MNPEF Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física

UFMT

SBF SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA

A Termodinâmica que emerge da sala de aula

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Thais Rodrigues de Oliveira

Orientador : Prof. Dr. Marcelo Amorim Marchiori.

Maio de 2023

A Termodinâmica que emerge da sala de aula

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Thais Rodrigues de Oliveira

Orientador : Prof. Dr. Marcelo Amorim Marchiori.

Maio de 2023

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA EM REDE NACIONAL - PROFIS

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: A TERMODINÂMICA QUE EMERGE DA SALA DE AULA

AUTORA: MESTRANDA **THAIS RODRIGUES DE OLIVEIRA**

Dissertação defendida e aprovada em **12** de **JUNHO** de **2023**.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Doutor(a) MARCELO AMORIM MARCHIORI (Presidente Banca / Orientador)

INSTITUIÇÃO**: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO**

2. Doutor(a) Jeferson de Oliveira (Examinador Interno)

INSTITUIÇÃO**: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO**

3. Doutor(a) Valquiria Ribeiro de Carvalho Martinho (Examinador Externo)

INSTITUIÇÃO**: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATO GROSSO**

4. Doutor(a) PABLO RODRIGO ALVES DE SOUZA (Examinador Suplente)

INSTITUIÇÃO**: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO**

5. Doutor(a) Sabrina Silva Carara (Examinador Suplente)

INSTITUIÇÃO**: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO**

CUIABÁ, 12/06/2023

Documento assinado eletronicamente por **JEFERSON DE OLIVEIRA**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 14/06/2023, às 09:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Thais Rodrigues de Oliveira**, **Usuário Externo**, em 14/06/2023, às 21:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **MARCELO AMORIM MARCHIORI**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 15/06/2023, às 10:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5881279** e o código CRC **675E1041**.

Referência: Processo nº 23108.041533/2023-43 SEI nº 5881279

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

D278t de Oliveira, Thais Rodrigues.
A TERMODINÂMICA QUE EMERGE DA SALA DE AULA [recurso eletrônico] / Thais Rodrigues de Oliveira. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 111 f., il. color., pdf). -- 2023.

Orientador: Marcelo Amorim Marchiori.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Física, Cuiabá, 2023.
Modo de acesso: World Wide Web: https://ri.ufmt.br.
Inclui bibliografia.

1. Termodinâmica. 2. Probabilidade. 3. Equilíbrio. 4.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha filha Clara Rodrigues, meu esposo Nilson Benedito, minha mãe Alaiza Rodrigues da Cruz, ao meu falecido padastro, Celino Lino de Oliveira Carvalho, aos meus parentes, tio e ti, primos e primas e

a todas as mulheres desse país, em especial as pretas, pobres e discriminadas.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, por toda força e coragem até aqu. Ele me sustentou.

Ao meu professor e orientador Dr. Marcelo Amorim Marchiori, por toda dedicação, atenção, orientação, conselhos e ensinamentos. Por ser uma pessoa que tem muito conhecimento e experiência, humildade, paciência, compreensão e cuidado. Por muitos momentos foi mais que um orientador, um amigo, um pai, um conselheiro, enfim uma pessoa fundamental nesta caminhada. Se não fosse ele com o seu jeito todo cuidadoso, atencioso, certamente não teria conseguido concluir este trabalho, porque as dificuldades foram inúmeras, porém ele sempre esteve ao meu lado, ajudando em tudo. Não existem palavras que vão conseguir descrever minha gratidão a tua pessoa. Obrigada.

A minha família, em especial meu esposo Nilson Benedito de Oliveira por toda ajuda, a minha mãe Alaiza Rodrigues da Cruz por todo apoio , minha filha Clara Rodrigues por toda compreensão da minha ausência em vários momentos .

Aos meus amigos Alvencio Donizete dos Santos, obrigada por todo encorajamento, Rita Marcia Souza Morais e Claudia dos Santos, obrigada por toda ajuda.

Aos meus amigos do MNPEF, Gisele Vincenci, Ildo Felipe da Silva, que foram companheiros durante esta jornada, na troca de experiência e conhecimento.

A professora Drª Sabrina Carara, pessoa que muito me incentivou a fazer este mestrado.

À Sociedade Brasileira de Física (SBF) que oportunizou a oferta deste Mestrado na UFMT – Universidade Federal de Mato Grosso (Polo 25).

A todos meus amigos, muito obrigada!

Sumário

Resumo

Este trabalho visa aplicar os conceitos de probabilidade para a estabelecer os princípios do comportamento termodinâmico em sistemas macroscópicos objetivando a elaboração de um produto educacional que seja capaz de preencher uma lacuna formativa no ensino médio e que tem grande repercussão nos cursos superiores e na capacidade de interpretação de fenômenos ou problemas que envolvam conceitos estatísticos. Utilizaremos a sala de aula como palco para simular um sistema macroscópico de muitos corpos. Cada estudante será responsável por conduzir experimentos aleatórios (lançamento de dados, por exemplo) e os resultados individuais serão utilizados para compor o resultado médio da turma completa em diversos cenários. Com este esquema, mostramos como os resultados individuais são importantes para construir o resultado médio global e introduzir os conceitos de microestado e macroestado de sistemas estatísticos de maneira lúdica e construtiva. O Produto Educacional foi aplicado na Escola Estadual Leônidas Antero de Matos, Cuiabá MT, com uma turma do 2º Ano da modalidade Ensino Médio Regular, do período matutino, composta por 20 alunos e com a faixa etária entre 16 e 17 anos de idade. As estratégias de gamificação, usando jogos de dados e baralhos contribuíram para, a partir das vivências cotidianas (jogos que os alunos conhecem), trabalhar elementos das teorias de análise combinatória, probabilidade e termodinâmica. Sabemos que este é um tema bastante desafiador, mas os resultados prévios indicam que as estratégias pensadas para este trabalho são promissoras. Muito embora, os resultados obtidos ainda não possuam segurança estatística, consideramos, pela experiência de aplicação, que o produto tem potencial para contribuir no que diz respeito à transmissão de conhecimento sobre fenômenos probabilísticos e a origem das grandezas termodinâmicas.

Palavras chave: termodinâmica, probabilidade; equilíbrio.

Abstract

This work aims to apply the concepts of probability to establish the principles of thermodynamic behavior in macroscopic systems, with the objective of developing an educational product capable of filling a formative gap in high school education. This gap is of significant consequence in higher education courses and in the ability to interpret phenomena or problems involving statistical concepts. We will utilize the classroom as a stage to simulate a macroscopic system of many bodies.

Each student will be responsible for conducting random experiments (such as dice rolls, for example), and the individual results will be used to compose the overall class average in various scenarios. With this framework, we demonstrate how individual outcomes play a pivotal role in constructing the global average outcome. This approach serves to introduce the concepts of microstates and macrostates of statistical systems in a playful and constructive manner.

The Educational Product was implemented at Leônidas Antero de Matos State School in Cuiabá, MT, with a 2nd-year class of the Regular High School program. The class, consisting of 20 students aged between 16 and 17, participated in the morning sessions. Gamification strategies, employing dice games and card decks, facilitated the incorporation of everyday experiences (games familiar to students) to teach elements of combinatorial analysis, probability, and thermodynamics.

We acknowledge that this is indeed a challenging subject; however, preliminary results suggest that the strategies conceived for this project hold promise. Although the obtained results currently lack statistical certainty, based on the application experience, we believe the product has the potential to make a meaningful contribution to the transmission of knowledge regarding probabilistic phenomena and the origins of thermodynamic properties.

Keywords: thermodynamics, probability, equilibrium.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Nos currículos dos cursos de física no ensino médio, é comum que se dê pouca ênfase ao caráter estatístico subjacente à origem dos fenômenos termodinâmicos. Embora a Probabilidade seja um tema constante no currículo de matemática, ela costuma ser relegada a um segundo plano nesse contexto, o que representa uma inversão de valores fundamental. Essa falta de atenção se torna ainda mais relevante quando consideramos que a realidade imposta à sociedade está intrinsecamente ligada ao comportamento coletivo, no qual a estatística desempenha um papel crucial. As teorias de probabilidade têm aplicações em diversas áreas, particularmente, nas tomadas de decisões governamentais. Essas decisões dependem essencialmente de dados consolidados e estatísticas, que podem apresentar diferentes direcionamentos dependendo das características regionais. É importante compreender que a probabilidade está presente em situações cotidianas e vai além do escopo da sala de aula.

Outro ponto a ser considerado é a dificuldade que a população tem em distinguir resultados estatísticos de resultados individuais. Isso ficou especialmente evidente no contexto da pandemia, no qual a compreensão da eficácia das vacinas e da ineficácia dos tratamentos precoces tornou-se desafiador. Portanto, é necessário abordar questões que envolvam os conceitos fundamentais de probabilidade, aleatoriedade e estatística, de modo a promover uma compreensão mais ampla e crítica por parte dos estudantes.

Para trabalhar os conceitos físicos e matemáticos que foram utilizados para o desenvolvimento deste trabalho, foi desenvolvido um produto educacional na Escola Estadual Leônidas Antero de Matos, Cuiabá MT, com uma turma do 2º Ano da modalidade Ensino Médio Regular, do período matutino, composta por 20 alunos, com a faixa etária entre 16 e 17 anos de idade.

Diante desse cenário, é fundamental que os professores adotem estratégias de ensino-aprendizagem que auxiliem na construção do conhecimento dos estudantes de forma efetiva. Isso implica em uma abordagem ativa, na qual os alunos sejam incentivados a participar ativamente do processo, construindo seu próprio entendimento por meio de atividades colaborativas e autênticas. Dessa forma, será possível promover uma compreensão mais profunda e contextualizada dos conceitos de probabilidade, aleatoriedade e estatística, preparando os estudantes para lidar com os desafios do mundo real de forma informada e crítica.

É importante estabelecer uma conexão entre o conhecimento do docente e os recursos pedagógicos. Por exemplo, neste trabalho, foram utilizados jogos de dados, mas qualquer outro jogo, como cartas de baralho, bozó, jogos com moedas (cara coroa) ou roleta-russa, pode ser usado, desde que envolva a aleatoriedade. Esses jogos podem funcionar como materiais potencialmente significativos, auxiliando nessa conexão. No entanto, é importante prestar atenção à maneira como esses materiais serão trabalhados, pois, dependendo de como isso ocorrer, pode-se não obter resultados tão satisfatórios na aprendizagem do aluno. É importante que apresentação seja feita dando a devida atenção aos elementos fundamentais que servem de analogia aos fenômenos físicos, a conexão dos novos resultados com os subsunçores deve ser cuidadosa e os jogos devem ser os elementos lúdicos, que transformam o aprendizado em algo prazeroso.

No capítulo 2, apresentamos, de forma sucinta, a Teoria de Aprendizagem de Ausubel. No capítulo 3, discutimos os elementos principais que transformam as grandezas termodinâmicas em variáveis que podem apenas ser definidas sob o ponto de vista probabilístico. Por isso, apresentamos no capítulo 4 realizamos uma revisão dos princípios fundamentais da análise combinatória com o intuito de, no capítulo 5, os fundamentos da teoria da probabilidade. No capítulo 6, descrevemos o desenvolvimento do produto educacional, bem como sua aplicação dentro do contexto e da organização da sequência didática. No capítulo 7, discutimos um pouco de como foi a experiência de aplicação do produto educacional e, por fim, no capítulo 8conduzimos discussões, análises dos resultados obtidos e perspectivas futuras.

Capítulo 2

REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Aprendizagem significativa

Para Ausubel [2] a aprendizagem do aluno precisa acontecer através

- da assimilação de significados, priorizando a aprendizagem cognitiva, que é a agregação do conteúdo aprendido numa estrutura mental organizada;
- e da importância de se levar em consideração e valorizar os conhecimentos prévios já existentes do aluno.

> *A aprendizagem significativa é um processo onde uma nova informação interage de maneira (não literal) e não arbitrária com informações relevantes já existentes na estrutura de conhecimento do aprendiz, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante para a aprendizagem dessas ideias. Este aspecto especificamente relevante pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito, uma proposição, já significativo.*
>
> (MOREIRA, 2006, p.14[12]).

Quando Ausubel faz referência à "estrutura cognitiva do aluno", ele está mencionando a organização das ideias do indivíduo sobre determinado conteúdo ou assunto, ou seja, suas ideias precisam estar organizadas nesse campo do conhecimento. No entanto, além desse fato, para que ocorra uma facilitação na aprendizagem, é necessário que os conhecimentos preexistentes tenham sido construídos de maneira significativa, ou seja, de forma não imposta.

Como mencionado anteriormente, o ponto central da teoria de Ausubel é que a aprendizagem ocorra de forma significativa, ou seja, ela precisa ter um significado para o aprendiz. Essa aprendizagem ocorre por meio da relação não arbitrária de uma nova informação com conceitos importantes já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Dessa forma, pode-se afirmar que novas ideias, conceitos e proposições podem ser aprendidos de maneira significativa e internalizados pelo aprendiz, de modo que outros conceitos importantes estejam dispostos e claros na estrutura cognitiva do indivíduo. Esses conceitos servirão como base para as aprendizagens posteriores. Ausubel define esse processo de interação de informações como um subsunçor, que sempre estará presente no conhecimento do indivíduo.

Outro fato importante a ser destacado é que a experiência cognitiva não se limita apenas à influência direta dos conceitos já assimilados de forma significativa, pois tudo o que foi aprendido significativamente pode ser modificado na estrutura cognitiva do indivíduo quando ele passa a conhecer novos materiais.

Na construção do conhecimento, é importante ressaltar que a aprendizagem significativa não é sinônimo de material significativo. No entanto, dois fatores são importantes nesse processo. Primeiro, o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo. Segundo, deve haver uma disposição para a aprendizagem significativa, pois mesmo que o material seja potencialmente significativo, se o indivíduo não estiver disposto a aprender, ele apenas memorizará o conteúdo.

No campo da física, por exemplo, se o indivíduo já possui conceitos bem estruturados em seu conhecimento sobre calor, temperatura, energia interna e entropia, esses conceitos servirão como âncora para o estudo da termodinâmica. Em outras palavras, eles servirão como subsunçores para a nova aprendizagem, que ocorrerá por meio da interação dessas informações. Dessa forma, é possível compreender que a aprendizagem significativa não ocorre por meio de um agrupamento isolado de conceitos, mas sim por meio da interação de informações importantes que são incorporadas à estrutura cognitiva do indivíduo de forma não arbitrária. Esses conceitos vão contribuir para a elaboração e sustentação dos subsunçores anteriores.

Ausubel percebe o armazenamento de informações na mente humana como altamente organizado, formando uma espécie de hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são conectados (e assimilados por) conceitos, ideias e proposições mais gerais e inclusivas. Essa organização decorre, em parte, da interação característica da aprendizagem significativa" ([12]).

Por outro lado, em contraposição à aprendizagem significativa, a aprendizagem mecânica ocorre com pouca interação dos conceitos relevantes na estrutura cognitiva do indivíduo. O processo de aprendizagem ocorre de maneira arbitrária, sem uma conexão entre os subsunçores preexistentes e os novos que serão formados.

Quando nos referimos às disciplinas de física, química e matemática, que envolvem muitas fórmulas, os alunos muitas vezes simplesmente decoram essas fórmulas com o objetivo de realizar avaliações ou testes, ou seja, eles não constroem seu conhecimento com significado, mas sim o memorizam. Isso caracteriza um tipo de aprendizagem mecânica. No entanto, Ausubel não faz uma divisão estrita entre os dois tipos de aprendizagem, pois em algum momento pode haver algum tipo de interação e, portanto, essa interação pode ser importante, mas não da mesma forma que ocorre na aprendizagem significativa.

No contexto dos processos de aprendizagem, é importante distinguir de forma clara os principais tipos de aprendizagem, como aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa. Para diferenciar esses tipos de aprendizagem escolar, é necessário distinguir entre aprendizagem por descoberta e por recepção, bem como entre aprendizagem significativa e aprendizagem por memorização [2, 13, 3, 1].

2.1.1 Aprendizagem por descoberta e aprendizagem por recepção

Na aprendizagem receptiva significativa, o material potencialmente significativo torna-se significativo para o indivíduo durante o processo de internalização. Por outro lado, na aprendizagem receptiva automática, a aprendizagem não ocorre de forma potencialmente significativa durante a internalização. Embora haja essa diferença, essas duas formas de aprendizagem não estão completamente separadas, pois ambas podem ocorrer simultaneamente na mesma tarefa de aprendizagem.

A principal característica da aprendizagem por descoberta é que o conteúdo principal a ser aprendido não é fornecido; ele deve ser descoberto pelo aluno antes de ser assimilado em sua estrutura cognitiva existente. Em outras palavras, a função principal dessa forma de aprendizagem é descobrir algo. O aluno precisa organizar as informações, integrá-las à sua estrutura cognitiva prévia e reorganizá-las de maneira a produzir o resultado desejado. Após a aprendizagem por descoberta ocorrer, o que foi descoberto se torna significativo, assim como ocorre na aprendizagem receptiva em que o conteúdo se torna significativo.

Como mencionado anteriormente, há uma diferença entre as aprendizagens por descoberta e por recepção. Elas diferem no desenvolvimento e funcionamento do intelecto. A maior parte do conhecimento acadêmico é adquirida por meio da aprendizagem receptiva, enquanto as situações-problema do cotidiano são resolvidas por meio da descoberta. No entanto, a aprendizagem por descoberta também pode ocorrer na aprendizagem receptiva para resolver problemas do cotidiano, assim como a aprendizagem por recepção pode ser utilizada no ambiente escolar. Portanto, compreendemos que nem sempre a aprendizagem por descoberta é significativa, e a aprendizagem por recepção não é necessariamente arbitrária ou mecânica. Ambas podem desempenhar ambos os papéis.

Do ponto de vista do processo psicológico, a aprendizagem por descoberta significativa é obviamente mais complexa do que a aprendizagem receptiva significativa. Ela envolve uma experiência prévia na solução de problemas antes que o significado emerja e possa ser internalizado [2, 13, 3, 1]).

Analisando de forma geral, a aprendizagem por recepção ocorre por meio de uma série de fenômenos que ocorrem no espaço-tempo. É mais simples do que a aprendizagem por descoberta, mas surge em um estágio mais avançado do desenvolvimento, em sua forma original e complexa. Em outras palavras, exige-se um nível mais elevado de maturidade cognitiva. No que diz respeito à aquisição de conceitos e proposições, ter uma maior maturidade intelectual possibilita que o funcionamento cognitivo seja mais simples, porém eficiente, no processo de obtenção desses conceitos para a construção do conhecimento.

Por exemplo, uma criança adquire o conceito de bola a partir de várias experiências com bolas de diferentes tamanhos, cores e modalidades esportivas. Dessa forma, ela consegue ampliar esses atributos na aprendizagem por recepção. No entanto, essa característica não domina a funcionalidade intelectual da criança precocemente, pois ela precisa ter um nível de cognição suficientemente amadurecido para compreender os conceitos e proposições que lhe são apresentados verbalmente, quando as experiências empírico concretas não estão presentes (AUSUBEL, p. 21-22).

Falar sobre aprendizagem significativa implica a existência de significados, mas como essa aprendizagem ocorre? Como os significados são adquiridos e quais são os primeiros passos a serem seguidos para adquirir esses primeiros significados, a fim de que a aprendizagem ocorra? Como mencionado no início do texto, os subsunçores mais importantes existentes na estrutura cognitiva são condições essenciais e pré-requisitos para que o material seja potencialmente significativo, o que é uma das condições para que a aprendizagem significativa aconteça.

Em resposta a essas perguntas, para que uma criança possa aprender significativamente a partir da aquisição de conceitos, símbolos e signos, é necessário um processo que ocorre em etapas, à medida que o indivíduo vivencia diferentes situações em seu dia a dia. Durante a infância, a criança adquire conceitos por meio do processo de formação de conceitos, que é um tipo de aprendizagem por descoberta. No entanto, quando ela atinge a idade escolar, já possui um conjunto de conceitos formados que lhe permite alcançar a aprendizagem significativa por recepção. A partir desse processo, a criança adquire novos conceitos e faz a diferenciação entre eles, por meio da assimilação dos conceitos. Por exemplo, na formação de conceito, a criança adquire o conceito de chuva por meio de diversas experiências com esse fenômeno natural. Ao serem apresentados novos conceitos à criança, para que a assimilação ocorra de forma significativa, esses novos conceitos precisam já existir na estrutura cognitiva dela. Isso é conhecido como assimilação de conceitos.

Uma vez que significados iniciais são estabelecidos para signos ou símbolos de conceitos por meio do processo de formação de conceitos, novas aprendizagens significativas atribuirão significados adicionais a esses signos ou símbolos, e novas relações entre os conceitos adquiridos anteriormente serão estabelecidas[12].

Como já mencionado, a existência do subsunçor é fundamental para a aprendizagem significativa. No entanto, e se o subsunçor não existir? O que fazer nesse caso? Ausubel sugere o uso de organizadores prévios como base para a aquisição do novo conhecimento, que leva ao desenvolvimento de conceitos e subsunçores, os quais irão auxiliar na aprendizagem subsequente. Os conhecimentos prévios são ferramentas de ensino, materiais introdutórios que auxiliam o aluno a aprender novos conteúdos. Esses materiais podem ser mapas conceituais, gráficos de Venn, perguntas orientadas e assim por diante. No entanto, eles não devem ser apenas "visões gerais" de um assunto. Os organizadores prévios servem como estratégias para trabalhar o processo cognitivo do aprendiz, estabelecendo uma conexão entre o que ele já sabe e o que deseja aprender. Em suma, são ferramentas que auxiliam a aprendizagem.

Se o organizador prévio for um material pouco familiar, pode-se usar um organizador "expositivo", pois ele ajudará a formar subsunçores relevantes e potencialmente significativos. No entanto, se o material for mais familiar, pode-se utilizar um organizador "comparativo", que servirá para integrar novas ideias e conceitos semelhantes aos já existentes na estrutura cognitiva. Além disso, ele também tem a função de aumentar a distinção entre as novas ideias e os conceitos já existentes. É importante ressaltar que os organizadores prévios não se limitam apenas a textos escritos; podem ser um vídeo, um filme, ou qualquer outra escolha adequada à situação de aprendizagem (MOREIRA, 2006, p. 23-24).

Segundo Ausubel, existem três tipos de aprendizagem significativa: representacional, de conceitos e proposicional. A seguir, discutiremos, brevemente, sobre cada uma delas.

2.1.2 Aprendizagem representacional

A aprendizagem representacional é a mais básica e influencia todas as outras formas de aprendizagem. Nesse tipo de aprendizagem, ocorre a compreensão do significado dos símbolos, geralmente palavras, e a identificação do que eles representam.

Por exemplo, uma criança aprende de forma representacional o significado da palavra "gato" ao ouvir o som correspondente. Embora esse som ainda não seja significativo para ela, ele passa a representar um objeto específico, o gato que está sendo percebido no momento. Ou seja, o som significa a mesma coisa, uma imagem do objeto gato, que o próprio objeto representa para ela. Dessa forma, a criança estabelece uma conexão ativa e não arbitrária entre essa equivalência representacional e o conteúdo importante de sua estrutura cognitiva.

À medida que a criança aprende completamente e de forma significativa o significado da palavra "gato", essa palavra será capaz de evocar a imagem de vários gatos em sua experiência. Ao adquirir o significado mais genérico da palavra "gato", esse símbolo também passará a representar o conceito mais amplo de gato.

2.1.3 Aprendizagem de conceitos

A aprendizagem de conceitos desempenha um papel fundamental na aquisição de conhecimento. Baseada na formação de conceitos, é uma forma de aprendizagem representacional, pois os conceitos também podem ser representados por meio de símbolos específicos, assim como outras formas de unidades referenciais. No entanto, ao contrário da aprendizagem anterior mencionada, nessa forma de aprendizagem, a equivalência é estabelecida entre o símbolo e os atributos comuns a diversos exemplares (diferentes gatos, por exemplo).

Conforme mencionado anteriormente, os conceitos são adquiridos por meio dos processos de assimilação e formação. Na formação de conceitos, os atributos característicos dos conceitos são adquiridos por meio da experiência direta e organizados em uma estrutura hierárquica, em que conceitos mais gerais e importantes estão relacionados aos mais específicos. Essa aprendizagem ocorre de forma gradual, passando por etapas de formulação, teste de hipóteses e generalização. É uma forma de aprendizagem baseada em descoberta. No entanto, à medida que a criança adquire uma quantidade de conceitos, ela será capaz de aprender novos conceitos por meio da assimilação. Dependendo da idade, pode ser necessário o auxílio do concreto empírico para facilitar a assimilação desses conceitos. Utilizar os conceitos mais relevantes já existentes na estrutura cognitiva (adquiridos pelo processo de formação) pode acelerar a assimilação desses novos conceitos.

Um ponto importante a ser destacado é que, assim como os símbolos de um conceito podem ser adquiridos antes do próprio conceito em si (como no exemplo do símbolo "gato" na aprendizagem representacional), o contrário também pode ocorrer.

2.1.4 Aprendizagem proposicional

A aprendizagem proposicional difere da aprendizagem representacional, pois envolve a compreensão do significado de ideias expressas em forma de proposição. Nesse tipo de aprendizagem, o foco principal não é apenas aprender o significado dos conceitos, embora eles sejam pré-requisitos importantes, mas sim compreender o significado das ideias verbalizadas por meio desses conceitos, em forma de sugestão, proposta ou proposição. É necessário ressaltar que a aprendizagem representacional é uma base fundamental para a aprendizagem proposicional. Por exemplo, para aprender de maneira significativa as proposições sobre Termodinâmica, é necessário que os conceitos aprendidos se combinem para formar tais proposições.

A aprendizagem proposicional é similar às outras formas de aprendizagem no sentido em que as novas proposições interagem com as proposições ou conceitos mais importantes (subsunçores) já presentes na estrutura cognitiva. No entanto, a aprendizagem proposicional é mais complexa. Uma proposição potencialmente significativa expressa verbalmente uma sentença que contém todos os significados, incluindo os significados conotativos e denotativos dos conceitos envolvidos. Dessa forma, ocorre uma interação das ideias mais importantes já estabelecidas na estrutura cognitiva, e a partir dessa interação surgem os significados das novas proposições.

Neste trabalho de mestrado, será apresentado um material potencialmente significativo. A aprendizagem que ocorrerá por meio desse material será significativa. Um jogo de dados realizado em sala de aula auxiliará os alunos a associarem seu conhecimento prévio na estrutura cognitiva com os novos conceitos apresentados. A partir disso, os alunos serão capazes de adquirir novos conhecimentos. Esse produto educacional potencialmente significativo será desenvolvido por meio de um jogo de dados, uma atividade comum no dia a dia dos alunos.

Como mencionado anteriormente, a aquisição de significados é o resultado da aprendizagem significativa. No entanto, como saber se essa aprendizagem ocorreu? Segundo Ausubel, a compreensão genuína de um conceito ou proposição implica ter significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. No entanto, quando os professores procuram avaliar se os alunos aprenderam de forma significativa por meio de testes, muitas vezes obtêm apenas respostas decoradas ou memorizadas mecanicamente. Portanto, ao buscar evidências sobre a aprendizagem dos alunos, é importante evitar a "simulação significativa" e inovar na formulação de questões e problemas. Os testes avaliativos devem ser escritos de maneira diferente dos materiais didáticos convencionais. Segundo Ausubel, em certas situações, só é possível saber se um aluno aprendeu de forma significativa se ele for capaz de verbalizar as ideias que assimilou. O fato de um aluno não conseguir resolver situações-problema não significa necessariamente que ele apenas decorou ou memorizou o conteúdo proposto para sua aprendizagem, pois é necessário levar em consideração outras habilidades do estudante.

Portanto, é necessário buscar outras alternativas para avaliação. Ausubel sugere pedir aos alunos que façam distinções entre ideias relacionadas, de forma que elas não sejam iguais. Também é possível solicitar a identificação de conceitos e proposições em uma lista que contenha conceitos e proposições semelhantes. Outra alternativa é propor atividades de aprendizagem que sigam uma sequência didática, de modo que a primeira etapa não possa ser resolvida sem uma compreensão adequada da etapa anterior.

Dessa forma, podemos concluir que a aprendizagem significativa desempenha um papel fundamental no processo educacional. Ela permite que os alunos internalizem os conceitos e proposições bem estabelecidos em sua estrutura cognitiva, possibilitando a construção de um conhecimento profundo, sólido e significativo para si mesmos. Em vez de simplesmente memorizar e decorar conteúdos para testes e avaliações, a aprendizagem significativa capacita os alunos a desenvolverem uma compreensão genuína e aplicável em diversas situações.

Portanto, é importante incentivar práticas pedagógicas que promovam a aprendizagem significativa, proporcionando aos alunos oportunidades de explorar, relacionar e construir conhecimentos de forma ativa. Ao valorizar a compreensão dos significados, a diferenciação de ideias e a transferência de conhecimentos, os educadores podem contribuir para o desenvolvimento de aprendizes autônomos, críticos e capazes de aplicar seu conhecimento de maneira significativa em suas vidas.

Capítulo 3

Termodinâmica: Uma revisão sobre o comportamento emergente

3.1 O objetivo da termodinâmica

A termodinâmica está baseada no experimento. As leis que regem a dinâmica dos processos de equilíbrio representam a resposta macroscópica do sistema físico, ou seja, independem da natureza microscópica do sistema. Esta "independência" das leis fundamentais que governam a dinâmica de átomos e moléculas em um nível microscópico, está intimamente relacionada com a falta de resolução temporal e espacial dos experimentos utilizados para a sua construção. Mais precisamente, as escalas de tempo associadas aos fenômenos moleculares são muito menores do que as associadas aos processos macroscópicos de equilíbrio (termalização, expansão etc) dos instrumentos de medida. De forma análoga, as escalas de comprimento que permitiriam o acompanhamento individual dos elementos microscópicos que constituem o sistema, são muito menores do que aquelas obtidas pelos equipamentos experimentais e isto resulta em uma imagem "borrada" da real configuração do sistema. Ainda assim, diante destas dificuldades, é espantoso o sucesso alcançado pela termodinâmica. Desenvolvida, principalmente, com o intuito de possibilitar os avanços tecnológicos que alimentaram a Revolução Industrial, ela nos permite, a partir de um olhar oblíquo ao sistema de muitas partículas, a descrição e previsão dos fenômenos referentes à transferência de calor e produção de trabalho baseados, somente, nas váriáveis macroscópicas de equilíbrio do sistema (massa, pressão, volume, manetização, potencial químico, etc.). Resumindo, as leis fundamentais da termodinâmica regem a dinâmica dos processos físicos associados à resposta do sistema ao fluxo de calor presente, independentemente dos detalhes microscópicos.

3.2 Equilíbrio termodinâmico

Um sistema estará em equilíbrio termodinâmico quando forem alcançados o:

- **Equilíbrio térmico:** quando todas as partes do sistema possuem a mesma temperatura;
- **Equilíbrio mecânico**: quando cessarem todos os movimentos de expansão e contração naturais do sistema;
- **Equilíbrio químico:** quando todas as possíveis reações químicas tiverem ocorrido.

O equilíbrio termodinâmico do sistema somente será alcançado quando suas propriedades deixarem de variar. A maneira pela qual o sistema evolui de um estado inicial até o seu estado final é denominado **processo**. Isto pode acontecer de diversas maneiras:

- Processos que ocorrem sem perda de energia são ditos **adiabáticos**;
- Processos que ocorrem a volume constante são **isovolumétricos** ou **isocóricos**;
- Processos que ocorrem a pressão constante são **isobáricos**;
- Processos que conduzem o sistema de forma que o estado posterior difere infinitesimalmente do estado de equilíbrio anterior são ditos **quasiestáticos** e são **reversíveis**[1]**;**

[1] Apesar de muito comum em praticamente todos os livros didáticos, nem todo processo quasiestático é reversível [9]

- Processos que não podem ser caracterizados como quasiestáticos e, portanto, não são reversíveis, são ditos **irreversíveis.** Por exemplo, um sistema cuja temperatura difere significativamente da temperatura do ambiente que o cerca, estará sujeito a um processo irreversivel.

3.3 A descrição do comportamento coletivo

Segundo Callen [7]

> "... a termodinâmica é o estudo das restrições sobre as possíveis propriedades da matéria que seguem das propriedades de simetrias das leis fundamentais da física."

A termodinâmica ocupa-se da resposta macroscópica do conjunto absurdamente grande de coordenadas atômicas que, devido à falta de resolução das observações macroscópicas, não aparecem explicitamente na descrição macroscópica do sistema.

No entanto, os graus de liberdade microscópicos (os modos de movimento atômicos "escondidos") possuem a habilidade de atuar como um repositório de energia. A energia transferida, por exemplo, via modos mecânicos (ou seja, aqueles associados com as coordenadas mecânicas macroscópicas), é chamado de *trabalho mecânico* e pode ser escrito como PdV. Existem outras formas de transferência de energia e veremos que o trabalho realizado pelo ou sobre o sistema, pode ser escrito de forma análoga ao trabalho mecânico. De fato, veremos que, por exemplo, em sistemas com carga elétrica, o trabalho elétrico pode ser escrito como $-Ed\mathcal{P}$, onde E é o campo elétrico e $\mathcal{P}$ é o momento de dipolo. Mas as variáveis "*escondidas*" microscópicas também podem transferir energia via os modos de movimento atômico. **O fluxo de energia via os graus de liberdade microscópicos é o que conhecemos como *calor.***

3.4 A composição de sistemas termodinâmicos

Consideraremos, inicialmente, um *sistema simples* como *um sistema macroscopicamente homogêneo, isotrópico e sem cargas, que é suficientemente grande para que os efeitos de borda possam ser negligenciados e que não está sob a influência de campos elétricos, magnéticos e gravitacionais.*

Definição. Parâmetros para os quais o seu valor em um sistema composto é igual à soma dos valores em cada subsistema são chamados de *parâmetros extensivos.* Os parâmetros que não obedecem a regra acima são ditos *intensivos*.

3.5 Conservação da energia

Mesmo na mecânica, somente a diferença de energia, ao invés de seu valor absoluto, possui um significado físico. Por esta razão, é conveniente adotar um estado particular de um sistema como o estado de referência, tomando-o **arbitrariamente** como o estado de energia zero. Assim, a energia de um sistema em qualquer outro estado, em relação à energia do estado de referência, é chamado de energia interna do sistema e será denotada por U. ***Assim como o volume e o número de moles de um sistema, a energia interna é um parâmetro extensivo.***

3.6 Equilíbrio termodinâmico

Existe, em todo sistema, uma tendência a evoluir para estados nos quais as propriedades são determinadas por fatores intrínsecos e não por influências externas previamente aplicadas. Estes estados finais são, por definição, independentes do tempo. Eles são chamados de estados de equilíbrio.

O objetivo da termmodinâmica é descrever estes estados simples, os estados de equilíbrio, para os quais os sistemas eventualmente evoluem. Portanto, para converter a afirmação acima em um postulado preciso, necessitamos reconhecer que um critério de simplicidade apropriado é a possibilidade de descrição em termos do menor número possível de variáveis. Desta forma, parece plausível adotar o seguinte postulado, sugerido pela observação experimental e a ser verificado, ao fim, pelo sucesso da teoria:

Postulado I *Existem estados particulares (chamados de* ***estados de equilíbrio****) de sistemas simples que, macroscopicamente, são completamente caracterizados pela energia interna U, o volume V e o número de moles N_1, N_2,..., N_r de seus componentes químicos.*

Obviamente, se estendermos à termodinâmica de sistemas mais gerais (por exemplo, envolvendo momentos de dipolo elétrico), o número de parâmetros que caracterizam macroscopicamente o sistema deve aumentar. O importante é que, como veremos, estas novas variáveis exercerão um papel completamente análogo ao do volume V em um sistema simples.

Determinar o equilíbrio termodinâmico pode ser extremamente difícil. Na verdade, o número de sistemas que estão em verdadeiro equilíbrio é muito pequeno. Por exemplo, no equilíbrio absoluto todo material radioativo precisa ter decaído completamente e as reações nucleares devem ter transmutado todos os núcleos em seus isótopos mas estáveis. Processos como este, que ocorrem em escalas de tempo cósmicas pode ser definitivamente ignorados. Um sistema que tenha completado os processos relevantes de evolução espontânea e que possa ser descrito por um número suficientemente pequeno de parâmetros, é considerado em um estado denominado ***equilíbrio metaestável***. Este equilíbrio limitado (que leva em conta somente a evolução dos parâmetros nas escalas de tempo apropriadas) é suficiente para a aplicação da termodinâmica.

Como diz Callen:

> **"Na prática, o critério para o equilíbrio é circular.** ***Operacionalmente, um sistema está em equilíbrio se e somente se suas propriedades são consistentemente descritas pela teoria da termodinâmica.*****"**

3.7 Paredes e vínculos

Uma descrição da termodinâmica de sistemas requer a especificação das “paredes” que o separam do restante do ambiente e que delimitam suas condições de contorno. É por meio da manipulação das paredes que os parêmetros extensivos do sistema são alterados e os processos são iniciados. Em geral, a manipulação das paredes implica na redistribuição de alguma quantidade entre os vários sistemas ou entre diferentes porções de um único sistema. Portanto, podemos classificar as paredes termodinâmicas a partir da propriedade de permitir ou não tais redistribuições. Seguem as principais classificações:

Paredes impermeáveis *São aquelas que não permitem a passagem de qualquer molécula ou átomo que constitui o sistema. Portanto, não há troca de massa entre dois sistemas divididos por uma parede impermeável.*

Paredes permeáveis *São aquelas que violam as condições acima.*

Paredes rígidas São aquelas que não perrmitem a redistribuição dos volumes entre as diferentes partes do sistema. Neste caso o volume de cada subsistema permanece constante.

Podemos ver que as paredes podem ser classificadas, de forma geral em dois tipos. Se uma parede limita um parâmetro extensivo a um valor definido e constante, a parede é dita *restritiva* com respeito àquele parâmetro, enquanto que, se ela permite que o parâmetro varie livremente é dita *não-restritiva* com respeito ao parâmetro. Uma classe importante de paredes são aquelas restritivas com respeito à energia. São tão importantes que dedicaremos uma seção exclusivamente para elas.

3.8 Mensurabilidade da energia

Diferentemente do que acontece na mecânica, onde a energia é uma grandeza muito bem definida, na termodinâmica, a energia tem que estar vinculada a uma manifestação macroscópica associada ao efeito líquido das energias individuais de um gigantesco número de graus de liberdade microscópicos do sistema. Isto presume que devemos aceitar a existência de uma função energia, conservativa e macroscópica. Para que esta função energia possua sentido prático dentro da teoria, devemos nos convencer que ela deve ser macroscopicamente ***controlável*** e ***mensurável***.

A primeira lei da termodinâmica nos garante que o calor também é uma forma de energia. Analisando a expressão matemática da primeira lei

$$\Delta U = Q - W \tag{3.8.1}$$

podemos dizer que é possível variar a energia interna de um sistema termodinâmico apenas através do fluxo de calor (um pedaço de gelo sobre uma mesa num dia quente) ou apenas através de trabalho mecânico (por exemplo, comprimindo um gás em um pistão). Portanto, se $W = 0$ e $Q = 0$, não há variação da energia interna do sistema. Logo, se não contrairmos ou expandirmos o sistema e impedirmos o fluxo de calor com o ambiente somos capazes de garantir que a sua energia interna permanece inalterada. Por esta razão a construção de paredes restritivas à energia são fundamentais para a manutenção da energia interna de um sistema isolado, ou seja, a energia interna passa a ser *controlável*. Como já vimos, as paredes restritivas ao fluxo de energia (calor) são denominadas ***paredes adiabáticas***. Por outro lado, ao isolarmos o sistema adiabaticamente e definirmos um estado de referência para energia interna, podemos utilizar o trabalho mecânico como uma medida da energia interna do sistema em qualquer outro estado. Para isto basta encontrarmos o valor numérico de W necessário para levar o sistema do estado de referência ao estado arbitrário desejado. Como este processo tem que ser realizado adiabaticamente o valor de W_{ad} tem que ser invariante pela escolha do processo (este, é justamente o enunciado da primeira lei!). Mais uma vez, a contrução de paredes adiabáticas permite que, por meio de W_{ad}, a energia interna seja *mensurável* e dada por

$$\Delta U = -W_{ad}.$$

Segundo Callen

> "...somos capazes de medir a diferença de energia entre dois estados *contanto que um estado possa ser alcançado a partir do outro por algum processo mecânico enquanto o sistema é encerrado dentro de paredes adiabáticas impermeáveis."*

Portanto, ainda segundo o Callen, o problema da controlabilidade e da mensurabilidade da energia na termodinâmica pode ser sucintamente enunciada como segue:

> "Existem paredes, chamadas adiabáticas, com a propriedade de que o trabalho realizado entre dois estados arbitrários de um sistema encerrado adiabaticamente, é inteiramente determinado pelos estados, independentemente de todas as condições externas. Neste caso, o trabalho realizado é a diferença da energia interna dos dois estados."

Pergunta A sentença acima pode ser vista como um enunciado da 1ª Lei da Termodinâmica?

3.9 Definição quantitativa de calor

Como mencionamos anteriormente, o calor é originado na transferência de energia via modos microscópicos e, consequentemente, não pode ser medido por meio do conhecimento completo da dinâmica de cada átomo. Logo, deve ser obtido através da resposta macroscópica do sistema e a primeira lei da termodinâmica nos fornece os meios para isso. A receita experimental é a seguinte:

Imagine que um sistema termodinâmico evolui de um estado inicial A para um final B e deseja-se descobrir a quantidade de calor que entra ou sai do sistema. Conhecendo-se o processo, é possível calcular o trabalho realizado entre A e B. Para determinar Q, precisamos calcular o trabalho realizado isolando-se o sistema adiabaticamente. Pelo enunciado da primeira lei, basta encontrar um processo, pois o trabalho adiabático independe do caminho. Feito isso, sabemos que $W_{ad} = -\Delta U$ e, portanto, o calor transferido deve ser a diferença entre W e W_{ad}, ou seja,

$$Q = W + \Delta U = W - W_{ad}. \tag{3.9.1}$$

3.10 O problema central da Termodinâmica

Segundo as palavras do Callen

> ***"O problema geral da termodinâmica é a determinação do estado de equilíbrio que eventualmente resulta após a remoção de vínculos internos em um sistema composto fechado."***

A evolução do sistema ocorre por meio de um rearranjo das váriaveis macro e microscópicas. Por exemplo, se dois gases distintos estiverem encerrados entre paredes adiabáticas e impermeáveis e separados por um pistão fixo também adiabático e impermeável, se liberarmos o pistão o sistema evoluirá naturalmente para o equilíbrio termodinâmico, variando os parâmetros macroscópicos como volume e pressão. Se o pistão, além disso, permitisse a troca de energia ou partícula entre os dois gases, teríamos também um evolução "escondida" (microscópica) e espontânea dos graus de liberdade microscópicos para a nova configuração de equilíbrio.

Portanto, o nosso objetivo é construir uma teoria por meio de postulados que nos permita solucionar o problema central da termodinâmica, ou seja, sermos capazes de prever o estado final de equilíbrio do sistema dada a remoção dos vínculos internos. Para isto, devemos ter em mente o significado do termo *"fechado".*

> ***Um sistema é dito fechado se ele for circundado por paredes restritivas com respeito à energia total, ao volume total e ao número total de moles de cada componente do sistema composto.***

Os sistema individuais não precisam ser fechados. Isto siginifica que, mesmo que a parede que divide dois gases não seja restritiva a qualquer um dos parâmetros mencionados anteriormente, se o sistema composto for encerrado por paredes com tais restrições o sistema composto será fechado. As restrições que previnem o fluxo de energia, volume ou matéria são conhecidos como ***vínculos internos***. Se um sistema composto fechado está em equilíbrio com respeito aos vínculos internos e, se alguns destes vínculos for removido, alguns processos que, anteriormente eram proibidos, podem ocorrer. Estes processos levam o sistema a um novo estado de equilíbrio. ***A predição do estado final de equilíbrio é o problema central da termodinâmica.***

Capítulo 4

PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Este é um capítulo muito importante para este trabalho e cabe ressaltar que ele é destinado aos professores que decidirem abordarem a termodinâmica sob o ponto de vista desta dissertação. A revisão dos conceitos de análise combinatória, pode ser vista como uma preparação para as estratégias de contagem de grandes números, ou seja, poderá ser utilizada para interpretar a emergência de propriedades termodinâmicas em sistemas com um número gigantesco de átomos ou moléculas. Neste trabalho, condensaremos os principais resultados, mas o leitor interessado pode consultar uma vasta literatura sobre o tema [10, 4, 5, 8, 16].

4.1 Princípio Fundamental da Contagem (pares ordenados)

Algumas situações do cotidiano podem nos levar a indagações que nos conduzem a uma certa reflexão. Imaginemos duas situações: A primeira envolve uma menina que pode fazer a combinação entre 7 saias e 5 blusas. Ela se pergunta: ***"De quantas maneiras eu posso combinar uma blusa e uma saia?"*** A segunda está associada a uma sala com 20 crianças. A professora quer fazer uma série de trabalhos em dupla e se pergunta: ***"Qual o número total de duplas diferentes eu posso formar em uma turma com 20 alunos?"*** Para responder a estas perguntas, precisamos aprender a contar o número de possibilidades corretamente e, em geral, é muito custoso especificar cada uma das combinações. Perguntas como estas, podem ser respondidas por meio dos resultados da análise combinatória, particularmente, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Em linhas gerais, o PFC, estabelece a maneira com a qual fazemos a contagem do número de possibilidades de um determinado evento levando em conta todas opções existentes. Antes de enunciá-lo, vamos estudar alguns casos mais simples.

Lema 4.1. *Consideremos dois conjuntos $B = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ e $C = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m)$. O número de pares ordenados (b_i, c_j) com $b_i \in B$ e $c_j \in C$ é dado por $m \cdot n$, ou seja, o produto do número de elementos dos dois conjuntos.*

Demonstração. Fixe um termo do conjunto B (por exemplo b_1) e deixemos variar o segundo termo de conjunto C, no caso c_j, com $j = 1$ até m. Repitamos o processo para cada elemento b_i de B com $i = 2$ até n. Desta forma temos: $\square$

$$
\begin{array}{cccccl}
(b_1, c_1), & (b_1, c_2), & (b_1, c_3) & \cdots & (b_1, c_m) & \rightarrow m \text{ pares} \\
(b_{2,}, c_1), & (b_2, c_2), & (c_2, c_3) & \cdots & (c_2, c_m) & \rightarrow m \text{ pares} \\
(b_3, c_1), & (b_{3,}c_2), & (b_3, c_3) & \cdots & (b_3, c_m) & \rightarrow m \text{ pares} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \rightarrow m \text{ pares} \\
(b_m, c_1), & (b_m, c_2), & (b_m, c_3) & \cdots & (b_m, c_m) & \rightarrow m \text{ pares.}
\end{array}
$$

Assim, temos que cada linha contém m pares ordenados, ou seja o número de elementos do conjunto C ($\#C = m$). Por outro lado, o número de linhas é definido pelo número de elementos do conjunto B ($\#B = n$), ou seja, conseguimos construir n linhas com m pares ordenados em cada. Desta forma o número total de pares ordenados será :

$$\underbrace{m + m + m + \ldots + m}_{\text{n vezes}} = n \cdot m$$

Somando m por n vezes.

Exemplo. Este resultado pode ser utilizado em um série de problemas, na verdade, em todos os problemas que envolvem a contagem de números de pares formados a partir de um elemento de cada um de dois conjuntos arbitrários. A pergunta ***"De quantas maneiras eu posso combinar uma blusa e uma saia?"*** é um problema desta natureza. Por se tratar de uma situação onde temos apenas dois conjuntos (conjunto das blusas e das saias), aplicaremos o Lema 1 para resolvê-lo. Chamaremos o conjunto das blusas de B, ou seja,

$$B = \{b_1, b_{2,}b_3, b_4, b_5\},$$

logo contém cinco elementos. Chamaremos de C, o conjunto das saias. Assim

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\},$$

possui sete elementos. Desta maneira, pelo Lema 1, podemos obter o número total de possíveis combinações para os pares de peças de roupas, multiplicando o número de elementos de cada conjunto ($m = \#B = 5$ e $m = \#C = 7$), ou seja, teremos $m \cdot n = 5 \cdot 7 = 35$ possíveis combinações para as blusas e saias.

Por outro lado, se analisarmos a pergunta, ***"Qual o número total de duplas diferentes eu posso formar em uma turma com 20 alunos?"*** verificamos que não é possível obter a solução para este caso usando o Lema 1 pois *os pares ordenados serão obtidos de apenas um conjunto.* E importante lembrar que neste caso, um aluno não pode fazer par com ele mesmo, ou seja o par ordenado não poderá ter dois elementos repetidos do conjunto. Portanto, este problema terá que ser resolvido de outra maneira , através do Lema 2, que segue.

Lema 4.2. *Consideremos o conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_m\}$. O número de pares ordenados (c_i, c_j), com $c_i,\ c_j \in C$ e $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$ é dado por $m \cdot (m-1)$.*

Demonstração. Fixa-se um termo do conjunto C (por exemplo c_1) e deixemos variar o segundo termo (c_1, c_j) , com $j \neq 1$. Isso porque, no caso da primeira linha, não podemos utilizar c_1 como o segundo termo da dupla, pois neste caso haveria repetição,(c_1, c_1). Se escolhermos c_2 na segunda linha este também não poderá formar um par ordenado com c_2 pela mesma restrição anterior. Aplicando o mesmo raciocínio para as outras linhas teremos os pares (c_i, c_j) com $i \neq j$. Escrevendo as linhas explicitamente $\square$

$$\begin{array}{cccccc}
\cancel{(c_1, c_1)}, & (c_1, c_2), & (c_1, c_3) & \cdots & (c_1, c_m) & \rightarrow m-1\text{pares} \\
(c_2, c_1), & \cancel{(c_2, c_2)}, & (c_2, c_3) & \cdots & (c_2, c_m) & \rightarrow m-1\text{pares} \\
(c_3, c_1) & (c_3, c_2), & \cancel{(c_3, c_3)} & \ldots & (c_3, c_m) & \rightarrow m-1 \text{ pares} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \rightarrow m-1 \text{ pares} \\
(c_m, c_1) & (c_m, c_2) & (c_m, c_3) & \ldots & \cancel{(c_m, c_m)} & \rightarrow m-1 \text{ pares}
\end{array}$$

obtemos $m-1$ duplas formadas em cada linha, ao invés de m como no Lema 1. Como cada linha contém $m-1$ pares ordenado e possuímos $m = \#C$ linhas (o número de elementos de C), o número de pares ordenados será:

$$\underbrace{(m-1)+(m-1)+(m-1)+\ldots+(m-1)}_{\text{m vezes}} = m \cdot (m-1)$$

Exemplo 4.1. Note, que fazendo o uso do Lema 2, conseguimos resolver o problema da professora (*"Qual o número total de duplas diferentes eu posso formar em uma turma com 20 alunos?"*), pois se adequa às suas hipóteses. Ao serem formadas as duplas não poderá ocorrer o caso de um aluno fazer par com ele mesmo. Definindo o conjunto de alunos como sendo

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}\},$$

temos que $m = \#A = 20$e, aplicando o Lema 2, encontramos que o número de possíveis duplas será

$$m \cdot (m-1) = 20 \cdot (20-1) = 50 \cdot 49 = 380.$$

Neste ponto, é importante destacar que, caso a professora possuísse um número maior de alunos, a contagem feita segundo método da demonstração do Lema 2 seria muito mais trabalhosa e, em alguns casos, inviável. Além disso, ela poderia formar trios, quartetos ou qualquer outra r-upla ($r \leq m$). Fica evidente, portanto, que necessitamos generalizar o método de contagem para lidar com estes grandes números, e, por esta razão introduziremos o **Princípio da Indução Finita**, a maneira mais segura de se fazer isso.

4.2 Princípio da Indução Finita.

Quando lidamos com propriedades gerais, não podemos utilizar o caso específico como recurso para sua verificação, somente para sua negação. Em outras palavras, um exemplo somente pode ser usado para demonstrar que uma afirmação **não é válida**, ou seja, como um contra-exemplo. Para atender o objetivo de nosso trabalho, no entanto, precisamos generalizar os resultados dos Lemas 1 e 2 para os casos em que o número de conjuntos ou o número de elementos da sequência sejam arbitrários, ou seja, qualquer número natural. Por isso, para garantir que uma determinada propriedade valha para todo e qualquer número natural, necessitamos utilizar o que se conhece, na matemática, como *Princípio da Indução Finita.* Antes de enunciá-lo formalmente, vamos analisar o exemplo que segue.

Exemplo 4.2. Como mostrar um resultado geral.

Afirmação 4.1. A soma

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, que expressa a propriedade "*a soma dos n primeiros números ímpares positivos é igual a* n^2". Podemos verificar que ela é verdadeira para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$. De fato, para

$(n=1) \rightarrow 1=1^2$ **(Verdadeiro)**

$(n=2) \rightarrow 1+3=4=2^2$ **(Verdadeiro)**

$(n=3) \rightarrow 1+3+5=9=3^2$ **(Verdadeiro)**

$(n=10) \rightarrow 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100=10^2$ **(Verdadeiro)**

Muito embora, todos os casos acima indiquem a veracidade da *Afirmação* 4.1 não podemos garantir que seja válida para qualquer número natural pois, mesmo se continuarmos a verificação até $n = 1.000.000$ poderia existir um número maior em que o resultado não é verificado. Sendo assim, para se provar que uma propriedade ou fórmula vale para qualquer número pertencente aos naturais precisamos seguir um protocolo, expresso no Princípio de Indução Finita .

Definição 4.1. (Princípio da Indução Finita)

Uma proposição $P\left(n\right)$, aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$quando:

1. $P\left(n_0\right)$ *é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para* $n = n_0$;

2. *Se* $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq n_0$ *e* $P(k)$ *é verdadeira, então* $P(k+1)$ *também é verdadeira.*

Podemos, portanto, dividir a demonstração por indução em três etapas:

1. **Base da indução:**

   Mostrar que a propriedade vale para n_0, ou seja, mostrar que $P\left(n_0\right)$ *é verdadeira.*

2. **Hipótese da indução:**

   Assumir que a propriedade vale para $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq n_0$, ou seja, mostrar que $P\left(k\right)$ *é verdadeira.*

3. **Verificação da indução:**

   Mostrar que a propriedade vale para $k+1 \in \mathbb{N}^*$, $k \geq n_0$, ou seja, mostrar que $P\left(k+1\right)$ *é verdadeira.*

Para aplicar o Princípio da Indução Finita vamos fazer a demonstração da *Afirmação* 4.1 discriminando as três etapas anteriores.

Base da Indução

Precisamos mostrar que a propriedade

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

é válida para algum $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Podemos escolher qualquer valor para n_0, mas é interessante que comecemos com os primeiros naturais para entender a estrutura da propriedade. É bastante comum que escolhamos mais de um valor para n_0. Desta forma, por exemplo, poderíamos fazer qualquer uma das escolhas abaixo:

$$n_0 = 1 \Rightarrow P(1) = (2.1 - 1) = 1 = 1^2;$$

$$n_0 = 2 \Rightarrow P(2) = 1 + 3 = 4 = 2^2;$$

$$n_0 = 3 \Rightarrow P(3) = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2;$$

$$n_0 = 4 \Rightarrow P(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Cumprida esta etapa, vamos assumir a **Hipótese da Indução**, ou seja, vamos afirmar que para um um $k \in \mathbb{N}^*$ qualquer, com $k \geq n_0$ vale a propriedade

$$P(k) = 1 + 3 + 8 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Basta, agora, fazer a **Verificação da Indução**. Sabemos que

$$\begin{aligned} P(k+1) =& 1 + 3 + 8 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1] \\ =& P(k) + [2(k+1) - 1]. \end{aligned}$$

Assim, a partir da **Hipótese da Indução**, sabemos que $P(k) = k^2$. Logo

$$\begin{aligned} P(k+1) =& k^2 + [2(k+1) - 1] \\ =& k^2 + 2k + 1 \\ =& (k+1)^2, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Desta forma temos que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Estamos preparados, neste ponto, para generalizar os Lemas 1 e 2.

4.3 Generalização do Princípio Fundamental da Contagem

Os exemplos ilustrados no início da Seção 4.1 podem ser generalizados. Por exemplo, imaginemos uma situação em que um homem possui 8 shorts, 6 camisetas e 5 pares de tênis. ***De quantas maneiras ele poderá vestir um short, uma camiseta e um par de tênis?*** Perceba que esta é uma generalização das situações descritas anteriormente, ou seja, precisamos discutir os casos que envolvam n-uplas ordenadas.

4.3.1 Princípio Fundamental da Contagem - Parte A

Para os casos em que uma N-upla é formada a partir de elementos de N conjuntos, passa a ser necessário generalizarmos a estratégia de contagem. Esta generalização é o que conhecemos como Parte A do Princípio Fundamental da Contagem e que será enunciado, abaixo, como um teorema.

Teorema 4.1. ***Princípio Fundamental da Contagem - Parte A***

Consideremos N conjuntos

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \ , a_{1n_1}\}, \ \#A_1 = n_1 \\
A_2 &= \{a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots \ , a_{2n_2}\}, \ \#A_2 = n_2 \\
A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, c_{33}, \ldots \ , a_{3n_3}\}, \ \#A_3 = n_3 \\
&\vdots \\
A_N &= \{a_{1N}, a_{2N}, a_{3N}, \ldots, a_{Nn_N}\}, \ \#A_N = n_N
\end{aligned}$$

então, o número de N-uplas ordenadas, (sequências de N elementos) do tipo

$$\left(a_{1m_1}, a_{2m_2}, a_{3m_3}, \ldots, a_{N_{m_N}}\right)$$

onde $a_{m_i} \in A_i$, com $i = 1, \ldots, N$, é dado por

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_N.$$

Demonstração. Vamos utilizar o Princípio da Indução Finita. Se $N = 2$ (Base da Indução) é imediato, pois caímos no Lema 1.

$$N_T^K = n_1.n_2, \ldots, n_k$$

Como Hipótese da Indução vamos assumir que, para $n = k \in \mathbb{N}^*$arbitrário, o número total (N_T^k) de sequências do tipo

$$(a_{1m_1}, a_{2m_2}, , a_{3m_3}, \ldots, a_{km_k})$$

e

$$N_T^k = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Com a hipótese acima, precisamos mostrar que o resultado é válido para o inteiro $(k + 1)$ (Verificação da Indução), ou seja, precisamos mostrar que para $n = k + 1$ o número total (N_T^{k+1}) de sequências do tipo $(a_{1m_1}, a_{2m_2}, \ldots, a_{3m_3}, a_{km_k}, a_{(k+1)m_{(k+1)}})$, é

$$N_T^{k+1} = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \cdot n_{k+1}.$$

Para isso, vamos assumir a existênca de $k + 1$ conjuntos

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\ , a_{1n_1}\}\ , \ \#A_1 = n_1 \\
A_2 &= \{a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots\ , a_{2n_2}\}\ , \ \#A_2 = n_2 \\
A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, c_{33}, \ldots\ , a_{3n_3}\}\ , \ \#A_3 = n_3 \\
&\vdots \\
A_k &= \{a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \ldots, a_{kn_k}\}\ , \ \#A_k = n_k \\
A_{k+1} &= \left\{a_{1(k+1)}, a_{2(k+1)}, a_{3(k+1)}, \ldots, a_{(k+1)n_{(k+1)}}\right\}\ , \ \#A_{(k+1)} = n_{(k+1)}
\end{aligned}
$$

A nova sequência formada a partir dos elementos dos $k+1$ conjuntos é do tipo

$$\left(a_{1m_1}, a_{2m_2}, , a_{3m_3}, \ldots, a_{km_k}\right).$$

Por hipótese, o número de combinações para a porção da sequência destacada abaixo (com k elementos) possui N_T^k combinações possíveis

$$N_T^{(k+1)} = \left(\underbrace{a_{1m_1}, a_{2m_2}, , a_{3m_3}, \ldots, a_{km_k}}, a_{(k+1)m_{(k+1)}}\right).$$

Assim, para cada elemento de A_{k+1} teremos N_T^k combinações. Logo como A_{k+1} possui n_{k+1} elementos, temos que o número total de combinações para uma sequência com $k+1$ elementos será dada por

$$N_T^{(k+1)} = N_T^{(k)}.n_{k+1} = \left(n_1.n_2.n_3, \ldots, n_k\right).n_{k+1},$$

como queríamos demonstrar. Segue, então, que o teorema é válido $\forall k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$. $\square$

Exemplo 4.3. Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa ?

Indiquemos K o resultado cara e C o resultado coroa

Queremos o número de triplas ordenadas .$\{a, b, c\}$onde a $\in\{K, C\}$b $\in$ $\{K, C\}$, logo, o resultaado procurado é

$2.2.2 = 8$

4.3.2 Princípio Fundamental da Contagem Parte

Assim como na parte A do Princípio Fundamental da contagem tínhamos a generalização do lema 1, aqui na parte B também temos a generalização do Lema 2. Este princípio é utilizado para resolver situações onde temos r-uplas ordenadas formada por n (sequência de elementos distintos) .

Teorema 4.2. ***Princípio Fundamental da Contagem - Parte B***

Consideremos um conjunto A com $(N \geq 2)$*elementos. Então o número de* N*-uplas ordenadas, ou seja, uma sequência com* N *elementos formados com elementos distintos dois a dois de A do tipo :*

$$\underbrace{(a_{j,}, a_k, \ldots, a_l \ldots, a_p)}_{N \text{ elementos}},$$

com $a_i \in A$ *para todo* $i \in \{1, 2 \ldots, m\}$*e com* $a_i \neq a_s$ *se* $i \neq s$ *é*

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots . [m-(N-1)]}_{N \text{ fatores}}.$$

Demonstração. O caso mais simples, no qual $N = 2$, é imediato pois cai no Lema 2 cujo resultado é dado por $N_T^2 = m \cdot (m-1) = m \cdot (m-(2-1))$. Porém para situações que envolvem N>2 usaremos o princípio da Indução Finita. Como Hipótese de Indução vamos tomar $N = k$, logo a sequência será do tipo:

$$\underbrace{(a_{i,}, a_k, \ldots, a_l \ldots, a_p)}_{k \text{ termos}}.$$

Neste caso, vamos assumir que o número total de sequências do tipo acima obtidas do conjunto A com m elementos é

$$N_T^k = m.(m-1).(m-2).\ldots.[m-(k-1)].$$

Tomando $N = k+1$ a nova sequência de $k+1$ elementos é do tipo

$$\underbrace{(a_{i,}, a_k, \ldots, a_l \ldots, a_p, a_w)}_{k+1 \text{ termos}}.$$

Por hipótese, sabemos que a porção da sequência destacada abaixo

$$(\underbrace{a_{i,}, a_k, \ldots, a_l \ldots, a_p}_{k \text{ termos}} a_w).$$

possui N_T^k combinações possíveis. Com isso, como o conjunto A possui m elementos e não pode haver repetição, restam apenas $m-k$ para ocupar a posição a_w. Desta forma, o número total de combinações para os $k+1$ elementos será

$$\begin{aligned} N_T^{k+1} &= N_T^k \cdot (m-k) \\ &= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(k-1)] \cdot (m-k) \\ &= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(k-1)] \cdot [m-((k+1)-1)], \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 4.4. Quatro atletas participam de uma corrida.Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3 º lugares***?***

Cada resultado consta de uma tripla ordenada (a, b, c), onde a representa o atleta que chegou em 1º lugar , b que chegou em 2º , e c que chegou em 3º, definiremos que a, b e c pertencem ao grupo dos atletas e $a \neq b \neq c$.

Logo o número de resultados possíveis é

4. 3. 2 = 24

4.4 Modos de agrupamentos

O princípio fundamental da contagem é um recurso matemático que serve para resolver problemas de análise combinatória, com este ramo da matemática é possível resolver alguns problemas de contagem no entanto alguns casos podem ser muito trabalhosos de serem resolvidos por meio deste princípio. Sendo assim definiremos as maneiras de formar agrupamentos usando de símbolos matemáticos simplificados que irá possibilitar a contagem dos agrupamentos de conjuntos , e desta forma poderemos resolvermos os diferentes casos particulares de contagem de elementos.

4.5 Arranjo com repetição

Definição 4.2. .Seja A um conjunto com m elementos, ou seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$. Chamamos ***arranjo com repetição dos*** m ***elementos tomados*** r ***a*** r toda r-upla ordenada, (sequência de tamanho r) formada com elementos de A , sendo que esses não são obrigatoriamente distintos.

4.5.1 Expressão para o número de arranjos com repetição

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $\{AR\}_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de m elementos, tomados r a r. Cada arranjo com repetição é uma sequência de r elementos, sendo estes pertencentes ao conjunto A. Sendo assim um arranjo com repetição pode ser escrito como um r-upla de elementos de A e, por isso, podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (parte A). Logo o número de arranjos $\{AR\}_{m,r}$ será

$$\{AR\}_{m,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot m, \ldots, m}_{\text{r vezes}} = m^r$$

Note que se $r = 1$, $\{AR\}_{m,1} = m$ e, portanto, a fórmula acima será válida para todo $r \in \mathbb{N}^*$.

4.6 Arranjos

Definição 4.3. Seja A um conjunto com m elementos, ou seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$. Chamamos de arranjos dos m elementos, tomados r a r $(1 \leq r \leq m)$ a qualquer r-upla (sequência de r elementos), formada com elementos do conjunto A, sendo todos distintos.

4.6.1 Fórmula do número de Arranjos

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$, chamamos de $A_{m,r}$ o número de arranjos dos m elementos tomados r a r. Como cada r-upla não pode ter elementos repetidos, precisamos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (Parte B). Neste caso, o número de arranjos $A_{m,r}$ será :

$$A_{m,r} = .m.\,(m-1)\,.\,(m-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,[m-(r-1)]\,.$$

É importante lembrar que, necessariamente, $1 \leq r \leq m.$

4.7 Permutações

Definição 4.4. Seja A um conjunto com m elementos, ou seja, $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$. Chamamos de permutação dos m elementos (P_m) a qualquer arranjo em que $r = m.$

Então, para cada arranjo formado a partir dos m elementos obtemos uma permutação diferente dos elementos de A. a permutação de m elementos pode ser definida como sendo todo arranjos formada por esses m elementos, cujo o número desse conjunto será igual a sequência de elementos. Desta forma , para cada arranjo formado a partir dos m elementos obtemos uma sequência de permutações diferentes.

4.7.1 Expressão para o número de permutações

Seja C o conjunto $C = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$. O número de permutações (P_m) dos m elementos de M será dado pelo número de arranjos ($A_{m,m}$) dos m elementos de M tomados m a m, ou seja

$$P_m = A_{m,m},$$

ou seja,

$$P_m = \underbrace{m \cdot \{m-1\} \cdot \{m-2\} \cdots [m - \{m-1\}]}_{\text{m termos}}$$

$$P_m = m \cdot \{m-1\} \cdot \{m-2\} \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Para o caso particular onde temos $m = 1$ a resposta é imediata $P_1 = 1$.

4.7.2 Fatorial

Seja m um conjunto inteiro não nagativo $(m \in \mathbb{N})$definimos fatorial de m (e indicamos por $m!$) através da relação :

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } m \geq 2;$$
$$1! = 1;$$
$$0! = 1.$$

Com a definição de fatorial podemos escrever as expressões para o número de arranjos e do número de permutações como

$$
\begin{aligned}
A_{m,r} &= m.(m-1)\ldots.(m-r+1)\\
&= m.(m-1)\ldots.(m-r+1)\cdot\frac{(m-r)}{(m-r)}.\frac{(m-r).\ldots.3.2.1}{(m-r)..\ldots.3.2.1}\\
&= \frac{m!}{(m-r)!}
\end{aligned}
$$

$$P_m = m!.$$

4.8 Combinação

Definição 4.5. Seja A um conjunto com m elementos , ou seja A =$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$. Chamamos de combinação dos m elementos tomados r a r aos subconjuntos de A constituídos de r elementos.

É importante percebemos a diferença entre combinação (conjunto) e uma sequência. A combinação não depende da ordem dos elementos, já na sequência essa ordem é importante.

4.9 Cálculo do número de combinações

Seja $M = \{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $C_{m,r}$ ou $\binom{m}{r}$ o número de combinações dos m elementos tomados r a r. Tomemos uma combinação $E_1 = \underbrace{\{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_r\}}_{\text{r termos}}$. Se permutarmos os elementos de E_1, obteremos $r!$ arranjos. Tomemos outra combinação do conjunto M, digamos $E_2 = \underbrace{\{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{r+1}\}}_{\text{r termos}}$, se permutarmos os elementos de E_2, obteremos outros $r!$ números de arranjos. Definiremos X como sendo o número total de combinações, isto é, $X = C_{m,r}$ e supomos formadas todas as combinações dos m elementos tomados r a r. São elas :

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_X.$$

Assim, cada combinação E_i $(i = 1, 2, \cdots, X)$,

$$E_i : \begin{cases} E_i^1 \\ E_i^2 \\ E_i^3 & (r! \text{ Arranjos de } E_i) \\ \vdots \\ E_i^{r!} \end{cases}$$

dá origem a $r!$ arranjos. Chamemos de F_i o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de E_i, ou seja, $F_i = \left\{E_i^1, E_i^2, \cdots, E_i^{r!}\right\}$. Temos então a seguinte correspondência:

$$\begin{gathered} E_1 \longrightarrow F_1 \\ E_2 \longrightarrow F_2 \\ E_3 \longrightarrow F_3 \\ \vdots \\ E_x \longrightarrow F_x \end{gathered}$$

Verifiquemos que:

(*i*) $F_1 \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

(*ii*)$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$ onde F é o conjunto de todos os arranjos dos m elementos de M tomados r a r.

A afirmação $F_1 \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$ tem que ser verdadeira para que não tenhamos arranjos repetidos em cada um dos possíveis subconjuntos $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_X$. De fato, se $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ para $(i \neq j)$ então existiria uma arranjo que pertenceria a F_i e F_j simultaneamente, ou seja, um arranjo que seria gerado pela permutação das combinações E_i e E_j, o que levaria a conclusão de que $E_i = E_j$. No entanto, isso é um absurdo, pois, por hipótese, assumimos que $E_i \neq E_j$ para $i \neq j$. Portanto, devemos ter $F_i \cap F_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

Para provarmos que $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = F,$ devemos verificar que (a) $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_X \subset F$

e (b) $F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_X$.

a) Seja a um arranjo tal que

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_X,$$

com $a \in F_i$ (para algum $i \in \{1, 2, \ldots, X\}$) e evidentemente $a \in F$. Logo

$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \ldots \cup F_x \subset F.$$

b) Seja agora a um arranjo tal que $a \in F$, com $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \ldots \cup F_X$. Os elementos desse arranjo a, são, na verdade os elementos de alguma combinação $E_{k.}$. Sabemos que E_k gera o conjunto dos arranjos F_k, então $a \in F_k$, para $k \in \{1, 2, \cdots, X\}$. Desta forma,

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_i \cup \ldots F_x$$

o que significa que $F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_X$. De (a) e (b) resulta que:

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = F.$$

Sabendo que $\#F_i = r!$ e que $F_1 \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$\#F = \#\left(F_1 \cup F_2 \cup \ldots F_x\right) = \#F_1 + \#F_2 + \ldots + \#F_X = \#F$$
$$= \underbrace{r! + r! + \cdots + r!}_{\text{X termos}} = X \cdot r!$$

é o número total de arranjos dos m elementos do conjunto M tomados r a r. Por outro lado, determinamos, seção (?) que o número de arranjos dos m elementos de M tomados r a r é dado por

$$A_{m,r} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!} = X \cdot r!.$$

Assim, como $X = C_{m,r} = \binom{m}{r}$ temos que o número de combinações será dado por

$$C_{m,r} = \left(\begin{array}{c} m \\ \\ r \end{array} \right) = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}.$$

Devemos lembrar que a expressão acima é válida para todo $m, r \in \mathbb{N}^*$ com $r < m$. Alguns casos particulares interessantes são:

1. $m, r \in \mathbb{N}^*$ e $r = m$. scriptscriptstyle

   Neste caso, $C_{m,m} = \dfrac{m!}{m!\,(m-m)!}$ =1 e o próprio conjunto M é a única combinação.

2. $m \in \mathbb{N}^*$ e $r = 0$.

   Neste caso, $C_{m,0} = \dfrac{m!}{0!\,(m-0)!} = 1$ e o único subconjunto de M com 0 elementos é o conjunto vazio.

3. $m = 0$ e $r = 0$.

   Neste caso, $C_{0,0} = \dfrac{0!}{0!\,(0-0)!}$ =1 , $M = \emptyset$ e o seu único subconjunto é o próprio conjunto vazio.

4.10 Permutação com repetições

Para calcular o número de permutações que podem ser formadas quando alguns elementos da sequência são iguais precisamos dividir em casos especiais.

1. Consideremos n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1 e os demais são todos distintos entre si e distintos de a_1. Indiquemos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nessas condições. Cada permutação dos n elementos é uma n-upla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos distintos. Assim, das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n - n_1$ posições para colocar os elementos distintos de a_1, ou seja, vamos escrever

$$(a_1, a_1, \ldots, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-n_1}).$$

Quando analisamos as sequências podemos calcular de quantas maneiras maneiras podemos distribuir as n_1 elementos a_1 dentro da sequência acima.

$$
\begin{gathered}
(a_1, a_1, \ldots, a_2, a_1, a_3, a_4, \ldots, a_{n-n_1}) \\
(a_1, a_1, \ldots, a_2, a_3, a_1, a_4, \ldots, a_{n-n_1}) \\
(a_1, a_1, \ldots, a_2, a_3, a_4, , a_1 \ldots, a_{n-n_1}) \\
\vdots
\end{gathered}
$$

(a) Cada sequência pode ser vista como uma combinação que gera as permutações. Logo o número destas combinações será

$$C_{n,n-n_1} = \binom{n}{n-n_1} = \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}.$$

(b) Para cada configuração existem $(n-n_1)!$ permutações dos elementos distintos.

Assim, o número total de permutações será

$$P_n^{n_1} = \binom{n}{n-n_1} \cdot (n-n_1)!,$$

o que implica

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}.$$

2. Para o caso em que há dois elementos repetidos temos

a_1 repetido n_1 vezes;

a_2 repetido n_2 vezes;

e o raciocínio é análogo ao apresentado no caso 1. Se fixarmos as posições dos n_1

elementos a_1, restam $(n-n_1)$ posições com n_2 elementos repetidos a_2.

$$\left(\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{\binom{n}{n-n_1}}, \overbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-n_1}}^{P^{n_2}_{(n-n_1)}}\right).$$

Podemos utilizar o resultado anterior na porção destacada acima, ou seja, na porção vermelha, existem $P^{n_2}_{(n-n_1)}$ permutações distintas. Por outro lado, a porção destacada em azul, em completa analogia com o que fizemos no primeiro caso, possui $\binom{n}{n-n_1}$ maneiras de se combinar dentro da sequência. Assim, o número total de permutações distintas com n_1 elementos a_1 e n_2 elementos a_2 é

$$P^{n_1,n_2}_n = \binom{n}{n-n_1} P^{n_2}_{(n-n_1)} = \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!} = \frac{n!}{n_1!n_2!}.$$

Portanto

$$P^{n_1,n_2}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!}.$$

3. CASO GERAL:

Se o conjunto A possui n elementos dos quais

$$n_1 \text{ são iguais a } a_1;$$

$$\begin{gathered} n_1 \text{ são iguais a } a_1; \\ n_2 \text{ são iguais a } a_2; \\ \vdots \\ n_k \text{ são iguais a } a_k; \end{gathered}$$

então o número de permutações distintas é dado por

$$P^{n_1,n_2,\cdots,n_k}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

4.11 Aplicação dos princípios de contagem neste trabalho e na nossa vida

Em nosso trabalho, optamos por não fugir do rigor matemático que a análise combinatória pede ao ser estudada formalmente. Nossa intenção é oferecer, ao professor interessado no tema, um texto de revisão para que ele o ressignifique de acordo com a realidade de seus estudantes. Como veremos mais adiante, são poucos os resultados que serão objetivamente utilizados neste trabalho, no entanto, como pode perceber o leitor que se dedicou aos resultados anteriores, cada novo resultado é uma generalização de um resultado anterior e, por esta razão, estão todos encadeados e conectados pela essência dos princípios de fundamentais de contagem.

Em nosso cotidiano é comum lidarmos com situações nas quais não é possível precisar o resultado de um evento. Todos sabemos, por exemplo, o quanto é difícil acertar os resultados da loteria, de jogos de dados, das roletas, entre outros. Se pensarmos no sorteio dos números da loteria e imaginarmos o movimento das bolinhas dentro do globo, do ponto de vista físico, não é possível resolver as equações de movimento para todas elas, dada a complexidade que emerge das múltiplas colisões entre eles e, também com as paredes. Mesmo que, no início do sorteio, possamos ver suas posições iniciais, após um ou dois giros do globo, é praticamente impossível prever suas novas posíções. Sob este ponto de vista, não podemos determinar, de forma inequívoca, qual bolinha será a sorteda. Mesmo diante de toda essa falta de controle, podemos lançar uma olhar analítico sobre o problema e determinar a chance de se encontrar uma sequência específica, ou seja, o resultado final da loteria. É disso que nos ocuparemos no próximo capítulo.

Capítulo 5

NOÇÕES SOBRE PROBABILIDADE

A Estatística, contém a teoria da probabilidade e é um ramo extremamente importante da matemática moderna e possui aplicações em diversas áreas do conhecimento. Ela é fundamental para termos algum poder de previsão em sistemas que caracterizam-se por algum tipo de aleatoriedade. A probabilidade é usada para fazer previsões do clima, análise de riscos no mercado financeito, avaliar a eficácia de tratamentos médicos, prever a ocorrência de doenças e a entender o comportamento das partículas subatômicas na física quântica. Ela também é usada para analisar dados e identificar padrões em grandes conjuntos de informações. A Estatística é um ramo da matemática que surgiu para estruturar o tratamento e descrição de eventos aleatórios por meio de inferências extraídas de uma amostra representativa e que nos permitem a tomada de decisões em diversos campos onde a aleatoriedade se faz presente.

No caso particular da termodinâmica, mesmo que a dinâmica dos sistemas microscópicos seja randômica, a física estatística pode ser usada para mostrar que a teoria da probabilidade pode ser usada para prever o comportamento de grandezas macroscópicas termodinâmicas como a temperatura e a energia interna, por exemplo.

Por fim, o estudo da teoria da probabilidade pode ser importante para estudantes do ensino médio por várias razões. Em primeiro lugar, ela pode ajudar a entender melhor como os eventos aleatórios funcionam e como eles afetam nossa vida diária. Além disso, ela é uma base importante para entender a estatística, que é usada em muitas áreas, como negócios, economia e ciência. Por fim, a teoria da probabilidade pode ser uma ferramenta útil para a tomada de decisões em diversas áreas da vida.

Neste trabalho os conceitos de probabilidade serão usados para estabelecer os princípios do comportamento termodinâmico em sistemas macroscópicos, como dito anteriormente, por se tratar de um sistema muito grande este recurso matemático se faz necessário, pois é através dele que obteremos as estimativas desejadas de como ocorre a evolução de um sistema macroscópico. Este é um capítulo voltado para o professor e sua leitura não pode ser desconectada das experiências da sala de aula e da realidade dos estudantes aos quais este conteúdo pode ser direcionado, após uma adaptação de estratégias e linguagens. Recomenda-se ao professor, revisitar o Capítulo 2 para organizar suas aulas, sempre norteadas pela abordagem significativa.

5.1 Eventos aleatórios.

Comecemos com a definição formal de um evento aleatório.

Definição 5.1. Um evento é dito aleatório quando repetido por diversas vezes, sob as mesmas condições, não apresenta resultado final previsível.

Os eventos aleatórios não nos permitem saber, com certeza, os seus resultados finais, mas, de modo geral é possível estabelecer um conjunto de todos os possíveis resultados que possam vir a ocorrer.

5.2 Elementos fundamentais para construção de uma teoria sobre eventos aleatórios

O enfoque axiomático para a teoria da de probabilidade foi desenvolvido principalmente por Kolmogorov [11] e consiste nos seguintes conceitos básicos:

1. Denominamos por **espaço amostral** (Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento bem definido. Estes resultados são denominados eventos elementares .

   Por exemplo, os resultados possíveis para o lançamento de um dado de 6 faces formam o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nem sempre é possível descrever o espaço amostral de um experimento ou evento pois, algumas vezes, ele consiste em um número infinito de eventos elementares.

2. Um **evento** consiste em um conjunto de eventos elementares do espaço amostral, ou seja, podem ser vistos como os subconjuntos deΩ. Neste caso, o subconjunto formado pelas faces ímpares de um dado de 6 faces,$\Omega_1 = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$ é um evento do espaço amostral

3. Para realizar operações entre eventos , são utilizadas as seguintes notações

   - O evento constituído pela união ou soma de dois eventos A e B é denotado assim $A \cup B$, neste evento ou A ou B acontecem;
   - O evento formado pela intersecção entre dois eventos A e B é denotado por $A \cap B$ neste caso ou A ou B acontecem.
   - O evento no qual apenas o evento A não ocorreu é denotado por A ou $\Omega - A$;
   - Quando a ocorrência do evento A implica na ocorrência do evento B a notação é $A \subset B$ é utilizada.

4. Para cada evento A pertencente a Ω um número $P(A)$ é atribuído, sendo denominado probabilidade do evento A. Este número tem as seguintes propriedades

   - $P(\Omega) = 1$;
   - $0 \leq P(A) \leq 1$;
   - Se A e B são eventos disjuntos, ou seja , a ocorrência de A exclui a ocorrência de B (ou vice-versa), então :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- Caso estes eventos não forem disjuntos temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

É importante salientar que a teoria da probabilidade não fornece um método geral para calcular a priori, a probabilidade um determinado evento, cada caso precisa ser analisado cuidadosamente.

5.3 Definição Clássica

Definição 5.2. *A probabilidade de um evento E é dada por:*

$$P(E) = \frac{n(E)}{N}, \tag{5.3.1}$$

onde, $n(E)$ é o número de eventos elementares que compõem o evento E e N é o número total de eventos elementares do espaço amostral Ω.

Esta definição é totalmente idealizada e deve ser usada com cautela, pois nela se presume que todos eventos elementares possuem a mesma chance de ocorrer. Além disto, nem todo evento pode ser decomposto em eventos elementares.

5.4 Definição de Frequência Relativa

A principal forma de se consolidar a definição de probabilidade, é tratá-la experimentalmente. Portanto, quando se trata de experimentos aleatórios, como é difícil precisar qual evento irá ocorrer, precisamos encontrar uma maneira para determinar se alguns eventos ocorrem com mais frequência que outros. Por esta razão, uma maneira segura de verificar isso é a realização experimental sucessiva e sob as mesmas condições do evento aleatório. A repetição do experimento e a contagem dos resultados nos permitem definir o que conhecemos com *frequência relativa.*

Definição. *A frequência relativa $f(E)$ é definida a partir do experimento e pode ser obtida por meio da expressão*

$$f(E) = \frac{n(E)}{N}.$$

Neste caso, $n(E)$ é o número de vezes que o evento E ocorreu e N é o número total de vezes que o experimento foi realizado.

Quando temos N muito grande se torna difícil realizar um número infinito de experimentos. Esta definição também é utilizada para certificar se a probabilidade atribuída a um evento está correta, para isso se faz necessário realizar o experimento que remete ao evento por diversas vezes e analisar se a probabilidade está relacionada com a obtida pela aplicação da equação (5.3.1).

Definição. *A probabilidade do evento E é dada como uma definição experimental e pode ser obtida por meio da expressão*

$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \left[\frac{n(E)}{N} \right].$$

e neste caso, $n(E)$ é o número de vezes que o evento E ocorreu e N é o número total de vezes que o experimento foi realizado.

Por exemplo, se repetirmos o lançamento de um dado de 6 lados por um número significativamente grande de vezes, verificaremos que cada uma das faces foi obtida em $\frac{1}{6}$ do número total de lançamentos. A verificação experimental da noção de probabilidade por meio da frequência relativa é uma das atividades do produto educacional. Neste capítulo, utilizaremos a definição 5.2 para determinar a probabilidade de um evento.

5.5 Jogos com dados Binários.

Imaginemos um jogo de dados, em que apenas dois resultados (0 e 1) são permitidos. Além disso, vamos supor que estes dois resultados são equiprováveis. Utilizando a definição clássica da probabilidade, devemos ter

$$P_0 = P_1 \text{ e } P_0 + P_1 = 1 \Rightarrow P_0 = P_1 = \frac{1}{2}.$$

Assim, para que o dado de seis lados[1] atue como um sistema aleatório binário, precisamos fazer uma associação apropriada de seus eventos elementares, de forma que ao final tenhamos apenas dois possíveis eventos com probabilidade 1/2. Neste caso basta que consideremos, por exemplo, os eventos

$$\Omega_0 = \{2, 4, 6\}\text{, conjunto das faces pares}$$

e

$$\Omega_1 = \{1, 3, 5\}\text{, conjunto das faces ímpares}$$

pois

$$P_{\Omega_0} = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = P_0$$

e

$$P_{\Omega_1} = P_1 + P_3 + P_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = P_1.$$

É importante destacar que qualquer outra escolha de Ω_0 e Ω_1 poderia ter sido utilizada, desde que ambos possuíssem 3 elementos, ou seja, a metade de elementos do espaço amostral.

Vamos agora imaginar que possuímos N dados dispostos em sequência. Por simplicidade, vamos supor que todos estão com faces pares apontando para o alto. Neste caso, todos os dados apresentam o resultado “0”. Pensemos na realização dos seguintes passos (que pode ser visto como um jogo para ser reproduzido pelo leitor):

1. Escolhe-se um dos dados desta sequência de maneira aleatória. Desta forma, cada dado possui a probabilidade igual a $\frac{1}{N}$ de ser selecionado.

[1]Sempre que estivermos usando um dado sem qualquer outra menção, vamos considerá-lo não viciado.

2. O dado é lançado. Como resultado do lançamento, podemos obter uma face ímpar ou uma face par, ambas com probabilidade $\frac{1}{2}$. Portanto podemos dizer que ele possui a mesma probabilidade de alterar o resultado para "1" ou permanecer em "0".

3. No final do lançamento, a sequência de dados gera uma soma S de zeros e uns a qual chamaremos de **estado macroscópico** ou **macroestado** do sistema. A sequência específica de zeros e uns que geram a soma S é o que definiremos com **estado microscópico** ou **microestado** do sistema[2].

Uma pergunta pertinente é:

Quantos estados microscópicos (sequências de zeros e uns) admitem soma S?

Vejamos, S pode assumir valores que variam entre 0 e N. Para cada valor de S entre 0 e N, vamos denominar por n_S o número de microestados (sequências de zeros e uns) que tem como soma o valor S. Para calcular n_S, precisamos recorrer aos métodos de contagem do Capítulo 4. De fato, a soma S pode ser vista como o número de algarismos 1 em uma dada sequência. Por exemplo para a sequência com $N = 10$ elementos abaixo,

$$0101001101$$

possuímos 5 algarismos "1", o que corresponde à soma do valor dos elementos desta sequência. Logo, toda sequência com 5 algarismos "1" possui $S = 5$. O nosso problema, então, resume-se a encontrar o número existente de sequências com 5 algarismos "1". Para tanto, precisamos apenas calcular o número de permutações existentes na sequência acima, considerando que permutarmos, por exemplo, os "0"'s entre si (o mesmo é válido para os "1"'s) não muda a sequência. Portanto, o caso geral, em que a sequência possui N elementos e que N_0 e $N_1 = S$ são os números de algarismos "0" e "1" respectivamente, podemos utilizar o a expressão para o número de permutações com elementos repetidos da seção (4.10). Assim

[2]É importante notar que um mesmo valor de soma (estado macroscópico) pode ser obtido por diferentes sequências de zeros e uns (estado microscópico).

$$\begin{aligned} n_S &= \frac{N!}{N_1!N_0!} \\ &= \frac{N!}{S!\,(N-S)!} \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Desta forma, podemos intuir que o valor de soma mais provável é aquele que possui o maior valor de n_S, ou seja, o maior número de estados microscópicos associados cuja soma da S. De fato, isto é verdade porque a probabilidade de se obter a soma S é proporcional ao número de configurações n_S e é dada por

$$P_S = \frac{n_S}{\text{Número total de configurações}}.$$

Neste caso, se considerarmos que o espaço amostral Ω é formado por todas as configurações possíveis de zeros e uns dispostos em uma sequência de N elementos, temos que o número total de elementos ($\#\Omega$) será dado, pela parte A do Princípio Fundamental da Contagem, por

$$\#\Omega = 2^N.$$

Portanto,

$$P_S = \frac{n_S}{\#\Omega} = \frac{1}{2^N}\left[\frac{N!}{S!\,(N-S)!}\right]. \tag{5.5.2}$$

de Assim temos que a maior probabilidade para o sistema, ou seja o macro estado mais provável será onde existir o maior número de configurações possíveis associados, pois o número de configurações é proporcional a probabilidade .

O objetivo maior neste jogo é observar como ocorre a evolução da soma S a partir do aumento do número de etapas , ou seja, desejamos observar como acontece a evolução do estado macroscópico a partir da evolução aleatória das configurações microscópicas do sistema.

5.5.1 Distribuições de probabilidade para o jogo de dados binários

Para compreender melhor a evolução aleatória das configurações microscópicas, nesta seção, vamos calcular os valores de P_S para diferentes valores de S, utilizando a expressão (5.5.2). Para efeitos comparativas plotaremos os valores de P_S para diferentes valores de N como função da soma reduzida

$$s = S/S_{Max},$$

onde S é número de algarismos “1” em uma determinada configuração e $S_{Max} = N$, ou seja, corresponde à soma máxima (caso em que existem N algarismos “1”). A soma reduzida pode ser compreendida como um percentual da soma máxima. Neste caso, por exemplo, um valor de $s = 0.4$ significa que $S = 0.4S_{Max} = 0.4N$, ou seja, corresponde a 40% do valor máximo que a soma pode atingir para um dado valor de N.

Dois Dados

Os resultados estão condensados na Tabela 5.1.

Soma	Configurações	n_S	P_S
0	00	1	1/4
1	01,10	2	1/2
2	11	1	1/4

Tabela 5.1: Possíveis configurações e seus respectivos valores de P_S para $N = 2$.

Neste gráfico podemos observar que por se tratar apenas de 3 macroestados acessíveis, temos uma grande possibilidade de observarmos todos os valores de soma durante a realização do jogo. Em essência, se efetuarmos um número muito grande de sucessivos lançamentos de dois dados binários, verificaremos que o valor $S = 1$ ocorrerá com o dobro da frequência dos resultados $S = 0$ e $S = 2$.

Três Dados

Os resultados estão condensados na Tabela 5.2.

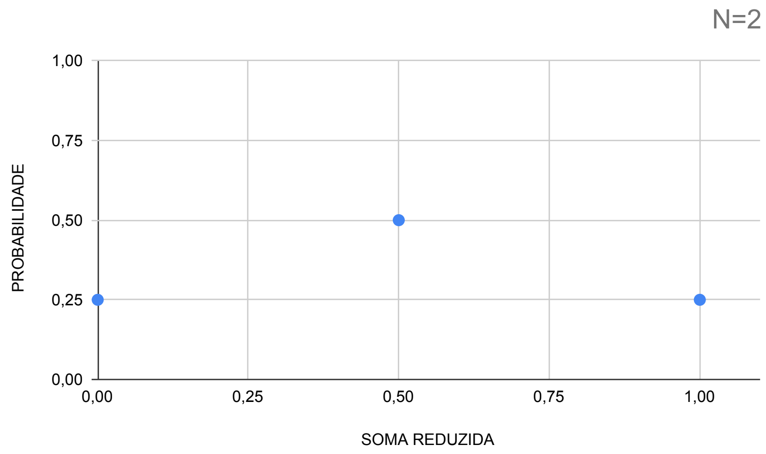

Figura 5.5.1: Distribuição de probabilidades para o caso em que $N = 2$.

Soma	Configurações	n_S	P_S
0	000	1	1/8
1	001,010,100	3	3/8
2	011,101,110	3	3/8
3	111	1	1/8

Tabela 5.2: Possíveis configurações e seus respectivos valores de P_S para $N = 3$.

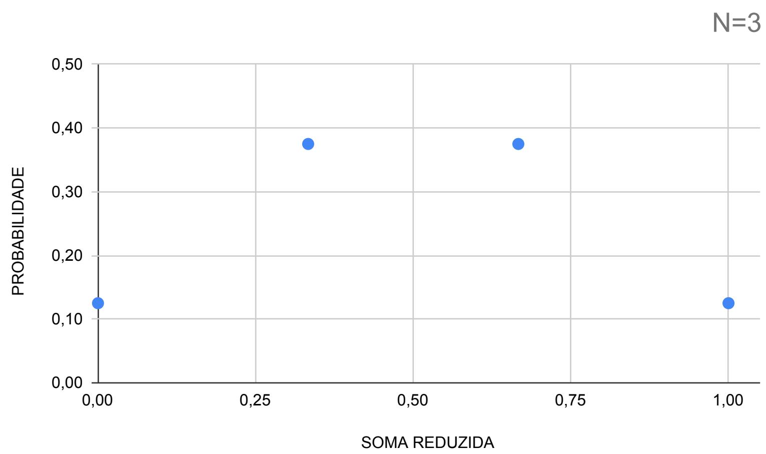

Figura 5.5.2: Distribuição de probabilidades para o caso em que $N = 3$.

Alguns pontos relevantes devem ser destacados a partir dos resultados para três dados. Primeiramente, é importante verificar que a probabilidade máxima é menor do que no caso de dois dados. Além disso, se compararmos com o caso de dois dados, a razão entre a probabilidade de se encontrar os estados de soma máxima e mínima ($S = 0$ e $S = 3$) são menores. De fato

$$N = 2 \Longrightarrow \frac{P_{Max}}{P_{Min}} = \frac{1/2}{1/4} = 2$$
$$N = 3 \Longrightarrow \frac{P_{Max}}{P_{Min}} = \frac{3/8}{1/8} = 3.$$

Vamos analisar o caso de $N = 10$, para tentar compreender se estes resultados se repetem.

Dez Dados

Os resultados estão condensados na Tabela 5.3.

Soma	Configurações	n_S	P_S
0	0000000000	1	$\frac{1}{2^{10}}$
1	0000000001, 0000000010, 0000000100, $\cdots$	10	$\frac{10}{2^{10}}$
2	0000000011, 0000000101, 0000000110, $\cdots$	45	$\frac{45}{2^{10}}$
3	0000000111, 0000001011, 0000001101 $\cdots$	120	$\frac{120}{2^{10}}$
4	0000001111, 0000011011, 0000011101$\cdots$	210	$\frac{210}{2^{10}}$
5	0000011111, 0000111011, 0000111110 $\cdots$	252	$\frac{252}{2^{10}}$
6	0000111111, 0001011111, 00011011111$\cdots$	210	$\frac{210}{2^{10}}$
7	0001111111, 0010111111, 0011011111$\cdots$	120	$\frac{120}{2^{10}}$
8	0011111111, 0101111111, 0110111111$\cdots$	45	$\frac{45}{2^{10}}$
	0111111111, 1011111111, 11011111111$\cdots$	10	$\frac{10}{2^{10}}$
10	1111111111$\cdots$	1	$\frac{1}{2^{10}}$

Tabela 5.3: Possíveis configurações e seus respectivos valores de P_S para $N = 10$

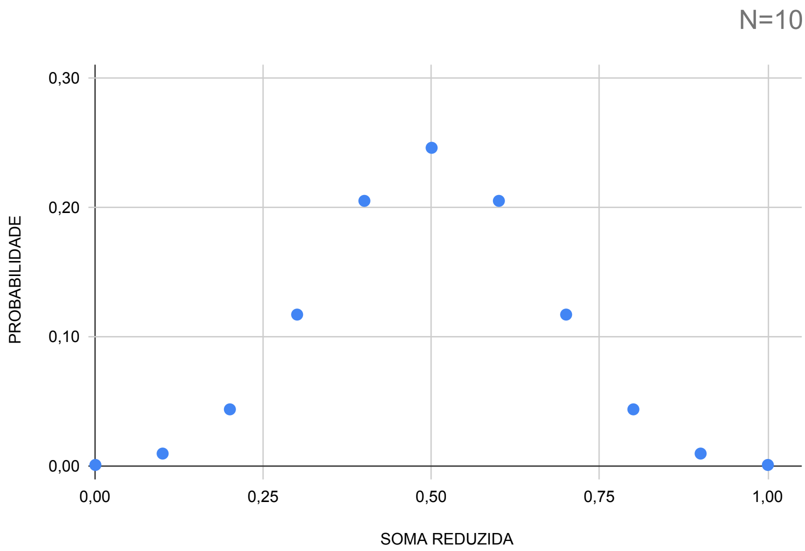

Figura 5.5.3: Distribuição de probabilidades para o caso em que 10.

Com o crescimento do número de estados macroscópicos acessíveis ($S = n$, com $n = 1, \dots 10$) verifica-se, com mais clareza, que a distribuição assume uma forma simétrica e mais suave com relação à $S = \dfrac{10}{2} = 5$. Além disso, atestamos, novamente, os resultados discutidos no caso de 3 dados, ou seja, é possível ver que

$$P_{Max}^{(N=10)} < P_{Max}^{(N=3)} < P_{Max}^{(N=2)},$$

$$\frac{P_{Min}^{(N=10)}}{P_{Max}^{(N=10)}} \gg \frac{P_{Min}^{(N=3)}}{P_{Max}^{(N=3)}} > \frac{P_{Min}^{(N=2)}}{P_{Max}^{(N=2)}}.$$

Estes resultados indicam um comportamento característico:

A medida que o número de dados aumenta, muito embora a probabilidade associada ao resultado $S = \dfrac{N}{2}$ diminua, os estados marginais extremos tornam-se cada vez mais improváveis (com probabilidade muito menor) do que os resultados mais próximos do pico. Isto indica que, se efetuarmos um número muito grande de sucessivos lançamentos de N dados binários, verificaremos que o valor $S = \dfrac{N}{2}$ ocorrerá com muito mais frequência do que os resultados do entorno a medida que N cresce[3].

[3]Este resultado pode ser formalmente demonstrado em [15]. Nossa intenção aqui é aguçar a intuição sobre

Cem Dados e Mais

Para o caso de 100 dados fica inviável utilizar uma tabela porque existem 2^{100} possíveis sequências de 0's e 1's. Neste caso condensaremos os resultado no gráfico da probabilidade P_S como função da soma reduzida.

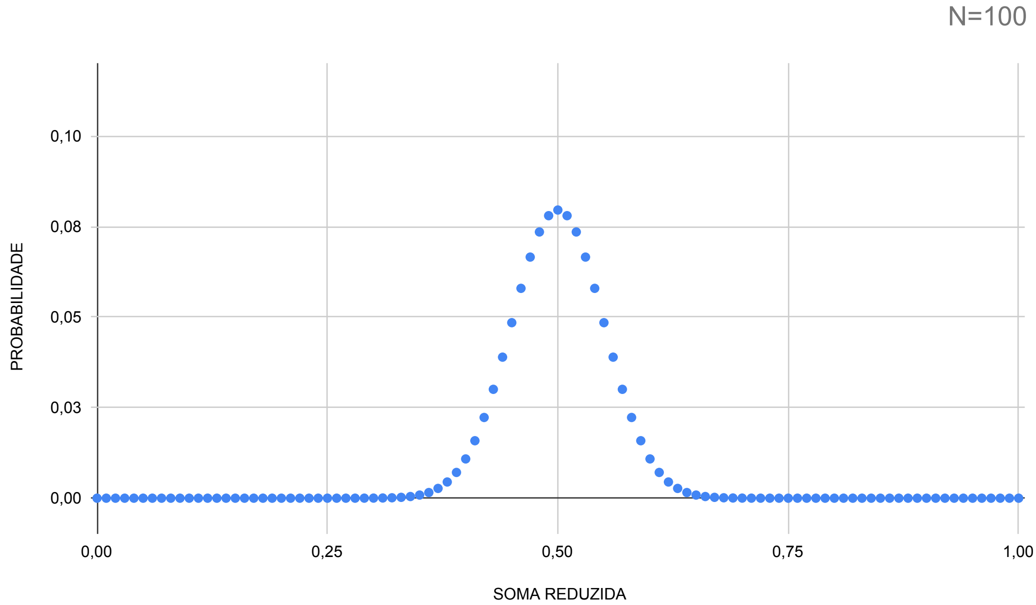

Figura 5.5.4: Distribuição de probabilidades para o caso em que $N = 100$.

Nesta figura é possível ver que a distribuição de probabilidade para $N = 100$, possui um pico localizado em $s = 0,5$, o que corresponde a soma $S = \dfrac{N}{2}$. Além disso, devemos destacar que largura da distribuição e bem mais estreita do que as anteriores. Isto significa que, se lançarmos 100 dados binários, o resultado mais provável para a soma S continua sendo a média, mas é muito mais difícil encontrar valores que se distanciem percentualmente dela. Note que a probabilidade de se encontrar as configurações cujas somas estão abaixo de $0.4S_{Max}$ e acima de $0.6S_{Max}$ é, praticamente nula. Isto mostra que a média é muito mais provável do que as somas que se distanciam do seu valor corroborando a intuição construída com os casos anteriores.

Assim, baseado nos resultados encontrados até aqui e que podem ser demonstrados

o problema por meio da observação prática.

formalmente ([15]), espera-se que no limite em que N é muito grande a probabilidade de $S = \dfrac{N}{2}$ seja significativamente maior do que os outros macroestado e, por esta razão, na imensa maioria das vezes em que um conjunto de N dados binários for lançado, a configuração final será tal que a soma dos resultados será suficientemente próxima de $S = \dfrac{N}{2}$. Portanto, é razoável acreditar que, se escolhermos uma das configurações improváveis como estado inicial do do conjunto de dados, a evolução deste estado é, invariavelmente, na direção de uma configuração que resulta em $S = \dfrac{N}{2}$. É justamente isso que discutiremos na próxima seção.

5.5.2 A tendência ao equilíbrio

O objetivo desta seção é mostrar como é possível a emergência de uma estado macroscópico de equilíbrio a partir da dinâmica microscópica aleatória. Para isso, utilizaremos o jogo de dados binários como um modelo de sistema termodinâmico. Vamos estruturar este modelo:

- Cada dado representa um átomo ou molécula;
- O resultado de seu lançamento pode ser visto como um possível valor de alguma grandeza aleatória relevante.

  Exemplos:

  - 0 e 1 podem ser dois valores da energia do átomo;
  - 0 e 1 podem significar andar para a direita e para a esquerda, respectivamente.
- Os átomos e moléculas que compõem um sistema podem ser vistos como uma sequência de 0's e 1'.
- Consideraremos a soma dos 0's e 1's, ou seja, número de algarismos 1 como a grandeza termodinâmica (macroscópica);

1. A dinâmica será iniciada com N átomos no estado zero, ou seja, teremos uma sequência de N zeros

$$\underbrace{00000000000\cdots 00}_{\text{N elementos}}$$

de tal forma que $S_N = 0$

2. Escolhe-se, aleatoriamente, um dos elementos da sequência (um dos dados) para fazer um lançamento. Neste caso, é certo que escolheremos um zero e, ao fazer o lançamento existe:

   - uma probabilidade $\frac{1}{2}$ se obter 0;
   - uma probabilidade $\frac{1}{2}$ se obter 1.

   Como consequência, existe a mesma probabilidade da soma continuar em $S_N = 0$ ou evoluir para $S_N = 1$.

3. Se, após o lançamento obtivermos, $S_N = 0$, repetimos o passo 2.

4. Se, após o lançamento obtivermos, $S_N = 1$, escolhe-se, aleatoriamente, um dos elementos da sequência (um dos dados) para fazer um lançamento. Neste caso, temos

   - uma probabilidade $\frac{N-1}{N}$ de se sortear um "0" e, portanto, uma probabilidade de $\frac{N-1}{2N}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.
   - uma probabilidade $\frac{1}{N}$ de se sortear um "1" e, portanto, uma probabilidade de $\frac{1}{2N}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.

   Como consequência, existe uma probabilidade muito maior de que a soma permaneça como $S_N = 1$ ou evolua para $S_N = 2$.

5. Se, após o lançamento obtivermos, $S_N = 1$, repetimos o passo 4.

6. Se, após o lançamento obtivermos, $S_N = 2$, escolhe-se, aleatoriamente, um dos elementos da sequência (um dos dados) para fazer um lançamento. Neste caso, temos

- uma probabilidade $\frac{N-2}{N}$ de se sortear um “0” e, portanto, uma probabilidade de $\frac{N-2}{2N}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.
- uma probabilidade $\frac{1}{N}$ de se sortear um “1” e, portanto, uma probabilidade de $\frac{1}{2N}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.

Como consequência, existe uma probabilidade muito maior de que a soma permaneça como $S_N = 2$ ou evolua para $S_N = 3$.

Dos passos descritos até agora fica evidente que:

- a probabilidade de aumentar o valor da soma (P_S^+) é maior do que de diminuir (P_S^-), ou seja $P_S^+ > P_S^-$;
- a probabilidade P_S^+está decrescendo a medida que o valor da soma cresce, ou seja, $P_{S_1}^+ > P_{S_2}^+$ se $S_2 > S_1$.

7. Este comportamento acontece enquanto $S < \frac{N}{2}$. De fato, para o último termo antes de $S = \frac{N}{2}$ temos

   - uma probabilidade $\frac{(N/2-1)}{N}$ de se sortear um “0” e, portanto, uma probabilidade de $\frac{(N/2-1)}{2N}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.
   - uma probabilidade $\frac{(N/2+1)}{N}$ de se sortear um “1” e, portanto, uma probabilidade de $\frac{(N/2+1)}{N}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.

   Note que estas probabilidades são aproximadamente idênticas no caso em que N é muito grande.

8. Quando alcançamos $S = \frac{N}{2}$ obtemos

   - uma probabilidade $\frac{N/2}{N} = \frac{1}{2}$ de se sortear um “0” e, portanto, uma probabilidade de $\frac{1}{4}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.
   - uma probabilidade $\frac{N/2}{N} = \frac{1}{2}$ de se sortear um “1” e, portanto, uma probabilidade de $\frac{1}{4}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.

Este é o valor máximo da probabilidade. Isto está de acordo com o que foi mostrado nas seções anteriores pois, como vimos, o macroestado $S_N = \frac{N}{2}$ possui o maior número de microestados (ver tabelas da seção 5.5.1).

9. Se $S > \frac{N}{2}$ o comportamento das probabilidades é simétrico, ou seja, os resultados são invertidos em relação ao número de “0”’s e “1”’s. Note que, para o primeiro termo depois de $S = \frac{N}{2}$ temos

   - uma probabilidade $\frac{(N/2+1)}{N}$ de se sortear um “0” e, portanto, uma probabilidade de $\frac{1}{4}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.
   - uma probabilidade $\frac{(N/2-1)}{N}$ de se sortear um “1” e, portanto, uma probabilidade de $\frac{1}{4}$ de se obter, depois do lançamento, os resultados 0 ou 1.

   Perceba que as probabilidades estão invertidas quando comparamos com o passo 7, acima. Desta forma, podemos concluir que a partir de $S = \frac{N}{2}$:

   - a probabilidade de aumentar o valor da soma (P_S^+) é menor do que de diminuir o valor da soma (P_S^-), ou seja $P_S^+ < P_S^-$;
   - a probabilidade P_S^+está decrescendo a medida que o valor da soma cresce, ou seja, $P_{S_1}^+ > P_{S_2}^+$ se $S_2 > S_1$.

Esta sequência de passos, nos permite concluir que:

A soma S_N pode ser vista como uma grandeza macroscópica cujo valor de equilíbrio é dada por $S_N = \frac{N}{2}$. Este valor é obtido a partir da dinâmica aleatória dos microestados e o processo de tendência ao equilíbrio é guiado pela natureza estatística dos macroestados.

5.6 Sugestão para os professores

Ao ensinar teoria de probabilidade para estudantes do ensino médio que não possuem uma base formal em matemática, é fundamental utilizar estratégias de adaptação do conteúdo, tornando-o mais acessível e conectado à realidade deste estudantes. A probabilidade é uma disciplina fascinante que permeia nosso cotidiano, e ao contextualizá-la com exemplos concretos, você poderá despertar o interesse e facilitar o processo de aprendizagem.

Uma abordagem eficiente é iniciar com situações do dia a dia que envolvam incertezas, como previsões meteorológicas, lançamento de moedas ou dados, ou até mesmo probabilidade de ocorrência de eventos em jogos e esportes. A partir desses exemplos familiares, os estudantes poderão compreender conceitos-chave, como espaço amostral, eventos e probabilidade, de maneira mais natural e concreta. Além disso, encoraje a participação ativa dos alunos em experimentos práticos, coletando dados e realizando análises probabilísticas simples. Essas atividades permitem que os estudantes observem a aplicabilidade dos conceitos aprendidos e compreendam como a probabilidade pode ser usada para tomar decisões informadas em suas vidas diárias.

Ao fazer essa adaptação do conteúdo formal para uma linguagem própria e associada à realidade dos seus alunos, você criará um ambiente de aprendizagem mais envolvente e motivador. O entendimento da teoria de probabilidade será fortalecido, e os alunos estarão mais preparados para enfrentar desafios futuros relacionados à estatística e análise de dados. Lembre-se de que a exploração da probabilidade pode ser divertida e instigante quando enraizada em exemplos que os estudantes podem vivenciar e apreciar. No próximo capítulo, mostraremos como estruturamos o nosso tratamento. Fique a vontade para fazer as adaptaçoes que julgar necessárias!

Capítulo 6

PRODUTO EDUCACIONAL

Produtos educacionais são ferramentas pedagógicas produzidas pelos educadores e que serve de auxílio para que estes consigam oportunizar e desenvolver as práticas pedagógicas. Estes produtos proporcionam uma maior interação entre teoria e prática, ou seja, tem como objetivo auxiliar o professor em sala de aula. (FREIRE, GUERRINI, DUTRA, 2016). A utilização de produtos educacionais tem, como principal finalidade, fugir à tendência de se estudar ciências por práticas baseadas em decorar conteúdo. A experimentação didática e ativa surge, naturalmente, como uma possibilidade de contribuir de forma efetiva e potencializada para a formação do aluno, ajudando a superar os problemas de aprendizagem decorrentes de metodologias de ensino baseado em recursos mnemônicos. É importante destacar que práticas experimentais isoladas, nem sempre são suficientes para garantir uma melhor qualidade no ensino de Ciências, é necessário que o conteúdo a ser tratado seja abordado de forma clara e, sempre que possível, vinculado a elementos da realidade ou que despertem a curiosidade e o interesse. Em outras palavras, a construção do conhecimento científico, precisa buscar ações que atuem como da como um processo que transforma os conteúdos teóricos em elementos práticos, sempre buscando atender a finalidade do ensino.

Com isto em mente, decidimos elaborar um produto educacional com uma sequência didática de ensino que proporcione o diálogo entre o que se pretende transmitir e os conhecimentos prévios que o aluno possui e, desta forma, contribua para a aprendizagem significativa dos estudantes. Paralelamente, esperamos que este produto auxilie o professor com relação à transmissão do conteúdo proposto e, principalmente, na criação de estratégias que aprimorem o ensino dos demais conteúdos abordados em sala de aula.

6.1 Ambientação teórica: um resumo sobre a física do produto

O produto educacional é formado por um sequência didática que simula a sala de aula como um sistema termodinâmico. A ideia geral é utilizar o aluno, munido de dados cúbicos, como agente da dinâmica aleatória de átomos e moléculas. Neste contexto, a sala de aula atuará como um experimento para a observação do comportamento médio dos eventos aleatórios individuais, resultando no comportamento coletivo dos sistema macroscópico[14, 17, 7, 15].

O principal objetivo é proporcionar ao professor um roteiro, condensado em um guia didático, que aborde os conteúdos relevantes e o auxilie na explicação dos conceitos fundamentais para a construção de um sequência prática que permita compreender como as grandezas termodinâmicas emergem do comportamento individual e, também, estabelecer as bases para o comportamento irreversível de sistemas termodinâmicos, ou seja, que respeitem a 2ª Lei da Termodinâmica[1]. Um aspecto importante desse experimento é que cada estudantes será visto como um elemento individual de um sistema macroscópico e, desta forma, o roteiro deverá contemplar as estratégias individuais para a execução de eventos aleatórios e que culminem na observação do resultado global médio em toda sala de aula.

Antes de apresentarmos a sequência didática, precisamos estabelecer as perguntas fundamentais que devem ser apresentadas aos estudantes para delimitar com clareza os aspectos teóricos relevantes fisicamente. Nada impede, neste ponto, que o professor faça

[1]Infelizmente, não podemos dizer que nossa abordagem seja universal, no sentido que será eficiente sempre que aplicada, independemente da turma ou escola. É preciso reconhecer que a realidade local deve, sempre, ser levada em consideração na aplicação deste produto. Considere nossa estratégia como uma sugestão que pode e deve ser adapta para outras realidades.

sua própria investigação dos subsunsores de seus estudantes e estabeleça perguntas diferentes das propostas aqui. No entanto, acreditamos que as questões levantadas a seguir devam ser contempladas, de alguma forma, para que as conexões entre as atividades propostas e os processos físicos seja eficiente. A primeira pergunta é:

6.1.1 *O que é um sistema termodinâmico?*

Termodinâmica é a área da física voltada para o estudo das propriedades da matéria que exibem dependência com as grandezas temperatura e calor. Ela estuda a tendência de grandezas como pressão, volume e temperatura aos seu valores de equilíbrio. Independentemente de seu estado, a matéria é formada por átomos ou moléculas, que estão em constante movimento. Em virtude desta agitação aleatória estes átomos e moléculas possuem energia cinética e a energia cinética média desses átomos e moléculas produzem uma sensação que podemos sentir como sendo fria ou quente e que nos remete à noção de temperatura[2].

Existem outras grandezas físicas que descrevem sistemas termodinâmicos mais complexos, mas para os nossos fins, não precisamos tratar deles aqui. O ponto importante e que precisa ser destacado é que a termodinâmica lida com sistemas macroscópicos e por isso, podemos dizer que as grandezas termodinâmicas como pressão e temperatura também são macroscópicas. Isto significa que elas são obtidas a partir do comportamento coletivo dos átomos e moléculas, os entes microscópicos que constituem o sistema. Em outras palavras, as propriedades macroscópicas independem do comportamento individual dos entes microscópicos mas, sim, do resultado oriundo do seu comportamento coletivo.

Mesmo que desejássemos estudar o comportamento individual dos constituintes do sistemas, devemos ter em mente que, por exemplo, em um copo d'água, existem em torno de 10^{20} moléculas de H_2O. Isso nos dá um indicativo de que é impossível fazer a descrição deste sistema de maneira microscópica, ou seja, é impossível descrever o movimento de

[2]A associação entre energia cinética média e temperatura pode ser obtida formalmente por meio da teoria cinética dos gases. Para mais detalhes ver o capítulo 11 do livro do Moysés Nussenzveig [14]

cada átomo ou molécula que compõem o sistema termodinâmico.

Resumindo, para os nossos fins:

Um sistema termodinâmico é aquele em que o número de átomos e moléculas é grande o suficiente para que a temperatura e outras propriedades possam ser definidas a partir do seu comportamento coletivo.

Neste trabalho a sala de aula simulará o sistema termodinâmico, e os alunos farão o papel de átomos e moléculas.

6.1.2 O que é um microestado?

Se um sistema for composto por N elementos individuais, consideramos um microestado uma de suas configurações específicas. Por exemplo, se soubermos a posição e o momento de todas as moléculas que constituem um gás, conheceremos o microestado do sistema. O microestado é um estado detalhado de um sistema físico, ou seja, serve para descrever o sistema microscópico. Conhecer o microestado de um sistema termodinâmico real é praticamente impossível. Basta pensar que se utilizarmos um computador para listar a velocidade e o momento de 10^{23}moléculas que compõem um gás a uma taxa de 1000 dados por milésimo de segundo, este computador levaria 10^{18} segundos para cumprir esta tarefa, ou seja, mais do que a idade do universo. Portanto, o objetivo na termodinâmica não é determinar quais são os estados microestados e, sim, o número total deles. Isso é o mais importante para calcularmos a probabilidade de se encontrar uma propriedade coletiva (um estado macroscópico) associada ao sistema.

Exemplo. Se nomearmos seis dados de seis faces como A, B, C, D, E e F, cada configuração específica pode ser vista como um microestado do sistema completo. Neste caso, como podemos ver nos microestados 1, 2 e 3 da Figura 6.1.1, a ordem é importante.

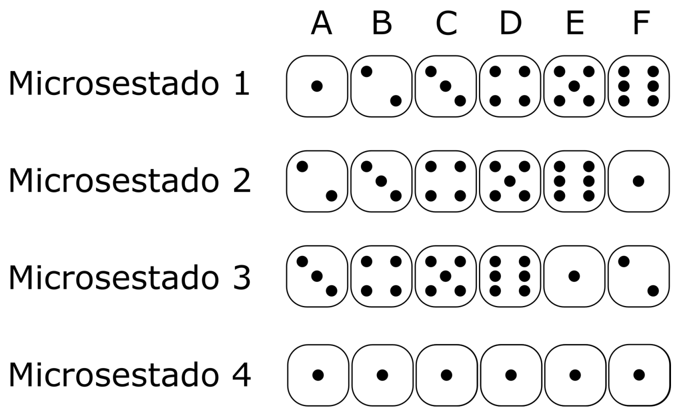

Figura 6.1.1:

6.1.3 O que é um macroestado?

Chamamos de macroestado à resposta coletiva de um sistema físico composto por um número muito grande de partículas, átomos ou moléculas. Por exemplo, se tivermos 10 átomos com suas respectivas energias (microestado), tanto a soma das energias como a média nos darão uma grandeza macroscópica que chamamos de macroestado. No primeiro caso, a energia total. No segundo a energia média. Perceba que estas duas grandezas independem de qual átomo possua uma energia específica, o importante é que a soma seja a mesma, independentemente de quem possua cada uma das energias.

Exemplo. Imaginemos uma situação em que foram distribuídas uma única nota de um, dois, cinco, dez, vinte, cinquenta, cem e duzentos reais para 8 alunos a partir de um sorteio. É nítido, que o valor total (a soma) não será alterada caso a distribuição das notas diferente por meio da realização de outro sorteio. Neste caso, a soma dos valores pode ser vista como uma grandeza macroscópica idêntica para todas as formas de distribuir as notas entre as oito pessoas.

Se analisarmos a Figura 6.1.1, percebemos que os microestados 1, 2 e 3 possuem a mesma soma, logo a soma pode ser vista como um macroestado que pode ser obtido de diferentes microestados. Já o microestado 4, estaria associado a uma macroestado distinto do anterior e só existe uma forma de obtê-lo.

6.1.4 Por que podemos considerar que os eventos microscópicos são aleatórios?

Imagine que você tenha um equipamento que é capaz de medir a posição de bolinhas dentro de um caixa a cada segundo. Se o movimento das bolinhas for suficientemente lento, é possível fazer uma previsão razoável do movimento destas bolinhas a partir das fotos tiradas. No entanto, se essas bolinhas estiverem dentro de uma caixa com um soprador bem potente, é bem provável que cada foto não tenha qualquer relação com a anterior, ou seja, não seria possível dizer onde cada uma das bolinhas estava um segundo antes. Neste caso, dizemos que a resolução temporal do seu experimento (fotos) é baixa, pois entre cada um dos disparos da câmera, acontecem tantos eventos, que, no fim, as posições parecem aleatórias. É justamente isso o que acontece nos experimentos termodinâmicos. As colisões e outros fenômenos importantes ocorrem em um intervalo de tempo muito mais curto do que os de cada medida do experimento e esta é uma das razões de os eventos microscópicos parecem aleatórios. Aliado a isso, a imensa maioria dos experimentos não possui resolução espacial suficiente para medir cada uma das partículas que compõem o sistema.

6.1.5 Qual a relação entre a termodinâmica e a probabilidade?

A relação entre termodinâmica e probabilidade também é evidente na noção de microestados e macroestados. Um sistema termodinâmico pode ter vários microestados, que correspondem a diferentes configurações das partículas individuais. No entanto, diferentes microestados podem levar ao mesmo macroestado, que descreve as propriedades observáveis em larga escala do sistema, como temperatura, pressão e volume. A probabilidade entra em cena para determinar a probabilidade de um sistema estar em um determinado macroestado, considerando todas as possíveis combinações de microestados que o levam a esse macroestado específico. Isso permite que a termodinâmica estatística, uma abordagem da termodinâmica baseada em probabilidades, forneça uma descrição estatística dos sistemas termodinâmicos complexos, levando em consideração a diversidade de microestados que podem contribuir para um mesmo macroestado.

6.2 Atividade Educacional

O produto didático é composto por uma série de atividades práticas que envolvem o lançamento de dados para simular o comportamento aleatório de átomos e moléculas que compõem os sistemas termodinâmicos. A ideia é que cada aluno represente um átomo (molécula) ou uma coleção deles (delas). Os resultados dos lançamentos representarão a dinâmica aleatória de grandezas físicas associadas aos entes microscópicos constituintes da matéria.

6.2.1 Material para a atividade

O material é composto por 144 dados de 6 faces. É importante destacar que todas as atividades deste produto podem ser adaptadas para moedas, baralhos ou qualquer outro elemento que produza resultados aleatórios.

6.2.2 Metodologia geral

Para que este produto educacional seja desenvolvido de maneira eficiente, recomendamos a utilização da aprendizagem significativa. Cabe ao professor, escolher a abordagem que melhor se adequa à realidade de sua turma. No entanto, antes mesmo de explicitarmos o conteúdo específico de cada aula, recomendamos, ao professor, que

1. identifique quais conceitos já estão bem definidos na estrutura cognitiva do aluno, para só a partir daí dar início as atividades. Os questionários propostos no início de cada aula deste produto educacional pode servir de ponto de partida para que o professor estabeleça sua própria rotina de investigação prévia.

2. utilize vídeos sobre eventos aleatórios, realize jogos de dados, moedas, carta de baralho e qualquer outra atividade em que haja incerteza sobre os possíveis resultados ou que tenham um elemento de sorte. Sempre desafiá-los a fazer previsões;

3. em turmas cujo o nível de matemática permitir, explore, em cada etapa, o processo de contagem e de estabelecimento teórico da probabilidade;

4. nas turmas em que os resultados formais da matemática não estejam estabelecidos, reforçar os elementos mais simples dos processos de contagem, apelando para intuição sempre que possível;

5. estimule a participação de todos, pois estamos interessados no comportamento coletivo e, não no individual;

6. investigue a aborção dos conteúdos, após as atividades.

Com isto em mente, estamos aptos a apresentar o conteúdo de cada uma das aulas propostas neste produto educacional.

6.3 Primeira aula

A primeira aula deve ter caráter introdutório e investigativo e pode ser ministrada a partir da seguinte sequência:

Investigação

Inicialmente deve-se verificar os subsunçores da turma por meio da aplicação de um pré-teste que deverá ser respondido individualmente e sem o auxílio de materiais didáticos. Esta investigação inicial é composta por um conjunto de perguntas baseadas nos conceitos de aleatoriedade, probabilidade e termodinâmica. Segue, abaixo, o conjunto de perguntas utilizadas neste trabalho.

Questionário investigativo (Primeira Aula)

1. **O que você entende como um fenômeno aleatório?**

   Comentar a resposta antes de passar à próxima pergunta.

2. **É possível que processos tenham caráter previsível mesmo sendo compostos por processos aleatórios?**

   Comentar a resposta antes de passar à próxima pergunta.

3. **Onde você aplica o conceito de probabilidade na sua vida cotidiana?**

   Comentar a resposta antes de passar a segunda pergunta

.

Introdução ao tema

Esta etapa consiste na apresentação dos principais conceitos associados à aleatoriedade, à probabilidade e à Termodinâmica. Os exemplos devem ser simples e conectados com a realidade. O professor pode se basear nas discussões da seção 6.1 e nas questões apresentadas no **Questionário investigativo da Primeira Aula**. Esta fase da aula, tem como principal objetivo ambientar os estudantes para que as atividades práticas apresentadas neste produto educacional sejam significativas do ponto de vista do processo de aprendizagem.

Observação:

É, neste momento, que devemos mencionar a importância da análise combinatória para este trabalho, dado que ela estabelece os métodos de contagem que serão utilizadas nesta proposta.

Instigação

Neste ponto, o professor deve encorajar os estudantes a praticarem jogos com os dados, sempre estimulando-os a fazer previsões sobre os resultados. É bastante produtivo, fazê-los pensar em estratégias que permitam o aumento de sucesso na previsão dos resultados. Invariavelmente, *todas as estratégias estarão ligadas a ações que reduzem o caráter aleatório*. Uma atividade interessante é repetir diversas vezes o lançamento de um dado (sempre da mesma altura e com a mesma face apontando para cima). Em cada um dos lançamentos verificar a face obtida. Neste momento, deve-se destacar que o resultado de um lançamento de dados é determinado por vários fatores, como a força do lançamento, a posição e a orientação inicial do lança87mento, o atrito com a superfície, as condições físicas do ambiente em que o lançamento vai ocorrer. Desta forma se houver algum tipo de desvio nas condições iniciais do lançamento, estes podem provocar resultados inesperados, ou seja pequenos desvios em qualquer um desses fatores, pode alterar o resultado do laçamento drasticamente.

Observação:

Para que haja uma melhor compreensão dos conceitos que serão apresentados, sugere-se ao professor que busque criar exemplos que se relacionem ao dia a dia dos estudantes e que a desenvolva os temas por meio de atividades com as quais os alunos possam participar e interagir. Dentro deste contexto, é mais importante que essas atividades investigativas produzam mais indagações do que respostas. Desta forma, buscamos sedimentar as questões importantes que serão respondidas nas atividades das aulas seguintes.

6.3.1 O primeiro jogo

Esta discussão inicial tem, como principal objetivo, apresentar o conceito de probabilidade, por meio da determinação da frequência relativa, ou seja, respondendo a seguinte pergunta:

Qual a chance de se obter uma determinada face como resultado do lançamento de um dado?

Com o intuito de fornecer elementos para responder à questão acima, estruturamos a discussão em termos de um jogo na sala de aula. Para realizá-lo, basta seguir os seguintes passos

1. Distribuir 144 dados para os alunos de tal forma que:
    - todos tenham a mesma quantidade de dados;
    - sejam distribuídos o maior número possível de dados.

Exemplo. Suponha que o professor possua N_D dados e a turma possua N_A alunos. O número de dados por aluno pode ser encontrado a partir da parte inteira da expressão

$$\frac{N_D}{N_A}.$$

Assim, se tivermos 144 dados e 30 alunos, o número de dados por aluno será a parte inteira de $\frac{144}{30} = 4,8$ que é 4.

2. Dividir a sala em 6 (seis) grupos, cada um representando uma das faces do dado. A competição consiste em saber qual dos grupos terá o maior número de resultados após 10 (dez) rodadas[3]

3. Em cada rodada, os resultados das faces de cada grupo devem ser anotados e somados aos resultados da rodada anterior. A ideia é encontrar o resultado acumulado de cada uma das faces.

Observação:

O professor pode optar por anotar os resultados no quadro ou em uma planilha projetada para os alunos.

4. O resultado acumulado deve ser avaliado em termos da frequência relativa por meio da seguinte expressão:

$$\frac{n_i}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad (6.3.1)$$

onde,

[3] O número de rodadas é arbitrário, mas considera-se que seja suficiente para indicar claramente a tendência à igualdade da frequência dos seis lados como resultado do lançamento. Cabe ao professor avaliar, durante o processo, qual o número total de rodadas para que a frequência relativa de cada face seja aproximadamente 1/6.

n_1 : número acumulado de faces 1 obtidas,

n_2 : número acumulado de faces 2 obtidas,

n_3 : número acumulado de faces 3 obtidas,

n_4 : número acumulado de faces 4 obtidas,

n_5 : número acumulado de faces 5 obtidas,

n_6 : número acumulado de faces 6 obtidas.

5. Mostrar, por meio de um gráfico, que a expressão 6.3.1 tende ao valor 1/6 para todas as faces.

6.3.2 Aprendizados esperados após a aplicação da primeira aula

As discussões apresentadas e o Jogo 1 tem, como principais objetivos, consolidar os seguintes aprendizados:

1. O reconhecimento de um fenômeno aleatório;
2. O reconhecimento de que a aleatoriedade não implica, necessariamente, em imprevisibilidade;
3. Entender que a probabilidade de um evento é um conceito apoiado no experimento e não pode ser deduzido.
4. Compreender a razão pela qual cada face de um dado possui a mesma probabilidade (1/6) de ser obtida em um lançamento.

6.4 Segunda aula

A segunda aula deste produto educacional é destinada a mostrar como a tendência ao equilíbrio emerge naturalmente de eventos aleatórios. Para isso, precisamos discutir a diferença entre estados microscópicos e macroscópicos e reconhecer o papel que a probabilidade desempenha na determinação do estado final de equilíbrio de um sistema termodinâmico. Os seguintes passos podem ser seguidos:

Investigação

Com este intuito, a aula deve ser iniciada com a aplicação do seguinte Questionário de investigação:

Questionário investigativo (Segunda Aula)

1. **O que é equilíbrio?**

   Comentar a resposta antes de passar à próxima pergunta.

2. **É possível que processos tenham caráter previsível mesmo sendo compostos por processos aleatórios?**

   Comentar a resposta antes de passar à próxima pergunta.

3. **Se todos os estudantes da sala jogarem uma moeda para o alto, quantas caras você espera obter?**

   Comentar a resposta antes de passar a segunda pergunta

Introdução do tema

Esta etapa consiste na apresentação dos conceitos sobre equilíbrio de um sistema termodinâmico. Assim como na aula anterior, é importante utilizar exemplos simples relacionados com o cotidiano do aluno de forma que as atividades sejam significativas do ponto de vista do processo de aprendizagem. Alguns exemplos como o gelo que derrete e o café que esfria podem ser muito úteis para ilustrar o processo de tendência ao equilíbrio.

Observação

Neste momento, é importante retomar a discussão sobre como os átomos se comportam de maneira aleatória para justifi0car a utilização dos dados na dinâmica.

Instigação

Esta etapa precisa ser pensada para que o estudante seja capaz de refletir sobre maneiras de se usar os dados para simular a tendência ao equilíbrio de grandezas macroscópicas, mesmo com processos microscópicos aleatórios. Em outras palavras, o estudante precisa refletir sobre um modelo didático que contenha os elementos principais de um sistema termodinâmico. Neste sentido, ele precisa ser provocado para tentar construir uma grandeza macoscópica associada ao resultado dos dados.

Observação:

Todo o processo instigativo deve ser guiado para culminar na simplificação dos processos aleatórios. Esta simplificação consiste em transformar o dado de seis lados em um dado binário e, com isso simular um sistema físico que admite apenas dois valores (estados). É uma simplificação que facilita os cálculos revelando com mais clareza a essência do problema.

6.4.1 O segundo jogo

O primeiro passo para estabelecermos a próxima atividade prática (segundo jogo) é transformar um dado de 6 (seis) lados em um dado binário. Nesta transformação vamos utilizar os números pares e ímpares para definir os valores binários. Particularmente vamos definir que

- Os eventos $\{2,4,6\}$possuirão valor 0 (zero);

- Os eventos $\{1, 3, 5\}$possuirão valor 1 (um).

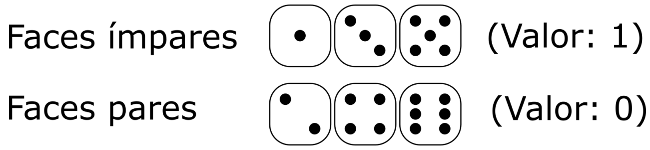

Figura 6.4.1:

Se utilizarmos os resultados da frequência relativa encontrados na primeira aula, podemos mostrar que a probabilidade de se encontrar os valores 0 ou 1 no lançamento dos dados é 1/2. Neste nosso jogo vamos assumir que:

- cada aluno representa o número de átomos igual ao número de dados que ele possuir;
- o resultado do lançamento do dado representa a energia do átomo (neste caso 0 ou 1).

Neste sentido, o sistema termodinâmico será representado por uma sequência de zeros e uns e a energia total será dada pela soma de cada um dos elementos da sequência.

$$101000100010101000100010001000101010010101001001000100010001010100010010 11$$
$$000101010101111110101010101110101000110100011100101010110010001001001000 1010$$

No caso de usarmos os 144 dados,

- a energia mínima, quando a soma der 0, ocorrerá qando todos os elementos da sequência forem iguais a 0;
- a energia máxima, quando a soma der 144, ocorrerá quando todos os elementos da sequência forem iguais a 1[4].

Para começar o nosso Segundo Jogo devemos seguir os seguintes passos:

[4]Assim como o discutido na seção 5.5, estas duas configurações são muito raras e, por isso, não é razoável que elas sejam uma condição de equilíbrio apropriada.

1. Distribuir todos os dados para os alunos. Neste jogo não problema se alguns alunos ficarem com um dado a mais.

2. Vamos assumir que todos os alunos estão inicialmente com os seus dados com faces pares voltadas para cima, ou seja, todos eles estão com energia 0 e, portanto, a energia total é nula.

3. Antes do início dos lançamentos dos dados, cada estudante fará uma "aposta" em qual número a Soma estará após todos os dados lançados;

4. Cada aluno lançará seus dados, simultaneamente, e reportará o valor para o professor. Assim, o valor da soma será atualizado a cada lançamento dos alunos e plotado em um gráfico feito a mão no quadro ou em qualquer outro software com projeção para os estudantes.

5. Os lançamentos serão realizados até o ponto em a soma se estabilize próximo à metade do número total de dados (72 no caso de se usar os 144 dados).

Observação:

Se, após todos os lançamentos, a soma ainda estiver com um valor que não se aproxima suficientemente do valor de equilíbrio ($N/2$), deve-se aproveitar a situação para discutir os conceitos de probabilidade e, quem sabe, calculá-la para aquele valor de soma. Deve-se retormar a discussão a respeito do modelo e a discussão deve ser conduzida de forma que o estudante compreenda que o número de transições aleatórias (lançamentos de dados) por átomo é imensamente maior do o que o foi realizado na atividade. Neste caso, incentiva-se que todos estudantes repitam o lançamento várias vezes e, ao final desses lançamentos, todos reportem o valor obtidos pelos seus dados. Neste caso, é muito provável que a soma tenha convergido pra o seu valor de equilíbrio ($N/2$).

A grande meta desta atividade é mostrar para o aluno a evolução do gráfico da soma dos valores dos dados. Esta tendência inequívoca ao valor ($N/2$) é análogo ao que acontece em um sistema termodinâmico. Neste ponto, o professor tem que estar preparado para retomar a discussão associado aos micro e macroestados. Ele precisa convencer o estudantes de a configuração de equilíbrio é aquela com o maior número de microestados que dão aquele valor de soma. Mesmo que não efetue dos os cálculos, é importante que se mostre a diferença entre os microestados associados a cada valor da soma (macroestado).

6.4.2 Aprendizagem esperada após aplicação da segunda aula.

Esperamos que, após esta aula, os estudante sejam capazes de compreender:

1. O que significa o equilíbrio termodinâmico;
2. Que é possível obter valores suficientemente estáveis, mesmo se tratando de sistemas formados por eventos aleatórios;
3. Que natureza pode exibir comportamento probabilístico.

6.5 Resumo das atividades

Abaixo, seguem as atividades das duas aulas resumidas.

Aula	Atividade	Descrição	Tempo
1	Pré- teste	Questionário com (03) três questões de múltipla escolha	10 minutos
	Atividade interativa	Expor os conceitos de Análise combinatória e probabilidade,	30
	Atividade dinâmica	Mostrar alguns exemplos de nosso dia a dia de como podemos utilizar a combinatória e a probabilidade para resolver situações-problemas, através dos jogos de dados podemos mostrar para os alunos como fazer para encontrarem a frequência relativa, pois esta frequência estima a probabilidade para o lançamento de um dado. Introduzir a ideia de sistema macroscópico, citar exemplo de loteria, jogos de roleta ,bozó, placar de resultados para jogos de futebol ...	10
	Roda de conversa	Promover uma interação entre o aluno - professor , professor e aluno sobre o tema trabalhado neste dia	10 minutos

Tabela 6.1: Sequência didática para a compreensão sobre Probabilidade versus frequência relativa

Aula	Atividade	Descrição	Tempo
2	Pré- teste	Questionário com (03) três questões de múltipla escolha	10 minutos
	Atividade interativa	Mostrar que mesmo a partir de uma dinâmica aleatória (lançamento de dados) é possível concluir que existe uma tendência absolutamente natural para um resultado. Diante de uma dinâmica aleatória é possível encontrarmos o macroestado mais provável ? E como este macroestado é formado ?	30
	Atividade dinâmica	Desenvolver uma atividade utilizando os dados e através deste será possível verificar esta tendência natural de resultado, gerar gráficos para mostrar este comportamento que tende ao natural , ou seja o equilíbrio,exemplo colocar os dados dentro de um recipiente e os que tiverem maior número de cores, estes terão maior possibilidade de serem escolhidos quando retirados do recipiente .	10
	Roda de conversa	Promover uma interação entre o aluno - professor , professor e aluno sobre o tema trabalhado neste dia	10 minutos

Tabela 6.2: Sequência didática para a compreensão sobre Probabilidade versus frequência relativa

Capítulo 7

Relatos sobre a aplicação do produto educacional

A sequência didática deste produto educacional foi inicialmente planejada para ser desenvolvida ao longo de duas aulas. Entretanto, devido a circunstâncias específicas enfrentadas pela turma em que foi aplicado, a conclusão integral da atividade não foi possível dentro desse prazo estabelecido, demandando um total de três aulas. Ressalta-se, no entanto, que em situações ideais e, considerando o nível de conhecimento prévio dos alunos, a sequência poderia ser realizada em apenas duas aulas.

7.0.1 Primeira aula

A primeira aula consistiu na introdução do conteúdo e do produto educacional aos alunos. Iniciou-se com uma investigação composta por um conjunto de três perguntas discursivas, com o intuito de avaliar o conhecimento prévio dos estudantes. Pedimos que as perguntas fossem respondidas individualmente, sem auxílio de recursos pedagógicos. No segundo momento, utilizando o material fornecido pelo produto educacional, foi iniciada uma aula interativa, na qual os conceitos de probabilidade, frequência relativa e análise combinatória foram abordados. Com o intuito de facilitar a compreensão desses tópicos pelos alunos, foram dados alguns exemplos associados ao fenômeno da aleatoriedade. Por exemplo, deixamos que os estudantes explorassem materiais como bozó, baralho, globo de bingo, moedas e dados, sempre incentivando a participação coletiva. Essas atividades foram muito bem aceitas e demonstrara-se de suma importância para a aquisição de conceitos.

Considerando que a probabilidade não é um tema tão familiar aos estudantes em sua trajetória escolar, uma vez que não é amplamente abordado no Ensino Fundamental e Médio, fizemos um acompanhamento especial aos alunos conforme suas necessidades, elucidando o significado de termos como aleatoriedade, estimativa, probabilidade, macroscópico, microscópico, frequência, entre outros. Dessa forma, os alunos foram minimamente capazes de estabelecer conexões entre os conceitos apresentados e seus conhecimentos prévios.

7.0.2 Descrição das atividades

O produto educacional foi implementado em uma turma do 2º ano do Ensino Médio modalidade Regular, composta por um total de 20 alunos, na Escola Estadual Leonidas Antero de Matos, localizada em Cuiabá - MT. Durante o início da aula, ao abordar o tópico proposto pelo produto educacional, pude constatar a falta de familiaridade dos alunos com os termos utilizados para explicar o assunto em questão. Diante dessa constatação, foi necessário fornecer explicações acerca do significado de termos como aleatoriedade, probabilidade, estimativa, tendência, equilíbrio, previsão, entre outros.

É importante ressaltar que, embora esses termos estejam relacionados a diversos fenômenos presentes no cotidiano dos alunos, eles não possuíam conhecimento prévio acerca de seus significados específicos. Por exemplo, embora os alunos tivessem experiência com o fenômeno da aleatoriedade, eles desconheciam o termo que o descrevia. Essa lacuna de conhecimento foi observada em relação aos demais termos mencionados anteriormente.

Esse aspecto constituiu-se como um fator que impôs dificuldades aos alunos na realização do pré-teste, tornando necessário esclarecer o significado dos termos abordados. Após essas explicações, os conceitos de análise combinatória, aleatoriedade, frequência relativa e probabilidade foram discutidos. Talvez um dos motivos pelos quais os alunos não conseguiram responder nem uma pergunta antes da explicação, tenha sido falta de tempo para trabalhar melhor os subsunções dos mesmos, ou até falta de mais estimo para que os mesmos conseguissem buscar em sua estrutura cognitiva alguma resposta para aquela pergunta, o fato é que, nem um dos 20 alunos conseguiram responder os questionários. Em seguida, foram propostos jogos como dados, bozó, moeda, globo e baralho, a fim de proporcionar aos alunos uma visualização concreta de eventos aleatórios, onde os mesmos alunos conseguiram responder os questionários, mas só conseguiram assimilar de maneira mais efetiva quando os jogos foram realizados e a explicação foi dado para os mesmos.

Os alunos realizaram lançamentos de dados conforme proposto no jogo, respeitando todas as condições iniciais descritas no produto educacional. Os valores resultantes de cada face alcançada (1, 2, 3, 4, 5 e 6) foram registrados em uma planilha, permitindo o cálculo do somatório geral para cada uma delas. Esse momento revelou-se fundamental, pois os alunos conseguiram estabelecer uma conexão entre o que estavam vivenciando em sala de aula e as experiências cotidianas, uma vez que muitos desses jogos já eram praticados durante os intervalos escolares. Ficou evidente que essa atividade foi muito apreciada pelos alunos, que se envolveram ativamente em seu desenvolvimento e comentários do tipo:

"Professora, vamos fazer um sorteio do seu carro e vamos calcular qual a probabilidade de eu ganhá-lo!!!!"

Os alunos fizeram algumas perguntas e, apesar de já terem compreendido o que era um fenômeno aleatório, pediram que fossem citados mais exemplos. Na concepção de alguns dos alunos, o resultado de eventos aleatórios eram exatos, assim como os que obtemos através da mecânica determinística. Somente após as explicações e a realização dos lançamento de dados e dos jogos é que os mesmos começaram a compreender que, para os eventos aleatórios, possuímos apenas estimativas e que, portanto, este é assim que devemos estudar o comportamento de sistemas termodinâmicos. Ao final da aula, pude perceber que os alunos já tinham uma compreensão melhor sobre os fenômenos aleatórios e a importância da teoria da probabilidade para sua descrição. Foi feita uma roda de conversa e os alunos foram instigados a dar exemplos de fenômenos aleatórios que fizessem parte do seu cotidiano. Diferentemente do que foi experienciado no início, ficou evidente que houve uma ganho no que diz respeito à capacidade dos estudantes de fornecerem respostas mais assertivas e precisas. Uma observação importante deve ser ressaltada: o fato dos alunos desconhecerem completamente o papel da aleatoriedade e da probabilidade, gerou um atraso no cronograma de aplicação do produto. Dedicamos mais tempo na construção de exemplos e em atividades que familiarizassem os estudantes com estes temas. Este é um julgamento pessoal de cada professor que decidir aplicar este produto. Recomendamos que professor investigue cuidadosamente o nível de conhecimento de sua turma. Isso é muito importante para que estas atividades produzam algum impacto no processo de aprendizagem significativa dos alunos.

7.0.3 Segunda aula.

No começo da segunda aula foi feita uma revisão sobre o conteúdo estudado na aula anterior. A roda de conversa foi a modalidade escolhida para tal finalidade.

7.0.3.1 Como a aula transcorreu

Após a revisão, prosseguiu-se com a continuidade da atividade que não havia sido concluída na primeira aula. Foi projetada uma planilha do Excel na parede, na qual foram registrados todos os somatórios realizados na aula anterior. Em seguida, procedeu-se aos cálculos da frequência relativa para cada face do dado, sendo proposto aos alunos que realizassem os cálculos também. Durante a atividade, alguns alunos expressaram desconhecimento em relação à probabilidade de se obter cada uma das faces do dado. No entanto, ao término da atividade, estes mesmos alunos relataram ter compreendido melhor a relação entre a frequência relativa e a probabilidade.

Em seguida, foi aplicado o pré-teste da segunda aula, Assim como na primeira, também houve problemas relacionados com o significados das palavras contidas nas perguntas e, por isso, foram adotadas as medidas necessárias para sanar essa dificuldade dos alunos.

No momento em que os conceitos foram sendo abordados, os alunos, na grande maioria, afirmaram que não havia maneira de se obter resultados para os sistemas de natureza termodinâmica. Fizeram muitas perguntas e ficaram abismados com a estimativa de números de átomos que, em média, a matéria possui. A definição de sistemas termodinâmicos e distinção entre estados microscópicos e macroscópicos tomou um tempo significativo da aula, de forma que não foi possível desenvolver a atividade da aplicação do jogo, ficando esta para a terceira aula.

7.0.4 Terceira aula

No começo da segunda aula foi feita uma revisão sobre o conteúdo estudado na aula anterior. A roda de conversa foi a modalidade escolhida para tal finalidade.

7.0.4.1 Como a aula transcorreu

Durante a revisão, assim como nas outras aulas, os alunos interagiram bastante através de perguntas e respostas. Após este momento inicial, foi realizado o jogo proposto para a segunda aula (seção 6.4.1). Foram discutidos, em mais detalhes os conceitos de equilíbrio, microestado e macroestado. Em poucas jogadas o valor do soma atingiu a marca em torno de $S = \frac{N}{2}$, o que resultou. Foi lançado o desafio de se tentar à condição inicial (todos os dados com faces pares) e verificou-se que a configuração final era irreversível.

7.1 Registro das atividades

Figura 7.1.1: Aluna fazendo o lançamento de moeda de dez centavos.

Figura 7.1.2: Alunos jogando bozó

Figura 7.1.3: Alunos jogando cartas.

Figura 7.1.4: Alunos fazendo o cálculo da frequência relativa.

7.2 Avaliação dos questionários aplicados em sala de aula

Questionário 1

Resultados da Pergunta 1 do Questionário 1:

O que você entende como um fenômeno aleatório?

- 15 (75%) respostas corretas;
- 3 (15%) incorretas e
- 2 (10%) respostas que não puderam ser avaliadas devido à imprecisão.

Após a prática com os dados, cartas, moedas os alunos só foram de responder. Isso que os jogos se mostraram um recurso potencialmente significativo, uma vez que, antes dessas atividades, os alunos não possuíam nenhum conhecimento sobre eventos aleatórios e seu significado.

Resultados da Pergunta 2 do Questionário 1:

É possível que processos tenham caráter previsível mesmo sendo compostos por processos aleatórios?

- 14 (70%) respostas corretas e
- 6 (30%) incorretas.

Assim como na pergunta anterior, os jogos auxiliaram a compreensão dos alunos para responder a essa pergunta, permitindo que visualizassem a possibilidade de prever os resultados de lançamentos de dados e estimar valores mesmo em eventos aleatórios.

Resultados da Pergunta 3 do Questionário 1:

Onde você aplica o conceito de probabilidade na sua vida cotidiana?

- 12 (60%) acertos, pois os alunos conseguiram compreender o conceito de fenômeno aleatório. No entanto,
- 5 (25%) respostas foram incorretas e
- 3 (15%) respostas foram imprecisas, tornando difícil avaliar sua compreensão.

Além disso, citar exemplos de aplicação na vida cotidiana também foi um desafio para alguns alunos, uma vez que questionavam a aleatoriedade de certos eventos.

Questionário 2

Resultados da Pergunta 1 do Questionário 2:

O que é equilíbrio?

- 18 (90%) respostas corretas e
- 2 (10%) incorretas.

Os alunos foram capazes de mencionar corretamente o conceito de equilíbrio e citar exemplos relevantes.

Resultados da Pergunta 2 do Questionário 2:

É possível que processos tenham caráter previsível mesmo sendo compostos por processos aleatórios?

- 15 (75%) respostas corretas,
- 4 (20%) respostas em branco e
- 1 (5%) resposta incorreta.

Nesse momento, os alunos já estavam mais familiarizados com o conteúdo abordado, o que contribuiu para o desempenho satisfatório.

Resultados da Pergunta 3 do Questionário 2:

Se todos os estudantes da sala jogarem uma moeda para o alto, quantas caras você espera obter?

- 16 (80%) respostas corretas e
- 4 (20%) incorretas.

Alguns alunos erraram ao tentar realizar cálculos matemáticos, porém, aqueles que responderam de forma discursiva obtiveram as respostas corretas.

Avaliação Final

Pergunta 1

Como surge a termodinâmica?

- 16 alunos souberam escrever sobre o que aprenderam sobre fenômeno aleatório ,

- 1 não soube responder não foi possível avaliar,
- 3 responderam errado , referente

Pergunta 2

Na grande maioria, os fenômenos que ocorrem na natureza são irreversíveis?

- 17 alunos souberam escrever que é possível encontrar chances para um evento aleatório ,
- 1 responderam errado1
- não foi possível avaliar, 2 responderam errado , com

Pergunta 3

Por que mesmo um sistema formado por eventos aleatórios (jogos de dados) é possível, após várias repetições, encontrar o seu macroestado mais provável?

- 15 pessoas acertaram as respostas e
- 4 não soube explicar e
- 1 não soube responder.

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

Uma de nossas metas com este produto educacional era construir um conjunto de atividades com o intuito de servirem como uma ferramenta para auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem significativa dos alunos na compreensão do papel da probalidade na emergência do comportamento termodinâmico, permitindo que o professor assumisse o papel de mediador nesse processo. Além disso, estruturamos as ações de modo que o aluno foi posicionado no processo como um agente ativo, contribuindo (microscopicamente, como um átomo) para o resultado coletivo (macroscópico, como a energia de uma pedaço de metal).

Após a aplicação de cada atividade, avaliamos o entedimento dos estudantes por meio de questões discursivas em organizadas em um questionário (Ver Apêndice (7)). De acordo com a resposta, classificamos os resultados em três categorias: (1) os alunos que assimilaram bem o conteúdo e conseguiram expressar e reproduzir seu conhecimento por escrito; (2) os alunos que parecem ter assimilado mas não conseguiram expressar e reproduzir seu conhecimento por escrito; (3) aqueles que não conseguiram assimilar o conteúdo ou não conseguiram transmiti-lo de forma escrita.

É importante destacar que a motivação e o interesse do estudante estavam ancorados nas atividades práticas, quase lúdicas, propostas com os dados, moedas e cartas de baralho. Os resultados obtidos por meio da análise dos questionários, revelam que ***a capa-***

cidade de fazer boas perguntas é um excelente caminho para se obter boas respostas. Os questionamentos que emergiram das atividades e discussões foram dissolvidos por meio das explicações do professor. Sendo assim, baseado neste estudo de caso[1], podemos intuir[2] que o produto educacional tem um grande potencial para a construção do conhecimento significativo dos alunos. As discussões iniciais indicavam um profundo desconhecimento a respeito de noções como aleatoriedade, probabilidade e comportamento coletivo. As atividades práticas, foram um caminho agradável pelo o qual os conceitos foram sendo moldados por meio de questionamento dos resultados e consolidados pela experimentação proposta no produto educacional. Nossos resultados evidenciam o que, em linhas gerais, menciona Ausubel [2]*quando o aluno aprende de forma significativa, ele consegue verbalizar e expressar seu conhecimento*.

Esperamos que este produto contribua para o preenchimento da imensa lacuna produzida pela falta de atenção à teoria da probabilidade nos currículos do ensino médio. Por exemplo, nos currículos dos cursos de física do ensino médio, pouco é mencionado o caráter estatístico por trás da origem dos fenômenos termodinâmicos, mesmo que a Probabilidade seja um tema importante no currículo de matemática [6, pag. 546]. Ela é deixada em segundo plano e isto soa como uma inversão de valores fundamental, principalmente quando se avalia que a realidade imposta à sociedade está intimamente ligada ao comportamento coletivo. Muito além do comportamento de sistemas termodinâmicos, as teorias de probabilidade estão associadas, por exemplo, às tomadas de decisões para as medidas de governo que, por sua vez, dependem, fundamentalmente, de dados consolidados a partir de estatísticas. Os resultados destas análise podem ter direcionamentos distintos dependendo das diferentes características regionais. Particularmente, no caso da pandemia que nos assolou, a dificuldade para compreensão da eficiência de vacinas e ineficiência de tratamentos precoces, tornou evidente a necessidade de se abordar os conceitos fundamentais acerca de probabilidade, aleatoriedade e estatística. Diante dos resultados que

[1]Por razões operacionais, não foi possível compor um grupo de controle para avaliar inequivocamente os resultados associados aos benefícios de nossa estratégia para a apresentação do conteúdo.

[2]Toda intuição está unicamente baseada na impressão pessoal do autor e, portanto, não está validado por processos de controle.

obtivemos com este produto educacional, percebemos que é possível que a probabilidade deixe de ser um conteúdo pouco explorado e que a *distância* da realidade dos alunos seja estreitada, propiciando uma condição em que o aluno compreenda a importância de se reconhecer a aleatoriadade como algo inerente à natureza, mas que sob a ótica da probabilidade ela pode ser compreendida para o bem do desenvolvimento da humanidade, da ciência e da tecnologia.

Referências Bibliográficas

[1] André Viana Andrade and Nelio Marco Vincenzo Bizzo. A aprendizagem significativa em questão: contexto, processo, produto. *Ciência & Educação*, 17(4):891–905, 2011.

[2] D. P. Ausubel. *Aquisição e retenção de conhecimentos*. Moraes, São Paulo, 1982.

[3] David P. Ausubel. The cognitive structure of learning outcomes. *The Psychological Review*, 70(6):321–327, 1963.

[4] Mário Barreto and Eduardo Krempser. *Introdução a teoria das probabilidades*. IME-USP, 2002.

[5] Paulo Rogério Bastos and Wagner Ribeiro. *Estatística e probabilidades: Conceitos, exemplos e aplicações*. Editora Saraiva, 2016.

[6] BNCC. Base nacional comum curricular.

[7] H. B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley, 2.ed. edition, 1985. ISBN: 0-471-86256-8.

[8] Carlos Cassela and Paulo Bergo. *Probabilidade e estatística: A teoria da medida na análise de dados*. IME-USP, 2006.

[9] S. S. Dourado and M. A. Marchiori. Processos quase estáticos, reversibilidade e os limites da termodinâmica. *Rev. Bras. Ensino FÃs.*, 41(2), 2019.

[10] G. Iezzi. *Fundamentos de matemática elementar, 5:Combinatória e Probabilidade-*. Atual, 2004.

[11] A.N. Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability*. AMS Chelsea Publishing Series. Chelsea Publishing Company, 1956.

[12] Marco AntÃŽnio Moreira. A aprendizagem significativa segundo ausubel. *Revista Brasileira de Pesquisa em EducaÃ§Ã£o em CiÃªncias*, 6(2):155–179, 2006.

[13] Joseph D. Novak and D. Bob Gowin. *Aprendizagem significativa: A teoria de David Ausubel*. Editora WMF Martins Fontes, 2012.

[14] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica*, volume 2. Editora Edgar Blucher, São Paulo, 4.ed. edition, 2002. ISBN: 978-85-212-0299-8.

[15] S.R.A. Salinas. *Introdução a Física Estatística Vol. 09*. EDUSP, 1997.

[16] Ismael Lopes Ventura. *Elementos de estatística e probabilidade*. Editora LTC, 2014.

[17] Mark Waldo Zemansky and Richard H. Dittman. *Heat and Thermodynamics*. McGraw-Hill, 7.ed. edition, 1997. ISBN: 0-07-017059-2.