$$V = \{\text{Ana}, \text{Betina}, \text{Carlos}, \text{Douglas}, \text{Eduarda}, \text{Fernando}, \text{Geni}\},$$

que pode ser traduzido, veja Figura 2.8 por $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, e o conjunto de arestas

$$T = \{(A, B), (A, C), (A, E), (A, G), (B, F), (B, G), (C, D), (D, E), (E, G), (F, G)\}$$ [12]

e assim, temos o grafo $G = (V, T, f)$, onde f é dada pela relação de amizades.

Definição 27 (Conjuntos). Um grafo está representado na forma de *Conjuntos* se estiver na forma tabular, ou seja, os elementos entre chaves e separados por vírgulas. Utiliza-se um conjunto para cada vértice, em que os elementos são os vértices adjacentes ou vizinhos (vértices que estão ligados por, pelo menos, uma aresta), ou ainda os conjuntos das arestas de cada vértice.

Voltando ao Exemplo 38, temos:

(i) Conjunto de adjacências de cada vértice;

- $V_A = \{B, C, E, G\}$
- $V_B = \{A, F, G\}$
- $V_C = \{A, D\}$
- $V_D = \{C, E\}$
- $V_E = \{A, D, G\}$
- $V_F = \{B, G\}$
- $V_G = \{A, B, F\}$

Estamos identificando $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, V_F$, e V_G como sendo os conjuntos formados pelos vértices que incidem sobre A, B, C, D, E, F e G, respectivamente.

(ii) Conjunto de arestas incidentes da cada vértice;

[12] Neste caso não é necessário apresentar a aresta (B, A), uma vez que ela já foi representada por (A, B).

- $A_A = \{f, g, l, m\}$
- $A_B = \{j, k, l\}$
- $A_C = \{m, p\}$
- $A_D = \{n, p\}$
- $A_E = \{g, h, n\}$
- $A_F = \{i, j\}$
- $A_G = \{f, h, i, k\}$

Do mesmo modo, identificamos $A_A, A_B, A_C, A_D, A_E, A_F$ e A_G, como sendo o conjunto das arestas incidentes nos vértices nomeados por A, B, C, D, E e F, respectivamente.

Definição 28 (**Vetores**)**.** Um grafo está representado na forma de *Vetores*, quando se indica cada componente sua por ligações que ocorrem entre o vértice representado pelo vetor e o demais vértices.

Definição 29 (**Matrizes ou Tabelas**)**. Matrizes e Tabelas** são representações de todos os vetores de incidência, ou seja é a representação na forma de matriz ou tabela dos vetores que indicam se existe ou não ligação entre os vértices, utilizando os números zero e um.

Abaixo, damos exemplo da representação por vetores, matriz e tabela.

(i) $v_A(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1), v_B = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ e $v_C = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$: veja que v_A representa o vetor das incidências entre o vértice A é os demais. Nesse sentido, a primeira componente zero do vetor significa que não existe ligação entre o vértice A e ele próprio, e o 1 indica que ele tem ligação com o vértice que a componente está associada. Observe que o vetor tem 7 componentes, onde cada uma indica se tem ligação com os vértices A, B, C, D, E, F e G, respectivamente.

(ii) Matriz de incidências: representa se existe ou não ligação entre os vértices, explicitando cada vértice na linha e na coluna. Observe ainda que, cada linha ou coluna é um vetor, compare com a representação em vetores.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Tabela: as linhas e colunas representam os vértices do grafo do Exemplo 38

Tabela 2.1: Representação de grafos por tabela

Vértices	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	0	1	0	1
B	1	0	0	0	0	1	1
C	1	0	0	1	0	0	0
D	0	0	1	0	1	0	0
E	1	0	0	1	0	0	1
F	0	1	0	0	0	0	1
G	1	1	0	0	1	1	0

2.5 Outras definições, conceitos fundamentais e suas exemplificações

Definição 30 (Laço ou Loop). É uma aresta que liga um vértice a ele mesmo.

Como exemplo, veja a Figura 2.9

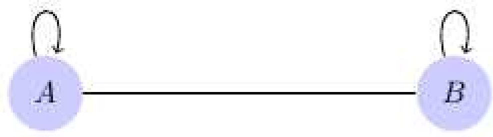

Figura 2.9: Grafo com laços
Fonte: Autora, 2022

Definição 31 (Multigrafo). Multigrafo é um grafo em que pelo menos um par de vértices tem mais de uma aresta que os conecta.

Para exemplificar um multigrafo, observemos a Figura 2.10.

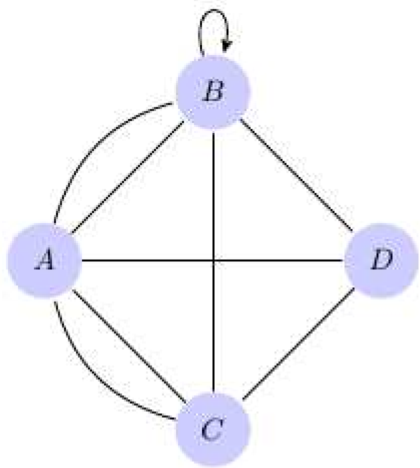

Figura 2.10: Multigrafo
Fonte: Autora, 2022

Definição 32 (Grafo Simples). Um grafo Simples é um grafo que não contém nem laços nem arestas múltiplas. Vejamos exemplos de grafos simples na Figura 2.11. .

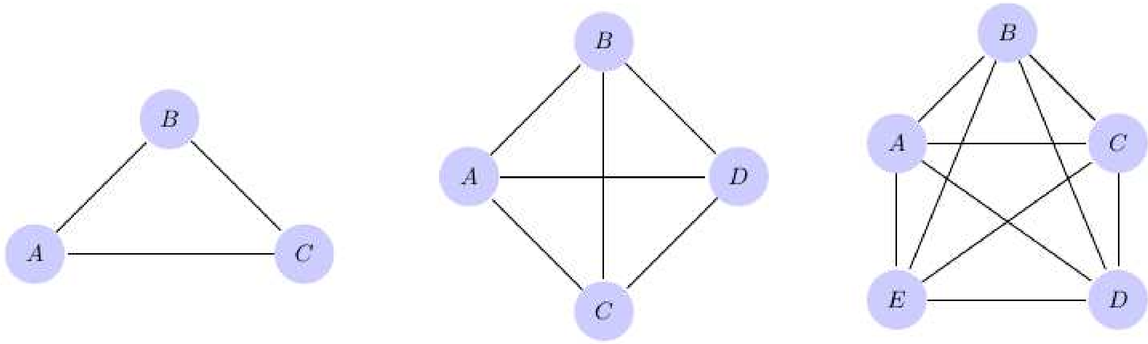

Figura 2.11: Grafos Simples
Fonte: Autora, 2022

Definição 33 (Grafo Completo). Um Grafo Completo é definido como um grafo onde todo par de vértices distintos é ligado por uma aresta. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

Para o entendimento deste conceito, pode-se associar um polígono convexo com todas as suas diagonais, como o triângulo e o pentágono, na Figura 2.11.

Definição 34 (Ordem). A Ordem de um grafo é a quantidade de vértices que ele possui. Em outras palavras, é a quantidade de elementos do conjunto V.

Os grafos da Figura 2.11, tem ordem 4, 3 e 5 vértices, respectivamente, que indicam a ordem de cada um.

Definição 35 (Grau de um vértice). O Grau de um vértice é a quantidade de arestas que incidem no vértice em questão.

Nesse sentido, o grau de qualquer vértice do Grafo representado pelo pentágono na Figura 2.11 é 4.

Definição 36 (Dimensão). A Dimensão de um grafo é a quantidade de arestas de um grafo ou a cardinalidade do conjunto das arestas.

As dimensão dos grafos da Figura 2.11 são 4, 3 e 10.

Para justificar a importância da ordem e dimensão de um grafo nos apoiamos em Lucas (2019, p. 28):

> A ordem e a dimensão de um grafo são importantes quando trata-se de Análise Combinatória, já que uma das formas de solucionar problemas envolvendo grafos é fazer por meio de um computador suas várias possibilidades. Nesse caso, a ordem e a dimensão de um grafo determinam a quantidade de possibilidades possíveis, permitindo, assim, calcular a quantidade de possibilidades para determinadas situações.

Teorema 6. (Jurkiewicz, 2019, p.10) A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

onde $d(v)$ é o grau do grafo e m é a dimensão.

Demonstração. Ao contar os graus dos vértices, estamos contando as extremidades das arestas. Sabendo que cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes. □

A definição a seguir é uma forma de se "andar" em um grafo.

Definição 37 (Passeio). O Passeio é uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e acaba com vértice, tal que, quaisquer dois elementos consecutivos, nessa sequência, são incidentes. Caso o primeiro e o último vértice dessa sequência sejam o mesmo, dizemos que é um passeio fechado.

Definição 38 (Trilha). Se todas as arestas do passeio são distintas, o passeio é chamado trilha.

Definição 39 (Passeio Euleriano). É um passeio que visita todas as arestas uma única vez. Um passeio euleriano é dito fechado, quando começa e termina no mesmo vértice.

Definição 40 (Grafo Euleriano). É um grafo que possui um passeio euleriano, se o grafo não é euleriano, mas tem um passeio aberto, ou seja percorre todas as arestas apenas uma vez, mas não retorna ao mesmo ponto, dizemos que é semieuleriano.

Vejamos como exemplos para grafo euleriano e grafo semieuleriano , as Figuras 2.12 e 2.13, respectivamente. Veja que Figura 2.12 também representa uma trilha.

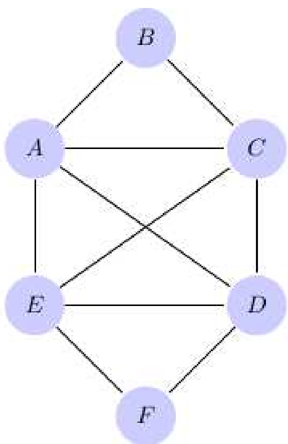

Figura 2.12: Grafo Euleriano
Fonte: Autora, 2022

Definição 41 (Grafos bipartidos). É um grafo em que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2.

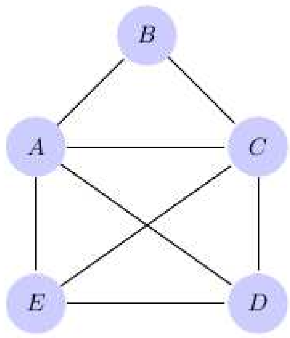

Figura 2.13: Grafo Semieuleriano
Fonte: Autora, 2022

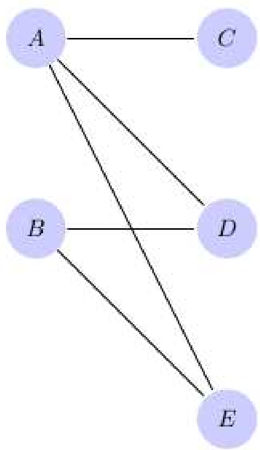

Figura 2.14: Grafo Bipartido
Fonte: Autora, 2022

Podemos visualizar um grafo bipartido na Figura 2.14.

Definição 42 (**Grafo bipartido completo**)**.** É um grafo bipartido em que todos os vértices de V_1 são ligados a todos os vértices de V_2. Notação: $K_{(p,q)}$.

Em outras palavras, são grafos nos quais o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos de tal maneira que vértices de um mesmo subconjunto não sejam adjacentes.Tomemos como exemplo o grafo que represente o problema 2 na introdução deste capítulo, caso as linhas pudessem cruzar. Vejamos a figura 2.15 nessa perspectiva, que neste caso representa um grafo $K_{2,3}$. A Figura 2.15 exemplifica um grafo bipartido completo.

Definição 43 (**Grafo Conexo e Desconexo**)**.** Dizemos que grafo é **Conexo** se existir um caminho entre qualquer par de vértices, e se houver pelo menos um par de vértices que não está ligado, então ele é desconexo.

Nas Figuras 2.16 e 2.17, temos um grafo conexo e desconexo, respectivamente.

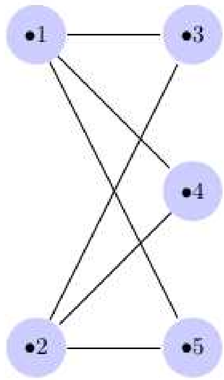

Figura 2.15: Grafo Bipartido Completo
Fonte: Autora, 2022

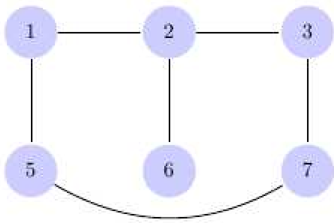

Figura 2.16: Grafo Conexo
Fonte: Autora, 2022

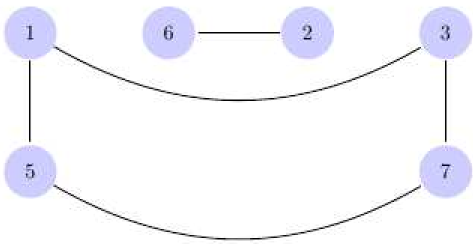

Figura 2.17: Grafo Desconexo
Fonte: Autora, 2022

Lema 7. Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples) G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo[13].

Demonstração. Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. A partir de um vértice V_0, qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado. □

[13]Um ciclo em um grafo é um caminho fechado. Caminho, por sua vez é um passeio sem arestas repetidas, ou seja, um passeio em que as arestas são todas diferentes entre si.

Teorema 8. Um grafo conexo(não necessariamente simples) G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.

Demonstração. Suponhamos, inicialmente que G tenha trilha fechada de comprimento m. Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par. Para demonstrar que se um grafo tem grau par, então ele é euleriano, usaremos indução sobre o número de arestas m do grafo. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todos as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m, o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T, e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H, e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H. Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T. □

Definição 44 (Matriz de Incidência). Seja G um grafo de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, e m arestas $a_1, a_2, \cdots, a_m$ e nenhum laço. A **matriz de incidência** é uma matriz de ordem $m \times n$, onde o valor de cada elemento e_{jk} da matriz é determinado da seguinte forma:

$$e_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } a_j \text{ incide no vértice } v_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde, os índices $j \in \{1, \cdots, m\}$ e $k \in \{1, \cdots, n\}$.

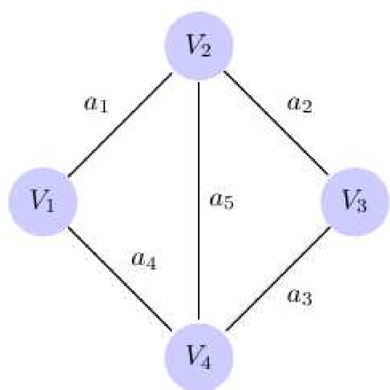

Figura 2.18: Grafo que representa a Matriz de Incidência
Fonte: Autora, 2022

Veja a matriz de incidência que representa o grafo da Figura 2.18:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 45 (**Grafos Orientados**)**.** Um grafo orientado (ou dígrafo) (V, A) consiste em um conjunto não vazio de vértices V e um conjuntos de arestas orientadas (ou arcos) A. Cada aresta orientada está associado um par ordenado de vértices, desse modo, o par orientado (u, v) começa em u e termina em v.

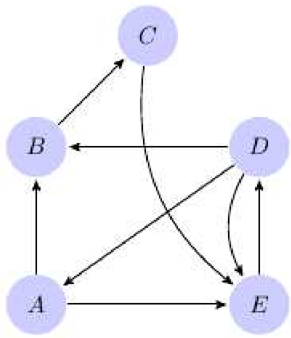

Figura 2.19: Grafo Orientado
Fonte: Autora, 2022

Definição 46 (**Grafos Valorados**)**.** *Grafos Valorados são grafos em que suas arestas apresentem valores.*

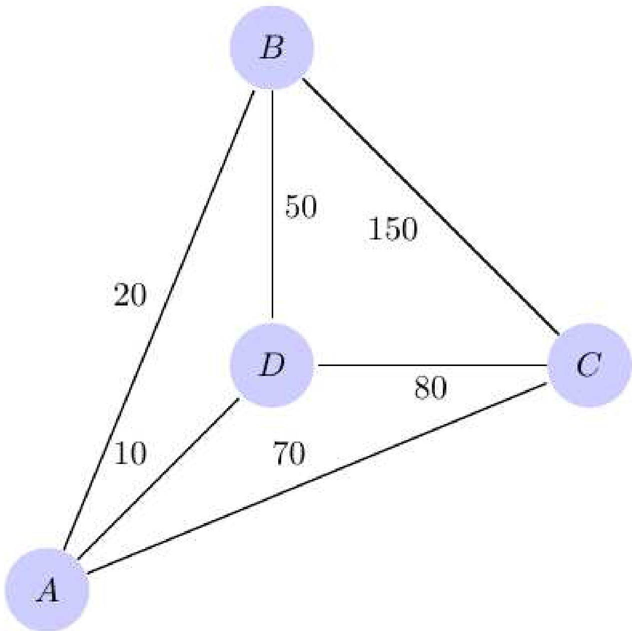

Figura 2.20: Grafo Valorado
Fonte: Autora, 2022

Definição 47 (**Grafos Planares**)**.** Um grafo é Planar se é possível desenhá-lo em um plano π sem que suas arestas se cruzem.

É certo que não esgotamos da teoria dos grafos, mas acreditamos ser o suficiente para fazermos as discussões necessárias que estão por vir, e é claro, para voltarmos nos problemas do início deste capítulo. Assim , voltamos ao Problema 1 do início do capítulo. Como colocado na nota de rodapé na introdução deste capítulo, não é possível obter solução. É impossível ligar as três casas com as três diferentes serviços (eletricidade, gás, saneamento básico) sem pelo menos uma das ligações cruzarem com as outras. Mas, podemos discutir um pouco mais o fato de não ser possível. Vejamos:

- a eletricidade tem que se conectar com as 3 casas, daí são 3 ligações;
- a água, do mesmo modo, tem que se conectar com as 3 casas, 3 ligações;
- o esgoto, também 3 ligações.

Associando pontos (vértices) para representar as casas e serviços, e segmentos (arestas) para indicar as ligações, podemos obter um grafo. Nesse sentido, teremos 9 ligações entre os dois conjuntos de vértices, sendo as casas um conjunto e os serviços o outro. Logo, podemos utilizar um grafo para representar a situação, porém, um grafo que as arestas não cruzem. Então, o problema seria verificar se o grafo e ou não planar e conexo, veja as Definições 42 e 47. Para fazermos essa verificação, basta aplicar o Teorema de Euler[14]. Tal teorema não foi discutido, uma vez que envolveria outros conceitos de grafos, e nosso objetivo era levantar conceitos para utilizar grafos para auxiliar o estudo de cadeias de Markov. Contudo deixamos como sugestão de leitura e estudo Pitombeira (2009) e vídeo do matemático português Rogério Martins[15]. O grafo desse problema pode ser traduzido por um grafo bipartido completo do tipo $K_{(3,3)}$. Vejamos a figura de um grafo $K_{(3,3)}$:

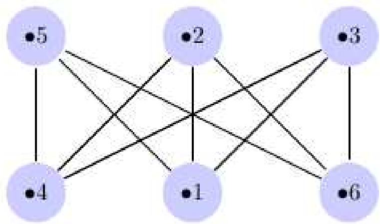

Figura 2.21: Grafo $K_{(3,3)}$
Fonte: Autora, 2022

E por fim, o Problema 2. Na figura abaixo, ao lado das letras é identificado o número de acessos e saídas de cada um dos setores do shopping. Vamos supor que o acesso pelo qual João passou duas vezes pertence a um setor com 4 acessos. Então ele passou uma única vez pelos 3 acessos restantes, ou seja, ele passou 5 vezes pelo acessos deste setor. Logo ele entrou, saiu, entrou, saiu e entrou no setor, ou seja, ficou dentro dele. Esta conclusão é contrária ao enunciado, que diz que ele foi embora. Logo o João passou uma única vez por todos os acessos dos setores com 4 acessos. Assim, o acesso pelo qual ele passou duas vezes é aquele que não pertence a nenhum setor com 4 acessos, ou seja, é o acesso que liga os setores C e E. Na outra figura colocamos a imagem que

[14]Em todo grafo planar conexo V - A + R = 2, onde V, A e R, são respectivamente, o número de vértices, arestas e regiões determinadas no plano pelo grafo.

[15]$https://www.youtube.com/watch?v=dmsuPfpeHvI$

evidencia existência de um trajeto que satisfaça as condições colocadas no problema, nela, as bolinhas marcam o início e o término do trajeto.

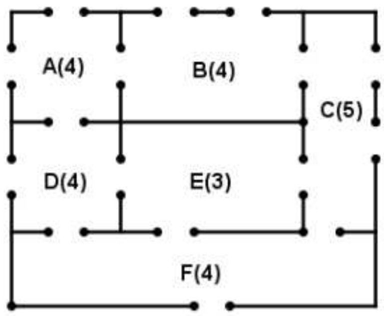

Figura 2.22: Passeio no Shopping - números de acessos
Fonte: OBMEP (2009)

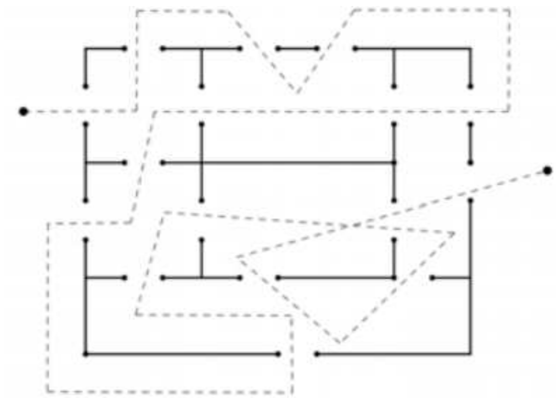

Figura 2.23: Passeio no Shopping - Trajeto
Fonte: OBMEP (2009)

Por fim, vejamos agora o problema das sete pontes: Segundo (Assis, 2016, p. 21), Euler resolveu o problema utilizando o seguinte argumento:

> Suponha que exista tal passeio. Considere qualquer uma das quatro partes da cidade como, por exemplo a ilha, e suponha que nosso passeio não começa aqui. Então, em algum ponto no tempo, entramos na ilha atravessando uma ponte; mais tarde deixamos a ilha por meio de outra ponte. Então entramos na ilha novamente através de uma terceira ponte, e aí a deixamos por uma quarta, e então entramos através de uma quinta ponte e não podemos mais sair, pois usamos todas as pontes da ilha. Conclusão: temos que terminar o passeio na ilha. Logo, se não começarmos na ilha, terminaremos nela; de maneira análoga, se começarmos na ilha, não terminaremos nela. Agora podemos chegar a mesma conclusão sobre todos os outros distritos, pois todos possuem um número ímpar de pontes. Logo, se não começarmos em um distrito temos que terminar nele, ou seja, ficaremos presos nele caso ele não seja o último. Mas agora, estamos com um problema: nosso passeio começa em um dos distritos e termina em um outro, para quaisquer dos dois distritos remanescentes, o argumento acima nos leva a uma contradição. (Assis, 2016, p. 21)

Através das definições acima, podemos identificar a estrutura deste problema com um grafo euleriano e entender como Euler foi capaz de constatar que era impossível passar por todas as pontes da cidade de de Konigsberg passando apenas uma vez por cada ponte. O grafo que modela o problema de Konigsberg possui 4 vértices, todos de grau ímpar.

Capítulo 3

Processos Estocásticos, Processos Markovianos e Cadeias de Markov

Experimentos aleatórios[16] são caracterizados quando se executa inúmeras vezes, sob condições inalteradas a mesma ação e os resultados (saídas) são aleatórios. Assim, o lançamento de uma moeda, o funcionamento de uma máquina (erros) e o lançamento de um dado são casos que não se sabe a próxima saída, mas pode-se calcular a chance de ocorrência.

Experimentos, relacionados com incertezas, são frequentes, daí a importância de quantificar essas incertezas com o objetivo de medir a chance de ocorrer erros ou sucessos em um dado experimento.

Exemplo 39. No experimento, lançamento de um dado honesto, se executado várias vezes não é possível encontrar um padrão.

Tabela 3.1: Lançamento de dados

Lançamento	Saída (face observada)
0	3
1	2
2	4
3	1
4	6
5	2
6	5
7	1

Não é possível predizer qual será a próxima saída dado que agora saiu 1[17]. Cada vez que executar o experimento, possivelmente, vai sair um resultado diferente de saída. No entanto, se calcula as chances de saída de cada face, é possível calcular a probabilidade de saída de cada face, que é $1/6$. Nesse exemplo, não se sabe qual é a próxima saída, mas sabe qual é a probabilidade da próxima saída. Essa situação é um experimento estocástico.

[16] Probabilístico ou Estocástico

[17] No lançamento de um dado honesto, após muitos lançamentos, a frequência relativa de qualquer resultado é a mesma, se não muito próximas, dentro de uma pequena margem de erro.

3.1 Processos Estocásticos

A abordagem dos conceitos pertinentes a processos estocásticos é uma extensão no que foi apresentado no Capítulo 1, na Seção 1.3, no que trata do básico de Probabilidade, em particular de variáveis aleatórias. Nesse sentido, as discussões apresentadas no que tange modelos que envolvam estes conceitos são de processos que evoluem no tempo de maneira probabilística, conforme Nogueira(2009, p. 1) e Alves e Delgado (1997, p.1):

> Processos Estocásticos são de interesse, pois podem descrever o procedimento de um sistema operando sobre algum período de tempo, com isso, em termos formais, a variável randômica[18] $X(t)$ representa o estado do sistema no parâmetro (geralmente tempo) t. Portanto, pode-se afirmar que $X(t)$ é definido em um espaço denominado Espaço de Estados.

Ou ainda,

> ... Processos Estocásticos (em inglês, "Stochastic Process" ou "Randon Process") como um conjunto de variáveis aleatórias indexadas a uma variável (geralmente a variável tempo), sendo representado por $\{X(t), t \in T\}$.
>
> Estabelecendo o paralelismo com o caso determinístico, onde uma função $f(t)$ toma valores bem definidos ao longo do tempo, um processo estocástico toma valores aleatórios ao longo do tempo.

Em outras palavras, Processo Estocástico é uma coleção de variáveis indexadas pelo tempo. Colocamos tempo, mas pode ser outra grandeza, como comprimento, área. No caso do tempo consideramos ele discreto ou contínuo.

Definição 48. *(Silva, 2020, p. 22)* Um processo estocástico $\{X_t :\in I\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias definidas sobre um mesmo espaço amostral S. O conjunto I será chamado de espaço de parâmetros, sendo na prática o período de tempo em que o processo estocástico é observado. Assume-se I = [0,∞) (parâmetro em tempo contínuo) ou I ={0,1,2,3, $\cdots$} (parâmetro em tempo discreto). O conjunto de valores que a variável aleatória X_t pode assumir é chamado de estados, denotado por E.

Exemplo 40. Se X_t representa medida, ou seja se for uma variável aleatória contínua, E é um intervalo de números reais. Se X_t representa alguma contagem, ou seja se for uma variável aleatória discreta, E é uma sequência finita ou infinita enumerável. Vejamos:

(i) Seja $X = \{X_t : t \geq 0\}$, onde X_t é o preço de uma ação no instante t. Nesse caso, $I = [0,\infty)$ e $E = \{\text{x: x} > 0\}$.

(ii) $X = \{X_n : n > 0\}$, onde X_n: número de itens defeituosos encontrados, no dia n, em uma linha de produção. Nesse caso , $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$ e $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

[19] É o mesmo que aleatória.

Nos itens (i) e (ii) do Exemplo 40, temos, respectivamente, tempo contínuo e discreto. A seguir, temos um exemplo de processo estocástico com variáveis aleatórias discretas que podem assumir quatro estados e o tempo é discreto.

Exemplo 41. Pedro tem R$ 5,00 e decide apostar em um jogo de moeda honesta, no qual ele ganha R$ 5,00, se sair cara, ou perde R$ 5,00, se sair coroa. Dessa forma, as probabilidades dele perder ou ganhar é $\frac{1}{2}$. O jogo acaba quando o jogador tiver R$ 15,00 ou R$ 0,00.

Nesse exemplo, a variável aleatória X_k é definida pela quantidade acumulada por Pedro na k-ésima jogada, sendo que pode assumir um dentre os seguintes estados, 1,2,3 ou 4 que correspondem, respectivamente, R$0,00, R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 15,00.

Assim,

> ... há casos em o tempo é considerado de forma discreta (... no fim do dia t) e outros em que é tomado de modo contínuo (... no momento t). A variável tempo é, por definição, uma variável contínua, a qual pode ser "discretizada" se os fenômenos forem observados a intervalos regulares. (Alves e Delgado, 1997, p. 1)

3.2 Processos Markovianos

No Exemplo 42, temos que X_t pode assumir um dentre os estados: 1, 2, 3, 4; sendo o estado inicial é $X_0 = 2$, $X_1 = 1$, $X_3 = 3$ e $X_4 = 4$. Veja, abaixo, o grafo que representa as mudanças entre os quatro estados.

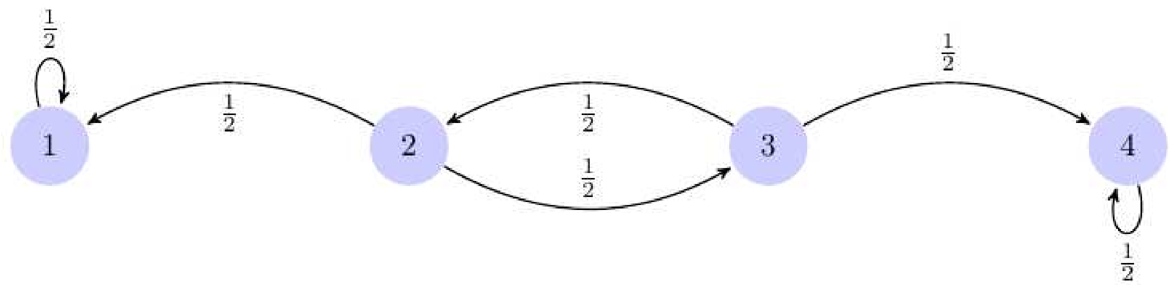

Figura 3.1: Grafo de transição entre os quatro estados
Fonte: Autora, 2022

Se Pedro jogar a moeda, repetidamente, e sair coroa, no primeiro lançamento ele sai do estado 2 e vai para o estado 1, e enquanto sair coroa, ele fica estacionado no estado 1. Sabemos que o próximo lançamento não depende do lançamento anterior. Logo, Pedro pode tirar cara e mudar de estado ou tirar coroa e permanecer no estado 1.

Observemos que a probabilidade de sair cara em qualquer lançamento é sempre a mesma:$\frac{1}{2}$, não importando qual lançamento seja, a probabilidade não altera.

Esse tipo de situação é um processo estocástico em que o passado não está interferindo no futuro; o lançamento de uma moeda é um processo que não tem memória.

Antes de apresentar o conceito de Processo Markoviano, é convidativo trazer alguns elementos históricos sobre o matemático russo Andrei Andreyevich Markov, precursor no estudo da propriedade da perda de memória que foi motivadora para o desenvolvimento da teoria sobre Cadeias de Markov.

Figura 3.2: Andrei Andreyevich Markov
Fonte:O'Connor e Robertson (2006)

Andrei Markov nasceu no Século XIX (1856-1922), fez contribuições em Teoria dos Números e Análise, destacando-se nos temas: Frações Contínuas, Limites de Integrais, Teoria de Aproximação e Convergência de Séries.

No início do Século XX, aplicou o método das Frações Contínuas na teoria de Probabilidades. No entanto, seu trabalho mais lembrado é seu estudo das cadeias de Markov.

Além da Matemática, Markov também se interessava por poesia e fez estudo nesse campo, bem como aplicou as ideias das cadeias de dois estados (vogais e consoantes) em textos literários, mesmo que a princípio desenvolveu sua teoria como um trabalho puramente matemático; sem considerar as aplicações.

Definição 49. (Silva, 2020, p. 24) Um Processo Estocástico $\{X_t : t \in T\}$ é chamado Markoviano quando, para qualquer tempo $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$, a distribuição condicional de X_t para os valores dados de X_{t_0}, X_{t_1}, ..., X_{t_n}, $X_{t_{n+1}}$ dependem somente de X_{t_n} :

$$P\left(X_{t+1}=j \mid X_0=k_0, X_1=k_1, \ldots, X_{t-1}=k_{t-1}, X_t=i\right)=P\left(X_{t+1}=j \mid X_t=i\right)=p_{ij}.$$

A expressão acima diz que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dados quaisquer eventos passados, depende apenas do estado presente $X_t = i$, ou seja, é independente dos eventos passados, depende apenas do estado atual.

3.2.1 Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov é um Processo Estocástico que tem a propriedade markoviana. Tais processos estocásticos são caracterizados pela perda de memória.

Para a seleção dos exemplos e problemas apresentados neste trabalho, são para as Cadeias de Markov com as seguintes características:

1. estados discretos.
2. a probabilidade das mudanças entre os estados são constantes, ou seja, não varia com o tempo.

É usual, para representar uma Cadeia de Markov, a utilização de grafos orientados, podendo ser, também, grafos orientados e valorados, bem como de matrizes quadradas P com as probabilidades de transição.

Nos grafos, apresentados no decorrer deste capítulo, os vértices representam os estados, e as setas (arestas) indicam as transições possíveis entre os estados, e ainda podemos atribuir a cada aresta a probabilidade de ocorrer a transição. Veja que a Figura 3.1, é o grafo que representa o Exemplo 42.

Nesse sentido, estudar cadeias de Markov é interessante e útil, uma vez que aparece em vários modelos matemáticos que representam situações concretas de qualquer indivíduo, como por exemplos, sequências genéticas, propagação de epidemias e diversas outras aplicações de problemas não elementares. A estrutura da cadeia é fundamental para definir essa sequência que seria um processo estocástico.

Exemplo 42. Ao acessarmos uma página na internet encontramos links para acessar outras páginas. Nesse sentido, é possível mover para outra, clicando no link escolhido. Considere uma página qualquer, esta página possui link para que se possa navegar para outras páginas, e destas para outras. Essa navegação de uma página para outra é o que chamamos de caminhada aleatória, que por sua vez é uma cadeia de Markov, pois o acesso para a página seguinte não depende de qual página você vem, só depende de qual página você está, isso é um processo que não tem memória, uma vez que escolher o próximo link (página), só depende da atual, não do histórico de acessos de outras páginas. Seja a representação abaixo um conjunto de páginas de Web, a figura nos dá uma ideia de ligação ou acesso entre algumas páginas, onde os estados são as páginas lincadas.

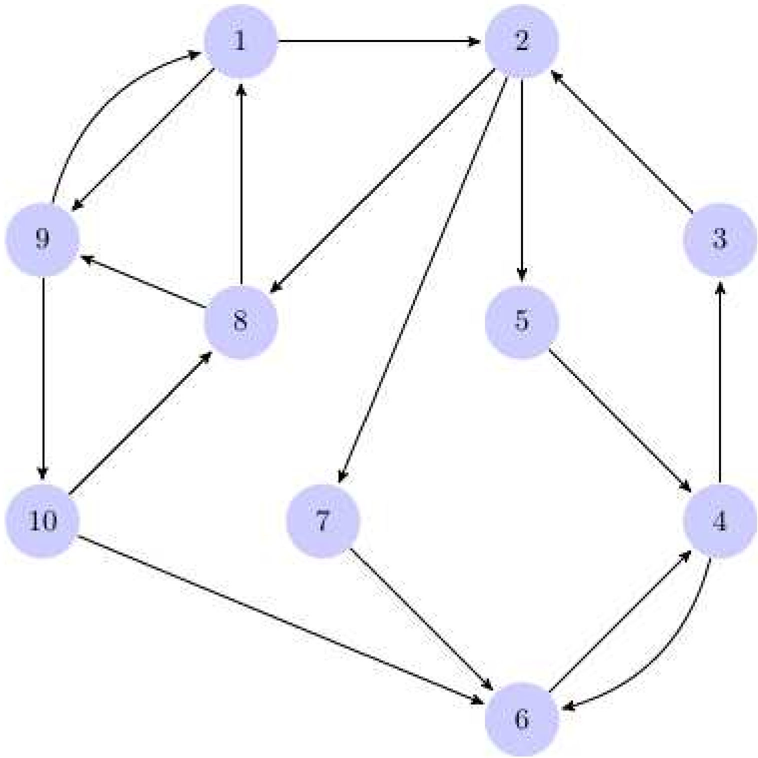

Figura 3.3: Conjunto páginas da web
Fonte: Autora, 2022

Para que esse conceito fique mais claro, suponhamos que estamos na página 1, como ilustrado na figura acima, esta página está associada a outras páginas por links. Na página 1 tem dois links associados a ela, 2 e 9, então temos a possibilidade de mover para duas outras páginas, a probabilidade de escolha para qualquer uma das duas, é $\frac{1}{2}$. Movendo da página 1 para a página 2 e desta para qualquer página associada a ela, a probabilidade e é 1/3. Da página 2, acessamos a 5, daí, temos apenas 1 possibilidade, ou seja, a probabilidade é 1, e vejamos que não importa de onde viemos antes de 2. E do mesmo modo, o próximo passo a ser dado, não depende de onde viemos. Note que, caso lincasse da página 1, no início, para a página 9, a probabilidade é de $\frac{1}{2}$. Veja que temos duas setas, isso indica que podemos voltar para a página 1 saindo da 9.

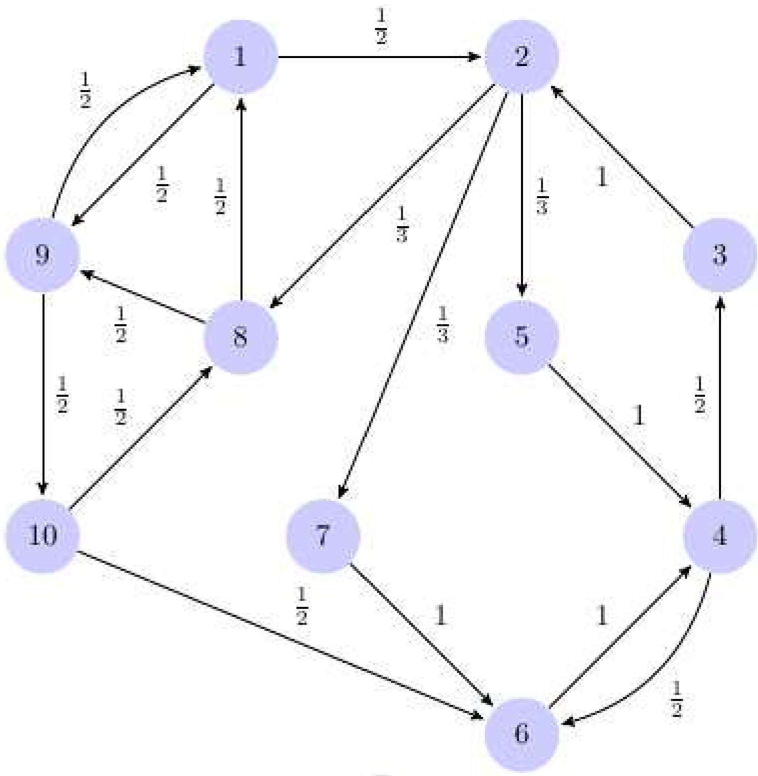

Figura 3.4: Conjunto páginas da web com as probabilidades de transição
Fonte: Autora, 2022

A situação descrita no exemplo imediatamente acima, pode ser representado por matrizes, onde cada linha i traz o estado atual e cada coluna j o estado futuro. Desta forma, a P_{ij} representa a probabilidade de ocorrer a mudança do estado i para o j.

Definição 50. O Processo Estocástico $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ é uma cadeia de Markov, se

$$P\left(X_{t+1}=j \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_t=i\right)=P\left(X_{t+1}=j \mid X_t=i\right)=p_{ij}$$

para todos os estados i, j, i_0,..., i_{t-1}.

A probabilidade de X_{t+1} ser igual a j, ou seja, no passo $t+1$, a chance de estar no estado j dado que X_0 é igual a $i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_t = i$, nada mais é do que a probabilidade de X_{t+1} igual a j, dado que X_t é igual a i. O próximo passo depende apenas do atual. Assim, a transição do estado atual para o próximo, é dada pela probabilidade de estar no estado j dado que saiu do estado i. Em outras palavras, o estado futuro depende apenas do presente. Isso pode ser representado por uma matriz que terá os n estados:

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Essa matriz diz o seguinte:

- p_{00}: é a probabilidade de ir do estado i_0 para ele mesmo;
- p_{01}: é a probabilidade de sair do estado zero e ir para o estado 1;
- p_{34}: é a probabilidade de sair do estado 3 e ir para o estado 4.
- p_{ij}= $P\left(X_{t+1}=j \mid X_t=i\right)$, para todos t e i, j variando em X.

p_{ij} é a probabilidade de transição do estado i para o estado j, $0 \leq i, j \leq n$.

A matriz P é uma matriz estocástica, uma vez que seus elementos são probabilidades, $p_{ij} \geq 0$, e mais , cada linha, tem soma igual a 1, ou seja, $\sum_j p_{ij}=1$, onde j o índice que varia e i é o índice fixo, pois corresponde a linha e j varia de 0 até n, sendo n o número de estados definidos.

As probabilidades condicionais $P\left(X_{t+1}=j \mid X_t=i\right)$ são denominadas **Probabilidades de Transição** e representam a probabilidade do estado X_{t+1} ser j no instante $t+1$, dado que ele estava no estado i no instante t.

O exemplo abaixo traz uma matriz estocástica. Em seguida, o grafo orientado e valorado que represente as probabilidades de mudança, transição, entre ficar ou mudar de um estado para outro.

Exemplo 43. Vejamos o exemplo a seguir sem contexto, o objetivo é entender a estrutura da matriz. Vamos considerar 4 estados, sendo eles 0, 1, 2 e 3 e as probabilidades de transição os valores dentro da matriz.

$$P=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,8 & 0,0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,0 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,0 & 0,0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Neste caso i,j estão variando entre 0 e 3.

- o elemento que está na primeira linha e primeira coluna é p_{00}, que representa a probabilidade da transição de permanecer no mesmo estado, neste caso 0,2;
- p_{32} é o elemento que representa probabilidade de transição, de sair do estado 3 e ir para o estado 2, $p_{32}=0$.

Veja que $\sum_j^3 p_{1j}=1$, pois $0,2+0,3+0,5+0=1$. O que justifica cada linha somar 1? Observemos que a cada passo de tempo, tem que fazer algo, mudar de estado ou permanecer onde está, e a soma do que tem que ser feito é a totalidade, no caso 1.

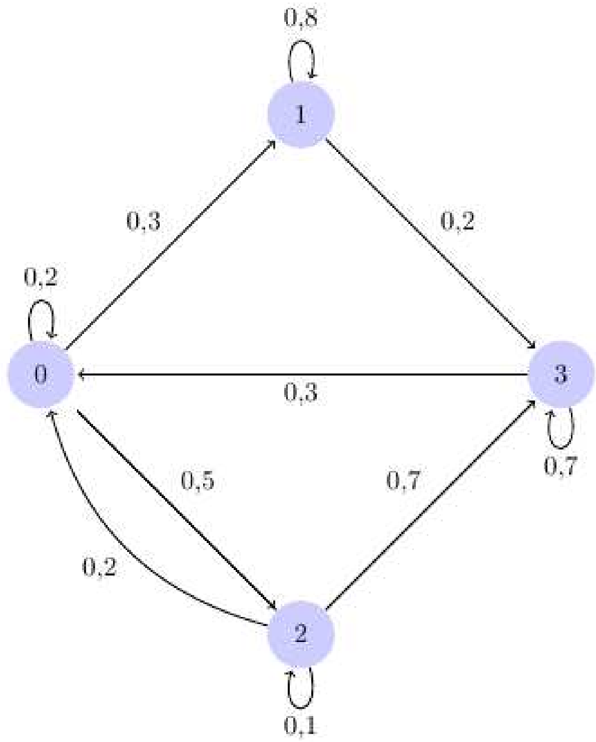

Figura 3.5: Grafo que representa a Matriz de transição entre 4 estados
Fonte: Autora, 2022

Analisando o grafo acima, verificamos pelas indicações das setas a movimentação entre os estados:

- se estiver no estado 0, pode permanecer no estado zero, deste pode ir para o estado 1, ou ainda para o estado 2;
- permanecer no estado 1 ou deste ir para o estado 1 ou estado 3;
- sair do estado 2, ir para o estado zero, permanecer no estado 2, ou ainda, sair para o estado 3;
- sair do estado 3 para o estado zero ou permanecer no estado 3.

Cada linha tem uma probabilidade que somando totaliza 1, o todo, são todas as transições possíveis para este caso. Vejamos também, através do grafo, que cada mudança ou permanência em um estado possui uma probabilidade. Assim, por exemplo, a probabilidade de permanecer no estado zero, é de 0,2, de sair do estado zero para o estado 2, temos a probabilidade 0,2; e do estado 2 para o estado zero a probabilidade é 0,5.

Definição 51. Seja P uma matriz quadrada, cujas entradas p_{ij} são definidas para todos os estados i e j. Então P é chamada de matriz markoviana (ou matriz de probabilidade de transição), se

- $\forall\ i \in E$, $p_{ij} \geq 0$, onde E é o conjunto de estados;
- $\displaystyle\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$, $\forall i \in E$.

Exemplo 44. Uma cadeia de Markov $X_0, X_1, \ldots, X_n$, nos estados 0, 1, 2 tem, respectivamente, matriz de probabilidade de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

e distribuição de probabilidade inicial:

$P(X_0 = 0) = 0,3$, $P(X_0 = 1) = 0,4$ e $P(X_0 = 2) = 0,3$.

Determinar:

(a) $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 0)$.

(b) $P(X_1 = 1, X_2 = 0 \mid X_0 = 0)$.

(c) $P(X_2 = 2, X_3 = 0 \mid X_1 = 0)$.

A distribuição de probabilidade inicial, respectivamente, nos diz:

- a probabilidade de estar no estado 0 no instante 0 é $0,3$;
- a probabilidade de estar no estado 1 no instante 0 é $0,4$;
- a probabilidade de estar no estado 2 no instante 0 é $0,3$.

Podemos traduzir este exemplo, representado a matriz de transição pelo seguinte grafo:

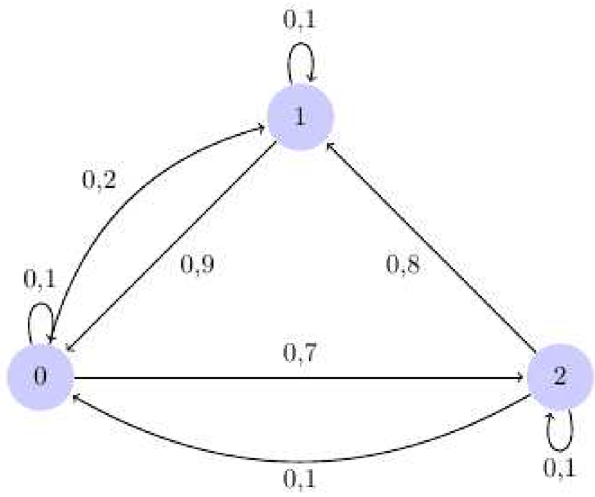

Figura 3.6: Grafo que representa a Matriz de transição entre 3 estados: 0, 1 e 3
Fonte: Autora, 2022

(a) Vamos determinar $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 0)$. Mas o que significa $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 0)$?

Nos diz que sai do estado 0, muda para o estado 1, depois para o estado 2, voltando ao estado 0.

Agora, queremos calcular a probabilidade de termos saído do estado 0 passando pelo estado 1, em seguida pelo estado 2 e voltado para o estado 0.

Logo,

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 0) = P(X_0) \cdot p_{01} \cdot p_{10} \cdot p_{02} \cdot p_{20},$$

atribuindo os valores dados para essas probabilidades, temos:

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 0) = 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,1 = 0,003.$$

(b) Agora, determinemos $P(X_1 = 1, X_2 = 0 \mid X_0 = 0)$.

Temos que calcular a probabilidade de, dado estarmos no estado 0 no momento 0, mudamos para o estado 1, no momento 1 e deste para o estado 0, no momento 2.

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0 \mid X_0 = 0) = p_{01} \cdot p_{10},$$

substituindo valores dados para essas probabilidades, temos:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0 \mid X_0 = 0) = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18.$$

(c) Por fim, vamos determinar $P(X_2 = 2, X_3 = 0 \mid X_1 = 0)$.

A movimentação dos estados fica assim: do estado 0 vamos para o estado 2, deste voltamos para o estado 0. Então,

$$P(X_2 = 2, X_3 = 0 \mid X_1 = 0) = p_{02} \cdot p_{20},$$

substituindo os valores dados, temos:

$$P(X_2 = 2, X_3 = 0 \mid X_1 = 0) = 0,7 \cdot 0,1 = 0,007.$$

Segundo Silva (2020, p.26) para seguirmos é necessário respondermos o seguinte questionamento:

> ... **qual é a probabilidade do processo estar no estado j daqui a duas unidades de tempo, sabendo que ele iniciou no estado i**? Denota-se esta probabilidade por
>
> $$p_{ij}^{(2)} = P\{X_2 = j, \mid X_0 = i\}$$
>
> .
> Como as probabilidades P_{ij} também é a probabilidade do processo ir para o estado j daqui a duas unidades de tempo, saindo do estado i no tempo n, ou seja
>
> $$p_{ij}^{(2)} = P\{X_{n+2} = j, \mid X_n = i\} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$$
>
> De forma análoga, a probabilidade de transição em k-passos, denotada por p_{ij}, é a probabilidade de transferência do estado i para o estado j em k etapas de tempo discreto, independente do instante $n \geq 0$, ou seja
>
> $$p_{ij}^{(k)} = P\{X_{n+k} = j, \mid X_n = i\} = P(X_k = j \mid X_0 = i)$$
>
> $\forall n \geq 0$.

Exemplo 45. Para o concepção do próximo conceito suponha que o triângulo, conforme Figura 3.7, representa um circuito formado por 3 ambientes. Considere que a probabilidade escolha de ficar no mesmo ambiente é $\frac{1}{2}$ e de $\frac{1}{4}$ para sair de um ambiente para outro. Qual é a probabilidade de partindo do ambiente 1, ao se movimentar na segunda vez, estarmos no ambiente 2?

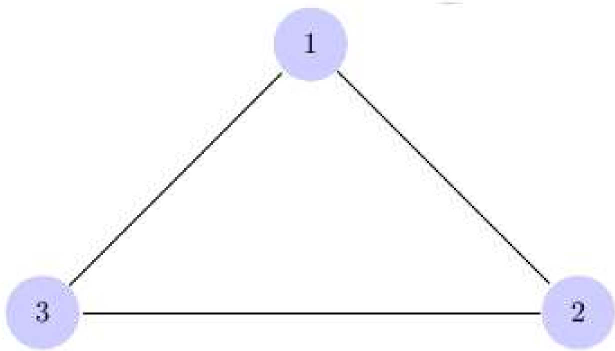

Figura 3.7: Esquema que representa um circuito formado por 3 ambientes
Fonte: Autora, 2022

Construindo a matriz de transição, temos:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

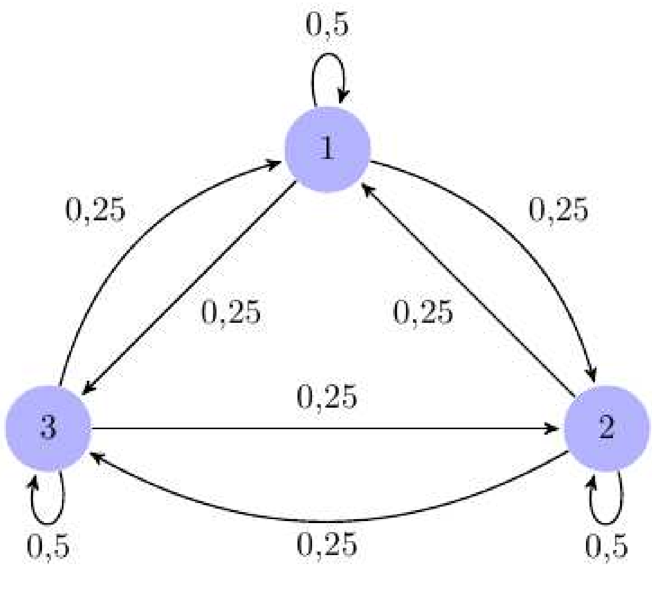

Figura 3.8: Grafo que representa representa um circuito formado por 3 ambientes
Fonte: Autora, 2022

Queremos saber a probabilidade de que , estando no ambiente 1, estarmos no ambiente 2 após 2 movimentos. Usaremos a notação $p_{12}^{(2)}$.

Os trajetos possíveis são para estar no ambiente 2 após 2 movimentos são:

$$1 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$$

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 2$$

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$$

Observe que a probabilidade de fazer o percurso $1-1-2$ é $p_{11} \cdot p_{12}$ daí multiplicamos o valor da probabilidade de sair do ambiente 1 e ficar nele mesmo pela probabilidade de sair do ambiente 1 e ir para o ambiente 2. E assim, para os demais trajetos são, respectivamente, $p_{12} \cdot p_{22}$ e $p_{13} \cdot p_{32}$. Então,

$$p_{12}^{(2)} = p_{11} \cdot p_{11} + p_{12} \cdot p_{22} + p_{13} \cdot p_{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$p_{12}^{(2)} = \sum_{k=1}^{3} p_{1k} \cdot p_{k2} = \frac{5}{16}.$$

Veja que o valor de $p_{12}^{(2)}$ é a multiplicação da primeira linha da matriz P com a segunda coluna da Matriz P. Nesse sentido, se quisermos calcular o valor de $p_{13}^{(2)}$, bastaria multiplicar a primeira linha com a terceira coluna da matriz P, pois os trajetos possíveis são:

$$1 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3$$

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 3$$

Logo,

$$p_{13}^{(2)} = p_{11} \cdot p_{13} + p_{12} \cdot p_{23} + p_{13} \cdot p_{33} = \sum_{k=1}^{3} p_{1k} \cdot p_{k3}.$$

Todos os elementos de $p_{ij}^{(2)}$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$ são da forma

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{3} p_{ik} \cdot p_{kj}.$$

Em outras palavras, os elementos $p_{ij}^{(2)}$ da matriz $P^{(2)}$ são elementos da matriz P^2, veja a confirmação[19] na matriz P^2 ;

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,3125 & 0,3125 \\ 0,3125 & 0,375 & 0,3125 \\ 0,3125 & 0,3125 & 0,375 \end{pmatrix}.$$

[19]Note que P^2 e $P^{(2)}$ são notações diferentes. P^2 representa o quadrado da matriz, e $P^{(2)}$ indica a matriz transição depois de duas etapas

3.2.2 Equação de Chapman-Kolmogorov

Definição 52. (Castro, 2015, p. 22): Seja P uma matriz de transição de uma cadeia de Markov. O elemento $p_{ij}^{(n)}$ da matriz $P^{(n)}$ determina a probabilidade na cadeia de Markov de que iniciado no estado i, estará no estado j depois de n etapas. Assim,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i).$$

A equação de Chapman-Kolmogorov fornece um método para calcular as probabilidades de transição em n etapas:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{jk}^{(m)} p_{ki}^{(n-m)}; \ \ \forall\, i = 0, 1, \ldots, M \text{ e } \forall\, j = 0, 1, \ldots, M$$

com quaisquer $m = 1, 2, \ldots, n-1$ e $n = m+1, m+2, \ldots$,

$$P^{(n)}$$

é a matriz de transição de n passos.

Teorema 9. (Castro, 2015, p.22)Equação de Chapman-Kolmogorov[20]: Em uma cadeia de Markov estacionária temos que:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)},$$

para quaisquer $m \geq 0, n \geq 0$, $i \in \mathrm{S}$, $j \in \mathrm{S}$

Demonstração. Usaremos o resultado do Teorema 5 em relação a X_m:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = j \mid X_0 = i, X_m = k) \cdot P(X_m = k \mid X_0 = i) \\
&\overset{(6)}{=} \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = j \mid X_m = k) \cdot P(X_m = k \mid X_0 = i) \\
&\overset{(7)}{=} \sum_{k \in S} P(X_n = j \mid X_0 = k) \cdot P(X_m = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Em (6) considerou a propriedade de Markov, e em (7), o fato de ser estacionária, ou seja, as probabilidades de transição de estados são constantes em relação ao tempo.

□

Vejamos que $P^{(n)} = P^n$, pois usando o teorema acima, temos que $P^{(2)} = P \cdot P = P^2$ (multiplicação matricial), $P^{(3)} = P^(2) \cdot P = P^2 \cdot P = P^3$, assim por diante. Note ainda que, o teorema acima afirma que $P^{(m+n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n)}$. Como $P^{(1)} = P$, temos então que $P^{(n+1)} = P \cdot P^{(n)}$ e, usando o argumento indutivo, obtemos que $P^{(n)} = P^n$. De fato, para

[20]Só é válida para Cadeias de Markov cujas probabilidades de transição de estados são constantes em relação ao tempo (Probabilidades de Transição Estacionárias), denominada Cadeia de Markov Homogênea e a matriz de transição P é dita uma matriz homogênea.

$n = 1$ temos que $P^{(1)} = P^1 = P$ que é válida pela definição. Suponhamos que a sentença seja válida para $n = m$, com $m \in N$ e $m \geq 1$, isto é, $P^{(m)} = P^m$, queremos mostrar que a sentença é válida quando $n = m + 1$. Usando a *Equação de Chapman-Komogorov*, para $n = 1$, temos que

$$P^{(m+1)} = P_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(1)} \cdot P_{kj}^{(m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{1} \cdot P_{kj}^{m} = P \cdot P^m = P^{m+1}$$

Exemplo 46. Seja

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Desejamos calcular $P^2 = P \cdot P$ ou $P^5 = P^2 \cdot P^3$.

Vejamos o grafo que representa a matriz de transição acima:

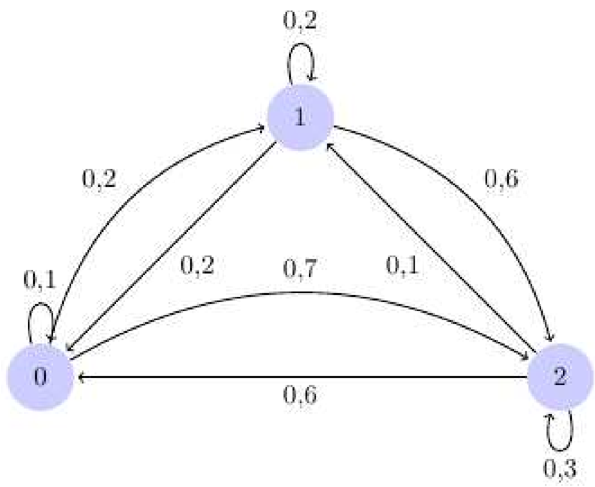

Figura 3.9: Grafo da Matriz de transição entre 3 estados
Fonte: Autora, 2022

então,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,47 & 0,13 & 0,5 \\ 0,42 & 0,14 & 0,44 \\ 0,26 & 0,17 & 0,57 \end{pmatrix}$$

e $P^3 = P^2 \cdot P^1$. Já foi calculado P^2, então, agora, calcula-se P^3, como

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,47 & 0,13 & 0,5 \\ 0,42 & 0,14 & 0,44 \\ 0,26 & 0,17 & 0,57 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,373 & 0,17 & 0,557 \\ 0,334 & 0,156 & 0,51 \\ 0,402 & 0,143 & 0,455 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
P^5 &= P^2 \cdot P^3 \\
&= \begin{pmatrix} 0,47 & 0,13 & 0,5 \\ 0,42 & 0,14 & 0,44 \\ 0,26 & 0,17 & 0,57 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,373 & 0,17 & 0,557 \\ 0,334 & 0,156 & 0,51 \\ 0,402 & 0,143 & 0,455 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{35133}{100000} & \dfrac{3817}{25000} & \dfrac{49599}{100000} \\ \dfrac{3551}{10000} & \dfrac{3799}{25000} & \dfrac{24647}{50000} \\ \dfrac{3673}{10000} & \dfrac{14963}{100000} & \dfrac{48307}{100000} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Acima foram calculadas as matrizes de transição do segundo e quinto passo utilizando multiplicação de matrizes. Poderíamos ter calculado as matrizes P^2, P^3 e P^5, utilizando o *Matrix Calculator*. A seguir, calcularemos outras probabilidades:

1. $P(X_3 = 1, | \ X_1 = 0)$

   Essa expressão diz: Probabilidade do estado ser 1 em $t = 3$, dado que o estado no instante 1 é 0. Para obter essa informação, basta observar a matriz de transição P^2 (sai do de $t = 1$ e vai até $t = 3$, $3 - 2 = 2$, daí P^2), e destacar o valor P_{03} (sai do estado 0 e vai para o estado 3), que é aproximadamente, $0,5$ ou 50%.

2. $P(X_4 = 1, | \ X_2 = 1)$

   Em outras palavras: Probabilidade do estado ser 1 em $t = 4$, dado que o estado no instante 2 é 1.

3. $P(X_2 = 0, | \ X_0 = 2)$

   Essa expressão diz: Probabilidade do estado ser 0 em $t = 2$, dado que o estado atual(presente) é 2, que é 0,47.

Exemplo 47. Em nossa cidade os dias são quentes e ensolarados, mas, ultimamente, uma vez ou outra, de modo repentino, chove. Vamos supor que as chances de termos sol amanhã são maiores, caso esteja ensolarado hoje, do que se chover hoje. A probabilidade de sol amanhã é de $0, 8$, se hoje estiver com sol, mas se chover hoje, essa probabilidade é de 0,6.

Este exemplo é um processo estocástico, dada a descrição da situação. Começamos em um instante *t(dia)*, chamaremos de t_0. Assim, $t = 0, 1, 2, 3\cdot$ Os estados são: 0 : dia de sol; 1 : dia do chuva.

Nesse sentido, a nossa variável aleatória $X_t \in 0, 1$. Além de ser uma processo estocástico, a situação é uma cadeia de Markov, pois chover ou não chover amanhã, só depende o dia de hoje.

$P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0) = 0,8$ $P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1) = 0,6$.

Segue daí, que:

$P_{00} = P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0) = 0,8$ e $P_{10} = P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1) = 0,6$; de $P_{00} = 0,8$, temos $P_{01} = P(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0) = 1 - 0,8 = 0,2$, pois $P_{00} + P_{10} = 1$ (são eventos complementares)e de $P_{10} = 0,6$, obtemos $P_{11} = P(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1) = 1 - 0,6 = 0,4$, pois $P_{10} + P_{11} = 1$ (também são eventos complementares) .

Logo a matriz de transição é dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

e o grafo que a representa:

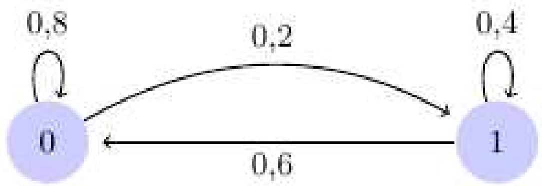

Figura 3.10: Grafo que representa a Matriz de transição entre os estados 0 (sol) e 1 (chuva)
Fonte: Autora, 2022

Agora, vamos calcular algumas matrizes de transição em n etapas. Vejamos, então para:

- n =2

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,72 & 0,28 \end{pmatrix}$$

Temos, então que se o tempo estiver no estado 0 (sol) em dado dia, a probabilidade de se encontrar no estado 0 (sol) dois dias após é 0,76, e a probabilidade de se encontrar no estado 1 (chuva), é 0,24, mas se o tempo se encontrar no estado 1 (chuva), a probabilidade de se está no estado 0 (sol) dois dias após é 0,72, e a probabilidade de se está no estado 1 (chuva) será 0,28.

- n =3

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,74 & 0,26 \end{pmatrix},$$

obtemos a matriz P^3 utilizando o *Matrix Calculator*, mas também podemos obtê-la fazendo o produto de matrizes. Então, o que podemos concluir a partir de P^3 ?

Se o tempo estiver no estado 0 (sol) em dado dia, a probabilidade de se encontrar no estado 0 (sol) depois de três dias é 0,75 e a probabilidade de se encontrar no estado 1 (chuva) é 0,25, mas se o tempo, no início do processo, estiver no estado 1 (chuva), a probabilidade de se encontrar no estado 0 (sol), em três dias é 0,75, e a probabilidade de se encontrar no estado 1 (sol) será 0,25.

- n =5

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$$

para obtermos P^5, utilizamos, novamente, o *Matrix Calculator*.

Temos que, se o tempo estiver no estado 0 (sol), no início do processo, daí a cinco dias, a probabilidade de se encontrar no estado 0 (sol) será 0,75 e a probabilidade de se encontrar no estado 1 (chuva) será 0,25, mas se o tempo estiver no estado 1 (chuva), no início, a probabilidade de está no estado 0 (sol), cinco dias após, é 0,75, e a probabilidade de se encontrar no estado 1 (chuva), será 0,25.

Capítulo 4

Problemas e discussões

Ao propormos problemas, estamos colocando situações diversificadas que venham oferecer aos estudantes a oportunidade de pensar, construir, aprofundar estratégias de resolução e que assim, possa argumentar e relacionar diversos conhecimentos. Dessa forma ao propormos o estudo de cadeias de Markov, estamos possibilitando uma integração a fim de aprofundar, exercitar e aplicar conceitos, não necessariamente nessa ordem.

Nesse sentido, segundoLima (1999), o professor na sua prática deve considerar vários aspectos, dentre eles, conteúdo e didática. Neste trabalho, a didática não é o objetivo, mas fica defendido uma abordagem que abranja três componentes para o ensino de Matemática:

(i) **Conceituação:** entendida como a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, a prática do raciocínio dedutivo;

(ii) **Manipulação:** é mais algébrica, é a habilidade e destreza de manusear os entes matemáticos;

(iii) **Aplicação:** é o emprego das noções e teorias para obter resultados, quer na própria Matemática, quer no cotidiano, quer em questões mais sutis que surgem em outras áreas.

Agora, quanto a atenção que cada um merece na Educação Básica, (Lima, 1999, p.1), defende:

> Da dosagem adequada de cada um desses três componentes depende o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar, futuramente, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo o discernimento, a clareza dos ideias, o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtudes que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento do três componentes básicos.

E contribuindo a essa abordagem, a BNCC evidencia que no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática.

Diante do exposto, apresentamos alguns problemas e discussões com a proposta de propiciar um conjunto de situações que leve os professores e alunos a conceituar, manipular e aplicar as cadeias de Markov, bem como serem motivados a estudar outros temas e assuntos que não conste no currículo do ensino médio. Acreditamos que, para a abordagem destes problemas é necessário um domínio básico de operações entre matrizes, probabilidade condicional, variáveis aleatórias, além de identificar processos estocásticos e caracterizá-los, se for o caso, como uma cadeia de Markov.

Quanto a teoria dos Grafos, veio complementar o estudo das cadeias de Markov, lembrando que, também, não faz parte do currículo do ensino médio, mas pode ser relacionado a outros conteúdos, como por exemplo o estudo das matrizes, análise combinatória, entre outros.

Dentro dessa perspectiva, e da proposta deste trabalho, fez-se necessário elencar alguns entes matemáticos para a construção e aplicação do conceito objeto: Cadeias de Markov. Segue então, agora, e entendido que foi apresentado a conceituação, na forma de definições e de outros resultados necessários, os quais não devem ser desconsiderados, já que o aprendizado está intimamente associado à compreensão do significado dos conceitos e definições, bem como habilidade de manuseá-los e aplicá-los, o que justifica os componentes de ensino defendidos.

4.1 Problema 1: Caminhada Aleatória Simples

O propósito deste problema é levar a discussão da identificação de uma cadeia de Markov, bem como o cálculo das probabilidade no quinto lançamento.

4.1.1 O problema

Consideremos uma reta numérica orientada, ou seja, que representa o conjunto dos números inteiros,$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Um ponto (marcador) começa na origem e se desloca, a cada etapa, para direita ou esquerda em igual chance, isto é, a caminhada aleatória na reta que representa os números inteiros, que começa em 0 e em cada etapa move $+1$ ou -1 com igual probabilidade.

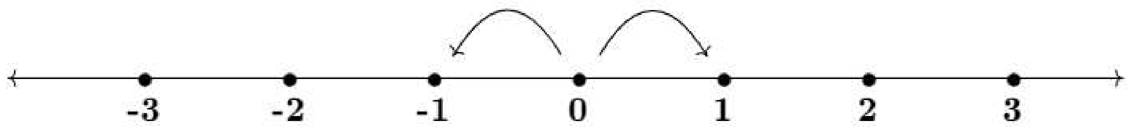

Figura 4.1: Reta orientada e marcador

Para o marcador deslocar, lança-se uma moeda honesta, se der cara, o marcador é movido uma unidade para a direita, se der coroa, o marcador é movido uma unidade para a esquerda[21].

Considere uma rodada de cinco lançamentos, então:

(a) o passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ é uma cadeia de Markov?

(b) determinemos as probabilidades para os resultados após cinco lançamentos da moeda;

[21]Curiosidade: Para identificar qual face é a cara e qual é a coroa, pegue uma moeda de um real como exemplo. A face que traz o valor é a "cara", e a face que traz a Efígie da República é a "coroa"

(c) defina a variável aleatória para número de coroas no lançamento de uma moeda 5 vezes.

A variável aleatória X_t : número de coroas no lançamento de uma moeda 5 vezes, toma valores em $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, conforme pode ser visto nas árvores de possibilidades nas Figuras 4.2 e 4.3.

4.1.2 Discussão

(a) Identificar a situação como uma cadeia de Markov.

Devemos, inicialmente, definir o que é uma caminhada aleatória. "Uma caminhada aleatória é um objeto matemático que desenha um caminho que abrange uma sucessão de passos aleatórios". Por definição, a caminhada ou passeio aleatório simples é um caminho construído de acordo as seguintes regras:

(i) Há um ponto de partida.

(ii) A distância de um ponto no caminho até o próximo é constante.

(iii) A direção de um ponto no caminho para o próximo é escolhido aleatoriamente, e nenhuma direção é mais provável do que outra.

Diante desta discussão, o estudante identificará a propriedade markoviana: a probabilidade de estar ou não numa posição depende da posição na etapa anterior, uma vez que o próximo passo só depende de onde ele está.

(b) Vamos construir a árvore de possibilidades para que, assim determinemos as probabilidades. Seja C : cara e K : coroa

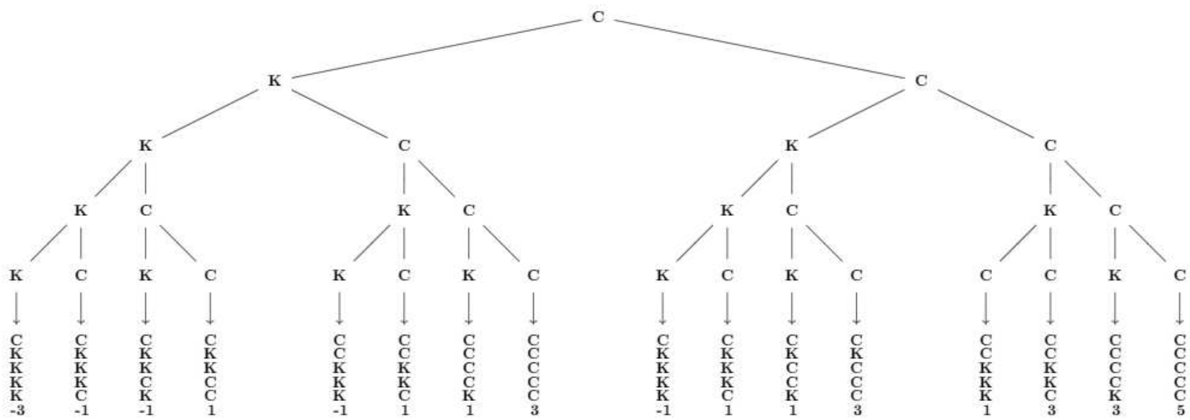

Figura 4.2: Caminhada aleatória começando com cara

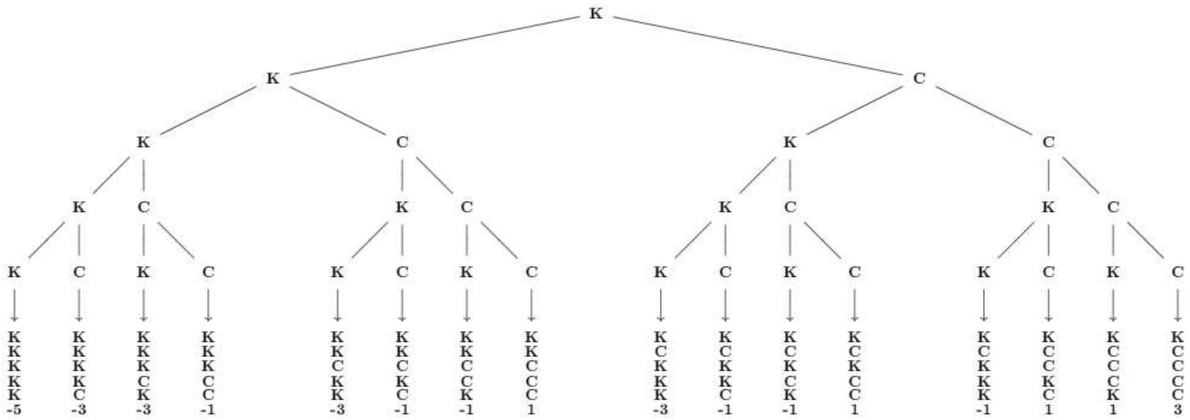

Figura 4.3: Caminhada aleatória começando com coroa

Pelas Figuras 4.2 e 4.3, conseguimos visualizar as posições em que o marcador pode está após o quinto lançamento, lembrando que o marcador, ou vai para a direita, ou vai para a esquerda, cada vez que a moeda é lançada.

Após cinco lançamentos da moeda, o marcador pode está em -5, -3, -1, -1, 3 ou 5. Veja que para chegar no -5, só saiu coroa, pois toda vez que saí coroa o marcador vai para a esquerda, já para posicionar no -3, em algum momento saiu cara, o marcador foi para a direita, isso pode ter acontecido no primeiro, segundo, terceiro, quarto ou até mesmo no quinto lançamento da moeda. Nesse sentido, para determinamos a probabilidade da posição do marcador no quinto lançamento, basta multiplicarmos os valores das probabilidades do caminho percorrido. Vejamos então as probabilidades de cada uma das posições do marcador depois de cinco lançamentos de uma moeda. Seja P a probabilidade de:

(i) sair cinco coroas, então o marcador chega em -5 apenas uma vez (existe um único caminho), pois só desloca para a esquerda, então $P = \frac{1}{32}$, pois $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$;

(ii) sair quatro coroas e uma cara, em qualquer ordem, chega em -3. Tem-se 5 formas de chegarmos em -3, pois temos cinco caminhos, daí $P = \frac{5}{32}$, pois $P = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$;

(iii) ocorrer três coroas e duas caras, em qualquer ordem, o marcador chega em -1. Tem-se 10 maneiras do marcador está posicionado em -1, cuja $P = \frac{5}{16}$, pois $P = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$;

(iv) sair três caras e duas coroas, em qualquer ordem, o marcador cheegará em 1. Há 10 maneiras do marcador está posicionado em 1, cuja probabilidade é dada por: $P = \frac{5}{16}$, pois $P = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$;

(v) ocorrer quatro caras e uma coroa, em qualquer ordem, o marcador chegará em 3. Há 5 formas dele se posicionar em 3, assim temos a seguinte probabilidade: $P = \frac{5}{32}$, pois $P = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$;

(vi) ocorrer cinco caras, o marcador chega em 5, isso acontece apenas uma vez (existe um único caminho), pois só desloca para a direita, então temos a seguinte probabilidade $P = \frac{1}{32}$, pois $P = \cdot\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.

(c) Por fim, vamos definir a variável aleatória para número de coroas no lançamento de uma moeda 5 vezes. Seja X_t : número de coroas no lançamento de uma moeda 5 vezes. Pela árvore de possibilidades, ela assume os seguintes valores em $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

4.2 Problema 2 - Adaptado do exemplo (Silva, 2020, p. 43)

Neste problema, espera-se que o estudante identifique os estados envolvidos no processo, construa um grafo para representar o problema, determine a matriz de transição e calcule a probabilidade pedida.

4.2.1 O problema

Suponhamos que em determinado município, a cada cinco anos, seja 0,1 a probabilidade da população da zona rural migrar para a zona urbana, enquanto que apenas 0,02 é a probabilidade da zona urbana migrar para o zona rural. Considerando que estas probabilidades não alteram, qual será a probabilidade de um habitante da população rural migrar para a zona urbana após 15 anos?

4.2.2 Discussão

Para visualizar e compreender os estados possíveis, as migrações entre zona urbana e rural, a construção de um grafo dá sustentação para que o estudante compreenda os dois estados e as probabilidades envolvidas e até mesmo para determinar a matriz de transição.

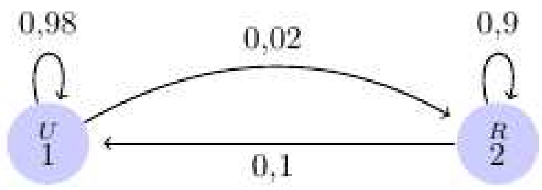

Figura 4.4: Grafo que representa a Matriz de transição entre os estados 1(zona urbana) e 2 (zona rural)

No grafo, indica-se U (estado 1) para população da zona urbana e R (estado 2) para a população rural. Veja que para obter as probabilidades da população que se mantêm na zona rural, foi utilizado o conceito de evento complementar, uma vez que quando $0,1$ migra para a zona urbana, significa que $0,9$ permanece. E de modo análogo, foi feito o cálculo para determinar a probabilidade da população que fica na zona urbana, 0,98. Feito isso, o estudante, basicamente, resolveu o problema.

A matriz de transição com as probabilidades de mudanças entre os estados é:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \\ 0,10 & 0,90 \end{pmatrix}$$

Da matriz P (dá para interpretar também a partir do grafo), temos:

- p_{11}: probabilidade de não sair da zona urbana (permanecer na urbana), ou seja, está no estado 1 e permanecer no estado 1;
- p_{12}: probabilidade de sair da zona urbana para a zona rural;
- p_{21}: probabilidade sair da zona rural para a zona urbana;
- p_{22}: probabilidade permanecer na zona rural.

O problema pede a probabilidade da população rural que migrará para a zona urbana após 15 anos (três períodos de 5 anos), $P(X_3 = 1 \mid X_0 = 2)$, ou seja, $p_{21}^{(3)}$. Utilizando o *Matrix Calculator*, calculamos rapidamente P^3. Assim,

$$P^3 = \begin{pmatrix} \dfrac{29591}{31250} & \dfrac{1659}{31250} \\ \dfrac{1659}{6250} & \dfrac{4591}{6250} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,27 & 0,73 \end{pmatrix},$$

então, basta indicarmos o elemento p_{21} da matriz P^3, neste caso, $p_{21}^{(3)} = \dfrac{1659}{6250} = 0,27$.

Portanto, 27% é a probabilidade daqui a quinze anos de um habitante da população rural migrar para a zona urbana.

4.3 Problema 3 - Adaptado do exemplo (Alves e Delgado, 1997, p. 4)

Neste problema, espera-se que o estudante identifique os estados envolvidos no processo, construa um grafo para representar o problema, determine a matriz de transição e calcule a probabilidade pedida.

4.3.1 O problema

A cidade Flores é famosa por sua produção de queijos, e um dos produtos que ganha destaque é um queijo de cabra com toque de ervas que é produzido apenas por duas fazendas concorrentes, a fazenda Reino e a fazenda Campo. Cada fazenda, ao longo das décadas, alterou o processo e a mistura original de ervas, de forma que os queijos produzidos por cada uma, tenha um sabor único. Mesmo que não divulguem claramente a composição dos produtos, é certo a preferência pelo produto feito pela fazenda Campo, pois verifica-se que para cada pessoa que compra o queijo Campo, há 90% de probabilidade de o próximo queijo que comprar seja da fazenda Campo, já para aquele que compra o queijo Reino há 80% de probabilidade de voltar a comprá-lo.

Diante dessas informações, desejamos:

1. construir uma cadeia de Markov que representa a situação descrita;

2. calcular a probabilidade de a segunda compra futura de um comprador ser o queijo Reino, sabendo que, atualmente, comprou o queijo Campo?

4.3.2 Discussão

Para a construção da cadeia de Markov, o estudante deve, a princípio identificar que a situação pode ser modelada por este processo, ou seja que a compra depende da compra atual e para visualizar, compreender e representá-la por meio de um grafo para em seguida determinar a matriz de transição. Vejamos o Grafo:

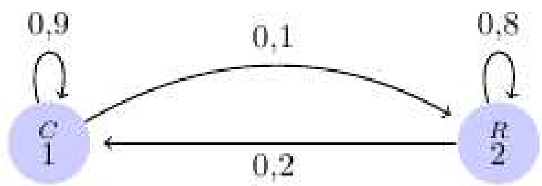

Figura 4.5: Grafo da Matriz de transição entre os estados 1 (queijo Campo) e 2(queijo Reino)

No grafo, indica-se C (estado 1) para o queijo produzido pela fazenda Campo e R (estado 2) para o queijo produzindo pela fazenda Reino. As probabilidades estão distribuídas no grafo. Observe que os demais probabilidades são calculadas utilizando o conceito de evento complementar, uma vez que a probabilidade de uma pessoa compra o queijo Campo ser 90%, significa que a chance de comprar o queijo Reino é 10% e se ela compra o queijo Reino, que é de 80%, a possibilidade de comprar o outro, queijo Campo é de 20%. Daí, podemos construir a matriz de transição. Lembre-se que $90\% = 0,9$ e $80\% = 0,8$.

A matriz de transição com as proporções de mudanças entre os estados é:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Da matriz estocástica, tem-se:

- p_{11}: representa a probabilidade da próxima compra ser do queijo Campo, sendo que a atual compra foi também o queijo Campo;
- p_{12}: apresenta a probabilidade da próxima compra ser do queijo Reino, dado que a atual compra foi o queijo Campo;
- p_{21}: apresenta a probabilidade da próxima compra ser do queijo Campo, dado que a atual compra foi o queijo Reino;
- p_{22}: apresenta a probabilidade da próxima compra ser do queijo Reino, sendo que a compra atual foi o queijo Reino.

O problema pede a probabilidade da segunda compra futura ser o queijo Reino, sabendo que, atualmente, comprou o queijo Campo: $P(X_2 = 2 \mid X_0 = 1)$, ou seja, $p_{12}^{(2)}$. Para obtermos a matriz P^2, utilizamos o *Matrix Calculator*. Segue então que:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{83}{100} & \dfrac{17}{100} \\ \dfrac{17}{50} & \dfrac{33}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}$$

Daí basta destacarmos o elemento $p_{12}^{(2)}$ da matriz acima, logo, $p_{12}^{(2)} = \dfrac{17}{50} = 0,34$.

Portanto, a probabilidade da segunda compra ser o queijo Reino, dado que atualmente comprou o queijo Campo, é aproximadamente de 34%.

4.4 Problema 4 - Adaptado do exemplo (Silva, 2020, p. 39)

Objetivo: espera-se que o estudante modele o problema através de uma cadeia de Markov, identifique os estados envolvidos no processo, construa um grafo para representar o problema, determine a matriz de transição e calcule a probabilidade pedida.

4.4.1 O problema

Em uma partida de futebol, onde não é possível a ocorrência de empate, foram observados alguns dados para o time OH. Se o time obteve uma vitória no jogo atual, a chance de vitória no próximo jogo é de 75%. No entanto, se no jogo atual ocorreu uma derrota, a chance de vitória no próximo jogo é de 35%. Determine as probabilidades de transição entre perder e ganhar. Qual é probabilidade do time perder o quarto jogo, dado que ele perdeu o atual?

4.4.2 Discussão

Dadas as características do problema, levar o estudante a perceber que a situação pode ser modelada por uma cadeia de Markov com dois estados possíveis, $E = \{1, 2\}$, sendo o estado 1 indicando a vitória do time e 2 indicando a derrota, uma vez que o resultado seguinte só depende do resultado atual.

Visualizemos o grafo:

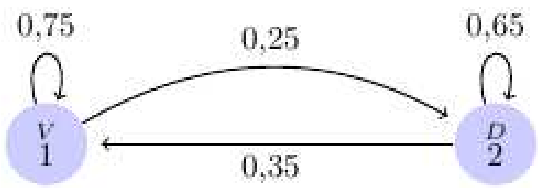

Figura 4.6: Grafo da Matriz de transição entre os estados 1(vitória) e 2 (derrota)

Aplicaremos a mesma estratégia dos problemas anteriores: utilizar o conceito de evento complementar. Assim, uma vez que quando tem 75% de chance ter a vitória no jogo atual, no próximo jogo fica a possibilidade de 25% de perder o próximo jogo e do mesmo modo , se tem no jogo atual a chance de 35% de perder, no próximo a chance derrota fica de 65%.

Vejamos a matriz de transição com as proporções de mudanças entre os estados:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$$

Da matriz, tem-se:

- p_{11}: é a probabilidade de vencer o próximo jogo, tendo vencido o atual;
- p_{12}: é a probabilidade de ser derrotado no jogo seguinte, dado que venceu o atual;
- p_{21}: é a probabilidade de vencer o próximo jogo, sendo que perdeu o atual;
- p_{22}: é a probabilidade de ser derrotado no jogo seguinte, dado que perdeu o atual.

O problema pede a probabilidade do time perder o quarto jogo, sendo que ele perdeu o atual,$P(X_4 = 2 \mid X_0 = 2)$, ou seja, $p_{22}^{(4)}$. Para calcular a matriz P^4 utilizaremos o *Matrix Calculator*. Logo,

$$P^4 = \begin{pmatrix} \dfrac{297}{500} & \dfrac{203}{500} \\ \dfrac{1421}{2500} & \dfrac{1079}{2500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,57 & 0,43 \end{pmatrix}$$

Observemos que $p_{22}^{(4)}$ é o elemento que nos dá a probabilidade pedida, ou seja, $p_{22}^{(4)} = 0,43$. Logo, a probabilidade do time perder o quarto jogo, dado que ele perdeu o atual, é de aproximadamente 43%.

4.5 Problema 5 - (Alves e Delgado, 1997, p. 10)

Objetivo: espera-se que o estudante perceba que o problema é uma cadeia de Markov, identifique os estados envolvidos no processo e calcule a probabilidade pedida.

4.5.1 O problema

Na loja de artigos de informática do Sr. Pague-Depressa, os clientes são divididos em categorias, consoante o nível dos pagamentos já efetuados: pagou (categoria 1), atrasado não mais de 30 dias (categoria 2), atrasado não mais de 60 dias (categoria 3) ou inadimplente (categoria 4). As contas são verificadas mensalmente e o estado de cada cliente é determinado. Segundo as regras do Sr. Pague-Depressa, os clientes deverão pagar uma conta dentro de 30 dias mas, pagando prestações, podem-se atrasar no máximo 60 dias; a partir dessa data o Sr. Pague-Depressa entrega os dados do cliente a uma empresa especializada em cobrança de dívidas. Após a análise dos dados históricos da loja, construiu-se a seguinte matriz de transições:

$$P = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,7 & 0,0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Com base nestas informações, pretende-se conhecer a probabilidade de um cliente acabar, eventualmente, na categoria 4 (não pagar), estando atualmente na categoria 1, passados 2 meses.

4.5.2 Discussão

Dadas as características do problema, levar o estudante a perceber que a situação é uma cadeia de Markov com 4 estados possíveis, $E = \{1, 2, 3, 4\}$, sendo o estado 1 indicando o cliente que pagou em dia, 2 indicando o cliente atrasado não mais de 30 dias, 3 indicando o cliente atrasado não mais de 60 dias e 4 indicando o cliente que não paga.

Não se faz necessário fazer o grafo para este problema, uma vez que já foi dada a matriz de transição. Basta, então interpretar as probabilidades que constam na matriz. Assim, tem-se:

- p_{11}: é a probabilidade do cliente pagar em dia o seguinte pagamento, dado que ele pagou o atual também em dia;
- p_{12}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte com atraso menor do que 30 dias, dado que ele pagou o atual em dia;
- p_{13}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte com atraso menor que 60 dias, dado que ele pagou o atual em dia;
- p_{14}: é a probabilidade do cliente não pagar o seguinte, dado que ele pagou o atual em dia;
- p_{21}: é a probabilidade do cliente pagar em dia o seguinte, dado que ele atrasou o atual em até 30 dias;
- p_{22}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte com atraso menor que 30 dias , dado que ele atrasou o atual também em até 30 dias;
- p_{23}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte com atraso menor que 60 dias, dado que ele atrasou o atual em até 30 dias;
- p_{24}: é a probabilidade do cliente não pagar o seguinte, dado que ele atrasou o atual em até 30 dias;
- p_{31}: é a probabilidade do cliente pagar em dia o seguinte, dado que ele atrasou o atual em até 60 dias;
- p_{32}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte com atraso inferior a 30 dias, dado que ele atrasou o atual em até 60 dias.
- p_{33}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte com atraso inferior a 60 dias, dado que ele atrasou o atual em até 60 dias;
- p_{34}: é a probabilidade do cliente não pagar o seguinte, dado que ele atrasou o atual no prazo inferior a 60 dias;
- p_{41}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte em dia, dado que ele não pagou o atual;

- p_{42}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte com atraso menor que 30 dias o seguinte, dado que ele não pagou o atual;
- p_{43}: é a probabilidade do cliente pagar o seguinte com atraso menor que 60 dias, dado que ele não pagou o atual;
- p_{44}: é a probabilidade do cliente não pagar o seguinte, dado que ele não pagou o atual.

O problema pede a probabilidade de um cliente, daqui a dois meses, acabar, eventualmente, na categoria 4 (não pagar), dado estar atualmente na categoria 1 (paga em dia) é $P(X_2 = 4 \mid X_0 = 1)$, ou seja, $p_{14}^{(2)}$. Então vamos calcular a matriz P^2 utilizando o *Matrix Calculator*, da qual obteremos o elemento $p_{14}^{(2)}$. Logo,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{89}{100} & \frac{1}{50} & \frac{1}{20} & \frac{3}{100} \\ \frac{31}{50} & \frac{11}{50} & \frac{3}{100} & \frac{1}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,89 & 0,02 & 0,05 & 0,04 \\ 0,67 & 0,24 & 0,04 & 0,05 \end{pmatrix}$$

O elemento que responde ao comando da questão é $p_{14}^{(2)} = 0$.Concluímos, então que, a probabilidade de um cliente acabar, eventualmente, não pagando, no prazo de 2 meses, sendo que atualmente ele pagou, é 0%.

4.6 Problemas Propostos

4.6.1 Problema Proposto 1 - Adaptado do exemplo (Ross, 2010, p. 497)

Suponha que a possibilidade de chuva amanhã dependa somente do fato de estar chovendo ou não no dia de hoje. suponha também que, se hoje está chovendo, então amanhã choverá com probabilidade de 45%; se hoje não estiver chovendo, então amanhã choverá com probabilidade de 52%. Determine a matriz de transição e determine a probabilidade de chover em 5 dias, dado que choveu hoje.

4.6.2 Problema Proposto 2

Uma certa gráfica possui diversas máquinas que podem estar em três estados:

- 0: significa está quebrada;
- 1: significa que está operando, mas está com seu uso limitado, uma vez que apresenta alguns defeitos;
- 2: significa que está em ótimas condições de funcionamento.

Veja o grafo:

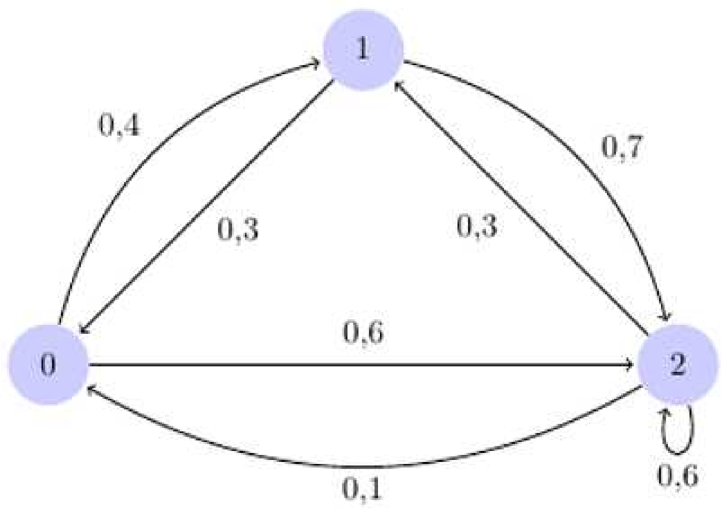

Figura 4.7: Grafo da Matriz de transição entre os estados 0(quebrada), 1(defeituosa) e 2(ótima)

Determine a matriz de transição e determine a probabilidade do estado ser 1 após $t = 3$, dado que o estado no instante 1 é 0.

4.6.3 Problema Proposto 3 - Adaptado do exemplo (Silva, 2020, p. 45)

A educação de uma população de estado são dividida em três redes de ensino: rede estadual (E), rede federal (F) e rede particular (P). Um estudo estatístico mostra que a probabilidade dos filhos de uma família que estudou na rede estadual permanecerem nesta rede é de 90%. Entretanto, há uma chance de 10% deles irem para a rede federal. O mesmo estudo aponta que os filhos de uma família que estudou na rede federal é de 10% de chance de irem para a rede estadual e 30% de chance de irem para a rede particular. Por fim, os filhos de uma família da rede particular têm 20% de chance de irem para a rede federal e 75% de chance de permanecerem na rede particular. De acordo com essas informações, qual a probabilidade dos netos de uma família da rede federal irem para a rede particular?

4.6.4 Problema Proposto 4 - Adaptado do exemplo (Silva, 2020, p. 47)

Uma determinada cultura tem sua safra classificada em três modalidades: boa, média e ruim. Estudos revelam que, após uma safra boa, há probabilidades iguais a 50% e 10% de a próxima safra ser média ou ruim, respectivamente. Após uma safra média, há probabilidades iguais a 40% e 10% de a próxima safra ser boa ou ruim, respectivamente. E após uma safra ruim, há probabilidades iguais a 30% e 60% de a safra no ano seguinte ser boa ou média, respectivamente. Com base nestas informações, qual é a probabilidade da safra ser boa daqui a dois anos, sabendo que ela foi ruim neste ano? Monte a matriz de transição.

Considerações finais

Ao propormos cadeias de Markov como um tema a ser discutido no ensino médio, vimos possibilidade de integrar os conteúdos de matrizes e probabilidade, além de introduzir a discussão da teoria de grafos nessa etapa de ensino. Procuramos apresentar problemas que instigassem os alunos dessa etapa, e assim, desenvolvemos a sequência dos conceitos tendo em vista a organização do currículo.

Nesse sentido, espera-se que este trabalho possa ser útil, como ponto de apoio ao docente, uma direção para o entendimento inicial dos conceitos de grafos e cadeias de Markov, ou para aplicá-lo em sala de aula, que desperte o raciocínio lógico como elemento do aprendizado da Matemática, além de assimilar métodos ou fórmulas preestabelecidas, bem como obter conclusões sobre a validade e adequação do ensino da matrizes e probabilidade nesta fase de aprendizado. Assim, motivar novos caminhos e com essa proposta continuar explorando as aplicações das Cadeias de Markov presentes ou não no cotidiano, como: Teoria de filas, Internet (*PageRank*), Economia e Finanças, Ciências Sociais, Biologia Matemática (Processos de Populações), Genética, Esporte, Geradores de texto de Markov e outros, com o propósito de aprofundamento e novos desafios na aprendizagem e ampliação dos conceitos apresentados.

Por fim, acreditamos que a proposta em questão é motivadora, uma vez que, possui diversas aplicações e problemas interessantes que podem ser propostos para os estudantes do ensino médio, pois partem de conceitos básicos, como multiplicação de matrizes e probabilidade condicional.

Referências Bibliográficas

Alves, R. e Delgado, C. (1997). *Processos Estocásticos*. U.PORTO: Faculdade de Economia do Porto, PORTO - Portugal.

Anton, H. e Rorres, C. (2016). *Álgebra Linear com Aplicações*. 10a ed, Bookman, Porto Alegre.

Argentom, R. (2017). Tabuleiro representando as sete pontes de königsberg- Matemateca IME/USP. Acesso em: 10 Mar. 2022.

Assis, J. S. M. (2016). Grafos eulerianos no ensino médio. Dissertação de Mestrado, PROFMAT–IMPA, Rio de Janeiro/RJ.

Boldrini, J. L., Costa, S. R., Figueredo, V. l., e Wetzler, H. (1980). *Álgebra Linear*. 3a edição, HARBRA, São Paulo.

Boyer, C. (1974). *História da Matemática*. Traduzido por: Elza F. Gomide, - 8.ed. - Edgard Blucher, São Paulo.

Brasil–MEC (2018). Base Nacional Comum Curricular.

Britto, M. A. F. O. (2014). Matrizes: Proposta de aplicação no ensino médio. Dissertação de Mestrado, PROFMAT – Instituto de Ciências Exatas– Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora/MG.

Castro, D. M. d. S. (2015). Cadeias de Markov: Uma aplicação para o Ensino de Matrizes e Probabilidades. Dissertação de Mestrado, PROFMAT –Universidade Federal de Alagoas, Maceió/AL.

Eves, H. (2002). *Introdução à história da matemática*. 3a edição - Editora UNICAMP, Campinas, SP.

Favaro, F. F. (2017). A teoria dos grafos e sua abordagem na sala de aula com recursos educacionais digitais. Dissertação de Mestrado, PROFMAT – UNESP, Rio Claro/ SP.

Giuscă, B. (2005). Konigsberg bridges. Acesso em: 10 Mar. 2022.

Hefez, A. e Fernandez, C. S. (2016). Introdução à álgebra linear. In *Coleção PROFMAT*, página 271p. SBM, Rio de Janeiro.

INPE (2020). A taxa consolidada de desmatamento por corte raso para os nove estados da Amazônia legal (AC,AM, AP, MA, MT, PA, RO, RR e TO) em 2019 é de 10.129 km2. `http://www.inpe.br/noticias/noticia.php?Cod_Noticia=5465l/`Acesso em: 27 Abr. 2022.

Jurkiewicz, S. (2019). Grafos - Uma Introdução. Acesso em: 26 dez. 2020.

Lima, E. L. (1999). Conceituação, manipulação e aplicações: as três componentes do ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática 41, 1999. 1 IMPA-RJ. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/41/1.htm.* Acesso em: 16 jul. 2021.

Lucas, T. M. (2019). Grafos no Ensino Médio: Uma proposta de Atividades. Dissertação de Mestrado, PROFMAT - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), Campos dos Goytacazes/RJ.

Meyer, P. L. (1983). *Probabilidade - Aplicações àEstatística.* 2a edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro.

Morgado, A. C. e Carvalho, P. C. P. (2015). MatemáticaDiscreta. In *Coleção PROFMAT*, página 294p. 2a edição, SBM.

Morgado, A. C., De Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., e Fernandez, P. (2016). *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios.* 10a edição, SBM, Rio de Janeiro.

Nogueira, D. K. (2015). Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio. Dissertação de Mestrado, PROFMAT – Universidade de Brasília (UNB), Brasília/DF.

OBMEP (2009). Provas e soluções - Primeira fase OBMEP - Nível 3. Disponível em https://drive.google.com/file/d/1Nyg4mmfj7sJ4D2A2Ja1lxaJnLl1AxdoL/viewAcesso em: 22 Jan. 2022.

O'Connor, J. J. e Robertson, E. F. (2006). Andrei Andreyevich Markov. Acesso em: 18 mai. 2021.

Pitombeira, J. (2009). O problemas das Ligações de água, Luz e Telefone. *Revista do Professor de Matemática, vol. 11, n. 16, p. 143-153. Disponível em https://rpm.org.br/cdrpm/11/3.htm.* Acesso em: 10 Mar. 2022.

Ross, S. (2010). *Probabilidade: um curso moderno com aplicações.* Traduzido por: Alberto Resende De Conti, - 8.ed. - Boolkman,Porto Alegre.

Silva, F. C. A. (2020). Cadeias de Markov - Uma sequência didática par o Ensino Médio. Dissertação de Mestrado, PROFMAT– UFLA, Lavras/MG.