UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA

Victor Gustavo Cardoso Prata

LEI DE STEFAN-BOLTZMANN E EFEITO CASIMIR PARA FÓTONS ESCUROS

CUIABÁ-MT
2023

VICTOR GUSTAVO CARDOSO PRATA

LEI DE STEFAN-BOLTZMANN E EFEITO CASIMIR PARA FÓTONS ESCUROS

Trabalho de Dissertação submetido ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador : Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos

Cuiabá, Julho de 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

P912l Prata, Victor Gustavo Cardoso.
Lei de Stefan-boltzmann e Efeito Casimir para fótons escuros [recurso eletrônico] : Lei de Stefan-boltzmann e Efeito Casimir para fótons escuros / Victor Gustavo Cardoso Prata. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 97 f., il. color., pdf). -- 2023.

Orientador: Alesandro Ferreira dos Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Cuiabá, 2023.
Modo de acesso: World Wide Web: https://ri.ufmt.br.
Inclui bibliografia.

1. Efeito Casimir. 2. Lei de Stefan-Boltzmann. 3. Fóton escuro. 4. Matéria escura. I. Santos, Alesandro Ferreira dos, *orientador*. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: "LEI DE STEFAN-BOLTZMANN E EFEITO CASIMIR PARA FÓTONS ESCUROS"

AUTOR : MESTRANDO Victor Gustavo Cardoso Prata

Dissertação defendida e aprovada em **28** de **julho** de **2023.**

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

Presidente Banca / Orientador Doutor Alesandro Ferreira dos Santos

Instituição: Universidade Fedeal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Harold Sócrates Blas Achic

Instituição: Universidade Fedeal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Instituição: Universidade de Brasília - UnB

Examinador Suplente Doutor Maurício Godoy

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

VICTOR GUSTAVO CARDOSO PRATA

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Física, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Orientador: Dr. Alesando Ferreira dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT

Examinador: Dr. Harold Sócrates Blas Achic
Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT

Examinador: Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorim
Universidade de Brasília - UNB

Cuiabá, Julho de 2023

Agradecimentos

Sou imensamente grato, em primeiro lugar, ao meu orientador, Dr. Alesandro Ferreira dos Santos, que gentilmente me guiou em todos os aspectos deste tema desafiador. Agradeço aos meus amigos, Wendel Lopes, Higor Ribeiro, Gustavo Gamero, Victor Manuel, Luiz Gustavo e Karol Curvo, por estarem ao meu lado nos momentos difíceis e compartilharem comigo as alegrias. Minha gratidão se estende à minha melhor amiga e amante, Stephanny S. C. T. de Paula, que sempre me ofereceu um apoio emocional valioso e, mais do que ninguém, me conhece e enfrenta todas as dificuldades e alegrias que o tempo proporciona. Também não posso deixar de expressar minha gratidão à Capes, à UFMT e, em especial, ao Programa de Pós-Graduação em Física. No entanto, quero destacar que as pessoas mais importantes em minha vida são meus pais, Wemerson Cardoso Campos e Rosenilda Rodrigues Prata, seus amores, da forma que podem, e suporte inabaláveis foram fundamentais para o meu sucesso e finalização de mais uma etapa em minha vida.

Resumo

Este trabalho considera a presença de fótons escuros, os quais podem ser interpretados como matéria escura. Estes fótons escuros interagem através de um termo de mistura com os fótons usuais descritos pela eletrodinâmica de Maxwell. Usando o formalismo da dinâmica de campos térmicos (TFD - do inglês Thermo Field Dynamics) o efeito Casimir em temperaturas zero e finita, e a lei de Stefan-Boltzmann são calculados. Nossos resultados mostram que há correções devido a presença de fótons escuros aos resultados usuais da eletrodinâmica quântica.

Palavras-chave: Efeito casimir, TFD, Lei de Stefan-Boltzmann, dinâmica dos campos térmicos, fótons escuros, matéria escura e compactificação.

Abstract

This work considers the presence of dark photons, which can be interpreted as dark matter. These dark photons interact through a mixing term with the usual photons described by Maxwell's electrodynamics. Using the formalism of Thermo Field Dynamics (TFD), the Casimir effect at zero and finite temperatures, as well as the Stefan-Boltzmann law, are calculated. Our results show that there are corrections due to the presence of dark photons to the usual results of quantum electrodynamics.

Keywords:Casimir effect, TFD (Thermal Field Dynamics), Stefan-Boltzmann Law, thermal field dynamics, dark photons, dark matter, and compactification.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

A matéria escura é uma entidade hipotética que se presume responsável por aproximadamente 85% da matéria do universo. O termo **escura** é utilizado em razão da suposta falta de interação com o campo eletromagnético, o que implica a inabilidade de absorção, reflexão ou emissão de radiação eletromagnética, no qual dificulta sua detecção. Alguns efeitos gravitacionais inexplicáveis pelas atuais teorias da gravidade tais como, curvas de rotação da galáxia [Babcock 1939], dispersões de velocidade em galáxias elípticas [Faber e Jackson 1976], entre outros, sugerem a presença de matéria escura. Por consequência, muitos especialistas sustentam que a matéria escura é vastamente abundante no universo e desempenha papel fundamental em sua estruturação e evolução [Buckley e Profumo 2012]. Existem algumas propostas para entender o que é a matéria escura como, Axion [Sugiyama, Takada e Kusenko 2023], WISP do inglês weakly interacting sub-eV particle [Jaeckel e Ringwald 2010], e em nosso trabalho escolhemos o fóton escuro [Filippi e Napoli 2020]. Vamos entender como essa partícula pode nos ajudar no entendimento de matéria escura e como ela pode se comportar em determinado sistema físico.

A hipótese de novas partículas carregadas pelas mesmas interações de calibre das partículas comuns sempre foi considerada além do Modelo Padrão (MP), impulsionando especulações teóricas e pesquisas experimentais nos últimos 50 anos [Fabbrichesi, Gabrielli e Lanfranchi 2020]. No entanto, resultados negativos dessas pesquisas e a frustração em descobrir qualquer uma dessas novas partículas hipotéticas têm desafiado cada vez mais essa suposição.

O MP é uma teoria que unifica o eletromagnetismo, a força forte e a força fraca sob um grupo de calibre denominado $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ [Gaillard, Grannis e Sciulli 1999]. Suas previsões foram confirmadas com alta precisão em várias áreas, incluindo a determinação do momento magnético anômalo do elétron [Aoyama, Kinoshita e Nio 2019] e a descoberta do bóson de Higgs [Brout, Englert e Gunzig 1978, Higgs 1964]. Mas, o MP apresenta limitações na explicação de certas observações, como a existência de massa para os neutrinos [Barger, Marfatia e Whisnant 2012] e a natureza da matéria e energia escura [Beacham et al. 2019].

Para tratar essas questões, extensões do MP, como a teoria das cordas [Morozov 1992], foram propostas. Uma possibilidade comum nessas extensões [Kroff e Malta 2020] é adicionar um grupo extra $U(1)_X$ ao grupo de simetria. Esse setor adicional interage com a hipercarga fraca $U(1)_Y$, resultando em uma mistura com o fóton eletromagnético $U(1)_{EM}$ em baixas energias. O novo bóson de spin-1 associado a $U(1)_X$, é eletricamente neutro e não se acopla diretamente aos campos de matéria do MP. Portanto, além da mistura com o fóton, o bóson X permanece invisível, sendo chamado de fóton oculto ou escuro.

Neste trabalho será abordado como o fóton escuro irá afetar o Efeito Casimir à temperatura zero e temperatura finita, além do seu efeito sobre a Lei de Stefan-Boltzmann considerando o campo eletromagnético. A abordagem utilizada será a partir da dinâmica dos campos térmicos TFD (do inglês Thermo Field Dynamics).

A primeira abordagem sistemática para lidar com uma teoria quântica de campos em temperatura finita foi introduzida por Takeo Matsubara em 1955 [Matsubara e Matsuda 1955]. Isso foi feito utilizando o formalismo de tempo imaginário. A primeira generalização desse formalismo foi realizada por H. Ezawa, Y. Tomozawa e H. Umezawa [Ezawa, Tomozawa e Umezawa 1957], estendendo o trabalho de Matsubara para a teoria quântica de campos. Eles também descobriram condições de periodicidade para funções de Green de campos bosônicos e fermiônicos, conhecidas como condição KMS (Kubo, Martin e Schwinger).

Embora o formalismo de tempo imaginário seja capaz de descrever com precisão os fenômenos térmicos da teoria quântica de campos, algumas dificuldades surgiram em áreas da física como a física da matéria condensada, onde a dependência temporal é essencial. Isso levou ao surgimento de outras propostas de teoria quântica de campos térmica que mantivessem a informação temporal. Uma das abordagens propostas é a formulação do caminho de tempo fechado, introduzido por J. Schwinger [Schwinger 1961], Mahanthapa e Bakshi [Bakshi e Mahanthappa 1963] e Keldish [Keldysh et al. 1965]. Essa abordagem utiliza um caminho fechado no plano de tempo complexo, de forma que o contorno segue ao longo do seu eixo real e depois volta. Uma das abordagens mais importantes para estudar sistemas quânticos a temperatura finita foi proposta por Yasushi Takahashi e Hiroomi Umezawa em 1975, sendo denominada como Dinâmica de Campos Térmicos (TFD) [Takahashi e Umezawa 1975]. Essa teoria é capaz de englobar todas as ferramentas da teoria quântica de campos, mas considerando explicitamente a dependência da temperatura e preserva a informação temporal do sistema. O Formalismo TFD introduz uma duplicação do espaço de Hilbert original, de modo que a temperatura é incorporada por meio de uma transformação de Bogoliubov.

No próximo capítulo, será introduzido o formalismo Lagrangiano, que é fundamental, pois a partir dele discutiremos ideias da teoria de campo. Posteriormente, no capítulo 3, será apresentada a teoria Eletromagnética, passando pelas equações de Maxwell e chegando até mesmo à quantização do campo eletromagnético. Isso servirá como base para entendermos o estado de vácuo associado a esse campo, o qual será discutido no capítulo 4 para compreendermos as flutuações de campos responsáveis por gerar o efeito Casimir. Com todas essas ferramentas, discutiremos os incentivos teóricos e matemáticos necessários para o entendimento dos fótons escuros no capítulo 5. Feito isso, no capítulo 6, vamos mostrar todo o formalismo TFD, desde a sua motivação até a sua discussão topológica.

Por fim, aplicaremos esse formalismo ao campo eletromagnético, juntamente com a teoria do fóton escuro, obtendo novos resultados para o efeito Casimir em temperaturas zero e finita, além de analisar seu efeito sobre a Lei de Stefan-Boltzmann.

2 O formalismo Lagrangiano

O formalismo Lagrangiano é importante no estudo da teoria de campo, pois fornece uma maneira de descrever as leis de movimento e interações em um sistema físico. Ele utiliza conceitos que serão explicados posteriormente no decorrer do capítulo, como o princípio de mínima ação, que estabelece a trajetória física de uma partícula ou campo. Através desse princípio, obtemos equações que governam a evolução desse campo, bem como leis de conservação e simetrias. Além disso, o formalismo Lagrangiano permite a formulação covariante, o que é essencial neste contexto e em fenômenos que sejam consistentes com a relatividade restrita [Einstein 1905]. Ele também nos proporciona a base necessária para a generalização para a teoria quântica de campos.

Introduzida pelo matemático e astrônomo italiano-francês Joseph-Louis Lagrange em 1788, a mecânica de Lagrange é uma formulação da mecânica clássica que se baseia no princípio de ação estacionária [Thornton e Marion 2021]. Em mecânica clássica usamos as equações de Euler-Lagrange para derivarmos as equações de movimento do sistema. Quando as ideias do formalismo Lagrangiano são aplicados a campos, podemos usar as mesmas técnicas para derivar as equações de campo.

Um campo é uma grandeza física que tem valor associado em cada ponto do espaço. Como exemplo temos o campo gravitacional, que atribui um potencial gravitacional a cada ponto do espaço e também o campo de temperatura, onde será associado a cada ponto um valor de temperatura. Além disto, é vantajoso entendermos este formalismo por questão de simplicidade matemática, uma vez que neste formalismo trabalhamos apenas com quantidades escalares. Nivaldo Lemos até destaca a importância desse formalismo da seguinte forma:

"Lagrange talvez tenha feito mais do que qualquer outro analista ... ao mostrar que as mais variadas consequências a respeito do movimento dos sistemas dos corpos podem ser derivadas de uma fórmula radical; a beleza do método adequado à dignidade dos resultados, a ponto de fazer de sua grande obra uma espécie de poema científico" [Lemos 2007].

2.1 A ação e as equações de movimento

A função de Lagrange em mecânica clássica ou, simplesmente, Lagrangiana L é definida por,

$$L = T - V, \tag{2.1}$$

onde $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ é a energia cinética do sistema e V a energia potencial [Goldstein, Jr e Sr 2012].

Se realizarmos a integração dessa quantidade com respeito ao tempo, vamos obter uma nova quantidade, dita ação,

$$S = \int L dt. \tag{2.2}$$

A ação é um funcional, ou seja, ao aplicarmos uma função, ela vai nos retornar um número. As partículas têm possibilidades infinitas de trajetória de um ponto A para um ponto B, dado o princípio de mínima ação percorrem o menor caminho, onde o caminho de menor ação representará $S \to S + \delta S$, sendo $\delta S = 0$. Veja a Figura 1.

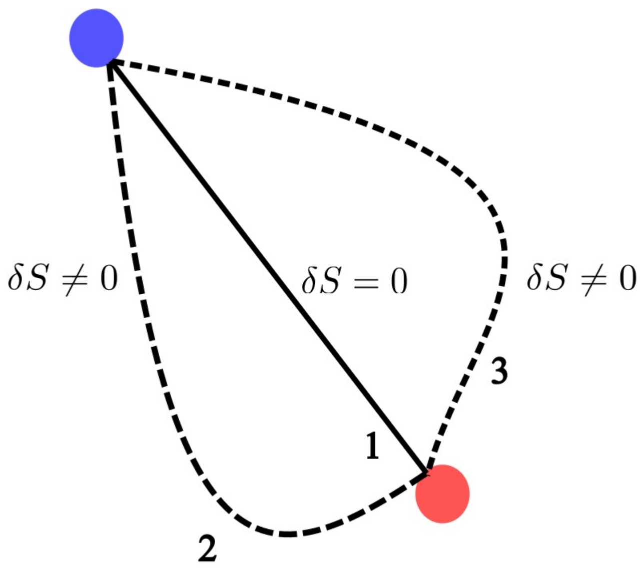

Figura 1 – Princípio de mínima ação, *imagem modificada* [Fmercury 2007].

O cálculo da variação $\delta S = 0$, vai nos levar às equações de movimento do sistema [Neto 2004]. Como um exemplo, vamos derivar a segunda lei de Newton. Para tal, consideramos uma pequena mudança nas coordenadas, e a dependência na Lagrangiana de x e $\dot{x}$,

$$x \mapsto x + \varepsilon, \tag{2.3}$$

onde ε é pequeno. Esta variação é limitada para manter os pontos finais fixos, isto é

$$\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = 0. \tag{2.4}$$

Usando uma expansão de Taylor, e considerando somente uma coordenada espacial, o potencial pode ser escrito da seguinte forma,

$$V(x+\varepsilon) \approx V(x) + \varepsilon \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}x}. \tag{2.5}$$

E o termo cinético é dado por,

$$(\dot{x}+\dot{\varepsilon})^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}^2 \approx \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varepsilon}. \tag{2.6}$$

Podemos fazer essa aproximação, pelo fato de ε ser pequeno, então o termo quadrático ficaria ainda menor, podendo ser desprezado. Podemos escrever a ação (2.2) como,

$$S = \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varepsilon}) - (V(x) + \epsilon\frac{dV}{dx})\right] dt. \tag{2.7}$$

Vamos realizar uma integração por partes, no termo $2\dot{x}\dot{\varepsilon}$, tal que, $f(t) = \dot{x}$ e $\frac{dg}{dt} = \dot{\varepsilon}$. Então,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\frac{dg}{dt}dt = f(t)g(t)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} g(t)\frac{df}{dt}dt, \tag{2.8}$$

onde os termos de fronteira são nulos devido ao fato de que a variação desaparece nos pontos finais. Fazemos essa integração por partes para conseguirmos separar os termos com dependência em ε. Portanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{\varepsilon})dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\varepsilon dt, \tag{2.9}$$

substituindo essa expressão na ação, equação (2.7), vamos conseguir separar o termo ε,

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\varepsilon dt - \int_{t_1}^{t_2} (V(x) + \varepsilon\frac{dV}{dx})dt; \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(-m\ddot{x} - \frac{dV}{dx}\right)\varepsilon dt; \\ &= S + \delta S. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pelo principio de mínima ação, o qual afirma que as as partículas seguirão o caminho de menor ação, isto é, $\delta S = 0$, obtemos,

$$F = -\frac{dV}{dx} = m\ddot{x}, \tag{2.11}$$

está é a segunda lei de Newton, também conhecida como principio fundamental da dinâmica.

Vamos agora considerar uma situação que envolva casos mais gerais, ou seja, teremos coordenadas generalizadas. Temos a coordenada generalizada $q_i(t)$ onde $i = 1, ..., N$, e vamos considerar uma Lagrangiana que será expressa em termos dessas coordenadas e dependerá também da derivada temporal de primeira ordem de $q_i(t)$. Portanto escrevemos a ação como,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \dot{q}(t)\right) dt. \tag{2.12}$$

De forma semelhante a Figura 1, o sistema evolui por uma trajetória de mínima ação, onde o ponto inicial é $q_1 = q_1(t_1)$ e o ponto final $q_2 = q_2(t_2)$, tal que,

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \tag{2.13}$$

Então, variando a ação (2.12),

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt, \tag{2.14}$$

e usando,

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d}{dt}(\delta q), \tag{2.15}$$

obtemos que,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right] dt. \tag{2.16}$$

Novamente, vamos realizar uma integração por partes, onde teremos os termos de fronteira sendo zero, uma vez que a variação desaparece nos pontos finais. Então,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \tag{2.17}$$

Substituindo na variação da ação, obtemos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0. \tag{2.18}$$

e então,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \tag{2.19}$$

Está é a equação de Euler-Lagrange, equação responsável por descrever sistemas complexos. Como dito, essa teoria é feita para coordenadas generalizadas e trabalha com a ideia de partículas, mas como nosso interesse é tratarmos campos, vamos deduzir a equação de Euler-Lagrange para os campos e ver algumas consequências dessa teoria.

2.2 Formulação Lagrangiana na teoria de campo

Vamos então ao formalismo da teoria de campos, que será de importância crucial para tratarmos campos quânticos. Seja o campo $\varphi(x, t)$ escrito na forma $\varphi(x)$, consistindo de um sistema com infinitos graus de liberdade. Agora as variáveis dinâmicas da teoria são os valores do campo, em vez do conjunto discreto de coordenadas q_i [Reinhardt 1996]. Vamos associar a Lagrangiana a densidade Lagrangiana $\mathcal{L}$,

$$L = T - V = \int \mathcal{L} d^3x. \tag{2.20}$$

A ação da teoria é definida como,

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}, \tag{2.21}$$

onde a densidade Lagrangiana apresentará dependência explícita do campo e da derivada do campo,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \tag{2.22}$$

De forma análoga ao desenvolvimento anterior, vamos aplicar o princípio de mínima ação na equação (2.21). Onde será feita a variação com respeito ao campo $\varphi(x)$ e com respeito a primeira derivada do campo $\partial_\mu \varphi(x)$, portanto,

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L}, \\ \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left[\partial_\mu \varphi\right]} \delta \left(\partial_\mu \varphi\right) \right\} = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Considerando somente o segundo termo da expressão acima, vamos fazer uma integração por partes (2.8), tal que,

$$\delta \left(\partial_\mu \varphi\right) = \partial_\mu \left(\delta \varphi\right). \tag{2.24}$$

Os termos do produto na primeira parte da integração por partes desaparece, pois os pontos finais são fixos. Assim resta apenas o segundo termo da integração, isto é,

$$\int dx^4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left[\partial_\mu \varphi\right]} \delta \left(\partial_\mu \varphi\right) = - \int dx^4 \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left[\partial_\mu \varphi\right]} \right) \delta \varphi. \tag{2.25}$$

Com este resultado, voltamos a equação (2.23), substituímos a equação acima e evidenciamos o termo de variação,

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left[\partial_\mu \varphi\right]} \right\} \delta \varphi = 0. \tag{2.26}$$

Com isso temos que o integrando tem que ser igual a zero, o que ímplica em,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left[\partial_\mu \varphi\right]}. \tag{2.27}$$

Essa é a equação de Euler-Lagrange para o campo $\varphi(x)$.

Uma outra quantidade importante é o momento canonicamente conjugado ao campo, o qual é dado por,

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}. \tag{2.28}$$

Com essa quantidade, podemos escrever a densidade Hamiltoniana, isto é,

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}. \tag{2.29}$$

E assim, o Hamiltoniano do sistema é escrito como,

$$H = \int \mathcal{H} d^3x. \tag{2.30}$$

A mecânica Hamiltoniana foi desenvolvida em 1833 como uma reestruturação da mecânica Lagrangiana. Proposta por Sir William Rowan Hamilton a mecânica Hamiltoniana substitui as velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ utilizadas na mecânica Lagrangiana por momentos generalizados [Landau e Lifshitz 2002]. As duas teorias apresentam interpretações da mecânica clássica e descrevem os mesmos fenômenos físicos. A formulação de Hamilton têm vantagens sobre as equações de Lagrange dependendo do sistema físico, por exemplo, caso um sistema uma coordenada q_i não aparecendo no hamiltoniano, a correspondente coordenada de momento p_i é conservada ao longo de cada trajetória. Isso permite reduzir efetivamente o problema de n coordenadas para $(n-1)$ coordenadas [Arnol'd 2013], mas as duas mecânicas são análogas, apenas sendo vantajoso usar uma em um dado sistema físico e outro em outra.

Nesta seção, uma breve introdução aos formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano foi dado. Agora, iremos aplicar esses conceitos para introduzirmos fundamentos de simetria através do Teorema de Noether.

2.3 Teorema de Noether

O teorema de Noether é responsável por relacionar simetria a uma quantidade conservada em um sistema físico. Uma simetria é dita como uma mudança na perspectiva que deixa as equações de movimento invariantes, podendo ser mudanças translacionais, no espaço, no tempo ou mesmo uma rotação. Dizemos que essas são simetrias externas, isso significa que essas simetrias dependem de mudanças no espaço-tempo, mas também existem simetrias internas, sendo mudanças nos campos que não envolvem mudanças em relação ao espaço-tempo. Vamos a dedução desse teorema.

Sejam X e ψ funções conhecidas de (n+1) variáveis reais e seja ϵ um parâmetro arbitrário [Lemos 2007]. Considere a transformação infinitesimal,

$$t \mapsto t' = t + \epsilon X(q(t), t); \tag{2.31}$$

$$q_k(t) \mapsto q_i' = q_i(t) + \epsilon \psi_i(q(t), t). \tag{2.32}$$

Note que,

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \epsilon\dot{X}; \tag{2.33}$$

$$\frac{dt}{dt'} = (1 + \epsilon\dot{X})^{-1} = 1 - \epsilon\dot{X}, \tag{2.34}$$

onde foi utilizado a expansão binomial $(1+x)^n = 1 + nx$. Fazendo uma regra da cadeia na expressão e desconsiderando os termos quadráticos pelo fato de ϵ ser infinitesimal, temos,

$$\frac{dq_i'}{dt'} = \frac{dq_i'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \left(1 - \epsilon\dot{X}\right)\left(\dot{q}_i + \epsilon\dot{\psi}\right) = \dot{q}_i + \epsilon\xi_i, \tag{2.35}$$

onde $\xi_i = \dot{\psi}_i - \dot{q}_i\dot{X}$. E então, dizemos que a integral da ação permanece invariante sob uma transformação, tal que:

$$\Delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} L\left(q'(t'), \frac{dq'}{dt'}(t'), t'\right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t\right) dt = 0, \tag{2.36}$$

onde $\Delta S = S' - S$.

Trocando as dependências do primeiro termo,

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q + \epsilon\psi, \dot{q} + \epsilon\xi, t + \epsilon X\right)(1 + \epsilon\dot{X})dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt, \tag{2.37}$$

e expandindo em série de Taylor até a primeira ordem,

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(q, \dot{q}, t) + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\epsilon\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i\epsilon}\epsilon\xi_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\epsilon X \right\} \left(1 + \epsilon\dot{X}\right) dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Distribuindo o termo $(1 + \epsilon\dot{X})$, vemos que os termos em ϵ^2 vão a zero, portanto,

$$\Delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}X + L\dot{X} \right\} dt = 0. \tag{2.39}$$

Como os intervalos de integração são arbitrários, e $\epsilon \neq 0$, isso nos conduz à condição de Noether,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{\psi}_i - \dot{q}_i\dot{X})\right] + \frac{\partial L}{\partial t}X + L\dot{X} = 0. \tag{2.40}$$

Fazendo uso do Teorema, que nos diz: Sejam q_1,....,q_n coordenadas generalizadas de um sistema com Lagrangiana L. Se L não depende explicitamente do tempo, a quantidade h definida por função energia é,

$$h = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L, \tag{2.41}$$

onde se usarmos as equações de Lagrange obtemos,

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{2.42}$$

então, utilizando das equações de Lagrange (2.41) e (2.42) na equação (2.40), chamada de condição de Noether, temos [Lemos 2007],

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\left[\psi_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \dot{\psi}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \left(\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right)\dot{X} + \frac{\partial L}{\partial t}X &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\left[\psi_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \dot{\psi}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - h\dot{X} - \frac{dh}{dt}X = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\psi_i - hX\right\} &= 0, \end{aligned} \tag{2.43}$$

ou de forma equivalente,

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_i X - \psi) - LX\right\} = 0. \tag{2.44}$$

Assim, deduzimos o teorema de Noether, um dos mais fundamentais da física, pois ele nos diz que existe uma relação entre as leis de conservação e a invariância dos sistemas físicos sob operações de simetria. Vamos analisar uma aplicação para tal teorema na próxima seção.

2.4 Correntes conservadas e o Tensor energia-momento

Vamos aplicar o teorema de Noether, para derivar uma corrente conservada. Considerando a seguinte transformação no campo,

$$\varphi \mapsto \varphi + \delta\varphi. \tag{2.45}$$

E vamos assumir, que diante dessa pequena variação, a Lagrangiana não irá mudar, de tal forma que,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}, \tag{2.46}$$

o que imediatamente implica em $\delta\mathcal{L} = 0$. Portanto, vamos expandir os termos de dependências da Lagrangiana para verificar as consequências desse resultado, lembrando da equação (2.22), temos,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\partial_\mu\left(\delta\varphi\right) = 0. \tag{2.47}$$

Utilizando a equação de Euler-Lagrange para os campos (2.27), podemos substituir o primeiro termo da equação acima, da forma que,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left[\partial_\mu \varphi\right]}\right)\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\partial_\mu\left(\delta\varphi\right) = 0. \tag{2.48}$$

Sabendo que o termo da variação comuta com a deriva, ou seja,

$$\partial_\mu(\delta\varphi) = \delta(\partial_\mu\varphi), \tag{2.49}$$

logo, a equação (2.48), se torna,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left[\partial_\mu\varphi\right]} \right) \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} \delta(\partial_\mu\varphi) = 0. \tag{2.50}$$

Analisando a expressão, vemos que ela pode ser escrita como uma regra do produto, $(xy)' = x'y + y'x$, onde teremos $x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]}$ e $y = \delta\varphi$. Portanto,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_\mu\varphi\right]} \delta\varphi \right) = 0. \tag{2.51}$$

Notamos que a quantidade entre parênteses se conserva. Chamamos esta quantidade, de corrente conservada [Peskin e Schroeder 2007], em analogia com a eletrodinâmica, podemos definir essa quantidade como,

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{2.52}$$

onde

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_\mu\varphi\right]} \delta\varphi. \tag{2.53}$$

Esse é um resultado direto do teorema de Noether, para o caso em que há a conservação da Lagrangiana. Podemos associar uma carga conservada a corrente conservada, integrando J^0, ou seja, a densidade de corrente,

$$Q = \int d^3x J^0. \tag{2.54}$$

Portanto agora com o entendimento do teorema de Noether e visto uma aplicação direta de grande importância, vamos fazer algo semelhante, começamos variando o próprio espaço-tempo e ver as consequências, isto é,

$$x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu, \tag{2.55}$$

onde a^μ representa a variação no espaço-tempo. Lembrando da depêndencia do campos, e expandimos em série de Taylor,

$$\varphi(x) \mapsto \varphi(x + a) = \varphi(x) + a^\mu\partial_\mu\varphi(x), \tag{2.56}$$

ou seja,

$$\delta\varphi = a^\mu\partial_\mu\varphi(x). \tag{2.57}$$

O Lagrangiano também é um escalar, portanto deve se transformar da mesma maneira [Peskin e Schroeder 2007], isto é,

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + a^\mu\partial_\mu\mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu\partial_\mu\left(\delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right), \tag{2.58}$$

ou seja,

$$\delta\mathcal{L} = a^{\nu}\partial_{\mu}\left(\delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}\right). \tag{2.59}$$

Agora vamos considerar a variação em termos de uma derivada total, onde a Lagrangiana tem como dependência até sua primeira derivada do campo,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_{\mu}\varphi\right]}\delta\left(\partial_{\mu}\varphi\right). \tag{2.60}$$

Usando a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_{\mu}\varphi\right]}\right), \tag{2.61}$$

a equação (2.49), se torna,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_{\mu}\varphi\right]}\right)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_{\mu}\varphi\right]}\partial_{\mu}(\delta\varphi). \tag{2.62}$$

Podemos escrever o termo acima de maneira análoga a equação (2.50), o que leva a,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_{\mu}\varphi\right]}\delta\varphi\right). \tag{2.63}$$

Substituindo a equação (2.59) e (2.57) na equação (2.63), obtemos,

$$\delta^{\mu}_{\nu}\partial_{\mu}(\mathcal{L})a^{\nu} = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_{\mu}\varphi\right]}\partial_{\nu}\varphi\right)a^{\nu}, \tag{2.64}$$

$$0 = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_{\mu}\varphi\right]}\partial_{\nu}\varphi - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}\right)a^{\nu}, \tag{2.65}$$

como a^{ν} é arbitário, temos que o termo entre parênteses tem que ser nulo. E essa quantidade é chamada de tensor energia-momento, o qual é uma quantidade conservada. Isto é definido,

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_{\mu}\varphi\right]}\partial_{\nu}\varphi - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}, \tag{2.66}$$

$$\partial_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = 0. \tag{2.67}$$

Se relembrarmos a definição da equação (2.29), vemos que o tensor energia-momento pode ser relacionado a densidade Hamiltoniana,

$$T^{0}_{0} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}. \tag{2.68}$$

De forma direta, resgatamos a conservação de energia, já que temos o tensor associado a densidade Hamiltoniana. Substituindo o tensor acima em (2.67),

$$\partial_{0}T^{0}_{0} = 0. \tag{2.69}$$

De forma similar, encontramos o tensor associado ao momento, que estará associado ao tensor com indíces $\mu = 0$ e $\nu = i$ integrado no espaço [McMahon 2008], ou seja,

$$P_i = \int dx^3 T^0_i. \tag{2.70}$$

Com essas ideias, teremos ferramentas suficientes para avançarmos com os conceitos da teoria eletromagnética.

3 Eletromagnetismo

O estudo da teoria eletromagnética é fundamental no contexto da teoria de campos, pois proporciona uma descrição dos campos elétricos e magnéticos, fornecendo uma estrutura matemática para compreender fenômenos dessa natureza. Além disso, essa teoria desempenha um papel de extrema importância na física moderna, uma vez que serve de base para a teoria eletrofraca, que unifica as forças eletromagnética e fraca [Salam e Ward 1959]. Sua relevância pode ser observada em diversas áreas, desde a tecnologia moderna até a física em seu nível mais fundamental. Ela desempenha um papel crucial na compreensão da natureza da luz, no funcionamento de dispositivos eletrônicos e na dinâmica do universo em escalas macro e microscópicas. As equações de Maxwell são a base utilizada para descrever essas interações,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV, \tag{3.1}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \tag{3.2}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \tag{3.3}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}. \tag{3.4}$$

sendo $\vec{E}$ o campo elétrico, $\vec{B}$ o campo magnético, ρ densidade de carga e $\vec{J}$ densidade de corrente elétrica. A equação (3.1) conhecida como Lei de Gauss, relaciona o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada e a carga elétrica contida dentro do volume delimitado por essa superfície, já a equação (3.2), conhecida como a Lei de Gauss para o magnetismo, indica a não existência de monopólos magnéticos, a equação (3.3) é conhecida como Lei de Faraday e relaciona o campo elétrico induzido com a variação do fluxo magnético, essa equação representa a indução eletromagnética, e por fim, temos a equação (3.4) chamada de Lei de Ampère-Maxwell, essa equação estabelece a conexão entre os campos elétrico e magnético, mostrando como a corrente elétrica influencia a geração do campo magnético e como a variação do campo elétrico está relacionada à geração do campo magnético. Compondo assim as quatro equações de Maxwell, vamos aplicar o teorema de Stokes,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) \cdot d\vec{A}, \tag{3.5}$$

e o teorema da divergência,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV, \tag{3.6}$$

as equações de Mawell. Isso nos leva à forma diferencial de tais equações, isto é [Griffiths 2010],

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{3.7}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.8}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{3.9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{3.10}$$

Podemos mostrar a conservação de carga. A conservação da carga elétrica é um princípio fundamental em física que estabelece que a carga elétrica não pode ser criada ou destruída. A quantidade total de carga elétrica no universo, é sempre preservada. A forma de demonstrarmos isso é através da Lei de Ampére-Maxwell, lembrando que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$, vamos tomar o divergente dessa lei,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0,$$

portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = 0,$$

e substituindo a lei de Gauss, ou seja equação (3.7), obtemos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.11}$$

Essa equação é chamada equação de continuidade para o eletromagnetismo. Sua interpretação é a seguinte, a corrente é um fenômeno resultante do fluxo de carga, a equação da continuidade estabelece que se a carga está deixando um volume diferencial (ou seja, quando a divergência da densidade de corrente é positiva), então a quantidade de carga dentro desse volume diminui, indicando uma variação negativa na densidade de carga. Assim, a equação da continuidade expressa o princípio de conservação de carga.

Também podemos representar as equações de Maxwell em termos dos potenciais. Com as identidades,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0, \tag{3.12}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta = 0, \tag{3.13}$$

vamos expressar as soluções gerais das equações de Maxwell homogêneas da seguinte forma, para a equação (3.8),

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{3.14}$$

onde $\vec{A}$ é chamado de potencial vetor. E para equação (3.9),

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{3.15}$$

e ϕ, conhecido como potencial escalar.

Para obter equações diferenciais parciais de segunda ordem para esses termos, é possível inserí-los nas equações não-homogêneas. Considerando então as expressões (3.7) e (3.15) obtemos,

$$\vec{\nabla}^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{3.16}$$

e também considerando as equações (3.10),(3.14) e (3.15),

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \nabla(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \mu_0\epsilon_0\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}. \tag{3.17}$$

Onde através das equações (3.16) e (3.17) temos todas as informações das equações de Maxwell, através de uma representação por meio de potenciais.

3.1 Transformações de calibre

As equações (3.16) e (3.17) são extremamente relevantes, pois não só incorporam todas as informações das equações de Maxwell, como também permitem reduzir seis problemas em quatro. Anteriormente, para determinar as componentes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$, era necessário lidar com seis variáveis distintas, pois são vetores, com a troca na representação das equações de Maxwell reduzimos a representação a um potencial escalar e a um potencial vetor, representando uma significativa simplificação. Além disso, temos a liberdade de impor condições extras em ϕ e $\vec{A}$, desde que nada altere $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Vamos discutir o que essa liberdade de calibre, ou ainda, chamada transformação de gauge nos acarreta. Suponha dois conjuntos de potenciais $(\phi, \vec{A})$ e $(\phi', \vec{A}')$,

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \alpha, \\ \phi' &= \phi + \beta. \end{aligned}$$

sendo α e β funções arbitrárias. Como ambos os vetores $\vec{A}$ e $\vec{A}'$ produzem o mesmo vetor $\vec{B}$, seus rotacionais devem ser iguais, implicando em,

$$\vec{\nabla}\times\alpha = 0.$$

Podemos escrever também,

$$\alpha = \vec{\nabla}\lambda,$$

onde λ é um escalar. Ambos os potenciais também resultam no mesmo $\vec{E}$, portanto,

$$\vec{\nabla}\beta + \frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0,$$

ou ainda,

$$\vec{\nabla}\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0.$$

O termo dentro do parênteses, não depende da posição, mas pode ter dependência temporal. Chamaremos essa dependência de k(t),

$$\beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + k(t).$$

Vamos incorporar $k(t)$ em λ, definindo um novo λ com o acréscimo de $\int_0^t k(t')dt'$ ao antigo. Isso não irá afetar o gradiente de λ, pois simplesmente acrescenta $k(t)$ a $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$, então,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda, \tag{3.18}$$
$$\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{3.19}$$

Em outras palavras, podemos adicionar o gradiente de uma função escalar λ ao potencial vetor $\vec{A}$, desde que subtraiamos simultaneamente a sua derivada parcial em relação ao tempo $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ de ϕ, sem alterar os campos elétrico e magnético $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Essas mudanças são conhecidas como transformações de calibre. A escolha do calibre mais conveniente depende do problema em questão, sendo comum na magnetostática a escolha de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, enquanto que em eletrodinâmica há várias opções disponíveis na literatura, das quais apresentaremos duas.

3.2 Calibre de Coulomb e calibre de Lorentz

O calibre de Coulomb é uma escolha específica do calibre do potencial vetor $\vec{A}$ na teoria eletromagnética. Nesse calibre, impõe-se a condição de que o divergente do potencial vetor seja nulo, ou seja, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Essa condição é chamada de condição de Coulomb. Com isso, a equação (3.16) se torna,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{3.20}$$

conhecida como equação de Poisson.

Existe uma peculiaridade relacionada ao potencial escalar no calibre de Coulomb, pois ele é determinado pela distribuição da carga elétrica presente no momento. Se um elétron é movido em um laboratório, o potencial escalar ϕ na Lua imediatamente reflete essa mudança, o que parece contradizer a teoria da relatividade especial, que impõe um limite na velocidade de transmissão de informações. No entanto, o potencial escalar ϕ sozinho não é uma grandeza fisicamente mensurável, e o que pode ser medido na Lua é o campo elétrico $\vec{E}$, que depende não apenas do potencial escalar ϕ, mas também do potencial vetor $\vec{A}$. Embora o potencial escalar ϕ reflita instantaneamente todas as mudanças na distribuição de carga ρ, o mesmo não é válido para a combinação $-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, que determina o campo elétrico $\vec{E}$ e só mudará após um intervalo de tempo suficiente para a informação ser transmitida [Griffiths 2010].

Existe vantagem e desvantagem no calibre de Coulomb. O potencial escalar é particularmente simples de ser calculado, a desvantagem, é que $\vec{A}$ é particularmente difícil de ser calculado. A equação diferencial para $\vec{A}$, eq. (3.17), sobre o calibre de Coulomb pode ser escrita como,

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right).$$

Já no calibre de Lorentz, escolhemos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{3.21}$$

isso nos leva às expressões,

$$\begin{aligned} \Box^2 \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \Box^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J}, \end{aligned}$$

com o operador d'alembertiano sendo,

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{3.22}$$

Esse tratamento para ϕ e $\vec{A}$ é particularmente agradável no contexto da relatividade especial, onde o d'alembertiano é a generalização natural do laplaciano, e temos a possibilidade de escrever versões quadridimensionais dessas equações.

3.3 Formulação tensorial eletromagnética

O tensor do campo eletromagnético, agora no sistema natural de unidades, é,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

onde A^μ é o quadrivetor potencial, cuja parte temporal é o potencial escalar e o potencial vetor é a parte que descreve as componentes espaciais, $A^\mu = (\phi, \vec{A})$. $F^{\mu\nu}$ leva às equações de Maxwell [McMahon 2008]. Nota-se que $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, isso é,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{3.24}$$

A ação para a teoria eletromagnética, é,

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right), \tag{3.25}$$

onde $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ é a densidade de corrente quadrivetorial. A componente temporal do vetor é a densidade de carga ρ, enquanto a parte espacial se refere a densidade de corrente $\vec{J}$. Então, tomando a variação da ação,

$$\delta S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}(\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu}) - J^\mu \delta A_u \right). \tag{3.26}$$

Considerando o primeiro termo, usando a definição do tensor eletromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, temos,

$$-\frac{1}{4}(\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu)F^{\mu\nu}. \tag{3.27}$$

Agora nós integramos por partes, transferindo as derivadas de δA_ν para os termos $F^{\mu\nu}$, isso nos permite escrever,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu)F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4}(\partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu - \partial_\nu F^{\mu\nu} \delta A_\mu), \end{aligned} \tag{3.28}$$

trocando μ e ν no segundo termo,

$$-\frac{1}{4}(\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu - \partial_\mu F^{\nu\mu} \delta A_\nu), \tag{3.29}$$

e então usamos a antissimetria do tensor eletromagnético, isso eliminará o sinal de menos no segundo termo, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu - \partial_\mu F^{\nu\mu} \delta A_\nu) &= \frac{1}{4}(\partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu + \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu), \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu. \end{aligned}$$

Portanto,

$$-\frac{1}{4}(\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu. \tag{3.30}$$

Agora, vamos analisar o caso $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu})$. Temos,

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu).$$

Nós vamos baixar e subir alguns índices usando a métrica, para obter algo análogo a equação (3.30). Começamos por levantar os índices $F_{\mu\nu}$,

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu) = -\frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\theta}F^{\rho\theta}(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu),$$

então, movemos $F^{\rho\theta}$ dentro dos parênteses e integramos por partes,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\theta}F^{\rho\theta}(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu) &= \frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\theta}[\partial^\mu (F^{\rho\theta})\delta A^\nu - \partial^\nu (F^{\rho\theta})\delta A^\mu] \\ &= \frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\theta}\partial^\mu (F^{\rho\theta})\delta A^\nu - \frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\theta}\partial^\nu (F^{\rho\theta})\delta A^\mu. \end{aligned}$$

Agora podemos baixar os índices das derivadas,

$$\frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\theta}\partial^{\mu}(F^{\rho\theta})\delta A^{\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\theta}\partial^{\nu}(F^{\rho\theta})\delta A^{\mu} = \frac{1}{4}\eta_{\nu\theta}\partial_{\rho}(F^{\rho\theta})\delta A^{\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\partial_{\theta}(F^{\rho\theta})\delta A^{\mu},$$

e fazemos o mesmo para o quadrivetor potencial, temos,

$$\frac{1}{4}\eta_{\nu\theta}\partial_{\rho}(F^{\rho\theta})\delta A^{\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\rho}\partial_{\theta}(F^{\rho\theta})\delta A^{\mu} = \frac{1}{4}\partial_{\rho}(F^{\rho\theta})\delta A_{\theta} - \frac{1}{4}\partial_{\theta}(F^{\rho\theta})\delta A_{\rho},$$

focando no segundo termo, vamos mudar $\rho \to \nu$, $\theta \to \mu$ e aplicar a antissimetria do tensor eletromagnético, então,

$$\frac{1}{4}\partial_{\rho}(F^{\rho\theta})\delta A_{\theta} - \frac{1}{4}\partial_{\theta}(F^{\rho\theta})\delta A_{\rho} = \frac{1}{4}\partial_{\rho}(F^{\rho\theta})\delta A_{\theta} - \frac{1}{4}\partial_{\mu}(F^{\nu\mu})\delta A_{\nu},$$

agora vamos olhar para o primeiro termo e fazer a troca idêntica nos índices,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\partial_{\rho}(F^{\rho\theta})\delta A_{\theta} - \frac{1}{4}\partial_{\mu}(F^{\nu\mu})\delta A_{\nu} &= \frac{1}{4}\partial_{\mu}(F^{\mu\nu})\delta A_{\nu} + \frac{1}{4}\partial_{\mu}(F^{\mu\nu})\delta A_{\nu}, \\ &= \frac{1}{2}\partial_{\mu}(F^{\mu\nu})\delta A_{\nu}.\end{aligned}$$

E então combinamos este resultado com a equação (3.30), e a variação da ação torna-se,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}\delta A_{\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}\delta A_{\nu} - J^{\mu}\delta A_{\mu}\right), \\ &= \int d^4x \left(\partial_{\mu}F^{\mu\nu} - J^{\mu}\right)\delta A_{\nu}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Nós exigimos que a variação na ação se anule, ou seja, $\delta S = 0$. No entanto, como a variação é arbitrária δA_{ν}, ela não pode simplesmente se anular. Isso nos leva novamente à conclusão de que a integral será igual a 0 somente se o integrando for 0 em todos os lugares do domínio. Portanto,

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} - J^{\mu} = 0, \tag{3.32}$$

através deste resultado, podemos recuperar a equação de continuidade, vamos mostrar isso.

Uma vez que temos a propriedade de antissimetria associada ao tensor eletromagnético,

$$\partial_{\mu}\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = -\partial_{\nu}\partial_{\mu}F^{\nu\mu} = 0. \tag{3.33}$$

e sabendo que,

$$\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \partial_{\nu}\partial_{\mu}. \tag{3.34}$$

Então,

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0, \tag{3.35}$$

recuperando a equação de continuidade.

A partir da ação (3.25) podemos descrever todo eletromagnetismo, e como a ação por definição é a integral da densidade Lagrangiana associada ao sistema, temos,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^{\mu}A_{\mu}. \tag{3.36}$$

a Lagrangiana livre de corrente fica,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.37}$$

A formulação tensorial da equação é importante, pois permite descrever a teoria eletromagnética de forma invariante sob transformações de Lorentz. Isso significa que a equação é válida em todos os sistemas de referência inerciais e pode ser usada para prever observações em diferentes condições. A partir dessa formulação, vamos avançar agora com a ideia de quantização do campo eletromagnético.

3.3.1 Quantização do campo eletromagnético livre

A quantização do campo eletromagnético é importante para entender as interações eletromagnéticas quânticas, como a emissão e absorção de fótons. Essa quantização é fundamental na teoria quântica de campos e na descrição das partículas elementares. A quantização do campo eletromagnético também contribui para a compreensão da força eletromagnética e sua unificação com outras forças fundamentais, como a força fraca, e é relevante para estudos de física de altas energias.

Para quantizarmos o campo eletromagnético livre, vamos partir da sua Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.38}$$

onde,

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \tag{3.39}$$

Como A_{μ} é um campo vetorial real, e não há termo de massa, estamos lidando com uma teoria de campo sem massa e sem carga.

Agora vamos considerar uma transformação de calibre, ou dita, transformação de gauge,

$$A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\wedge, \tag{3.40}$$

onde temos $\wedge$ sendo uma função escalar. Essa invariância de calibre será importante posteriormente. O primeiro passo é, calcular o campo conjugado, definido por,

$$\pi^{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\mu})}. \tag{3.41}$$

Consideremos,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\eta^{\sigma\nu}\eta^{\rho\mu}\partial_\sigma A_\rho - \eta^{\sigma\mu}\eta^{\rho\nu}\partial_\rho A_\sigma), \\ &= \eta^{\sigma\nu}\eta^{\rho\mu}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Então,

$$\frac{\partial(F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho})}{\partial(\partial_0 A_\iota)} = F_{\sigma\rho}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_0 A \iota)} + F_{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\rho}}{\partial(\partial_0 A_\iota)}. \tag{3.43}$$

Vamos abrir cada termo da soma, separadamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_0 A_\rho)} &= \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_0 A_\rho)} - \frac{\partial(\partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_0 A_\rho)} = \eta^0_\mu\eta^\rho_\nu - \eta^0_\nu\eta^\rho_\mu, \\ \frac{\partial F_{\sigma\rho}}{\partial(\partial_0 A_\iota)} &= \frac{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}{\partial(\partial_0 A_\iota)} - \frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_0 A_\iota)} = \eta^0_\sigma\eta^\iota_\rho - \eta^0_\rho\eta^\iota_\sigma. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (3.43) se torna,

$$\frac{\partial(F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho})}{\partial(\partial_0 A_\iota)} = F_{\sigma\rho}(\eta^0_\mu\eta^\iota_\nu - \eta^0_\nu\eta^\iota_\mu) + F_{\mu\nu}(\eta^0_\sigma\eta^\iota_\rho - \eta^0_\rho\eta^\iota_\sigma). \tag{3.44}$$

Substituindo esses resultados na equação (3.41),

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\iota)} &= -\frac{1}{4}\eta^{\sigma\mu}\eta^{\rho\nu}\frac{\partial(F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho})}{\partial(\partial_0 A_\iota)}, \\ &= -\frac{1}{4}\left\{F^{0\iota} - F^{\iota 0} + F^{0\iota} - F^{\iota 0}\right\}. \end{aligned}$$

Mas, $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$, logo,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\iota)} = -\frac{1}{4}\left\{F^{0\iota} + F^{0\iota} + F^{0\iota} + F^{0\iota}\right\} = -F^{0\iota}.$$

Portanto, o momento conjugado, se torna,

$$\pi^\mu = -F^{0\mu} = F^{\mu 0}, \tag{3.45}$$

que nos leva a,

$$\pi^0 = 0, \tag{3.46}$$

$$\pi^i = E^i, \tag{3.47}$$

da equação(3.46), a relação de comutação $[\phi(x,t), \pi(y,t)] = 0$ não pode ser satisfeita, pois temos a demanda do comutador de ϕ com momento conjugado ser diferente de zero, pois eles não podem ser medidos simultaneamente. Acontece que podemos reverter esse problema usando a ideia de gauge e essa interpretação se estende para teoria com temperatura. Há muitas específicas maneiras de consertar esse problema, neste caso, nós vamos usar o calibre de Coulomb. Sendo,

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0, \tag{3.48}$$
$$\phi = 0, \tag{3.49}$$

conhecido como gauge de Coulomb ou de radiação. Especificamente, o desaparecimento do campo conjugado para ϕ não importa mais porque podemos ignorar a relação de comutação de tempo igual de ϕ e π^0. Este é o caso no mundo real, então trabalhar no gauge de radiação mantém a natureza física do campo eletromagnético mais evidente. Vamos, portanto, estudar a quantização deste calibre [Ryder 1996].

Usando o gauge de Coulomb, vamos impor que as relações de comutação satisfaçam,

$$\Big[A_i(\vec{x},t), A_j(\vec{x'},t)\Big] = \Big[E^i(\vec{x},t), E^j(\vec{x'},t)\Big] = 0. \tag{3.50}$$

E temos uma problema na seguinte relação de comutação,

$$\Big[A_i(\vec{x},t), E^j(\vec{x'},t)\Big] = i\delta_i^j\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}). \tag{3.51}$$

O problema consiste em, se tomarmos o divergente nos termos da relação de comutação da equação (3.51), vamos ter $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$. O problema é que essa relação de comutação se torna inconsistente,

$$0 = \Big[\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{x},t), \vec{\nabla}.\vec{E}(\vec{x'},t)\Big] = i\triangledown^2\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}) \neq 0. \tag{3.52}$$

A correção para isso é assumir que o seguinte comutador é dado por,

$$\big[A_i(\vec{x},t), E^j(\vec{x},t)\big] = i\left(\delta_i^j - \frac{\partial_i\partial^j}{\triangledown^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}), \tag{3.53}$$

então,

$$\big[A_i(\vec{x},t), E^j(\vec{x},t)\big] = i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\delta_i^j - \frac{p_ip^j}{p^2}\right)e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x'})}. \tag{3.54}$$

Portanto,

$$\big[A_i(\vec{x},t), E^j(\vec{x},t)\big] = i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\delta_i^j - \frac{p_ip^j}{p^2}\right)e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x'})}, \tag{3.55}$$
$$[A_i(\vec{x},t), A_j(\vec{x},t)] = [E_i(\vec{x},t), E_j(\vec{x},t)] = 0. \tag{3.56}$$

Também nesse calibre, as equações de movimento se tornam,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$
$$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = 0,$$

e considerando,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}.\vec{A} &= 0,\\ \phi &= 0.\end{aligned}$$

Obtemos,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \Box\vec{A} = 0. \tag{3.57}$$

As soluções de ondas planas são da forma,

$$\vec{A} = \vec{\epsilon}e^{-(\vec{k}.\vec{x}-\omega t)} \tag{3.58}$$

onde o vetor $\vec{\epsilon}$ representa a polarização da onda e indica a direção do campo elétrico (ou campo magnético) em relação à direção de propagação da onda. É importante ressaltar que esse vetor de polarização é perpendicular ao vetor de propagação $\vec{k}$.

Dado o calibre de Coulomb, esse campo deve ser transverso, portanto,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{k}\cdot\vec{\epsilon}e^{-i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})} &= 0,\\ \vec{k}\cdot\vec{\epsilon} &= 0.\end{aligned}$$

Há duas polarizações transversais linearmente independentes. Portanto, há duas polarizações possíveis para os quanta de campo (que, são chamados fótons). Um subscrito que pode ter dois valores será adicionado ao vetor de polarização para indexar essa duplicidade,

$$\vec{\epsilon} \to \vec{\epsilon_\lambda}, \tag{3.59}$$

por simplicidade, o vetor polarização é usualmente dado para ser da forma unitária, e eles são ortogonais um com outro,

$$\vec{\epsilon_\lambda}\cdot\vec{\epsilon_{\lambda'}} = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{3.60}$$

Pode-se então escrever a solução geral construindo uma combinação linear arbitrária deles,

$$A_i = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\left(\epsilon_{\lambda i}a_\lambda(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})} + \epsilon_{\lambda i}a_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})}\right), \tag{3.61}$$

onde os coeficientes de Fourier são conjugados hermitianos um do outro para garantir que o campo seja real. Também podemos calcular os campos conjugados,

$$\pi^i = E^i = -\frac{\partial}{\partial t}A^i = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} - i\omega\left(\epsilon_\lambda^i a_\lambda(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})} + \epsilon_\lambda^i a_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})}\right). \tag{3.62}$$

Com esses resultados estabelecidos, nós podemos agora inverter a expressão, para obtermos uma relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação,

$$\begin{aligned}\int d^3x e^{i(\omega' t-\vec{k'}\cdot\vec{x})}A_i(\vec{x,t}) &= \sum_\lambda \int d^3x\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\Big\{\epsilon_{\lambda i}a_\lambda e^{i(\omega'-\omega)t}e^{i(\vec{k'}-\vec{k}).\vec{x}}\\ &+\epsilon_{\lambda i}a_\lambda^\dagger e^{i(\omega'+\omega)t}e^{i(\vec{k'}+\vec{k}).\vec{x}}\Big\},\end{aligned} \tag{3.63}$$

mas sabemos,

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k'}-\vec{k}).\vec{x}} = \delta^3(\vec{k'}-\vec{k}), \tag{3.64}$$

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k'}+\vec{k}).\vec{x}} = \delta^3(\vec{k'}+\vec{k}), \tag{3.65}$$

então,

$$\begin{aligned}
\int d^3x e^{i(\omega' t-\vec{k'}.\vec{x})} A_i(\vec{x},t) &= \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{2\omega}\Big\{\epsilon_{\lambda i} a_\lambda(\vec{k}) e^{i(\omega'-\omega)t}\delta^3(\vec{k'}-\vec{k}) \\
&-\epsilon_{\lambda i} a^\dagger_\lambda(\vec{k}) e^{i(\omega'+\omega)t}\delta^3(\vec{k'}+\vec{k})\Big\}, \\
&= \sum_\lambda \frac{1}{2\omega'}\left\{\epsilon_{\lambda i} a_\lambda(\vec{k'}) + \epsilon_{\lambda i} a^\dagger_\lambda(-\vec{k'}) e^{i2\omega' t}\right\}, \\
&= \sum_\lambda \frac{1}{2\omega'}\left\{\vec{\epsilon}_{\lambda'}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda a_\lambda(\vec{k'}) + \vec{\epsilon}_{\lambda'}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda a^\dagger_\lambda(-\vec{k'}) e^{i2\omega' t}\right\}, \\
&= \sum_\lambda \frac{1}{2\omega'}\left\{\delta_{\lambda\lambda'} a_\lambda(\vec{k'}) + \delta_{\lambda\lambda'} a^\dagger_\lambda(-\vec{k'}) e^{i2\omega' t}\right\}.
\end{aligned}$$

O resultado final para esta integral é,

$$\int d^3x e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\vec{\epsilon}_\lambda\cdot\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\omega}\left\{a_\lambda(\vec{k}) + a^\dagger_\lambda(-\vec{k})e^{i2\omega t}\right\}, \tag{3.66}$$

a igualdade $A_i(x,t) = \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{A}(x,t)$ pode ser entendida como a projeção do vetor $\vec{A}$ no vetor de polarização $\vec{\epsilon}\lambda$. Essa interpretação implica que o valor de $A_i(x,t)$ é calculado através do produto escalar entre $\vec{\epsilon}_\lambda$ e $\vec{A}(x,t)$, que consiste na multiplicação das componentes correspondentes desses vetores, seguida pela soma dos resultados.

E agora vamos fazer algo análogo para o campo conjugado,

$$\begin{aligned}
\int d^3x e^{i(\omega' t-\vec{k'}.\vec{x})} \pi^i(\vec{x},t) &= \sum_\lambda \int d^3x \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}(-i\omega)\Big\{\epsilon^i_\lambda a_\lambda(\vec{k}) e^{i(\omega'-\omega)t} e^{-i(\vec{k'}-\vec{k}).\vec{x}} \\
&-\epsilon^i_\lambda a^\dagger_\lambda(\vec{k}) e^{i(\omega'+\omega)t} e^{-i(\vec{k'}+\vec{k}).\vec{x}}\Big\},
\end{aligned}$$

então usamos novamente as equações (3.64) e (3.65), temos,

$$\begin{aligned}
\int d^3x e^{i(\omega' t-\vec{k'}.\vec{x})} \pi^i(\vec{x},t) &= \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{2\omega}(-i\omega)\Big\{\epsilon^i_\lambda a_\lambda(\vec{k}) e^{i(\omega'-\omega)t}\delta^3(\vec{k'}-\vec{k}) \\
&-\epsilon^i_\lambda a^\dagger_\lambda(\vec{k}) e^{i(\omega'+\omega)t}\delta(\vec{k'}-\vec{k})\Big\}, \\
&= \sum_\lambda -\frac{i}{2}\Big\{\epsilon^i_\lambda a_\lambda(\vec{k'}) - \epsilon^i_\lambda a^\dagger_\lambda(-\vec{k'}) e^{i2\omega' t}\Big\}, \\
&= \sum_\lambda -\frac{i}{2}\Big\{\epsilon\vec{_{\lambda'}}.\epsilon\vec{_\lambda} a_\lambda(\vec{k'}) - \epsilon\vec{_{\lambda'}}.\epsilon\vec{_\lambda} a^\dagger_\lambda(-\vec{k'}) e^{i2\omega' t}\Big\}, \\
&= \sum_\lambda -\frac{i}{2}\Big\{\delta_{\lambda\lambda'} a_\lambda(\vec{k'}) - \delta_{\lambda\lambda'} a^\dagger_\lambda(-\vec{k'}) e^{i2\omega' t}\Big\},
\end{aligned}$$

obtemos,

$$\int d^3xe^{i(\omega t-\vec{k}'.\vec{x})}\vec{\epsilon_\lambda}.\vec{\pi}(\vec{x},t) = -\frac{i}{2}\Big\{a_\lambda(\vec{k}) - a^\dagger_\lambda(-\vec{k})e^{i2\omega t}\Big\}. \tag{3.67}$$

Com as equações, podemos encontrar as relações correspondentes para $a_\lambda(\vec{k})$ e $a^\dagger_\lambda(\vec{k})$, somando as equações (3.66) e (3.67),

$$\begin{aligned} a_\lambda(\vec{k}) &= \int d^3xe^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})}\vec{\epsilon_\lambda}.\vec{\pi}(\vec{x},t) + \int d^3xe^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})}\omega\vec{\epsilon_\lambda}.\vec{A}(\vec{x},t), \\ a_\lambda(\vec{k}) &= \int d^3xe^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})}\Big\{i\vec{\epsilon_\lambda}.\vec{\pi}(\vec{x},t) + \omega\vec{\epsilon_\lambda}.\vec{A}(\vec{x}.t)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Fazendo o hermitiano conjugado desse operador, podemos obter $a^\dagger_\lambda(\vec{k})$,

$$a^\dagger_\lambda(\vec{k}) = \int d^3xe^{-i(\omega t-\vec{k}.\vec{x})}\Big\{-i\vec{\epsilon_\lambda}.\vec{\pi}(\vec{x},t) + \omega\vec{\epsilon_\lambda}.\vec{A}(\vec{x}.t)\Big\}. \tag{3.69}$$

E agora, sabendo dos valores das equações (3.68)-(3.69), vamos começar o cálculo da relações de comutação para os coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned} \Big[a_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_\lambda(\vec{k})\Big] &= \int d^3xd^3x'e^{ik.x-ik'.x'}\Big\{(i\vec{\epsilon}_\lambda\cdot\vec{\pi}(\vec{x},t) + \omega\vec{\epsilon}_\lambda\cdot\vec{A}(\vec{x},t)) \\ &\times(-i\vec{\epsilon}_{\lambda'}\cdot\vec{\pi}(\vec{x}',t)\cdot\vec{A}(\vec{x}',t)) - (-\vec{\epsilon}_{\lambda'}\cdot\vec{\pi}(\vec{x}',t) + \omega\vec{\epsilon}_{\lambda'}\cdot\vec{A}(\vec{x}',t)) \\ &\times(i\vec{\epsilon}_\lambda\cdot\vec{\pi}(\vec{x},t) + \omega\vec{\epsilon}_\lambda\cdot\vec{A}(\vec{x},t))\Big\}, \end{aligned}$$

onde $k\cdot x = k_\mu x^\mu$ e $t = t'$. Agora aplicamos, $[A_i(\vec{x},t), A_j(\vec{x},t)] = 0$ e $[E_i(\vec{x},t), E_j(\vec{x},t)] = 0$, lembrando que $\pi^i = E^i$, obtemos,

$$\begin{aligned} \Big[a_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_\lambda(\vec{k})\Big] &= \int d^3xd^3x'e^{ik.x-ik'.x'}i\omega\Big\{\epsilon_{\lambda i}\epsilon^j_{\lambda'}[\pi^i(\vec{x},t), A_j(\vec{x}',t)] \\ &-\epsilon^j_\lambda\epsilon_{\lambda' i}[A_j(\vec{x},t), \pi^i(\vec{x}',t)]\Big\}. \end{aligned}$$

Lembrando que $\pi^i = E^i$, e aplicando $[A_i(\vec{x},t), E^j(\vec{x},t)] = i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\delta^j_i - \frac{k_ik^j}{k^2}\right)e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')}$, temos,

$$\begin{aligned} \Big[a_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_\lambda(\vec{k})\Big] &= \int d^3xd^3x'\frac{dk^3}{(2\pi)^3}e^{ik.x-ik'.x'}\omega\Big\{\epsilon_{\lambda i}\epsilon^j_{\lambda'}(\delta^i_j - \frac{k_jk^i}{k^2})e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')} \\ &+\epsilon^j_\lambda\epsilon_{\lambda' i}(\delta^i_j - \frac{k_jk^i}{k^2})e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Temos pela equação (3.60), ou seja, considerando a transversalidade da polarização,

$$\begin{aligned} \Big[a_\lambda(\vec{k}), \vec{a}^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})\Big] &= \int d^3xd^3x'\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{ik.x-k'.x'}2\omega\vec{\epsilon}_\lambda\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda'}e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')}, \\ &= \int d^3xd^3x'\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{ik.x-k'.x'}2\omega\delta_{\lambda\lambda'}e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')}, \\ &= \int d^3xd^3x'e^{ik.x-k'.x'}2\omega\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'), \end{aligned}$$

então,

$$\left[a_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})\right] = (2\pi)^3 2\omega \delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}). \tag{3.71}$$

Por completeza,

$$\left[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k'})\right] = \left[a^\dagger_\lambda(\vec{k}) a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})\right] = 0. \tag{3.72}$$

E então, vamos ao cálculo do Hamiltoniano, dado por,

$$H = \int d^3x(\pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L}). \tag{3.73}$$

Mas, vamos relembrar a densidade Lagrangiana dada pela equação (3.38), e abrir o termo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \eta_{\nu\rho}\eta_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma}F^{\mu\nu}, \\ &= \eta_{00}\eta_{\nu\sigma}F^{0\sigma}F^{0\nu} + \eta_{11}\eta_{\nu\sigma}F^{1\sigma}F^{1\nu} + \eta_{22}\eta_{\nu\sigma}F^{2\sigma}F^{2\nu} + \eta_{33}, \eta_{\nu\sigma}F^{3\sigma}F^{3\nu}, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \eta_{11}F^{01}F^{01} + \eta_{22}F^{02}F^{02} + \eta_{33}F^{03}F^{03} \\ &- \eta_{00}F^{10}F^{10} - \eta_{22}F^{12}F^{12} - \eta_{33}F^{13}F^{13} \\ &- \eta_{00}F^{20}F^{20} - \eta_{11}F^{21}F^{21} - \eta_{33}F^{23}F^{23} \\ &- \eta_{00}F^{30}F^{30} - \eta_{11}F^{31}F^{31} - \eta_{22}F^{32}F^{32}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

E então usando, o tensor eletromagnético,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.75}$$

e a métrica de Minkowski (A.8),

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

Com essas matrizes bem definidas, damos sequência,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = &- E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 \\ &- E_x^2 + B_z^2 + B_y^2 \\ &- E_y^2 + B_z^2 + B_x^2 \\ &- E_z^2 + B_y^2 + B_x^2. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Portanto,

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + 2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = -2(|\vec{E}^2| - |\vec{B}^2|). \tag{3.78}$$

Considerando o resultado acima, e a densidade Lagrangiana da equação (3.38), obtemos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(E^2 - B^2\right). \tag{3.79}$$

Agora temos informação para continuarmos da equação (3.73),

$$H = \int d^3x(E^2 - \frac{1}{2}\left(E^2 - B^2\right)) = \frac{1}{2}\int dx^3(\vec{E}.\vec{E} + \vec{B}.\vec{B}), \tag{3.80}$$

temos os seguintes valores para os campos,

$$E^j = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} - i\omega\left(\epsilon_\lambda^j a_\lambda(\vec{k})e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} - \epsilon_\lambda^j a_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}\right). \tag{3.81}$$

$$B^j = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} - i(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda)^j\left(a_\lambda(\vec{k})e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} - a_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}\right). \tag{3.82}$$

Inserindo essas informações na equação (3.80),

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int d^3x \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega}\Big\{\omega\omega'\vec{\epsilon}_\lambda\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda'} \\
&\times\left(a_\lambda(\vec{k})e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} - a_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}\right) \\
&\times\left(a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega' t - \vec{k'}.\vec{x'})} - a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})e^{i(\omega' t - \vec{k'}.\vec{x'})}\right) \\
&+\left(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda\right).\left(\vec{k'}\times\vec{\epsilon}_{\lambda'}\right) \\
&\times\left(a_\lambda(\vec{k})e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x}}) - a_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}\right) \\
&\times\left(a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega' t - \vec{k'}.\vec{x'}}) - a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})e^{i(\omega' t - \vec{k'}.\vec{x'})}\right)\Big\},
\end{aligned}$$

ainda,

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int d^3x \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\Big\{\omega\omega'\vec{\epsilon}_\lambda.\vec{\epsilon}_{\lambda'} \\
&\times\Big(a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega+\omega')t}e^{i(\vec{k}+\vec{k'}).\vec{x}} - a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})e^{i(\omega-\omega')t}e^{-i(\vec{k}-\vec{k'}).\vec{x}} \\
&-a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega-\omega')t}e^{i(\vec{k}-\vec{k'}).\vec{x}} + a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})e^{i(\omega+\omega')t}e^{-i(\vec{k}+\vec{k'}).\vec{x}}\Big) \\
&+\left(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda\right).\left(\vec{k'}\times\vec{\epsilon'}_{\lambda'}\right) \\
&\times\Big(a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega+\omega')t}e^{i(\vec{k}+\vec{k'}).\vec{x}} - a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})e^{i(\omega-\omega')t}e^{-i(\vec{k}-\vec{k'}).\vec{x}} \\
&-a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega-\omega')t}e^{i(\vec{k}-\vec{k'}).\vec{x}} + a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k'})e^{i(\omega+\omega')t}e^{-i(\vec{k}+\vec{k'}).\vec{x}}\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Agora realizamos a integração sobre x, encontramos,

$$
\begin{aligned}
H \quad &= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\Big\{\omega\omega'\vec{\epsilon}_\lambda.\vec{\epsilon}_{\lambda'}.\\
&\times\Big(a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega+\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k'}) - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{i(\omega-\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\\
&-a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega-\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}) + a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})e^{i(\omega+\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k'})\Big)\\
&+\Big(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda\Big).\Big(\vec{k'}\times\vec{\epsilon}_{\lambda'}\Big)\\
&\times\Big(a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega+\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k'}) - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{i(\omega-\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\\
&-a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-i(\omega-\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}) + a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})e^{i(\omega+\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k'})\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Usando as propriedades da função delta para simplificar os fatores de fase restantes,

$$
\begin{aligned}
H \quad &= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{d^3k'}{2\omega'}\Big\{\omega\omega'\vec{\epsilon}_\lambda.\vec{\epsilon}_{\lambda'}\\
&\times\Big(a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-2i\omega t}\delta^3(\vec{k}+\vec{k'}) - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\\
&-a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}) + a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})e^{2i\omega t}\delta(\vec{k}+\vec{k'})\Big)\\
&+\Big(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda\Big).\Big(\vec{k'}\times\vec{\epsilon}_{\lambda'}\Big)\\
&\times\Big(a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})e^{-2i\omega t}\delta^3(\vec{k}+\vec{k'}) - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\\
&-a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}) + a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})e^{2i\omega t}\delta(\vec{k}+\vec{k'})\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Agora a integração $k^{'}$ pode ser feita usando todas as funções delta, logo,

$$
\begin{aligned}
H \quad &= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{1}{2\omega}\Big\{\omega^2\vec{\epsilon}_\lambda.\vec{\epsilon}_{\lambda'}\\
&\times\Big(a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(-\vec{k})e^{-2i\omega t} - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) - a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k}) + a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(-\vec{k})e^{2i\omega t}\Big)\\
&+\Big(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda\Big).\Big(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_{\lambda'}\Big)\\
&\times\Big(-a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(-\vec{k})e^{-2i\omega t} - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) - a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k}) - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(-\vec{k})^{2i\omega t}\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

Usando a identidade,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}),$$

e relembrando $\vec{\epsilon}_\lambda.\vec{\epsilon}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$, temos,

$$(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda).(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_{\lambda'}) = (\vec{k}.\vec{k})(\vec{\epsilon}_\lambda.\vec{\epsilon}_{\lambda'}) - (\vec{k}.\vec{\epsilon}_{\lambda'})(\vec{\epsilon}_\lambda.\vec{k}) = \vec{k}^2\delta_{\lambda\lambda'} = \omega^2\delta_{\lambda\lambda'}.$$

Portanto, substituindo no Hamiltoniano, ficamos com,

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{1}{2\omega}\omega^2\delta_{\lambda\lambda'}\Big\{a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(-\vec{k})e^{-2\omega it} - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k})\\
&-a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k}) + a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(-\vec{k})e^{2i\omega t} - a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(-\vec{k})e^{-2i\omega t}\\
&-a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) - a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) - a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(-\vec{k})e^{2i\omega t}\Big\},
\end{aligned}$$

o qual pode ser reescrito como,

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{1}{2\omega}\omega^2\delta_{\lambda\lambda'}\Big\{-a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) - a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k}) -\\
&a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) - a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k})\Big\},\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{1}{\omega}\omega^2\delta_{\lambda\lambda'}\Big\{a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) + a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k})\Big\},\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\omega\Big\{a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda}(\vec{k}) + a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda}(\vec{k})\Big\}.
\end{aligned}$$

E finalmente, usando ordenamento temporal, escrevemos,

$$H = \sum_{\lambda}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\omega a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_\lambda(\vec{k}). \tag{3.83}$$

Podemos verificar que $a^\dagger_\lambda(\vec{k})$ e $a_\lambda(\vec{k})$ se comportam como operadores de criação e aniquilação. Vamos começar com $a_\lambda(\vec{k})$,

$$H_n|E\rangle = E_n|E\rangle. \tag{3.84}$$

Então,

$$\begin{aligned}
H_n a_\lambda(\vec{k})|E\rangle &= \sum_{\lambda'}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\omega' a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})a_{\lambda'}(\vec{k'})a_\lambda(\vec{k})|E\rangle,\\
&= \sum_{\lambda'}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\omega' a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k'})|E\rangle,\\
&= \sum_{\lambda'}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\omega'\left[a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'}) - \left[a_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})\right]\right]a_{\lambda'}(\vec{k'})|E\rangle,\\
&= \sum_{\lambda'}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\omega'\left[a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'}) - (2\pi)^3 2\omega\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\right]a_{\lambda'}(\vec{k'})|E\rangle,\\
&= a_\lambda(\vec{k})\sum_{\lambda'}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\omega' a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k'})|E\rangle - \omega a_\lambda(\vec{k})|E\rangle,\\
&= a_\lambda(\vec{k})H_n|E\rangle - \omega a_\lambda(\vec{k})|E\rangle = a_\lambda(\vec{k})E|E\rangle - \omega a_\lambda(\vec{k})|E\rangle\\
&= (E-\omega)a_\lambda(\vec{k})|E\rangle = H_n a_\lambda(\vec{k})|E\rangle = (E-\omega)a_\lambda(\vec{k})|E\rangle.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

De maneira análoga,

$$H_n a_\lambda^\dagger(\vec{k})|E\rangle = (E+\omega)a_\lambda^\dagger(\vec{k})|E\rangle. \tag{3.86}$$

O hamiltoniano é uma integral sobre o produto $a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_\lambda(\vec{k})$ e seus valores esperados são positivos,

$$\langle\psi|H|\psi\rangle \geq 0. \tag{3.87}$$

Podemos fazer o argumento de que deve ter um estado mínimo que seja aniquilado por,

$$a_\lambda(\vec{k})|0\rangle = 0, \tag{3.88}$$

chamado de estado de vácuo. E portanto, pode-se construir todos os estados aplicando operadores de criação ao estado de vácuo. Os estados de uma partícula podem ser escritos da seguinte forma,

$$a_\lambda^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k},\lambda\rangle. \tag{3.89}$$

Um estado arbitrário de múltiplas partículas é, portanto, dado por,

$$\prod_{i=1}^{K} \frac{\left[a_{\lambda_i}^\dagger(\vec{k}_i)\right]^{n(\vec{k}_i)}}{\sqrt{n(\vec{k}_i)!}}|0\rangle = |n(\vec{k}_1,\lambda_1)...n(\vec{k}_K,\lambda_K)\rangle. \tag{3.90}$$

Além disso, pode-se construir um operador número que se comporte da maneira usual,

$$\begin{aligned} N_\lambda(\vec{k}) &= a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_\lambda(\vec{k}) \\ N_{\lambda_1}(\vec{k}_1)|n(\vec{k}_1,\lambda_1)...n(\vec{k}_K,\lambda_K)\rangle &= n(\vec{k}_1,\lambda_1)|n(\vec{k}_1,\lambda_1)...n(\vec{k}_K,\lambda_K)\rangle. \end{aligned} \tag{3.91}$$

O ponto zero na escala de energia é definido de modo que a energia do vácuo tenha o valor zero. Como consequência,

$$H|\vec{k},\lambda\rangle = \omega|\vec{k},\lambda\rangle. \tag{3.92}$$

Em resumo, o fato de termos um estado de vácuo que é aniquilado pelos operadores de aniquilação nos permite criar todos os estados do sistema aplicando operadores de criação a esse estado de vácuo. Além disso, podemos introduzir operadores de número que contam o número de partículas em um estado específico, sendo que a energia do vácuo é escolhida como referência zero. Esse formalismo é extremamente útil na descrição de sistemas quânticos compostos por múltiplas partículas. Feito a quantização do campo eletromagnético e introduzido o conceito de vácuo quântico, vamos ver uma consequência da flutuação do estado de vácuo no próximo capítulo, conhecido como efeito Casimir.

4 Efeito Casimir

A compreensão do efeito Casimir é fundamental para entender como as flutuações dos campos quânticos influenciam e produzem os resultados apresentados neste capítulo, que servirão de base para resultados posterior no decorrer deste trabalho.

O efeito Casimir é amplamente reconhecido como um fenômeno de grande interesse e complexidade no âmbito da física moderna. Sua origem reside na quantização do campo eletromagnético, revelando que a energia contida nesse campo, mesmo na ausência de fótons, apresenta flutuações quânticas. Essas flutuações conduzem à existência de uma energia de ponto zero no vácuo, a qual, por sua vez, não é nula.

Em 1948, o físico Hendrik Casimir teorizou a existência de uma força atrativa entre duas placas condutoras paralelas e eletricamente neutras. Essa força é atribuída às flutuações da energia de ponto zero das ondas eletromagnéticas presentes no espaço entre as placas. Desde então, esse fenômeno ficou conhecido como Efeito Casimir [Casimir 1948]. A confirmação experimental [Sparnaay 1957, Sparnaay 1958] subsequente dessa previsão teórica não apenas reforçou a validade da teoria quântica dos campos, mas também foi considerada uma conquista notável na compreensão dos fenômenos em teoria quântica de campos. Vamos demonstrar as expressões de força e pressão referentes ao efeito Casimir.

4.1 O cálculo da força de Casimir

O potencial vetor $\vec{A}$ associado a uma onda eletromagnética no vácuo pode ser descrito pela equação de onda,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0. \tag{4.1}$$

Usando o método de separação de variáveis, fazemos,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})q(t), \tag{4.2}$$

onde $q(t)$ é uma função que depende somente do tempo $\vec{v}(\vec{r})$ é uma função que depende somente de $\vec{r}$. Então vamos substituir a equação (4.2) na equação (4.1),

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{q(t)}\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\vec{v}(\vec{r})}\nabla^2 \vec{v}(\vec{r}). \tag{4.3}$$

Podemos analisar que o lado direito tem dependência somente de $\vec{r}$, por outro lado, o lado esquerdo apenas tem dependência temporal, então levando isso em consideração, podemos iguala-los a uma constante. O sinal negativo se deve ao fato da facilidade posterior na resolução da equação diferencial. Dessa maneira,

$$\frac{1}{\vec{v}(\vec{r})}\nabla^2\vec{v}(\vec{r}) = -k^2, \tag{4.4}$$

e a parte temporal,

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{q(t)}\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = -k^2, \tag{4.5}$$

fazemos $\omega = ck$, chamada de relação de dispersão, obtemos,

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \omega^2 q(t) = 0. \tag{4.6}$$

Vamos considerar uma cavidade retangular de lados L_x, L_y e L_z conforme a figura abaixo,

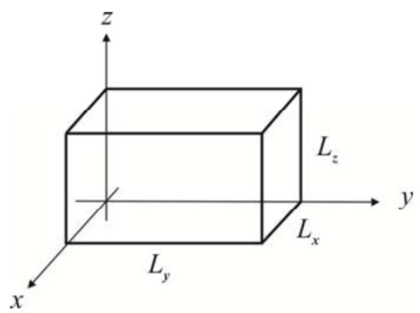

Figura 2 – Cavidade retangular [Rouver e Orlando 2015].

Onde $\vec{v}$ pode ser escrito em função das suas coordendas, ou seja,

$$\vec{v}(\vec{r}) = X(\vec{x})Y(\vec{y})Z(\vec{z}), \tag{4.7}$$

pegamos a equação (4.7) e substituímos na equação (4.4),

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2. \tag{4.8}$$

Como cada termo depende de uma variável diferente, podem ser igualados a constantes de forma que,

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2, \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2, \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_z^2. \tag{4.11}$$

Usando o método para equação diferencial homogênea de segunda ordem,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= -k_x^2, \\
\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X &= 0, \\
\lambda^2 + k_x^2 &= 0, \\
\lambda &= \pm i k_x.
\end{aligned}$$

Que tem solução,

$$X = Asin(k_x x) + Bcos(k_x x), \tag{4.12}$$

de forma análoga temos solução para Y e Z,

$$\begin{aligned}
Y &= Csin(k_y y) + Dcos(k_y y) && (4.13) \\
Z &= Esin(k_z z) + Fcos(k_z z). && (4.14)
\end{aligned}$$

Sabendo que,

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \tag{4.15}$$

reescrevendo a equação (4.7),

$$v_i = \left(A_i sin(k_x x) + B_i cos(k_x x)\right)\left(C_i sin(k_y y) + D_i cos(k_y y)\right)\left(E_i sin(k_z z) + F_i cos(k_z z)\right). \tag{4.16}$$

Como o potencial tem que ser nulo no interior da cavidade, as condições de contorno serão dadas por,

$$x = 0 \quad e \quad x = L_x \{ \begin{matrix} v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{matrix}. \tag{4.17}$$

$$y = 0 \quad e \quad y = L_y \{ \begin{matrix} v_x = 0 \\ v_z = 0 \end{matrix}. \tag{4.18}$$

$$z = 0 \quad e \quad z = L_z \{ \begin{matrix} v_y = 0 \\ v_x = 0 \end{matrix}. \tag{4.19}$$

Vamos analisar de forma inicial, $y = 0$ para $i = x$, portanto, considerando as condições de contorno,

$$(A_x sin(k_x x) + B_x cos(k_x x)) D_x (E_x sin(k_z z) + F_x cos(k_z z)) = 0, \tag{4.20}$$

que implica em $D_x = 0$. Agora em z=0,

$$0 = (A_x sin(k_x x) + B_x cos(k_x x)) C_x sin(k_y y) F_x \tag{4.21}$$

implicando também em $F_x = 0$. Desta forma, temos então,

$$v_x = (A_x sin(k_x x) + B_x cos(k_x x)) C_x sin(k_y y) E_x sin(k_z z). \tag{4.22}$$

De maneira totalmente análoga podemos obter,

$$v_y = A_y sin(k_x x)(C_y sin(k_y y) + D_y cos(k_y y))E_y sin(k_z z), \tag{4.23}$$
$$v_z = A_z sin(k_x x)C_x sin(k_y y)(E_z sin(k_z z) + F_z cos(k_z z)). \tag{4.24}$$

Usando o calibre de Coulomb $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$, temos,

$$\begin{aligned} \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z &= k_x(A_x cos(k_x x) - B_x sin(k_x x)C_x sin(k_y y)E_x sin(k_z z) + \\ &+ A_y sin(k_x x)k_y(C_y cos(k_y y) - D_y sin(k_y y)E_y sin(k_z z) \\ &+ A_z sin(k_x x)C_z sin(k_y y)k_z(E_z cos(k_z z) - F_z sin(k_z z))) = 0. \end{aligned}$$

Esta equação deve ser satisfeita em qualquer ponto da cavidade, inclusive em $(x = 0, y, z)$,$(x, y = 0, z)$,$(x, y, z = 0)$. Para $(x = 0, y, z)$, obtemos,

$$k_x A_x C_x sin(k_y y)sin(_z z) = 0. \tag{4.25}$$

de maneira análoga para (x,y=0,z) e (x,y,z=0),

$$A_y sin(k_x x)k_y C_y E_y sin(_z z) = 0, \tag{4.26}$$
$$A_z sin(k_x x)C_z sin(k_y y)k_z E_z = 0. \tag{4.27}$$

Portanto, é necessário ter $A_i C_i E_i = 0$. Logo, a equação (4.25) é escrita como,

$$\begin{aligned} \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z &= k_x B_x sin(k_x x)C_x sin(k_y y)E_x sin(k_z z) \\ &+A_y sin(k_x x)k_y D_y sin(k_y y)E_y sin(k_z z) \\ &+A_z sin(k_x x)C_z sin(k_y y)k_z F_z sin(k_z z) = 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Disso, as equações (4.22)-(4.24) tornam-se,

$$\begin{aligned} v_x &= B_x cos(k_x x)C_x sin(k_y y)E_x sin(k_z z), \\ v_y &= A_y sin(k_x x)D_y cos(k_y y)E_y sin(k_z z), \\ v_z &= A_z sin(k_x x)C_z sin(k_y y)F_z cos(k_z z), \end{aligned}$$

se renomearmos as constantes, ficamos com,

$$v_x = N_x cos(k_x x)sin(k_y y)sin(k_z z), \tag{4.29}$$
$$v_y = N_y sin(k_x x)cos(k_y y)sin(k_z z), \tag{4.30}$$
$$v_z = N_z sin(k_x x)sin(k_y y)cos(k_z z). \tag{4.31}$$

Levando em consideração as condições de contorno imposta ao sistema, para $x = L_x$,

$$0 = N_x cos(k_x L_x)sin(k_y y)sin(k_z z), \tag{4.32}$$

daqui podemos tirar que $k_x L_x = n\pi$. Ou seja,

$$k_x = \frac{l\pi}{L_x} \quad onde \quad l = 0, 1, 2, 3, ... \quad . \tag{4.33}$$

De forma análoga,

$$k_y = \frac{m\pi}{L_y} \quad onde \quad m = 0, 1, 2, 3, ... \tag{4.34}$$

$$k_z = \frac{n\pi}{L_z} \quad onde \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad . \tag{4.35}$$

.

De modo que vamos ter a equação (4.15) sendo,

$$k = \sqrt{\frac{l^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_y^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_z^2}}. \tag{4.36}$$

A energia do estado fundamental entre as placas é,

$$E_0 = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{2} \hbar\omega_k, \tag{4.37}$$

onde $\lambda = 1, 2$ representa as duas polarizações possíveis . Temos que, $k = \frac{\omega}{c}$, portanto

$$\sum_{l,m,n} \hbar\omega_{l,m,n} = \pi\hbar c \sum_{l,m,n} \sqrt{\frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2}}. \tag{4.38}$$

Como os campos têm duas polarizações, acrescentamos o fator (2) na equação (4.37), por isso o termo $\frac{1}{2}$ se torna 1, isso acontece quando $l, m, n \neq 0$. Quando um dos coeficientes for nulo, a contribuição do respectivo coeficiente nulo deve ser dividida por dois. Sendo assim, existem apenas duas polarizações para todos $k's$ diferentes de zero e apenas uma polarização se algum deles for zero.

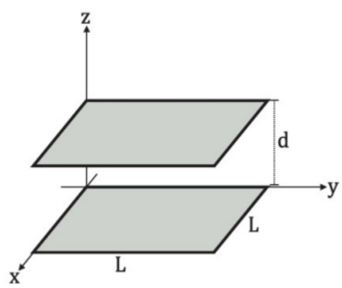

Figura 3 – Placas condutoras paralelas de área L^2 separadas por uma distância d [Rouver e Orlando 2015].

Consideremos a Figura 3, onde ela é o caso limite da Figura 2, onde, $L_x = L_y = L$ e $L_z = d$ com $L >> d$. Então, a energia do ponto zero entre as placas será dada pela equação

(4.38). Para L muito grande, consideramos k_x e k_y como quantidades contínuas [Milonni 2013], da forma que substituímos a somatória sobre l e m pela notação integral,

$$\sum_{l,m} \rightarrow \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int\int dk_x dk_y, \tag{4.39}$$

portanto,

$$E\left(d\right) = \sum_{lm,n} \hbar\omega_{l,m,n} \rightarrow \frac{L^2}{\pi^2}(\hbar c)\sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}\right] dk_x dk_y. \tag{4.40}$$

Da mesma forma, para $L_z = d$ muito grande, a soma em n pode se substituída por uma integral,

$$\sum_n \rightarrow \frac{d}{\pi}\int dk_z. \tag{4.41}$$

Sendo assim,

$$E\left(\infty\right) = \frac{L^2}{\pi^2}(\hbar c)\frac{d}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\right] dk_x dk_y dk_z. \tag{4.42}$$

A energia potencial do sistema quando duas placas paralelas estão separadas por uma distância d pode ser calculada como a diferença entre a energia total do sistema em dada distância, denotada por $E(d)$, e a energia total quando as placas estão infinitamente afastadas, representada por $E(\infty)$. Essa diferença de energia, expressa como $U(d)$, corresponde à energia da interação entre as placas paralelas separadas por uma distância d. Logo,

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{L^2}{\pi^2}(\hbar c)[\frac{L^2}{\pi^2}(\hbar c)\sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}\right] dk_x dk_y \\ &- \frac{L^2}{\pi^2}(\hbar c)\frac{d}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\right] dk_x dk_y dk_z]. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Fazendo uso das coordenadas polares no plano $k_x k_y$, onde r é o raio polar e θ é o ângulo polar, com $dk_x dk_y = r dr d\theta$, a equação (4.43) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{L^2\hbar c}{\pi^2}\left\{\sum_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty [\sqrt{r^2 + (\frac{n\pi}{d})^2}] r dr d\theta - \frac{d}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty [\sqrt{r^2 + k_z^2}] r dr d\theta dk_z\right\}, \\ &= \frac{L^2\hbar c\pi}{2\pi^2}\left\{\sum_n \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2}}\right] r dr - \frac{d}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + k_z^2}\right] r dr dk_z\right\}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Vamos introduzir uma função definida $f(k) = f(\sqrt{r^2 + k_z^2})$, que controla o comportamento da integral. Analisando fisicamente, para comprimentos de onda pequenos, da ordem de $\frac{1}{a_o}$ onde a_o é o raio de Bohr, as placas não vão exercer influência relevante pois não oferecem obstáculos para essas ondas [Dilem 2012]. Este efeito tem nome e se chama divergência ultravioleta. Para contornar essa divergência,

$$f(k) = \begin{cases} 1 \quad para \quad k < k_m \\ 0 \quad para \quad k >> k_m, \end{cases} \tag{4.45}$$

então,

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{L^2\hbar c}{2\pi}\Big\{\sum_n \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2}}\right] f\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{d^2} + r^2}\right) rdr \\ &- \frac{d}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{r^2 + k_z^2}\right] f\left(\left[\sqrt{r^2 + \frac{n^2\pi^2}{\pi^2}}\right]\right) rdrdk_z\Big\}, \\ &= \frac{L^2\hbar c}{2\pi}\Big\{\sum_n \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{d^2r^2}{\pi^2} + n^2}\right] f\left(\frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{d^2r^2}{\pi^2} + n^2}\right) rdr \\ &- \frac{d}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{d^2r^2}{\pi^2} + \frac{d^2k_z^2}{\pi^2}}\right] f\left(\frac{\pi}{d}\left[\sqrt{\frac{d^2r^2}{\pi^2} + \frac{d^2k_z^2}{\pi^2}}\right]\right) rdrdk_z\Big\}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Fazendo as substituições,

$$x = \frac{d^2r^2}{\pi^2} \rightarrow dx = 2\frac{d^2}{\pi^2}rdr \quad e \quad \kappa = \frac{dk_z}{\pi} \rightarrow d\kappa = \frac{d}{\pi}dk_z, \tag{4.47}$$

a equação (4.46) se torna,

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{L^2\hbar c}{2\pi}\Big\{\sum_n \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d}\sqrt{x + n^2}\right] f\left(\frac{\pi}{d}\sqrt{x + n^2}\right) \frac{\pi^2}{2d^2}dx \\ &- \frac{d}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d}\sqrt{x + \kappa^2}\right] f\left(\frac{\pi}{d}\left[\sqrt{x + \kappa^2}\right]\right) \frac{\pi^2}{2d^2}\frac{\pi}{d}d\kappa\Big\}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Agora, simplificando temos,

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{L^2\hbar c}{2\pi}\frac{\pi^3}{d^3}\Big\{\sum_n \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{d}\sqrt{x + n^2}\right] f\left(\frac{\pi}{d}\sqrt{x + n^2}dx\right) \\ &- \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sqrt{x + \kappa^2}\right] f\left(\frac{\pi}{d}\left[\sqrt{x + \kappa^2}\right]\right) dxd\kappa\Big\} \end{aligned} \tag{4.49}$$

Fazendo,

$$F(\kappa) = \int_0^\infty \left[\sqrt{x + \kappa^2}\right] f\left(\frac{\pi}{d}\left[\sqrt{x + \kappa^2}\right]\right) dx, \tag{4.50}$$

a equação (4.49) fica,

$$U(d) = \frac{\pi^2\hbar c}{4d^3}L^3\left\{\frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty F(\kappa)d\kappa\right\}. \tag{4.51}$$

É importante destacar que o fator meio presente na equação (4.51), multiplicando $F(0)$, corresponde a uma única liberdade de polarização quando $n = 0$. De acordo com a fórmula do somatório de Euler-Maclaurin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_{0}^{\infty} F(\kappa) d\kappa = \frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0)... \quad . \tag{4.52}$$

Derivando a equação (4.50), porém fazendo a substituição $u = x + \kappa^2$, se obtém,

$$F(\kappa) = \int_{\kappa^2}^{\infty} \sqrt{u f} \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{u} \right) du. \tag{4.53}$$

Realizando a intregação,

$$F(\kappa) = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} f \left(\frac{\pi}{d} u^{1/2} \right) \right] \Bigg|_{\kappa^2}^{\infty} = -\frac{2}{3} \kappa^3 f \left(\frac{\pi}{d} \kappa \right) \tag{4.54}$$

da forma que vamos ter, $F'(0) = 0 \quad e \quad F''''(0) = -4$. As derivadas de ordens superiores serão nulas, levando em conta que todas as derivadas da função de corte desaparecem quando $\kappa = 0$. Portanto, a equação (4.52),

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_{0}^{\infty} F(\kappa) d\kappa = \frac{1}{2} F(0) - \frac{4}{720}, \tag{4.55}$$

substituindo a equação (4.55) na equação (4.51), segue que,

$$U(d) = \frac{\pi^2 \hbar c}{4 d^3} L^2 \left\{ \frac{1}{2} F(0) + \frac{1}{2} F(0) - \frac{4}{720} \right\} = \frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} L^2. \tag{4.56}$$

Tendo $F(d) = -\vec{\nabla} U(d)$, obtemos,

$$F(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} L^2. \tag{4.57}$$

Portanto, a força atrativa por unidade de área, ou seja, a pressão, assume o seguinte valor,

$$P(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}. \tag{4.58}$$

Então, dizemos que há uma força atrativa entre as duas placas metálicas, que independem do material das placas que aparece devido a flutuações da energia do estado fundamental do campo eletromagnético [Casimir 1948].

Agora, buscamos compreender a natureza e as motivações que cercam a matéria escura, bem como uma possível partícula mediadora para explicá-la. Os resultados apresentados neste capítulo serão retomados posteriormente em conjunto ao adicional de matéria escura, que pode ser interpretada como um "fóton escuro", conforme discutiremos no próximo capítulo.

5 Fóton escuro

Há muitas décadas, a existência da matéria escura é um fato bem estabelecido devido à observação dos efeitos de sua interação gravitacional com a matéria ordinária no universo [Swart, Bertone e Dongen 2017, Spergel 2015]. No entanto, nosso conhecimento sobre as características da matéria escura é limitado, e a investigação de sua natureza é uma das maiores buscas na ciência fundamental atualmente. Enormes esforços têm sido feitos para identificar a matéria escura, com foco na busca de candidatos viáveis de partículas maciças que interagem fracamente (Weakly Interacting Massive Particle) [Garrett e Duda 2011]. No entanto, até o momento, nenhum resultado positivo foi alcançado nessa direção. Diferentes hipóteses têm sido propostas para explicar a natureza da matéria escura, incluindo a possibilidade de que seus constituintes interajam com a matéria ordinária através de uma nova força ainda desconhecida. Essa nova simetria oculta seria mediada por um bóson de calibre maciço, o fóton escuro, que se espera que se acople ao modelo padrão através de uma mistura cinética. A busca por esse mediador maciço tem sido intensamente investigada nos últimos anos, com a possibilidade de ser observado em experimentos já existentes.

Neste capítulo, busca-se motivações para o estudo do fóton escuro, explorando lacunas na física que sugerem modelos teóricos além do modelo padrão. Esse estudo é necessário para estabelecer uma base teórica e matemática sólida, a fim de buscar novos resultados relacionados a esse novo candidato à matéria escura.

Na próxima seção, iremos apresentar alguns motivos que justificam a realização de estudos sobre o fóton escuro dentro de uma física considerada de fronteira.

5.1 Motivação física

Vários efeitos anômalos como, curvas de rotação das galáxias [Corbelli e Salucci 2000], aglomerados de galáxias com dispersão de velocidade [Faber e Jackson 1976] e emissão de Raio-X anormal e lentes gravitacionais [Grenier, Black e Strong 2015], entre outros [Hu 2001, Jaffe 2012, Aghanim et al. 2020], têm sido observados ao longo dos anos em experimentos terrestres, astrofísicos ou cosmológicos. Alguns deles podem ser explicados introduzindo o conceito de setor escondido ou setor escuro, enquanto alguns ainda estão aguardando uma interpretação mais convincente, portanto, modelos teóricos mais complexos são necessários para sua descrição detalhada. A maioria dos modelos capazes de fornecer uma explicação para esses efeitos assume uma forma relativamente leve de matéria escura, com candidatos com massas de no máximo 10 GeV e da ordem de 100 MeV para o mediador escuro [Filippi e Napoli 2020].

5.1.1 Hierarquia eletrofraca

O termo “Problema de Hierarquia” é frequentemente utilizado pelos físicos para designar uma discrepância de escalas entre a massa dos Bósons de calibre/ Higgs e a massa de Planck [Koren 2020]. De acordo com a teoria quântica de campo do MP, o cálculo da massa de Higgs indica que esta recebe contribuições de todas as escalas de energia, incluindo a escala mais elevada λ, na qual o MP é válido. A escolha mais evidente para esta escala é a massa de Planck [Beacham et al. 2019]. A discrepância de muitas ordens de magnitude entre $M_{W,Z,H} \approx 100$ GeV, sendo W,Z, massas das partículas mediadores pela força fraca e H, referente ao bóson de Higgs e $M_{Planck} \approx 10^{19}$ GeV referente a massa de Planck, é a hierarquia referida no termo "Problema da Hierarquia". Esta discrepância de escala, da ordem de $\approx 10^{17}$ GeV , levou muitos físicos a concluir que é necessário recorrer a teorias que vão além do MP para explicar a hierarquia.

Com base nos resultados experimentais [Rosso 2012] que indicam a massa do Higgs como $M_H = 125$ GeV, surge uma importante questão sobre como é possível obter esse valor a partir da teoria quântica de campos. O MP descreve o termo de massa de Higgs como $m^2 H^\dagger H$, que é invariante sob simetria de gauge ou global em H. No entanto, esse parâmetro de massa é passível de alterações por correções, uma vez que a massa de Higgs é modificada por termos de correção de todas as escalas com as quais ela interage, e esses termos são proporcionais a essas escalas. No MP, essa escala pode chegar até $M_{Planck} \approx 10^{19}$ GeV, resultando em uma expectativa para a massa do Higgs muito maior do que o valor experimental observado [Smith 2019].

Para reconciliar esses dois valores, é necessária a realização de um cancelamento numérico de termos que leva à redução da massa de Higgs para seu valor experimental adequado. No entanto, muitos físicos consideram essa dependência de cancelamento numérico desconfortável e não natural. Como resultado, tem sido proposta uma série de teorias alternativas que buscam resolver o problema da disparidade entre os valores esperados e experimentais da massa do Higgs sem a necessidade de ajustes finos nos termos do cálculo, uma dessas propostas teóricas é a existência do fóton escuro.

5.1.2 Violação CP

A simetria CP é uma simetria que descreve juntas, o efeito da transformação de partículas em antipartículas, conhecida como conjugação de carga, e a inversão das coordenadas espaciais, denominada paridade.

No nosso universo, a simetria CP é quebrada, resultando na assimetria entre matéria e antimatéria, que é oposta ao que se espera (que seja igual). Para explicar essa assimetria, as condições de Sakharov (violação do número bariônico, violação da simetria CP e interações fora do equílibrio térmico) [Sakharov 1998] precisam ser satisfeitas, incluindo a violação de simetria CP durante as condições extremas do início do universo. Explicações que não envolvem a quebra de simetria CP são menos plausíveis.

Recentemente, foi mostrado que a mistura cinética com quebra de simetria CP entre um fóton escuro e as partículas do MP pode levar a novas descobertas na física, assim propondo uma física além do modelo padrão de física de partículas que pode explicar a presença de matéria escura no universo [Cheng et al. 2022].

5.1.3 Unificação

O MP de física de partículas tem sido altamente bem-sucedido em explicar praticamente todos os dados experimentais existentes com uma precisão excepcional. No entanto, a ausência de evidências claras para novas partículas nos experimentos do LHC (do inglês Large Hadron Collider) tem colocado em dúvida a argumentação da naturalidade, que tem sido o impulso da busca por novas físicas. Por outro lado, há muitos fenômenos que exigem uma física além do MP, como matéria escura, assimetria de bárions, inflação, massas e misturas de neutrinos, entre outros. A unificação do acoplamento de calibre em uma teoria unificada (GUT, Grand Unified Theory) é uma possibilidade intrigante e plausível que tem sido amplamente estudada na literatura [Daido, Takahashi e Yokozaki 2017]. A introdução do fóton escuro com uma mistura cinética com o grupo $U(1)_Y$ pode melhorar a unificação do acoplamento de calibre. Um dos resultados propostos é a indicação de uma matéria escura mini-carregada como um resultado natural da GUT com fóton escuro, o que motiva ainda mais a busca por fótons escuros e o estudo contínuo da unificação da física de partículas.

5.1.4 Oscilações de Neutrinos

Imagine que você comprou uma caixa de sorvete de chocolate na loja, porém, ao abrir, percebe que o sorvete tem sabor de baunilha, ao colocar uma colher na tigela e caminhar até outra sala para saboreá-lo, surpreendentemente, o sorvete agora tem sabor de morango. Essa curiosa experiência é análoga ao que ocorre com os neutrinos.

A oscilação de neutrinos é um fenômeno de natureza quântica no qual um neutrino, originado com um determinado número de família leptônica (sabor leptônico: elétron, múon ou tau), pode ser posteriormente detectado com um número de família leptônica distinta. A probabilidade de se observar um sabor específico para um neutrino varia entre três estados conhecidos, à medida que este se propaga pelo espaço [Barger, Marfatia e Whisnant 2012]. Pesquisadores tem estudado como o acoplamento do fóton escuro pode estar modificando a dinâmica das conversões de sabor dos neutrinos, com foco em oscilações de longa distância [Alonso-Álvarez, Bleau e Cline 2023] .

5.2 Lagrangiana e Tensor energia momento com a presença de fótons escuros

O MP é uma teoria que unifica o eletromagnetismo, a força forte e a força fraca sob um grupo de calibre chamado $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Ele foi confirmado com alta precisão em várias previsões, como a determinação do momento magnético anômalo do elétron [Aoyama, Kinoshita e Nio 2019] e a descoberta do bóson de Higgs [Brout, Englert e Gunzig 1978, Higgs 1964]. No entanto, o MP não consegue explicar algumas observações, como a existência de massa para os neutrinos e a natureza da matéria escura e da energia.

Para abordar essas questões, extensões do MP, como a teoria das cordas [Morozov 1992], foram propostas. Uma possibilidade comum nessas extensões [Kroff e Malta 2020] é adicionar um grupo extra $U(1)_X$ ao grupo de simetria. Esse setor adicional interage com a hipercarga fraca $U(1)_Y$, resultando em uma mistura com o fóton eletromagnético $U(1)_{EM}$ em baixas energias. O novo bóson de spin-1 associado a $U(1)_X$, é eletricamente neutro e não se acopla diretamente aos campos de matéria do MP. Portanto, além da mistura com o fóton, o bóson X permanece invisível, sendo chamado de fóton oculto ou escuro. A proposta de Lagrangiana em unidades naturais é [Kroff e Malta 2020],

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} - \frac{\chi}{2}F_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2}X_\mu X^\mu, \tag{5.1}$$

o novo bóson interage com o fóton do modelo padrão, misturando-se com este. Onde $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ é o tensor eletromagnético, $X_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu X_\nu(x) - \partial_\nu X_\mu(x)$ é o tensor do fóton escuro, com X_μ denotando o campo escuro $U(1)_X$, χ é o parâmetro de mistura cinética sem dimensão, que em alguns cenários é restrito a $10^{-12} \lesssim \chi \lesssim 10^{-3}$ [Jaeckel e Roy 2010] e m_γ é a massa do fóton escuro.

É importante ressaltar que o termo de mistura dado por $\frac{\chi}{2}F_{\mu\nu}X^{\mu\nu}$ pode ser removido do Lagrangiano (5.1) por meio de uma redefinição de campo. Existem duas maneiras de redefinir o campo e remover o termo de mistura: (i) $A_\mu \to A_\mu - \chi X_\mu$ e (ii) $X_\mu \to X_\mu - \chi A_\mu$. Embora essas transformações sejam equivalentes, a física resultante é diferente. No primeiro caso, o fóton escuro se torna uma partícula vetorial massiva não carregada, enquanto no segundo caso, a mistura é transferida para termos de massa, o que implica em uma oscilação entre fóton e fóton escuro [Jaeckel 2013, Foldenauer 2019, Fabbrichesi, Gabrielli e Lanfranchi 2020]. Aqui, considera-se o primeiro caso e aplicando essa redefinição, temos,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \chi\partial_\mu X_\nu - \partial_\nu A_\mu + \chi\partial_\nu X_\mu \\ &= \bar{F}_{\mu\nu} - \chi X_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

com,

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Considerando os termos simplesmente da Lagrangiana (5.1), teremos,

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{F}_{\mu\nu}X^{\mu\nu},$$

e,

$$\begin{aligned}
-\frac{\chi}{2}F_{\mu\nu}X^{\mu\nu} &= -\frac{\chi}{2}(\partial_\mu A_\nu - \chi\partial_\mu X_\nu - \partial_\nu A_\mu + \chi\partial_\nu X_\mu)(X^{\mu\nu}) \\
&= -\frac{\chi}{2}(\bar{F}_{\mu\nu} - \chi X_{\mu\nu})X^{\mu\nu} = -\frac{\chi}{2}\bar{F}_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{\chi^2}{2}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Desconsideraremos os termos de ordem superior em χ. Retornando os resultados para a equação (5.1), obtemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} + \frac{\chi}{2}\bar{F}_{\mu\nu}X^{\mu\nu} - \frac{\chi}{2}\bar{F}_{\mu\nu}X^{\mu\nu} - \frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + m_\gamma^2 X_\mu X^\mu, \\
&= -\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + m_\gamma^2 X_\mu X^\mu,
\end{aligned}$$

o que nos leva a Lagrangiana para fótons escuros massivos com fótons usuais sem massa,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + m_\gamma^2 X_\mu X^\mu. \tag{5.3}$$

Olhando para a Lagrangiana fornecida na equação (5.3), agora nos dedicaremos à derivação da equação que nos permitirá obter o tensor de energia-momento associado à teoria. O tensor energia-momento se faz necessário neste para posteriormente obtermos quantidades físicas desse objeto. Para isso, ao observarmos que a Lagrangiana depende de dois campos independentes, devemos construir um tensor energia-momento que seja adequado à essa situação. Sejam os campos,

$$\begin{aligned}
\phi(x) \quad &\rightarrow \quad \phi(x+a) = \phi(x) + a^\mu\partial_\mu\phi(x), \\
\Phi(x) \quad &\rightarrow \quad \Phi(x+a) = \Phi(x) + a^\mu\partial_\mu\Phi(x).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Sob uma pequena variação (perturbação), os campos podem ser descritos como,

$$\phi(x) \quad \rightarrow \quad \phi(x) + \delta\phi(x), \tag{5.5}$$

$$\Phi(x) \quad \rightarrow \quad \Phi(x) + \delta\Phi(x), \tag{5.6}$$

podemos afirmar que a Lagrangiana depende tanto dos campos ϕ e Φ, quanto de suas respectivas derivadas,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), \Phi(x), \partial_\mu\Phi(x)). \tag{5.7}$$

Para obter a expressão que nos leve ao tensor energia-momento, é necessário encontrar a equação de Euler-Lagrange correspondente a Lagrangiana fornecida. Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta S &= 0 = \delta\int d^4x\mathcal{L}, \\
&= \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta(\partial_\mu\Phi)\right) = 0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

sendo S a ação do sistema. Vamos resolver esta integração considerando o método de integração por partes em termos das variações das derivadas do campo da equação (5.8),

$$\begin{aligned}\int d^4x(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)) &= \int d^4x(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)) = -\int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right),\\ \int d^4x(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta(\partial_\mu\Phi)) &= \int d^4x(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu(\delta\Phi)) = -\int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right),\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)\delta\Phi\right),\\ &= \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right)\delta\phi + \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)\right)\delta\Phi,\end{aligned}$$

levando-nos às equações de Euler-Lagrange para os campos ϕ e Φ, temos,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right), \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right). \tag{5.10}$$

Agora, com as equações de Euler-Lagrange para os respectivos campos, voltamos ao processo de obtenção do tensor de energia para a Lagrangiana em questão. Consideremos uma variação sob a Lagrangiana e suas dependências,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta(\partial_\mu\Phi), \tag{5.11}$$

das respectivas equações (5.9) e (5.10). Portanto, a variação da Lagrangiana pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta(\partial_\mu\Phi),\\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu(\delta\Phi).\end{aligned}$$

Agora temos uma expressão que pode ser escrita como uma derivada total. Lembrando da regra do produto que afirma $(fg)' = f'g + fg'$. Usamos essa regra da seguinte maneira,

$$f = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}, \tag{5.12}$$

e,

$$g = \delta\phi, \tag{5.13}$$

a substituição será análoga para o caso do campo Φ. Portanto,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi\right)\\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi\right).\end{aligned} \tag{5.14}$$

De uma maneira similar a equação (5.4), a equação acima se torna,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi \right) a^\nu. \tag{5.15}$$

Equivalentemente, também podemos escrever a variação da Lagrangiana como,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\mathcal{L}) a^\mu = \delta^\mu_\nu \partial_\mu(\mathcal{L}) a^\nu. \tag{5.16}$$

Igualando esses dois resultados,

$$\delta\mathcal{L} = \delta^\mu_\nu \partial_\mu(\mathcal{L}) a^\nu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi \right) a^\nu. \tag{5.17}$$

Se movermos ambos os termos para um lado da equação, encontramos,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta^\mu_\nu(\mathcal{L}) \right) a^\nu = 0. \tag{5.18}$$

Assim, para que a expressão seja anulada, é imprescindível que a derivada seja igual a zero. Em outras palavras,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta^\mu_\nu(\mathcal{L}) \right) = 0. \tag{5.19}$$

Tal é a importância dessa expressão que demos a essa quantidade um nome exclusivo. Foi identificado que corresponde ao tensor energia-momento, que é representado por,

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta^\mu_\nu(\mathcal{L}). \tag{5.20}$$

Prossigamos com a dedução do tensor energia-momento para a teoria, ou seja, substituiremos os campos $\phi \to A_\rho$ e $\Phi \to X_\rho$, e assim, obtemos,

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \partial_\nu A_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu X_\rho)} \partial_\nu X_\rho - \delta^\mu_\nu(\mathcal{L}). \tag{5.21}$$

E então, considerando a Lagrangiana responsável pela teoria dada pela equação (5.3), obtemos,

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = -F^{\mu\rho}\partial_\nu A_\rho - X^{\mu\rho}\partial_\nu X_\rho - \eta^\mu_\nu \left[-\frac{1}{4}\left(F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + X_{\sigma\rho}X^{\sigma\rho}\right) + \frac{1}{2} m_\gamma^2 X_\rho X^\rho \right]. \tag{5.22}$$

Observe que esse tensor energia-momento é antissimétrico. Para simetrizá-la, utiliza-se o método de Belinfante-Rosenfeld [Belinfante 1940, Rosenfeld 1940]. Em seguida, um tensor energia-momento simétrico descrevendo o fóton padrão e o fóton escuro é obtido como,

$$\Theta^\mu_\nu = -\eta^{\mu\lambda}\left(F_{\lambda\rho}F^\rho_\nu + X_{\lambda\rho}X^\rho_\nu\right) + \frac{1}{4}\eta^\mu_\nu\left(F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + X_{\sigma\rho}X^{\sigma\rho}\right) - \frac{1}{2}\eta^\mu_\nu m_\gamma^2 X_\rho X^\rho. \tag{5.23}$$

O tensor de energia-momento desempenha um papel fundamental ao descrever a distribuição de energia, momento e pressão em um campo quântico no espaço e no tempo. Além disso, sua conservação, resultante da simetria de translação no espaço-tempo pode ser associada ao teorema de Noether. Essa característica essencial destaca a importância crucial do tensor de energia-momento na compreensão das leis físicas que regem nosso universo e no estabelecimento de um equilíbrio fundamental entre as interações elementares, contribuindo para a previsão e explicação de fenômenos complexos, como a dinâmica de partículas elementares fruto desse campo.

Os resultados apresentados, que incluem o tensor energia-momento com a contribuição tanto do fóton usual quanto do fóton escuro, estabelecem a base para o cálculo de quantidades físicas, conforme descrito no capítulo subsequente.

6 Dinâmica dos campos térmicos

A primeira abordagem sistemática para lidar com uma teoria quântica de campos em temperatura finita foi introduzida por Takeo Matsubara em 1955 [Matsubara 1955]. Essa análise foi realizada por meio do formalismo de tempo imaginário.

Posteriormente, H. Ezawa, Y. Tomozawa e H. Umezawa [Ezawa, Tomozawa e Umezawa 1957] generalizaram o formalismo de Matsubara para a teoria quântica de campos relativística. Onde também estabeleceram as condições de periodicidade para as funções de Green de campos bosônicos e fermiônicos, conhecidas como condição KMS (Kubo, Martin e Schwinger).

Mesmo o formalismo de tempo imaginário sendo adequado para descrever fenômenos térmicos na teoria quântica de campos, ele apresenta limitações quando se lida com a física da matéria condensada, onde a dependência temporal é crucial. Para superar essas dificuldades, surgiram outras propostas, como a formulação do caminho de tempo fechado. Esse formalismo foi introduzido por J. Schwinger [Schwinger 1961], Mahanthapa e Bakshi [Bakshi e Mahanthappa 1963] e Keldish [Keldysh et al. 1965], utilizando um caminho fechado no plano complexo do tempo.

Um dos formalismos fundamentais para a análise de sistemas quânticos em temperatura finita foi proposto por pesquisadores chamados Yasushi Takahashi e Hiroomi Umezawa no ano de 1975. Essa abordagem recebe o nome de Dinâmica de Campos Térmicos (TFD, do inglês thermo field dynamics) [Takahashi e Umezawa 1975]. O TFD é capaz de incorporar todos os conceitos da teoria quântica de campos, enquanto leva em consideração explicitamente a influência da temperatura e preserva a informação temporal do sistema. Uma característica central da TFD é a duplicação do espaço de Hilbert original, permitindo assim que a temperatura seja incorporada por meio de uma transformação de Bogoliubov [Khanna 2009]. No decorrer deste capítulo, será apresentada uma explicação detalhada dessa transformação.

O estudo do formalismo TFD se faz necessário em nosso trabalho, pois este formalismo será a base para realizarmos a aplicação sobre o tensor energia-momento e assim obter as quantidades físicas desejadas para os fótons escuros. Dito isso, vamos introduzir o assunto, através de estudos do espaço do formalismo e sua estruturação matemática.

6.1 Espaço térmico de Hilbert e suas propriedades algébricas

Considerando um sistema em equilíbrio térmico, a média de ensemble de um operador A pode ser expressa da seguinte forma,

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H} A\right), \tag{6.1}$$

onde $Z(\beta)$ é a função de partição associada à temperatura inversa β, H é o operador Hamiltoniano e Tr denota a operação de traço.

Assumindo que $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, onde $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$, podemos reescrever a expressão da média de ensemble (6.1) como,

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle. \tag{6.2}$$

Estamos interessados em encontrar um estado $|0(\beta)\rangle$, de maneira que [Takahashi e Umezawa 1975, Umezawa e Umezawa 1993, Umezawa, Matsumoto e Tachiki 1982],

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle. \tag{6.3}$$

Se consideremos $|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n||0(\beta)\rangle$, isso implica que $\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle$ é igual a,

$$\sum_{nm} g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n|A|m\rangle, \tag{6.4}$$

e a equação (6.2) impõe a seguinte condição nos coeficientes $g_m(\beta)$ e $g_n^*(\beta)$,

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{nm}. \tag{6.5}$$

Mas, quando consideramos números clássicos [Nakahara 2003], essa relação não pode ser satisfeita, o que torna inviável considerar $|0(\beta)\rangle$ como um elemento do espaço de Hilbert original. No entanto, a condição mencionada anteriormente possui semelhanças com uma condição de ortogonalidade, sugerindo que $g_m(\beta)$ deve pertencer a um espaço vetorial. Para contornar essa situação, uma abordagem viável é introduzir uma duplicação do espaço de Hilbert. Isso é realizado através de um produto tensorial de espaços, em que um vetor da base é expresso como $|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$. Dentro desse contexto específico, podemos escolher $g_m(\beta) = f_m(\beta)|\tilde{m}\rangle$, permitindo-nos escrever,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta)|n, \tilde{n}\rangle, \tag{6.6}$$

onde $|0(\beta)\rangle$ representa um estado puro definido no contexto deste espaço de Hilbert duplicado por,

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |n, \tilde{n}\rangle. \tag{6.7}$$

Esse estado puro é análogo a um estado misto que descreve o equilíbrio térmico de um sistema. Podemos fornecer uma descrição abrangente das regras de TFD, que desempenham um papel fundamental na transformação de operadores não-til a operadores til.

Algumas propriedades relevantes dessas regras surgem ao introduzirmos uma variável específica para essa finalidade, denotada por $\tilde{A}$,

$$\tilde{A} = A - \hat{A}. \tag{6.8}$$

As relações de comutação correspondentes são as seguintes,

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= iC_{ij}^k A_k, && (6.9)\\ \left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] &= iC_{ij}^k \tilde{A}_k, && (6.10)\\ \left[A_i, \tilde{A}_j\right] &= 0. && (6.11) \end{aligned}$$

Vamos explorar as implicações desse resultado, que revela a emergência de novos graus de liberdade por meio de uma combinação direta entre os elementos relacionados aos geradores de simetria e aos observáveis. Essa combinação surge da separabilidade algébrica dos mapeamentos em $\mathcal{H}_T$, que descrevem essas entidades [Khanna 2009]. Como resultado, observamos um aumento significativo no número de graus de liberdade disponíveis. Dessa duplicação, podemos introduzir um operador J que satisfaz a relação $JAJ = \tilde{A}$. Por meio desse operador, estabelecemos uma conexão essencial entre os elementos envolvidos na duplicação e o valor final de $\tilde{A}$,

$$\begin{aligned} (A_i A_j)^\sim &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j && (6.12)\\ (cA_i + A_j)^\sim &= c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, && (6.13)\\ \left(A_i^\dagger\right)^\sim &= \left(\tilde{A}_i\right)^\dagger, && (6.14)\\ \left(\tilde{A}_i\right)^\sim &= A_i. && (6.15) \end{aligned}$$

Essas propriedades são conhecidas como as regras de conjugação til. Para melhor compreensão, vamos utilizar exemplos que envolvam tanto operadores com til quanto operadores sem til. Consideremos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ como um espaço de Fock [Fock 1932], onde um vetor de base é denotado por,

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(a^\dagger\right)^m |0\rangle. \tag{6.16}$$

Destacamos que o estado de vácuo é representado por $|0\rangle$, e o operador de criação $a^\dagger$ segue a álgebra $\left[a, a^\dagger\right] = 1$, com as outras relações de comutação sendo nulas. A abordagem adotada, considera o espaço de Hilbert térmico como o produto direto $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$. Vale ressaltar que o significado do espaço til, $\tilde{\mathcal{H}}$, é determinado pelas regras de conjugação til em relação ao espaço de representação. A fim de obter um vetor de base arbitrário em $\mathcal{H}_T$, inicialmente se aplica a conjugação til em $\mathcal{H}$, ou seja, temos $\mathrm{J}\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}$. No caso de um vetor $|m\rangle$ que pertence a $\mathcal{H}$, temos,

$$J|m\rangle = J\frac{1}{\sqrt{m!}}\left(a^\dagger\right)^m|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}\left(\tilde{a}^\dagger\right)^m J|0\rangle, \tag{6.17}$$

onde os resultados $J^2 = 1$ e $Ja^\dagger J = \tilde{a}^\dagger$ são usados. É necessário definir a seguinte conjugação $J|0\rangle = |0\rangle^\sim$. Uma opção simples é,

$$J|0\rangle = |\tilde{0}\rangle. \tag{6.18}$$

Então temos, $J|m\rangle = |\tilde{m}\rangle$ e a base vetorial em $\mathcal{H}_T$ é dada por,

$$|m,\tilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^m\left(\tilde{a}^\dagger\right)^n|0,\tilde{0}\rangle, \tag{6.19}$$

onde $|m,\tilde{n}\rangle = |m\rangle\otimes|\tilde{n}\rangle$ e em particular $|0,\tilde{0}\rangle = |0\rangle\otimes|\tilde{0}\rangle$. Usando isso, nós obtemos,

$$J|m,\tilde{n}\rangle = |n,\tilde{m}\rangle. \tag{6.20}$$

Considerando um operador A em $\mathcal{H}$, assim, podemos construir um operador correspondente sem til, digamos $\mathcal{A}$, em $\mathcal{H}_T$ ao definir como ele age em um vetor $|m,\tilde{n}\rangle$ como,

$$\mathcal{A}|m,\tilde{n}\rangle = (A|m\rangle)\otimes|\tilde{n}\rangle.$$

Da mesma forma, considerando $\tilde{A}$ em $\tilde{\mathcal{H}}$, temos $\tilde{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{H}_T$, tal que,

$$\tilde{\mathcal{A}}|m,\tilde{n}\rangle = |m\rangle\otimes\tilde{\mathcal{A}}|\tilde{n}\rangle.$$

Utilizando a relação de completude $1 = \sum_{r,s}|r,\tilde{s}\rangle\langle s,\tilde{r}|$, temos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}|m,\tilde{n}\rangle &= \sum_{r,s,t,u}|r,\tilde{s}\rangle\langle\tilde{s},r|\mathcal{A}|t,\tilde{u}\rangle\langle\tilde{u},t||m,\tilde{n}\rangle,\\
&= \sum_{r,s}\langle\tilde{s},r|\mathcal{A}|m,\tilde{n}\rangle|r,\tilde{s}\rangle,\\
&= \sum_{r}A_{r,m}|r,\tilde{n}\rangle = (A|m\rangle)|\tilde{n}\rangle,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

onde $A_{rm} = \langle r|A|m\rangle$ Podemos obter o conjugado til de $\mathcal{A}$ ao tomar a conjugação til da equação (6.21), resultando em,

$$\tilde{\mathcal{A}}|m,\tilde{n}\rangle^\sim = \tilde{\mathcal{A}}|n,\tilde{m}\rangle = \sum_r A^*_{rm}|n,\tilde{r}\rangle,$$

onde aplicamos $(A_{rm})^{\sim} = A^{*}_{rm}$, já que A_{rm} é um número clássico, e $|m, \tilde{n}\rangle^{\sim} = |n, \tilde{m}\rangle$. Porém, temos,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}|n, \tilde{m}\rangle &= \sum_{r,s,t,u} |r, \tilde{s}\rangle\langle \tilde{s}, r|\tilde{\mathcal{A}}|t, \tilde{u}\rangle\langle \tilde{u}, t||n, \tilde{m}\rangle \\
&= \sum_{r,s} \langle \tilde{s}, r|\tilde{\mathcal{A}}|n, \tilde{m}\rangle|r, \tilde{s}\rangle = \sum_{s} \langle \tilde{s}|\tilde{A}|\tilde{m}\rangle|n, \tilde{s}\rangle.
\end{aligned}$$

Dado que $A_{rm} = \langle r|A|m\rangle$, podemos obter o operador til de A ao tomar a conjugação til da equação (6.21), o que resulta em,

$$\tilde{\mathcal{A}}|m, \tilde{n}\rangle^{\sim} = \tilde{\mathcal{A}}|n, \tilde{m}\rangle = \sum_{r} A^{*}_{rm}|n, \tilde{r}\rangle.$$

Ao utilizarmos $(A_{rm})^{\sim} = \mathcal{A}^{*}rm$, estamos considerando que A_{rm} é um número clássico. Além disso, usamos a propriedade de conjugação til para trocar a ordem dos operadores na expressão,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}|n, \tilde{m}\rangle &= \sum_{r,s,t,u} |r, \tilde{s}\rangle\langle \tilde{s}, r|\tilde{\mathcal{A}}|t, \tilde{u}\rangle\langle \tilde{u}, t||n, \tilde{m}\rangle \\
&= \sum_{r,s} \langle \tilde{s}, r|\tilde{\mathcal{A}}|n, \tilde{m}\rangle|r, \tilde{s}\rangle = \sum_{s} \langle \tilde{s}|\tilde{A}|\tilde{m}\rangle|n, \tilde{s}\rangle.
\end{aligned}$$

Isso nos leva à seguinte relação,

$$\langle \tilde{s}|\tilde{A}|\tilde{m}\rangle = A^{*}_{sm} = \left(A^{T\dagger}\right)_{sm} = \left(A^{\dagger}\right)_{ms}, \tag{6.22}$$

onde (T) representa o transposto e $(\dagger)$ representa o hermitiano conjugado de A. Escrevemos então,

$$\langle \tilde{s}, r|\mathcal{A}|m, \tilde{n}\rangle = \mathcal{A}_{\tilde{s}rm\tilde{n}} = \mathcal{A}_{rmsn},$$

temos,

$$A_{rmsn} = A_{rm}\delta_{ns}. \tag{6.23}$$

Estabelecendo a definição para o operador til,

$$\langle \tilde{s}, r|\tilde{\mathcal{A}}|m, \tilde{n}\rangle = \tilde{A}_{\tilde{s}rm\tilde{n}} = \tilde{A}_{snrm},$$

que resulta em,

$$\tilde{\mathcal{A}}_{snrm} = \delta_{rm}\left(A^{\dagger}\right)_{ns}. \tag{6.24}$$

A partir das equações (6.23) e (6.24), podemos formular o seguinte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= A \otimes 1, \\
\tilde{\mathcal{A}} &= 1 \otimes A^{\dagger}.
\end{aligned}$$

É possível obter um resultado útil ao considerar o vetor para os operadores tanto com til quanto sem til,

$$|1\rangle = \sum_m |m, \tilde{m}\rangle. \tag{6.25}$$

Portanto, a partir da Equação (6.21), podemos inferir que o operador sem til apresenta o seguinte resultado,

$$\mathcal{A}|1\rangle = \sum_m \mathcal{A}|m, \tilde{m}\rangle = \sum_{m,r} A_{rm}|r, \tilde{m}\rangle, \tag{6.26}$$

e para o operador com til,

$$\tilde{\mathcal{A}}|1\rangle = \sum_m \tilde{\mathcal{A}}|m, \tilde{m}\rangle = \sum_{m,r} \tilde{A}_{rm}|m, \tilde{r}\rangle. \tag{6.27}$$

Ao aplicar a conjugação til na equação, temos,

$$\tilde{\mathcal{A}}_{rm} = A^*_{rm} = \langle r|A^{T\dagger}|m\rangle = \langle m|A^\dagger|r\rangle.$$

Ao inserir o resultado na equação (6.27), obtemos,

$$\tilde{\mathcal{A}}|1\rangle = \sum_m \left(A^\dagger|m\rangle\right)|\tilde{m}\rangle. \tag{6.28}$$

Com base na igualdade $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, onde $A = BC$, temos que,

$$\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{C}}|1\rangle = (BC)^\dagger|1\rangle = C^\dagger B^\dagger|1\rangle. \tag{6.29}$$

Com o espaço térmico e as propriedades algébricas bem definidas, vamos aplicar esse ferramental ao oscilador térmico bosônico e também discutirmos a ideia de vácuo térmico.

6.2 Oscilador térmico bosônico e o vácuo térmico

A aplicação da abordagem algébrica aos osciladores bosônicos introduz elementos adicionais ao formalismo, os quais desempenham um papel importante no estudo de campos térmicos. Em particular, a termalização será realizada utilizando a transformação de Bogoliubov [Valatin 1958, Bogoljubov, Tolmachov e Širkov 1958] na notação dupla. O hamiltoniano que descreve um oscilador bosônico é [Sakurai e Commins 1995],

$$H = wa^\dagger a,$$

Ao negligenciar a contribuição proveniente do ponto zero, que corresponde à energia nula presente no vácuo, podemos afirmar que os operadores de criação e destruição, representados por $a^\dagger$ e a, respectivamente, satisfazem a álgebra relevante nesse contexto. Essa álgebra é definida pelas seguintes relações,

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1, \\ [a, a] &= [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores e autoestados do hamiltoniano H são especificados por,

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle,$$

onde o estado de vácuo $|0\rangle$ é definido por,

$$a|0\rangle = 0, \tag{6.30}$$
$$(a^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle, \tag{6.31}$$
$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \tag{6.32}$$

Esses estados são ortonormais, ou seja, $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$, e o operador número $N = a^\dagger a$ satisfaz,

$$N|n\rangle = n|n\rangle.$$

Os autovalores de N, que são inteiros $n = 0, 1, 2, \ldots$, determinam os níveis de energia do oscilador, $n\omega$. Como $a^\dagger$ e a descrevem bósons, o estado $|n\rangle$ representa um estado com n bósons. Dito isso, vamos estudar o vácuo térmico já introduzida a ideia de oscilador harmônico para o caso bosônico.

Para estudarmos o vácuo térmico, se faz necessários introduzir operadores de criação e aniquilação til e, assim, dobrando os graus de liberdade, ou seja escrevemos $\tilde{a}^\dagger$ e $\tilde{a}$. Aplicando a regra de conjugação til à álgebra fornecida na Eq. (6.30), obtemos,

$$(aa^\dagger - a^\dagger a)^\sim = \tilde{1} = 1,$$
$$\left[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\right] = 1, \tag{6.33}$$
$$[\tilde{a}, \tilde{a}] = \left[\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger\right] = 0. \tag{6.34}$$

Considerando relações semelhantes às das eqs. (6.30)-(6.32), podemos definir o gerador de translação temporal $\hat{H}$ como [Khanna 2009],

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \omega(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}), \tag{6.35}$$

e o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ é,

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{\frac{-n\beta w}{2}} |n, \tilde{n}\rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{\frac{-n\beta w}{2}} \frac{1}{(n!)^{1/2}} \frac{1}{(\tilde{n}!)^{1/2}} (a^\dagger)^\dagger (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Portanto, podemos concluir que,

$$\begin{aligned}\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{Z(\beta)}\sum_{n,m}\langle m,\tilde{m}|e^{\frac{-\beta w(n+m)}{2}}|n,\tilde{n}\rangle,\\ &= \frac{1}{Z(\beta)}\sum_{n,m}e^{\frac{-\beta w(n+m)}{2}}\delta_{nm}\delta_{mn}\\ &= \frac{1}{Z(\beta)}\sum_{n}e^{-\beta wn}.\end{aligned}$$

Ao utilizar $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$ e expandir a série geométrica $\frac{1}{(1-x)} = \sum_n x^n$, chegamos à seguinte expressão,

$$Z(\beta) = \frac{1}{1-e^{-\beta w}}. \tag{6.37}$$

É relevante destacar que o til no estado $|n,\tilde{n}\rangle$ é utilizado apenas para indicar o vetor em que o operador til atua, mas n e $\tilde{n}$ representam o mesmo número na soma. Com base na eq. (6.36), podemos escrever o seguinte,

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1-e^{-\beta w}}\sum_n \frac{e^{-\frac{n\beta w}{2}}}{n!}(a^\dagger)^n(\tilde{a}^\dagger)^n|0,\tilde{0}\rangle. \tag{6.38}$$

Desse modo, podemos avançar com os cálculos na mecânica estatística utilizando o estado $|0(\beta)\rangle$ em lugar da matriz densidade canônica. Podemos a expressar a eq. (6.38) da seguinte forma, $|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0,\tilde{0}\rangle$, onde $U(\beta)$ é um operador unitário.

A soma presente na eq.(6.38) pode ser expressa como uma função exponencial. Dessa forma, a equação (6.38) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1-e^{-\beta w}}exp(e^{\frac{-\beta w}{2}}a^\dagger\tilde{a}^\dagger)|0,\tilde{0}\rangle. \tag{6.39}$$

Essa formulação é apresentada como uma função exponencial e, como tal, pode ser considerada um operador unitário, levando em consideração a relação,

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh(\alpha B)}e^{ln\cosh(\alpha C)}e^{\tanh(\alpha A)}, \tag{6.40}$$

onde $C = [A,B]$. Inicialmente, definimos as seguintes quantidades,

$$\cosh(\theta(\beta)) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-\beta w}}} \equiv u(\beta) \tag{6.41}$$

$$\sinh(\theta(\beta)) = \frac{e^{\frac{-\beta w}{2}}}{\sqrt{1-e^{-\beta w}}} \equiv v(\beta). \tag{6.42}$$

Essa definição é coerente, pois,

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = \cosh^2(\theta(\beta)) - \sinh^2(\theta(\beta)) = 1. \tag{6.43}$$

Um resultado decorrente dessa definição é,

$$\tanh(\theta(\beta)) = e^{-\frac{\beta w}{2}}. \tag{6.44}$$

Utilizando as eqs. (6.41) e (6.44), a eq.(6.39) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \cosh^{-1}(\theta(\beta)) \exp(\tanh(\theta(\beta)) a^\dagger \tilde{a}^\dagger)|0,\tilde{0}\rangle, \\ &= \exp\left[\tanh(\theta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right] \exp\left[-\ln(\cosh(\theta))(\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)\right] \\ &\quad \times \exp[\tanh(\theta)(-\tilde{a}a)]|0,\tilde{0}\rangle, \end{aligned} \tag{6.45}$$

onde utilizamos a relação de comutação $[\tilde{a},\tilde{a}^\dagger] = 1$ e,

$$\exp(f(\theta)\tilde{a}^\dagger\tilde{a})|0,\tilde{0}\rangle = \exp(0)|0,\tilde{0}\rangle = |0,\tilde{0}\rangle, \tag{6.46}$$

em que $f(\theta)$ é uma função arbitrária de θ.

Considerando a eq. (6.40) com,

$$\begin{aligned} A &= -\tilde{a}a, \quad B = a^\dagger \tilde{a}^\dagger, \\ C &= [A, B] = -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a, \\ \alpha &= \theta = \theta(\beta), \end{aligned}$$

a eq. (6.45) pode ser escrita como,

$$|0(\beta)\rangle = \exp(-iG(\beta))|0,\tilde{0}\rangle, \tag{6.47}$$

pois,

$$G(\beta) = -\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \tag{6.48}$$

Então, o operador unitário que transforma $|0,\tilde{0}\rangle$ em $|0(\beta)\rangle$ é,

$$U(\beta) = \exp(-iG(\beta)). \tag{6.49}$$

Por fim, o operador $U(\beta)$ é conhecido como a transformação de Bogoliubov [Khanna 2009]. A partir disso, pretendemos abordar a inclusão dos efeitos da temperatura em uma teoria quântica de campo, juntamente com esse formalismo. Nossa análise concentra-se em um campo no espaço $\mathcal{H}_T$, em que os modos são termalizados usando a transformação de Bogoliubov. Nosso objetivo principal é obter o propagador térmico para o campo livre, estabelecendo um paralelo com as teorias à temperatura zero [Semenoff e Umezawa 1983, Siqueira e Santana 2006].

6.3 Campo térmico de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon desempenha um papel fundamental na descrição da evolução temporal de campos quânticos. O estudo do campo de Klein-Gordon é de extrema relevância para o avanço da teoria quântica de campos e para a compreensão da natureza quântica das partículas elementares. Ele fornece os fundamentos necessários para a formulação de diversos modelos teóricos na física [Detweiler 1980, Chowdhury e Hashim 2009, Faccioli e Salasnich 2018], permitindo uma análise aprofundada e abrangente.

Para representarmos esse campo no contexto térmico, a densidade Lagrangiana do campo escalar de Klein-Gordon pode ser escrita como,

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi - \frac{1}{2}\partial_\alpha \tilde{\phi} \partial^\alpha \tilde{\phi} + \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 - \tilde{J}\tilde{\phi}. \tag{6.50}$$

Para introduzir o formalismo Hamiltoniano, podemos definir o momento canônico para o campo escalar de Klein-Gordon como [Khanna 2009],

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)}{\partial \dot{\phi}}, \quad \tilde{\pi}(x) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\phi}, \partial\tilde{\phi})}{\partial \dot{\tilde{\phi}}}.$$

A definição do Hamiltoniano é dada por,

$$\hat{H} = \int \hat{\mathcal{H}}\, d^3x = \int [\mathcal{H}(\phi, \pi) - \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\phi}, \tilde{\pi})]\, d^3x, \tag{6.51}$$

onde a densidade Hamiltoniana é expressa por,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi - \frac{1}{2}\tilde{\pi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 + \tilde{J}\tilde{\phi}. \tag{6.52}$$

Introduz-se uma teoria quântica de campo que satisfaça as relações de comutação no mesmo tempo, da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
[\phi(t,x), \pi(t,y)] &= i\delta(x-y) &(6.53)\\
[\phi(t,x), \phi(t,y)] &= [\pi(t,x), \pi(t,y)] = 0, &(6.54)\\
\left[\tilde{\phi}(t,x), \tilde{\pi}(t,y)\right] &= -i\delta(x-y), &(6.55)\\
\left[\tilde{\phi}(t,x), \phi(t,y)\right] &= [\pi(t,x), \pi(t,y)] = 0. &(6.56)
\end{aligned}$$

Os operadores ϕ e π são definidos como operadores atuantes no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_T$. Para introduzir operadores térmicos, utilizamos a transformação de Bogoliubov. Nesse contexto, há uma transformação de Bogoliubov definida para cada modo, e existem infinitos modos. Representando essa situação, temos,

$$\begin{aligned}
\phi(x;\beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a(k;\beta)e^{-ikx} + a^\dagger(k;\beta)e^{ikx}\right], &(6.57)\\
\tilde{\phi}(x;\beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[\tilde{a}(k;\beta)e^{ikx} + \tilde{a}^\dagger(k;\beta)e^{-ikx}\right], &(6.58)
\end{aligned}$$

onde os operadores de aniquilação e criação térmicos são $a(k;\beta)$, $\tilde{a}(k;\beta)$, $a^\dagger(k;\beta)$ e $\tilde{a}^\dagger(k;\beta)$. E para os momentos conjugados $\pi(x;\beta)$ e $\tilde{\pi}(x;\beta)$, temos o seguinte,

$$\pi(x;\beta) = \dot{\phi}(x;\beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(-i)\frac{1}{2}\left[a(k;\beta)e^{-ikx} - a^\dagger(k;\beta)e^{ikx}\right], \tag{6.59}$$

$$\tilde{\pi}(x;\beta) = \dot{\tilde{\phi}}(x;\beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}i\frac{1}{2}\left[\tilde{a}(k;\beta)e^{ikx} - \tilde{a}^\dagger(k;\beta)e^{-ikx}\right], \tag{6.60}$$

utilizamos as regras de conjugação til para expressar $\tilde{\phi}(x;\beta)$ e $\tilde{\pi}(x;\beta)$ em termos de $\phi(x;\beta)$ e $\pi(x;\beta)$, respectivamente.

A álgebra descrita pelas equações (6.53)-(6.56) continua válida para os operadores $\phi(x;\beta)$, $\tilde{\phi}(x;\beta)$, $\pi(x;\beta)$ e $\tilde{\pi}(x;\beta)$. Portanto, as relações de comutação para os modos térmicos são dadas por,

$$[a(k;\beta), a^\dagger(k_0;\beta)] = (2\pi)^3 2k_0\delta(k-k_0), \tag{6.61}$$

$$\left[\tilde{a}(k;\beta), \tilde{a}^\dagger(k_0;\beta)\right] = (2\pi)^3 2k_0\delta(k-k_0), \tag{6.62}$$

sendo todas as outras relações de comutação nulas. A forma geral da transformação de Bogoliubov aplicada a todos os modos é escrita como,

$$U(\beta) = \exp\left(\sum_k \theta_k(\beta)[a^\dagger(k)\tilde{a}^\dagger(k) - a(k)\tilde{a}(k)]\right) = \prod_k U(k,\beta), \tag{6.63}$$

sendo,

$$U(k,\beta) = \exp\{\theta_k(\beta)[a^\dagger(k)\tilde{a}^\dagger(k) - a(k)\tilde{a}(k)]\}, \tag{6.64}$$

ao tomar θ_k como tal que $\cosh\theta_k = v(k,\beta)$ no limite contínuo, entretanto, nesta abordagem, a propriedade unitária inerente à transformação de Bogoliubov se perde, o que resulta em vácuos teóricos não equivalentes [Friedrichs 1953, Wightman e Schweber 1955]. Apesar da perda da unitariedade, a transformação de Bogoliubov ainda preserva sua canonicidade, garantindo assim a preservação da estrutura algébrica da teoria. [Barnett e Knight 1985].

O vácuo térmico, $|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0,\tilde{0}\rangle$, serve como base para a construção do espaço de Hilbert. Onde,

$$|0,\tilde{0}\rangle = \bigotimes_k |0,\tilde{0}\rangle_k,$$

e $|0,\tilde{0}_k\rangle$ denota o estado de vácuo do modo k. O vácuo térmico é caracterizado de tal maneira que,

$$a(k;\beta)|0(\beta)\rangle = \tilde{a}(k;\beta)|0(\beta)\rangle = 0,$$

e $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$. Os vetores de base são representados da seguinte maneira,

$$[a^\dagger(k_1;\beta)]^{n_1}\ldots[a^\dagger(k_N;\beta)]^{n_N}[\tilde{a}^\dagger(k_1;\beta)]^{m_1}\ldots[\tilde{a}^\dagger(k_M;\beta)]^{m_M}|0(\beta)\rangle,$$

onde n_i e m_i são números naturais, e k_i refere-se a um modo arbitrário.

Existe uma relação entre os operadores térmicos e não térmicos, que pode ser expressa como,

$$a(k;\beta) = U(\beta)a(k)U^{-1}(\beta) = U(k,\beta)a(k)U^{-1}(k,\beta) = u(k,\beta)a(k) - v(k,\beta)\tilde{a}^{\dagger}(k), \quad (6.65)$$

sendo,

$$v(k,\beta) = \frac{1}{\sqrt{\exp(\beta\omega_k) - 1}},$$

onde, $u^2(k,\beta) - v^2(k,\beta) = 1$. O inverso é,

$$a(k) = u(k,\beta)a(k;\beta) + v(k,\beta)\tilde{a}^{\dagger}(k;\beta). \quad (6.66)$$

Os operadores restantes, $a^{\dagger}(k)$, $\tilde{a}(k)$ e $\tilde{a}^{\dagger}(k)$, são obtidos através da aplicação das regras de hermiticidade e conjugação til.

A média térmica de um observável A é definida como $\langle A\rangle = \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle$. Agora vamos calcular o propagador térmico utilizando o vácuo térmico,

$$G_0(x-y,\beta) = -i\langle 0(\beta)|T[\phi(x)\phi(y)]|0(\beta)\rangle, \quad (6.67)$$

ou

$$iG_0(x-y,\beta) = \theta(x^0-y^0)g(x-y,\beta) + \theta(y^0-x^0)g(y-x,\beta), \quad (6.68)$$

onde $\theta(x)$ é a função degrau, tal que $\theta(x) = 1$ para $x > 1$, $\theta(x) = 0$ para $x < 1$, e $g(x-y;\beta) = \langle 0(\beta)|\phi(x)\phi(y)|0(\beta)\rangle$. Explicitamente, temos,

$$\begin{aligned} g(x-y,\beta) \quad &= \langle 0(\beta)| \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}[a(k)e^{-ikx} + a^{\dagger}(p)e^{ikx}] \\ &\times \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}[a(p)e^{-ipy} + a^{\dagger}(p)e^{ipy}]|0(\beta)\rangle. \end{aligned}$$

Ao separar os termos, $g(x-y,\beta)$ pode ser expresso da seguinte forma,

$$\begin{aligned} g(x-y,\beta) \quad &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}\frac{1}{2\omega_k} \\ &\times \Big\{\langle 0(\beta)|a^{\dagger}(k)a^{\dagger}(p)|0(\beta)\rangle e^{i(kx+py)} \\ &+ \langle 0(\beta)|a(k)a^{\dagger}(p)|0(\beta)\rangle e^{-i(kx-py)} \\ &+ \langle 0(\beta)|a^{\dagger}(k)a(p)|0(\beta)\rangle e^{i(kx-py)} \\ &+ \langle 0(\beta)|a(k)a(p)|0(\beta)\rangle e^{-i(kx+py)}\Big\}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Ao utilizar a equação (6.65) e as expressões de $a^{\dagger}$, $\tilde{a}$ e $\tilde{a}^{\dagger}$ em termos dos operadores térmicos, podemos calcular cada um dos termos no integrando. O cálculo do primeiro termo resulta em,

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|a^{\dagger}(k)a^{\dagger}(p)|0(\beta)\rangle \quad &= \langle 0(\beta)|[u(k,\beta)a^{\dagger}(k;\beta) + v(k,\beta)\tilde{a}(k;\beta)] \\ &\times \left[u(p,\beta)a^{\dagger}(p,\beta) + v(p,\beta)\tilde{a}(p;\beta)\right]|0(\beta)\rangle, \end{aligned}$$

resultando em,

$$\langle 0(\beta)|a^\dagger(k)a^\dagger(p)|0(\beta)\rangle = 0.$$

A segunda parcela na equação (6.65) é expressa como,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta)|a^\dagger(k)a^\dagger(p)|0(\beta)\rangle \quad &= \langle 0(\beta)|[u(k,\beta)a^\dagger(k;\beta) + v(k,\beta)\tilde{a}(k;\beta)] \\
&\times[u(p,\beta)a^\dagger(p;\beta) + v(p,\beta)\tilde{a}(p;\beta)]|0(\beta)\rangle \\
&= u(k,\beta)u(p,\beta)\langle 0(\beta)|a(k;\beta)a^\dagger(p;\beta)|0(\beta)\rangle \\
&= u(k,\beta)u(p,\beta)\langle 0(\beta)|a^\dagger(p;\beta)a(k;\beta) + [a(k;\beta), a^\dagger(p;\beta)]|0(\beta)\rangle \\
&= u(k,\beta)u(p,\beta)\langle 0(\beta)|a^\dagger(p;\beta)a(k;\beta) + (2\pi)^3 2k_0\delta(k-p)|0(\beta)\rangle \\
&= u(k,\beta)u(p,\beta)(2\pi)^3 2k_0\delta(k-p).
\end{aligned}$$

Onde utilizamos a equação (6.61). O mesmo procedimento é aplicado aos outros termos para obtermos,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta)|a^\dagger(k)a(p)|0(\beta)\rangle &= v(k,\beta)v(p,\beta)\delta(k-p), \\
\langle 0(\beta)|a^\dagger(k)a^\dagger(p)|0(\beta)\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Ao substituir esses resultados na equação (6.69), chegamos a,

$$g(x-y,\beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[u^2(k,\beta)e^{-ik(x-y)} + v^2(k,\beta)e^{ik(x-y)}\right]. \tag{6.70}$$

Assim, a equação (6.68) fica,

$$\begin{aligned}
iG_0(x-y,\beta) \quad &= \theta(x^0-y^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[u^2(k,\beta)e^{-ik(x-y)} + v^2(k,\beta)e^{ik(x-y)}\right] \\
&+\theta(y^0-x^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[u^2(k,\beta)e^{-ik(y-x)} + v^2(k,\beta)e^{ik(y-x)}\right].
\end{aligned}$$

Devido à relação $u^2(k,\beta) - v^2(k,\beta) = 1$, temos o seguinte resultado,

$$\begin{aligned}
iG_0(x-y,\beta) \quad &= \theta(x_0-y_0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[(v^2(k,\beta)+1)e^{-ik(x-y)} + v^2(k,\beta)e^{ik(x-y)}\right] \\
&+\theta(y_0-x_0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[(v^2(k,\beta)+1)e^{-ik(y-x)} + v^2(k,\beta)e^{ik(y-x)}\right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[\theta(x^0-y^0)e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0-x^0)e^{-ik(y-x)}\right] \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{v^2(k,\beta)}{2\omega_k}\left[\theta(x^0-y^0)e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0-x^0)e^{-ik(y-x)}\right] \\
&++ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{v^2(k,\beta)}{2\omega_k}\left[\theta(x^0-y^0)e^{ik(x-y)} + \theta(y^0-x^0)e^{ik(y-x)}\right].
\end{aligned}$$

Usando a representação de Fourier de $\theta(x)$, obtemos,

$$G_0(x-y,\beta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}G_0(k,\beta), \tag{6.71}$$

sendo, $G_0(k,\beta) = G_0(k) + v^2(k,\beta)[G_0(k) - G_0^*(k)]$.

Uma vez que,

$$G_0(k) - G_0^*(k) = -\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} = 2\pi i\delta(k^2 - m^2), \tag{6.72}$$

podemos deduzir,

$$G_0(k,\beta) = G_0(k) + 2\pi i n(k,\beta)\delta(k^2 - m^2), \tag{6.73}$$

onde $n(k,\beta) = v^2(k,\beta)$ representa a função de distribuição de bósons para o modo k. Ao utilizarmos a definição do propagador TFD, eq. (6.67), no formalismo de Heisenberg, temos,

$$\begin{aligned} G_0(x-y,\beta) \quad &= -i\langle 0(\beta)|T[\phi(x,t)\phi(y,t)]|0(\beta)\rangle \\ &= -i\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{Z}e^{-\beta H}T[\phi(x,t)\phi(y,t)]\right\} \\ &= -i\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{Z}e^{-\beta H}T[\phi(x)\phi(y-i\beta n_0)]\right\} \\ &= -i\langle h_0(\beta)|T[\phi(x)\phi(y-i\beta n_0)]|0(\beta)\rangle \\ &= G_0(x-y-i\beta n_0,\beta), \end{aligned} \tag{6.74}$$

onde $n^0 = n_0^\mu = (1,0,0,0)$. Isso implica que o propagador é uma função periódica com período β ao longo do eixo do tempo imaginário, com frequências,

$$w_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \tag{6.75}$$

que são chamadas de frequências de Matsubara. Portanto, também podemos escrever $G_0(x-y,\beta)$ como,

$$G_0(x-y,\beta) = -\frac{1}{i\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{k_n^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{6.76}$$

onde $k_n = (k_n^0, \vec{k})$. O propagador $G_0(x-y,\beta)$ mencionado na Eq.(6.76) é um dos principais resultados do método primeiro proposto por Matsubara, que utiliza a rotação de Wick do tempo real para o tempo imaginário. Esse método é conhecido como formalismo do tempo imaginário [Matsubara 1955]. Agora vamos estabelecer uma conexão entre todo ferramental apresentado e a topologia. Essa conexão nos permitirá recuperar quantidades físicas inéditas e explorar novos aspectos da teoria TFD.

6.4 Compactificação e topologia

Iremos discutir os efeitos de compactificação na teoria TFD. Vamos considerar compactificações de uma dimensão espacial, da dimensão temporal, e de ambas as dimensões e a compactificação para D-dimensões. Este estudo é realizado partindo da função de

Green, que descreve a propagação de um campo quântico em um espaço-tempo curvo e com topologias não triviais. Através da introdução de uma transformação de Bogoliubov, é possível levar em conta a compactificação espacial e os efeitos térmicos nesses diferentes cenários. As modificações na topologia do espaço-tempo afetam as condições de contorno dos campos e, consequentemente, as propriedades físicas do sistema, como as flutuações de energia do vácuo e a dependência da temperatura crítica em transições de fase. Essa análise tem aplicações importantes em diversas áreas da física, incluindo a compreensão do efeito Casimir e a Lei de Stefan Boltzmann [Malbouisson e Malbouisson 2002, Malbouisson, Malbouisson e Santana 2002, Queiroz et al. 2005, Santana et al. 2006]. Dito isso, vamos considerar o espaço de Minkowski em D dimensões, porém com uma estrutura topológica exclusiva Γ_D^d, onde d representa o número de dimensões compactificadas. No início, ao examinarmos o campo escalar, a função de Green satisfaz a equação de Klein-Gordon D-dimensional,

$$(\Box + m^2)G(x,\beta) = \delta(x), \tag{6.77}$$

a estrutura topológica Γ_D^d não causa alterações nas características locais do sistema. Isso implica que, em nível local, o espaço de Minkowski, assim como a equação diferencial que descreve a evolução do sistema, permanecem inalterados. No entanto, a topologia impõe modificações nas condições de limite a serem satisfeitas pelo campo e pela função de Green correspondente. Vamos realizar a compactificação para uma dimensão espacial, iniciamos estabelecendo que $d = 1$ e $D = 4$, onde $\mathcal{S}^1$ representa uma curva de comprimento L_1, simbolizando a compactificação em uma dimensão espacial, digamos x^1. Para essa estrutura topológica Γ_4^1, a função de Green satisfaz a condição de contorno periódica,

$$G(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv G(x^0, x^1 + L_1, x^2, x^3) = G(x + L_1 n_1). \tag{6.78}$$

Aqui, $n_1 = (n_1^\mu) = (0, 1, 0, 0)$ é um vetor tipo-espaço. É importante observar que, devido à topologia, $x^1 = 0$ é identificado com $x^1 = L_1$, o que implica em $0 \leq x^1 \leq L_1$, enquanto as outras coordenadas espaciais variam no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Uma solução para a equação (6.77), levando em consideração a condição (6.78), pode ser obtida através da análise da expansão de Fourier da função Green, resultando em,

$$G(x-y; L_1) = \frac{1}{L_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\int dp_0 dp_2 dp_3\, e^{-ipn(x-y)}G(pn; L_1), \tag{6.79}$$

sendo,

$$p_n = (p_0, p_{1n}, p_2, p_3), \quad p_{1n} = \frac{2\pi n}{L_1}, \tag{6.80}$$

e,

$$G(pn; L_1) = -\frac{1}{p_n^2 - m^2}. \tag{6.81}$$

Também podemos escrever a transformação inversa como,

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L_1} dx_1 \int dx_0 dx_2 dx_3\, e^{ip_n(x-y)}G(x-y; L_1). \tag{6.82}$$

Essa solução é proveitosa na abordagem de teorias perturbativas, conforme demonstrado por Birrel e Ford [Birrell e Ford 1980]. No entanto, seria interessante distinguir a contribuição divergente do espaço-tempo plano dos termos que descrevem o efeito topológico na expressão de $G(x-y;L_1)$. Nesse contexto, é possível investigar e tratar as contribuições divergentes provenientes do espaço-tempo livre e analisar os limites. Aqui, realizamos essa distinção seguindo uma adaptação dos cálculos de Dolan e Jackiw para separar o efeito da temperatura na função Green do campo escalar [Dolan e Jackiw 1974]. O método utilizado é baseado na obtenção da transformada de Fourier de $G(x-y;L_1)$. Escrevemos $G(x-y;L_1)$ como,

$$G(x-y;L_1) = \theta(x^1-y^1)G^{>}(x-y;L_1) + \theta(y^1-x^1)G^{<}(x-y;L^1), \tag{6.83}$$

onde $\theta(a)$ representa a função degrau, caracterizada por $\theta(a)=1$ quando $a \geq 0$ e $\theta(a)=0$ quando $a<0$. Com base na eq. (6.78), podemos deduzir que,

$$G^{<}(x;L_1)\bigg|_{x_1=0} = G^{>}(x;L_1)\bigg|_{x_1=L_1}. \tag{6.84}$$

Utilizando esse formato, a Equação (6.82) é reescrita como,

$$G(p_n;L_1) = \int_0^{L_1} dx_1 \int dx_0 dx_2 dx_3\, e^{ip_n x} G^{>}(x;L_1). \tag{6.85}$$

A transformada de Fourier de $G(x-y;L_1)$, denotada por $\overline{G}(p;L_1)$, é dada por,

$$\overline{G}(p;L_1) = \overline{G}^{(1)}(p;L_1) + \overline{G}^{(2)}(p;L_1), \tag{6.86}$$

onde $G^{(1)}(p;L_1)$ e $G^{(2)}(p;L_1)$ representam as contribuições correspondentes aos termos $G^{>}(x;L_1)$ e $G^{<}(x;L_1)$ na transformada de Fourier, respectivamente,

$$G^{(1)}(p;L_1) = \int d^4x\, e^{ipx}\theta(x_1)G^{>}(x;L_1), \tag{6.87}$$

$$G^{(2)}(p;L_1) = \int d^4x\, e^{ipx}\theta(-x_1)G^{<}(x;L_1), \tag{6.88}$$

então,

$$G^{>}(x;L_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx}\overline{G}^{>}(p;L_1), \tag{6.89}$$

e aplicando a forma integral da função degrau,

$$\int dk^1 \frac{e^{-ik_1x_1}}{k^1+p^1+i\epsilon} = (-2\pi i)e^{ip^1x^1}\theta(x^1), \tag{6.90}$$

para equação (6.87), temos,

$$\overline{G}^{(1)}(p;L_1) = i\int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{\overline{G}^{>}(p_0,k_1,p_2,p_3;L_1)}{k^1-p^1+i\epsilon}, \tag{6.91}$$

com,

$$G^{<}(x;L_1)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\overline{G}^{<}(p;L_1),$$

de maneira análogo para a equação(6.88), obtemos,

$$\overline{G}^{(2)}(p;L_1)=-i\int\frac{dk^1}{2\pi}\frac{\overline{G}^{<}(p_0,k_1,p_2,p_3;L_1)}{k^1-p^1-i\epsilon}. \tag{6.92}$$

Ao substituir as equações (6.91) e (6.92) na equação (6.86), obtemos o seguinte resultado,

$$\overline{G}(p;L_1)=i\int\frac{dk^1}{2\pi}\left[\frac{\overline{G}^{>}(p_0,k_1,p_2,p_3;L_1)}{k^1-p^1+i\epsilon}-\frac{\overline{G}^{<}(p_0,k_1,p_2,p_3;L_1)}{k^1-p^1-i\epsilon}\right]. \tag{6.93}$$

A condição de periodicidade expressa no espaço dos momentos, a partir da equação (6.84), pode ser formulada da seguinte maneira,

$$G^{<}(x^0,x^1,x^2,x^3;L^1)=G^{>}(x^0,x^1+L_1,x^2,x^3;L_1)=e^{L_1\partial_1}G^{>}(x^0,x^1,x^2,x^3;L_1). \tag{6.94}$$

Considerando a transformada de Fourier de $G^{<}(x,L_1)$,

$$\overline{G}^{<}(p;L_1)=\int d^4pe^{ipx}G^{<}(x;L_1)=\int d^4pe^{ipx}e^{L_1\partial_1}G^{>}(x;L_1). \tag{6.95}$$

Ao utilizar a equação (6.89) na expressão acima, encontramos o seguinte resultado,

$$\overline{G}^{<}(p;L_1)=e^{iL_1p_1}\overline{G}^{>}(p;L_1). \tag{6.96}$$

Definindo,

$$f_{L_1}(p_1)=\frac{1}{e^{iL_1p_1}-1},$$

escrevemos,

$$\overline{G}^{>}(p;L_1) = f_{L_1}(p_1)A(p;L_1) \tag{6.97}$$

$$\overline{G}^{<}(p;L_1) = [f_{L_1}(p_1)+1]A(p;L_1), \tag{6.98}$$

e, em seguida, utilizando a equação (6.96), temos o seguinte,

$$A(p;L_1)=\overline{G}^{<}(p;L_1)-\overline{G}^{>}(p;L_1).$$

Com esses resultados, podemos expressar a equação (6.93) da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\overline{G}(p;L_1) &= i\int\frac{dk^1}{2\pi}\Big\{f_{L_1}(k^1)A(p_0,k_1,p_2,p_3;L_1)\frac{1}{k^1-p^1+i\epsilon}\\ &- [f_{L_1}(k^1)+1]A(p_0,k_1,p_2,p_3;L_1)\frac{1}{k^1-p^1-i\epsilon}\Big\}.\end{aligned} \tag{6.99}$$

Não possuímos uma expressão explícita para $A(p; L1)$. Para determinar essa função, utilizamos o conhecimento de $G(p_n; L1)$, conforme a equação (6.81). Ao combinar as informações das equações (6.85) e (6.89), obtemos o seguinte resultado,

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L1} dx^1 \int dx^0 dx^2 dx^3 e^{pnx} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \overline{G}^{>}(k; L1).$$

então utilizando a Eq.(6.97),

$$\int_0^{L1} dx^1 e^{-i(p^1 n - k^1)x^1} = \frac{1}{f_{L_1}(k^1)(p_n^1 - k^1)} i,$$

portanto,

$$G(p_n; L_1) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3; L1)}{p_n^1 - k^1},$$

onde $A(p)$ representa a função espectral associada ao momento p_1.

Consideramos a continuação analítica de $G(p_n; L_1)$ para permitir que p_n^1 se torne uma variável contínua, denotada por p^1. A única continuação analítica possível de $G(p_n; L_1)$, sem singularidade essencial quando $p \to \infty$, é a função,

$$\mathcal{G}_0(p) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{p^1 - k^1},$$

onde, por definição,

$$\mathcal{G}_0(p) = \frac{-1}{p^2 - m^2}. \tag{6.100}$$

Utilizando esse resultado, calculamos $A(p)$ para demonstrar que,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p; \varepsilon) &= \mathcal{G}_0(p_0, p^1 + i\varepsilon, p^2, p^3) - \mathcal{G}_0(p_0, p^1 - i\varepsilon, p^2, p^3) \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} A(p_0, k_1, p_2, p_3) \left(\frac{1}{p^1 - k^1 + i\varepsilon} - \frac{1}{p^1 - k^1 - i\varepsilon} \right) \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} A(p_0, k_1, p_2, p_3)(-2\pi i)\delta(p^1 - k^1), \end{aligned}$$

onde usamos,

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon} \right).$$

O resultado obtido é o seguinte,

$$A(p) = -2\pi i \delta(p^2 - m^2). \tag{6.101}$$

Aplicando a Equação (6.101) juntamente com a identidade,

$$\delta(x^2 - y^2) = \frac{1}{2|y|}(\delta(x + y) + \delta(x - y)),$$

temos o seguinte resultado para eq. (6.99),

$$\overline{G}(p; L1) = G_0(p) + v_B^2(p^1; L_1)[G_0(p) - G_0^*(p)],$$

onde,

$$G_0(p) = \frac{-1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

e,

$$v_B^2(p^1; L_1) = f_{L_1}(p^1) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-ilL_1 p^1}.$$

O subscrito B em $v_B^2(p^1, \beta)$ é adicionado para enfatizar a característica bosônica do campo. Como conclusão, chegamos a,

$$G(x-y; L_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left\{ G_0(p) + v^2(p^1, L_1)[G_0(p) - G_0^*(p)] \right\}, \tag{6.102}$$

onde,

$$G_0(p) - G_0^*(p) = 2\pi i \delta(p^2 - m^2) = -A(p).$$

Uma descoberta de grande importância nessa representação é que o conteúdo do espaço plano é expresso em um termo separado que envolve apenas $G_0(p)$, ao passo que o efeito topológico se manifesta no termo que contém $v_B^2(p^1, L_1)$, descrevendo o efeito da compactificação. Essa característica desempenhará um papel fundamental no cálculo do efeito Casimir.

Agora vamos realizar a compactificação na dimensão temporal. Vamos utilizar a condição de KMS [Kubo 1957] para os operadores bosônicos,

$$\langle A_H(t) B_H(t_0) \rangle_\beta = \langle B_H(t_0) A_H(t + i\beta) \rangle_\beta.$$

Uma implicação imediata da condição KMS é que a função de Green também é periódica, isto é,

$$G(x-y; \beta) = G(x - y - i\beta n_0; \beta), \tag{6.103}$$

considere n_0 como um vetor tipo-tempo definido por $n_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Mediante uma rotação de Wick, em que $t \to i\tau$, a condição KMS assegura que $G(x-y, \beta)$ seja uma solução da equação de Klein-Gordon com $\Box = -\left(\partial_\tau^2 + \nabla\right)$ sob a condição de contorno periódico, com período β.

Como consequência da periodicidade, a representação de Fourier para $G(x, \beta)$,

$$G(x-y; \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip_n(x-y)}}{p^2 + m^2 + i\epsilon}, \tag{6.104}$$

com $p_n = (p_n^0, p^1, p^2, p^3)$, e $p_n^0 = \frac{2\pi n}{\beta}$ sendo a frequência de Matsubara. Portanto, a representação integral de Fourier de $G(x-y; \beta)$ é calculada seguindo os mesmos procedimentos da compactificação de uma dimensão espacial, fazendo uso da função espectral de energia dada por [Dolan e Jackiw 1974, Kadanoff e Baym 1962],

$$A(p) = \mathcal{G}_0(p_0 + i\epsilon, p) - \mathcal{G}_0(p_0 - i\epsilon, p).$$

O resultado definitivo é,

$$G(x-y;\beta) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} G_0(p;\beta), \tag{6.105}$$

sendo,

$$\begin{aligned} G_0(p;\beta) &= G_0(p) + v_B^2(p_0;\beta)[G_0(p) - G_0^*(p)] \\ &= G_0(p) + 2\pi i v_B^2(p_0;\beta)\delta(p^2 - m^2), \end{aligned} \tag{6.106}$$

e,

$$v_B^2(p^0;\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta|p_0|} = \frac{1}{e^{\beta|p_0|} - 1} = n(\beta). \tag{6.107}$$

A equação (6.107) revela uma função intrigante, $v_B^2(p^0;\beta)$, que descreve o efeito de compactificação induzido pela temperatura. Essa função é determinada por meio da soma das frequências de Matsubara, e sua relação com a temperatura é capturada pelo parâmetro β. O estudo dessa expressão proporciona uma base teórica sólida para investigar a teoria quântica de campos em temperaturas finitas, permitindo uma compreensão aprofundada de fenômenos físicos relacionados à temperatura, como a renomada Lei de Stefan-Boltzmann.

Após terem sido realizados os procedimentos de compactificação tanto na dimensão espacial quanto na temporal, chegamos ao ponto de introduzir a compactificação simultânea em ambas as dimensões. Agora, consideramos a topologia intrigante $\Gamma_4^2 = S^1 \times S^1 \times R^2$, na qual um campo de bóson é compactificado simultaneamente em duas dimensões, ao longo das direções x_0 e x_1. Essa configuração implica em impor condições de contorno periódicas à função de Green nessas duas direções. A compactificação ocorre em uma circunferência de comprimento L_1 no eixo x_1 e em uma circunferência de comprimento β no eixo euclidiano x_0. Nesse cenário particular, a função de Green é expandida em uma série de Fourier,

$$G(x-y;\beta,L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp_2 dp_3 \exp(-ip_n l(x-y)) G(p_n l;\beta,L_1), \tag{6.108}$$

sendo,

$$p_{nl} = (p_n^0, p_l^1, p^2, p^3),$$

com,

$$p_n^0 = \frac{2\pi n}{\beta}; \quad p_l^1 = \frac{2\pi l}{L_1},$$

e,

$$G(p_{nl};\beta,L_1) = \frac{-1}{{p_{nl}}^2 - m^2}. \tag{6.109}$$

No processo de encontrar a representação de Fourier para $G(x-y;\beta;L_1)$, começamos tratando a soma em relação a l. A partir disso, reescrevemos a Equação (6.108) da seguinte maneira,

$$G(x-y;\beta,L_1)=\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_n(x-y;L_1), \tag{6.110}$$

onde,

$$G_n(x-y;L_1)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{L_1}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int dp_2dp_3e^{-ip_{nl}(x-y)}G(p_{nl};L_1).$$

Portanto, procedendo de maneira análoga ao caso de $G(x-y;L_1)$,

$$G_n(x-y;L_1)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int dp_1dp_2dp_3e^{-ip_n(x-y)}\overline{G}(p_n,L_1),$$

onde,

$$\overline{G}(p_n,L_1)=G_0(p_n)+\frac{v^2}{B(p_1,L_1)}[G_0(p_n)-G_0^*(p_n)].$$

Aplicando esse resultado na equação (6.110) e seguindo os mesmos passos do caso de confinamento temporal, obtemos,

$$G(x-y;\beta,L_1)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\left\{\overline{G}(p;L_1)+v_B^2(p_0;\beta)[\overline{G}(p;L_1)-\overline{G}^*(p;L_1)]\right\},$$

que pode ser escrito como,

$$G(x-y;\beta,L_1)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\left\{G_0(p)+v_B^2(p_0;\beta)[\overline{G}(p;L_1)-G^*(p;L_1)]\right\},$$

sendo,

$$v_B^2(k_0,k_1;\beta,L_1)=v_B^2(p_0;\beta)+v_B^2(p_1;L_1)+2v_B^2(p_0;\beta)v_B^2(p_1;L_1), \tag{6.111}$$

é importante notar que,

$$v_B^2(k_0;\beta) = \lim_{L_1\to\infty}v_B^2(k_0,k_1;\beta,L_1), \tag{6.112}$$

$$v_B^2(k_1;L_1) = \lim_{\beta\to\infty}v_B^2(k_0,k_1;\beta,L_1), \tag{6.113}$$

dessa forma, observamos a existência de efeitos de compactificação tanto térmicos quanto relacionados ao tamanho. Essa compactificação nos permitirá obter resultados que levam em consideração simultaneamente aspectos espaciais e de temperatura do sistema. Agora, aplicaremos todo esse conjunto de técnicas de compactificação à teoria do fóton escuro, previamente introduzida no capítulo anterior.

7 Lei de Stefan Boltzmann e Efeito Casimir para fótons escuros

A existência de um fóton escuro massivo, associado a um novo grupo de calibre, é considerada. O fóton escuro pode ser misturado cineticamente com o fóton. Para estudar algumas aplicações, é utilizado o formalismo da dinâmica do campo térmico. Explorando a estrutura topológica dessa abordagem, é calculada a influência dos fótons escuros na lei de Stefan-Boltzmann e no efeito Casimir em temperatura zero e finita.

7.1 Formalismo com a presença dos fótons escuros

De acordo com o desenvolvimento apresentado no capítulo 5, a expressão do tensor de energia-momento, levando em consideração a contribuição dos fótons escuros, pode ser expressa como a eq. (5.23), isto é,

$$\Theta^{\mu}_{\nu} = -\eta^{\mu\lambda}\left(F_{\lambda\rho}F^{\rho}_{\nu} + X_{\lambda\rho}X^{\rho}_{\nu}\right) + \frac{1}{4}\eta^{\mu}_{\nu}\left(F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + X_{\sigma\rho}X^{\sigma\rho}\right) - \frac{1}{2}\eta^{\mu}_{\nu}m_{\gamma}^{2}X_{\rho}X^{\rho}. \tag{7.1}$$

Por conveniência, este tensor é expresso da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\lambda}(x) &= -F^{\mu\nu}(x)F^{\lambda}{}_{\nu}(x) - X^{\mu\nu}(x)X^{\lambda}{}_{\nu}(x) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}\left[F_{\sigma\rho}(x)F^{\sigma\rho}(x) + X_{\sigma\rho}(x)X^{\sigma\rho}(x)\right]\\ &\quad -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\sigma\rho}m_{\gamma}^{2}X_{\rho}(x)X_{\sigma}(x).\end{aligned} \tag{7.2}$$

Para fazer algumas aplicações com este tensor energia-momento simétrico deve-se calcular o valor esperado de vácuo dessa quantidade. No entanto, este cálculo não é viável devido à presença de um produto de operadores de campo no mesmo ponto do espaço-tempo. Para evitar esse problema, o tensor energia-momento é escrito em diferentes pontos no espaço-tempo. Então,

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\lambda}(x) &= \lim_{x'\to x}\tau\Big\{-F^{\mu\nu}(x)F^{\lambda}{}_{\nu}(x') - X^{\mu\nu}(x)X^{\lambda}{}_{\nu}(x')\\ &\quad +\frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}\left[F_{\sigma\rho}(x)F^{\sigma\rho}(x') + X_{\sigma\rho}(x)X^{\sigma\rho}(x')\right] - \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\sigma\rho}m_{\gamma}^{2}X_{\rho}(x)X_{\sigma}(x')\Big\},\end{aligned} \tag{7.3}$$

onde τ é o operador de ordenamento temporal. Ao aplicarmos esse operador a cada termo do tensor de energia-momento, podemos reescrevê-lo por meio da seguinte relação,

$$\tau\left[\partial^{\mu}A(x)\partial'^{\nu}A(x')\right] = \partial^{\mu}\partial'^{\nu}\tau\left[A(x)A(x')\right] + in_{0}^{\mu}n_{0}^{\nu}\delta(x-x')\delta(x_{0}-x'_{0}), \tag{7.4}$$

onde assumimos que ambos os campos, ou seja, A^μ e X^μ, satisfazem a regra de quantização canônica dada pela Eq. (3.54). O tensor energia-momento se torna,

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\lambda}(x) = -\lim_{x'\to x}\Big\{&\left[\Delta^{\mu\lambda,\sigma\rho}(x,x')\left(\tau[A_\sigma(x)A_\rho(x')] + \tau[X_\sigma(x)X_\rho(x')]\right)\right] \\ &+4i(n_0^\mu n_0^\lambda - \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda})\delta(x-x') - \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\rho\sigma}m_\gamma^2\tau[X_\sigma(x)X_\rho(x')]\Big\},\end{aligned} \tag{7.5}$$

onde $n_0^\mu = (1,0,0,0)$ é um vetor tipo-tempo e,

$$\Delta^{\mu\lambda,\sigma\rho} = \Gamma^{\mu\nu,\lambda}{}_{\nu}{}^{,\sigma\rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}\Gamma^{\nu\rho,}{}_{\nu\rho}{}^{,\sigma\rho}, \tag{7.6}$$

com,

$$\Gamma^{\mu\nu,\lambda\epsilon,\sigma\rho}(x,x') = (\eta^{\nu\sigma}\partial^\mu - \eta^{\mu\sigma}\partial^\nu)(\eta^{\epsilon\rho}\partial'^\lambda - \eta^{\lambda\rho}\partial'^\epsilon). \tag{7.7}$$

Para investigar algumas aplicações utilizando o formalismo TFD, é importante calcular o valor médio do vácuo de $\Theta^{\mu\lambda}(x)$, o qual é expresso como,

$$\begin{aligned}\langle\Theta^{\mu\lambda}(x)\rangle &= \langle 0|\Theta^{\mu\lambda}(x)|0\rangle \\ &= -\lim_{x'\to x}\Big\{\left[\Delta^{\mu\lambda,\sigma\rho}(x,x')\left(\langle 0|\tau[A_\sigma(x)A_\rho(x')]|0\rangle + \langle 0|\tau[X_\sigma(x)X_\rho(x')]|0\rangle\right)\right] \\ &\quad +4i(n_0^\mu n_0^\lambda - \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda})\delta(x-x') - \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\rho\sigma}m_\gamma^2\langle 0|\tau[X_\sigma(x)X_\rho(x')]|0\rangle\Big\}.\end{aligned} \tag{7.8}$$

Ao utilizar a definição convencional do propagador do fóton,

$$\langle 0|\tau[A_\sigma(x)A_\rho(x')]|0\rangle = i\eta_{\sigma\rho}G_0(x-x'), \tag{7.9}$$

onde,

$$G_0(x-x') = \frac{1}{4\pi^2 i}\frac{1}{(x-x')^2 - i\epsilon}, \tag{7.10}$$

é o propagador do campo escalar sem massa e o propagador do fóton escuro [Brito, Malta e Ospedal 2017, Kroff e Malta 2020, Greiner, Reinhardt et al. 1996] dado por,

$$\langle 0|\tau[X_\sigma(x)X_\rho(x')]|0\rangle = -i\left(\eta_{\sigma\rho} + \frac{1}{m_\gamma^2}\partial_\sigma\partial_\rho\right)\Delta(x-x'), \tag{7.11}$$

com,

$$\Delta(x-x') = \left(-\frac{im_\gamma}{4\pi^2}\frac{K_1(m_\gamma\sqrt{-(x-x')^2})}{\sqrt{-(x-x')^2}}\right), \tag{7.12}$$

onde K_1 são funções de Bessel do tipo 1.

Então a eq. (7.8) torna-se,

$$\begin{aligned}\langle\Theta^{\mu\lambda}(x)\rangle &= -i\lim_{x'\to x}\Big\{\Gamma^{\mu\lambda}G_0(x-x') + \Sigma^{\mu\lambda}\Delta(x-x') \\ &\quad +4(n_0^\mu n_0^\lambda - \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda})\delta(x-x') + \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\rho\sigma}m_\gamma^2 M_{\sigma\rho}\Delta(x-x')\Big\},\end{aligned} \tag{7.13}$$

onde $\Sigma^{\mu\lambda} = -\Delta^{\mu\lambda,\sigma\rho}M_{\sigma\rho}$ com $M_{\sigma\rho} = \left(\eta_{\sigma\rho} + m_\gamma^{-2}\partial_\sigma\partial_\rho\right)$.

Agora vamos aplicar a notação duplicada, o formalismo TFD, ao tensor de energia-momento, ou mais especificamente ao seu valor esperado no vácuo, que descreve a eletromagnetismo de Maxwell com correções devido aos fótons escuros. Então, a Eq. (7.13) que depende do parâmetro α se torna,

$$\begin{aligned}\langle\Theta^{\mu\lambda(ab)}(x;\alpha)\rangle &= -i\lim_{x'\to x}\Big\{\Gamma^{\mu\lambda}G_0^{(ab)}(x-x';\alpha)+\Sigma^{\mu\lambda}\Delta^{(ab)}(x-x';\alpha)\\ &\quad +4(n_0^{\mu}n_0^{\lambda}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda})\delta(x-x')\delta^{(ab)}\\ &\quad +\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\rho\sigma}m_\gamma^2 M_{\sigma\rho}\Delta^{(ab)}(x-x';\alpha)\Big\}.\end{aligned} \tag{7.14}$$

Agora um procedimento de renormalização é fundamental, pois permite obter uma expressão finita que descreve quantidades físicas mensuráveis. Para obter uma expressão finita, o procedimento utilizado aqui consiste em,

$$\Upsilon^{\mu\lambda(ab)}(x;\alpha)\equiv\langle\Theta^{\mu\lambda(ab)}(x;\alpha)\rangle-\langle\Theta^{\mu\lambda(ab)}(x)\rangle, \tag{7.15}$$

o que leva a

$$\begin{aligned}\Upsilon^{\mu\lambda(ab)}(x;\alpha)=-i\lim_{x'\to x}\Big\{&\Gamma^{\mu\lambda}\overline{G}_0^{(ab)}(x-x';\alpha)+\Sigma^{\mu\lambda}\overline{\Delta}^{(ab)}(x-x';\alpha)\\ &+\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\rho\sigma}m_\gamma^2 M_{\sigma\rho}\overline{\Delta}^{(ab)}(x-x';\alpha)\Big\},\end{aligned} \tag{7.16}$$

onde

$$\overline{G}_0^{(ab)}(x-x';\alpha) = G^{(ab)}(x-x';\alpha)-G_0^{(ab)}(x-x'), \tag{7.17}$$

$$\overline{\Delta}^{(ab)}(x-x';\alpha) = \Delta^{(ab)}(x-x';\alpha)-\Delta^{(ab)}(x-x'). \tag{7.18}$$

Na próxima seção, a estrutura topológica do formalismo TFD e a Eq. (7.16) são utilizadas, considerando os efeitos de compactificação, para obter resultados relacionados à Lei de Stefan-Boltzmann e ao Efeito Casimir tanto sem temperatura quanto em temperaturas finita, levando em conta a presença de fótons escuros.

7.2 Aplicações

Nesta seção algumas aplicações são calculadas e a contribuição de fótons escuros ou matéria escura é discutida. A partir da estrutura topológica do formalismo TFD, são considerados três casos diferentes que implicam três topologias diferentes. O primeiro caso é a topologia $\Gamma_4^1=\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^3$, onde $\alpha=(\beta,0,0,0)$. Essa topologia traz efeitos de temperatura para o sistema. A segunda topologia é Γ_4^1 com $\alpha=(0,0,0,i2d)$. Isso leva a efeitos de tamanho. E o último caso consiste na topologia $\Gamma_4^2=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2$ com $\alpha=(\beta,0,0,i2d)$. Nesta situação, os efeitos de temperatura e tamanho são investigados juntos.

7.2.1 Efeitos de temperatura com contribuição da matéria escura

Para obter os efeitos da temperatura e as contribuições devidas aos fótons escuros, vamos considerar $\alpha = (\beta, 0, 0, 0,)$. Neste caso, o eixo do tempo é compactado em $\mathbb{S}^1$, com circunferência β. Para esta topologia, a transformação de Bogoliubov generalizada é dada como

$$w^2(\beta) = \sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0}. \tag{7.19}$$

Usando esta transformação, as funções de Green tornam-se,

$$\overline{G}_0(x - x'; \beta) = 2\sum_{l_0=1}^{\infty} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0), \tag{7.20}$$

$$\overline{\Delta}(x - x'; \beta) = 2\sum_{l_0=1}^{\infty} \Delta(x - x' - i\beta l_0 n_0), \tag{7.21}$$

onde $\overline{G}_0(x - x'; \beta) = \overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta)$ e $n_0 = (1, 0, 0, 0)$ é um vetor de tempo unitário. Com esses ingredientes, o tensor energia-momento dado na Eq. (7.16) é escrito como

$$\begin{aligned}\Upsilon^{\mu\lambda(ab)}(x;\beta) &= -2i \lim_{x'\to x} \sum_{l_0=1}^{\infty} \Big\{ \Gamma^{\mu\lambda} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0) + \Sigma^{\mu\lambda}\Delta(x - x' - i\beta l_0 n_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\rho\sigma} m_\gamma^2 M_{\sigma\rho}\Delta(x - x' - i\beta l_0 n_0)\Big\}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Tomando $\mu = \lambda = 0$ e realizando as derivadas, a densidade de energia é dada como,

$$\Upsilon^{00(11)}(\beta) = \frac{\pi^2}{15\beta^4} + \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{m_\gamma}{l_0^2 \pi^2 \beta^2} \left(3m_\gamma K_0\left(l_0 m_\gamma \beta\right) + \frac{2\left(3 + l_0^2 m_\gamma^2 \beta^2\right)}{l_0 \beta} K_1\left(l_0 m_\gamma \beta\right) \right). \tag{7.23}$$

O primeiro termo refere-se à lei padrão de Stefan-Boltzmann, enquanto o segundo termo refere-se ao termo de matéria escura encontrado considerando a presença de fótons escuros em nosso universo. Os fótons escuros têm uma dependência diferente da temperatura. Considerando que a massa do fóton escuro é pequena [Fabbrichesi, Gabrielli e Lanfranchi 2021, Caputo et al. 2021, Reece 2019], a Eq. (7.23) pode ser expandido e torna-se,

$$\Upsilon^{00(11)}(T) = \frac{\pi^2}{15} T^4 + \frac{m_\gamma^2}{12} T^2. \tag{7.24}$$

Portanto, o fóton escuro não satisfaz a mesma lei de Stefan-Boltzmann que o fóton padrão cuja densidade de energia aumenta com T^4 e a parcela devida ao fóton escuro tem dependência de T^2. Isso mostra que, mesmo em altas temperaturas, a contribuição dos fótons escuros para a densidade de energia é muito pequena e os efeitos associados ao fóton usual são claramente dominantes.

7.2.2 Efeitos de tamanho a temperatura zero com contribuição de matéria escura

Na estrutura topológica do formalismo TFD, para obter os efeitos de tamanho, também conhecidos como efeito Casimir à temperatura zero, o parâmetro de compactificação é considerado como $\alpha = (0, 0, 0, i2d)$. Com esta escolha, a transformação de Bogoliubov é dada como,

$$w^2(d) = \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3}, \tag{7.25}$$

e as funções de Green são escritas como,

$$\begin{aligned} \overline{G}_0(x - x'; d) &= 2\sum_{l_3=1}^{\infty} G_0(x - x' - 2dl_3 n_3), &(7.26)\\ \overline{\Delta}(x - x'; d) &= 2\sum_{l_3=1}^{\infty} \Delta(x - x' - 2dl_3 n_3), &(7.27)\end{aligned}$$

com $n_3 = (0, 0, 0, 1)$. Então o tensor energia-momento torna-se,

$$\begin{aligned} \Upsilon^{\mu\lambda(ab)}(x; d) &= -2i \lim_{x' \to x} \sum_{l_3=1}^{\infty} \Big\{ \Gamma^{\mu\lambda} G_0(x - x' - 2dl_3 n_3) + \Sigma^{\mu\lambda} \Delta(x - x' - 2dl_3 n_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\rho\sigma} m_\gamma^2 M_{\sigma\rho} \Delta(x - x' - 2dl_3 n_3) \Big\}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Para $\mu = \lambda = 0$, a energia de Casimir à temperatura zero é,

$$\begin{aligned} \Upsilon^{00(11)}(d) &= -\frac{\pi^2}{720d^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{m_\gamma}{4d^2 l_3^2 \pi^2} \Big\{ -m_\gamma K_0(2dl_3 m_\gamma) \\ &\quad + \frac{(-1 + 2d^2 l_3^2 m_\gamma^2) K_1(2dl_3 m_\gamma)}{dl_3} \Big\}. \end{aligned} \tag{7.29}$$

E tomando $\mu = \lambda = 3$, a pressão de Casimir na temperatura zero é encontrada como,

$$\begin{aligned} \Upsilon^{33(11)}(d) &= -\frac{\pi^2}{240d^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{m_\gamma}{4d^2 l_3^2 \pi^2} \Big\{ -3m_\gamma K_0(2dl_3 m_\gamma) \\ &\quad - \frac{(3 + 5d^2 l_3^2 m_\gamma^2) K_1(2dl_3 m_\gamma)}{dl_3} \Big\}. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Em ambos os resultados, o primeiro termo representa o resultado padrão para energia de Casimir (7.29) e a pressão de Casimir (7.30), respectivamente. Enquanto o segundo termo é a contribuição devida aos fótons escuros. A força de Casimir associada ao campo eletromagnético, fótons padrão, é atrativa. Para investigar se o efeito associado à matéria escura é atrativo ou repulsivo, vamos supor que a massa do fóton escuro seja muito pequena. Então, a energia e a pressão de Casimir tornam-se,

$$\begin{aligned} \Upsilon^{00(11)}(d) &= -\frac{\pi^2}{720d^4} + \frac{m_\gamma^2}{16d^2}, &(7.31)\\ \Upsilon^{33(11)}(d) &= -\frac{\pi^2}{240d^4} - \frac{m_\gamma^2}{24d^2}, &(7.32)\end{aligned}$$

onde os termos com m_γ representam a contribuição do fóton escuro.

Portanto, a força Casimir associada aos fótons escuros é atrativa, o que implica que ela se comporta como o fóton padrão. No entanto, a presença de fótons escuros não pode afetar significativamente a força Casimir.

7.2.3 Efeitos de tamanho e temperatura com contribuição de matéria escura

Aqui vamos considerar os efeitos de tamanho e temperatura ao mesmo tempo. Para isso o parâmetro de compactificação deve ser escolhido como $\alpha = (\beta, 0, 0, i2d)$. Neste caso a compactificação dupla consiste em um ser o tempo e o outro ao longo da coordenada z. Isso leva ao efeito Casimir em temperatura finita. Para este parâmetro α, a transformação Bogoliubov generalizada é dada como,

$$w^2(\beta, d) = \sum_{l_0=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0} + \sum_{l_3=1}^{\infty} e^{-i2dk^3 l_3} + 2 \sum_{l_0,l_3=1}^{\infty} e^{-\beta k^0 l_0 - i2dk^3 l_3}. \tag{7.33}$$

Observe que o primeiro termo está associado à lei de Stefan-Boltzmann, enquanto o segundo termo está associado ao efeito Casimir à temperatura zero. Aqui vamos nos concentrar no terceiro termo, pois corresponde a uma mistura de ambos os efeitos, tamanho e temperatura. As funções de Green relacionadas ao terceiro termo são,

$$\overline{G}_0(x - x'; \beta, d) = 4 \sum_{l_0,l_3=1}^{\infty} G_0\left(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3\right), \tag{7.34}$$

$$\overline{\Delta}(x - x'; \beta, d) = 4 \sum_{l_0,l_3=1}^{\infty} \Delta\left(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3\right). \tag{7.35}$$

Com essas quantidades, a expressão para o tensor energia-momento é,

$$\begin{aligned}\Upsilon^{\mu\lambda(ab)}(x; d) = & -4i \lim_{x' \to x} \sum_{l_0,l_3=1}^{\infty} \Big\{ \Gamma^{\mu\lambda} G_0(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) \\ & + \Sigma^{\mu\lambda} \Delta(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) \\ & + \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\rho\sigma} m_\gamma^2 M_{\sigma\rho} \Delta(x - x' - i\beta l_0 n_0 - 2dl_3 n_3) \Big\}. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Após alguns cálculos, esta equação leva à energia de Casimir em temperatura finita,

$$\begin{aligned} E(\beta, d) = & \sum_{l_0,l_3=1}^{\infty} \Bigg\{ \frac{8(-4d^2 l_3^2 + 3l_0^2\beta^2)}{\pi^2(4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2)^3} \\ & + \frac{2m_\gamma}{\pi^2(4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2)^{5/2}} \Big(m_\gamma \sqrt{4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2} (-4d^2 l_3^2 + 3l_0^2\beta^2) K_0\left(m_\gamma \sqrt{4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2}\right) \\ & + (2(-4d^2 l_3^2 + 8d^4 l_3^4 m_\gamma^2) + 3l_0^2\left(1 + 2d^2 l_3^2 m_\gamma^2\right)\beta^2 + l_0^4 m_\gamma^2 \beta^4) \\ & \times K_1\left(m_\gamma \sqrt{4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2}\right)\Big) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{7.37}$$

onde $E(\beta, d) \equiv \Upsilon^{00(11)}(\beta; d)$, e para a pressão de Casimir em temperatura finita,

$$\begin{aligned} P(\beta, d) \;=\; & \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \Bigg\{ \frac{8(\beta^2 l_0^2 - 12 d^2 l_3^2)}{\pi^2(\beta^2 l_0^2 + 4d^2 l_3^2)^3} \\ & + \frac{m_\gamma}{\pi^2(4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2)^{5/2}} \Big(2m_\gamma(-12 d^2 l_3^2 + l_0^2 \beta^2)\sqrt{4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2} \\ & \times K_0(m_\gamma \sqrt{4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2}) \\ & -(80 d^4 l_3^4 m_\gamma^2 - 4 l_0^2 \beta^2 + 3 l_0^4 m_\gamma^2 \beta^4 + 16 d^2 l_3^2 (3 + 2 l_0^2 m_\gamma^2 \beta^2)) \\ & \times K_1(m_\gamma \sqrt{4d^2 l_3^2 + l_0^2\beta^2}) \Big) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{7.38}$$

com $P(\beta, d) \equiv \Upsilon^{33(11)}(\beta; d)$. O primeiro termo corresponde ao efeito Casimir em temperatura finita para o fóton usual. Os outros termos são contribuições devidas a um fóton escuro massivo. A influência dos fótons escuros não altera a natureza do efeito Casimir, mesmo em altas temperaturas. Portanto não gerando grande impacto na medida do efeito Casimir tanto a temperatura zero ou finita, diferentemente do caso da Lei de Stefan Boltzmann que a baixa temperatura, o termo de matéria escura é dominante. Há perspectivas envolvendo efeitos de espalhamentos considerando o fóton escuro por meio também do formalismo TFD.

8 Conclusão

Uma extensão do modelo padrão que consiste em um novo grupo de gauge descrito por $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)_X$ é considerada. O mediador dessa nova força é o fóton escuro que pode se misturar cineticamente com o fóton comum. Considerando a Lagrangiana de Maxwell estendido, o tensor energia-momento é construído. Para analisar algumas aplicações e calcular a influência dos fótons escuros, o formalismo TFD é utilizado. Esta é uma abordagem térmica conhecida como formalismo em tempo real, onde a evolução temporal de um sistema pode ser estudada juntamente com os efeitos da temperatura. Os efeitos da temperatura são introduzidos devido à sua estrutura topológica. Além do efeito de temperatura, é possível escolher uma topologia diferente e, como consequência, um efeito de tamanho pode ser investigado. Então, o formalismo TFD permite a análise de diferentes efeitos em pé de igualdade, como a lei de Stefan-Boltzmann e o efeito Casimir. Aqui a lei de Stefan-Boltzmann com correções devido a fótons escuros é calculada. Assumindo que o novo bóson de calibre tem uma massa pequena, mostra-se que sua contribuição para a densidade de energia é proporcional a T^2 enquanto a densidade de energia para o fóton usual é T^4. A segunda aplicação foi obtida considerando uma compactificação espacial que proporciona efeitos de tamanho. Em seguida, analisa-se a influência dos fótons escuros no efeito Casimir. No limite de pequena massa, a pressão de Casimir associada a fótons escuros é atrativa. Portanto, tem o mesmo comportamento exibido pelo fóton padrão. Para a última investigação, uma compactificação dupla é considerada. Como consequência, os efeitos de temperatura e tamanho são calculados. Esses resultados mostram que, mesmo em altas temperaturas, as contribuições dos fótons escuros não alteram a natureza do efeito Casimir. É importante notar que, embora os procedimentos desenvolvidos neste trabalho sejam muito diferentes do estudo realizado em [Alizzi e Silagadze 2022], ambos os resultados concordam que a presença de fótons escuros não pode afetar significativamente a força de Casimir.

Referências

AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 641, p. A6, 2020.

ALIZZI, A.; SILAGADZE, Z. Ultralight dark photon and casimir effect. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 61, n. 2, p. 43, 2022.

ALONSO-ÁLVAREZ, G.; BLEAU, K.; CLINE, J. M. Distortion of neutrino oscillations by dark photon dark matter. *arXiv preprint arXiv:2301.04152*, 2023.

AOYAMA, T.; KINOSHITA, T.; NIO, M. Theory of the anomalous magnetic moment of the electron. *Atoms*, MDPI, v. 7, n. 1, p. 28, 2019.

ARNOL'D, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 60.

BABCOCK, H. W. The rotation of the andromeda nebula. *Lick observatory bulletin*, v. 19, p. 41, 1939.

BAKSHI, P. M.; MAHANTHAPPA, K. T. Expectation value formalism in quantum field theory. i. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 4, n. 1, p. 1, 1963.

BARGER, V.; MARFATIA, D.; WHISNANT, K. *The physics of neutrinos*. [S.l.]: Princeton University Press, 2012.

BARGER, V.; MARFATIA, D.; WHISNANT, K. *The Physics of Neutrinos. Princeton University Press*. [S.l.: s.n.], 2012.

BARNETT, S.; KNIGHT, P. Thermofield analysis of squeezing and statistical mixtures in quantum optics. *JOSA B*, Optica Publishing Group, v. 2, n. 3, p. 467, 1985.

BEACHAM, J. et al. Physics beyond colliders at cern: beyond the standard model working group report. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 47, n. 1, p. 1, 2019.

BEACHAM, J. et al. Physics beyond colliders at cern: beyond the standard model working group report. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 47, n. 1, p. 1, 2019.

BELINFANTE, F. J. On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields. *Physica*, Elsevier, v. 7, n. 5, p. 449, 1940.

BIRRELL, N.; FORD, L. Renormalization of self-interacting scalar field theories in a nonsimply connected spacetime. *Physical Review D*, APS, v. 22, n. 2, p. 330, 1980.

BOGOLJUBOV, N.; TOLMACHOV, V. V.; ŠIRKOV, D. A new method in the theory of superconductivity. *Fortschritte der physik*, Wiley Online Library, v. 6, n. 11-12, p. 605, 1958.

BRITO, G. de; MALTA, P.; OSPEDAL, L. Spin-and velocity-dependent nonrelativistic potentials in modified electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 1, p. 1, 2017.

BROUT, R.; ENGLERT, F.; GUNZIG, E. The creation of the universe as a quantum phenomenon. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 115, n. 1, p. 78, 1978.

BUCKLEY, M. R.; PROFUMO, S. Regenerating a symmetry in asymmetric dark matter. *Physical review letters*, APS, v. 108, n. 1, p. 1, 2012.

CAPUTO, A. et al. Dark photon limits: A handbook. *Physical Review D*, APS, v. 104, n. 9, p. 1, 2021.

CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793.

CHENG, Y. et al. C p-violating dark photon kinetic mixing and type-iii seesaw model. *Physical Review D*, APS, v. 105, n. 9, p. 1, 2022.

CHOWDHURY, M.; HASHIM, I. Application of homotopy-perturbation method to klein–gordon and sine-gordon equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 1928, 2009.

CORBELLI, E.; SALUCCI, P. The extended rotation curve and the dark matter halo of m33. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 311, n. 2, p. 441, 2000.

DAIDO, R.; TAKAHASHI, F.; YOKOZAKI, N. Gauge coupling unification with hidden photon, and minicharged dark matter. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 768, p. 30, 2017.

DETWEILER, S. Klein-gordon equation and rotating black holes. *Physical Review D*, APS, v. 22, n. 10, p. 2323, 1980.

DILEM, B. B. Os efeitos das condiçoes de contorno na eletrodinâmica escalar e o efeito casimir para n regioes de largura finita e diferentes potenciais. *Vitória, Tese (Doutorado em Física)*, 2012.

DOLAN, L.; JACKIW, R. Symmetry behavior at finite temperature. *Physical Review D*, APS, v. 9, n. 12, p. 3320, 1974.

EINSTEIN, A. "zur elektrodynamik bewegter körper,"annalen der physik, ser. 4, xvii (1905). *(Annalen der Physik)*, 1905.

EZAWA, H.; TOMOZAWA, Y.; UMEZAWA, H. Quantum statistics of fields and multiple production of mesons. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 5, p. 810, 1957.

FABBRICHESI, M.; GABRIELLI, E.; LANFRANCHI, G. The dark photon. *Springer Briefs in Physics*, 2020.

FABBRICHESI, M.; GABRIELLI, E.; LANFRANCHI, G. *The Physics of the Dark Photon: A Primer*. [S.l.]: Springer, 2021.

FABER, S.; JACKSON, R. E. Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies. *The Astrophysical Journal*, v. 204, p. 668, 1976.

FACCIOLI, M.; SALASNICH, L. Spontaneous symmetry breaking and higgs mode: Comparing gross-pitaevskii and nonlinear klein-gordon equations. *Symmetry*, MDPI, v. 10, n. 4, p. 80, 2018.

FILIPPI, A.; NAPOLI, M. D. Searching in the dark: the hunt for the dark photon. *Reviews in Physics*, Elsevier, v. 5, p. 100042, 2020.

Fmercury. *Leastaction.JPG*. 2007. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Princ$%$C3$%$ADpio_de_Hamilton#/media/Ficheiro:Leastaction.JPG>.

FOCK, V. Konfigurationsraum und zweite quantelung. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 75, n. 9-10, p. 622, 1932.

FOLDENAUER, P. Dark sectors from the hidden photon perspective. *arXiv preprint arXiv:1907.10630*, 2019.

FRIEDRICHS, K. *MATHEMATICAL ASPECTS OF THE QUANTUM THEORY OF FIELDS. PART 5. FIELDS MODIFIED BY LINEAR HOMOGENEOUS FORCES*. [S.l.], 1953.

GAILLARD, M. K.; GRANNIS, P. D.; SCIULLI, F. J. The standard model of particle physics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 71, n. 2, p. 96, 1999.

GARRETT, K.; DUDA, G. Dark matter: A primer. *Hindawi-Advances in Astronomy*, 2011.

GOLDSTEIN, H.; JR, C. P. P.; SR, J. L. S. *Klassische mechanik*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.

GREINER, W.; REINHARDT, J. et al. *Field quantization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996.

GRENIER, I. A.; BLACK, J. H.; STRONG, A. W. The nine lives of cosmic rays in galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 53, p. 199, 2015.

GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3ª edição. ed. [S.l.]: Pearson, CW, 2010.

HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical review letters*, APS, v. 13, n. 16, p. 508, 1964.

HU, W. *Intermediate guide to the acoustic peaks and polarization*. [S.l.]: Chicago: University of Chicago, 2001.

JAECKEL, J. A force beyond the standard model-status of the quest for hidden photons. *arXiv preprint arXiv:1303.1821*, 2013.

JAECKEL, J.; RINGWALD, A. The low-energy frontier of particle physics. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Annual Reviews, v. 60, p. 405, 2010.

JAECKEL, J.; ROY, S. Spectroscopy as a test of coulomb's law: A probe of the hidden sector. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 12, p. 125020, 2010.

JAFFE, A. H. Cosmology 2012: Lecture notes. *Imperial College, London*, 2012.

KADANOFF, L.; BAYM, G. Quantum statistical mechanics benjamin. *New York*, 1962.

KELDYSH, L. V. et al. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Sov. Phys. JETP*, v. 20, n. 4, p. 1018, 1965.

KHANNA, F. C. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. [S.l.]: World Scientific, 2009.

KOREN, S. The hierarchy problem: from the fundamentals to the frontiers. *arXiv preprint arXiv:2009.11870*, 2020.

KROFF, D.; MALTA, P. Constraining hidden photons via atomic force microscope measurements and the plimpton-lawton experiment. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 9, p. 095015, 2020.

KUBO, R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. i. general theory and simple applications to magnetic and conduction problems. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 12, n. 6, p. 570, 1957.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Curso de física teórica*. [S.l.]: Reverte, Editorial SA, 2002.

LEMOS, N. *Mecânica Analítica*. [S.l.]: Livraria da física, 2007. v. 2.

MALBOUISSON, A.; MALBOUISSON, J. Boundary dependence of the coupling constant and the mass in the vector n-component ($\lambda\varphi 4$) d theory. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 35, n. 9, p. 2263, 2002.

MALBOUISSON, A.; MALBOUISSON, J.; SANTANA, A. E. d. Spontaneous symmetry breaking in compactified $\lambda\phi 4$ theory. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 631, n. 1-2, p. 83, 2002.

MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of theoretical physics*, Oxford University Press, v. 14, n. 4, p. 351, 1955.

MATSUBARA, T.; MATSUDA, H. Prog. theor. phys. *14*, p. 351, 1955.

MCMAHON, D. *Relativity Demystified*. [S.l.]: McGraw-Hill Professional Publishing, 2006. v. 1.

MCMAHON, D. *Quantum Field Theory Demystified*. [S.l.]: McGraw-Hill Professional Publishing, 2008. v. 1.

MILONNI, P. W. *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. [S.l.]: Academic press, 2013.

MOROZOV, A. Y. String theory: What is it? *Soviet Physics Uspekhi*, IOP Publishing, v. 35, n. 8, p. 671, 1992.

NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: CRC press, 2003.

NETO, J. B. *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004.

PESKIN, M.; SCHROEDER, D. *An Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Westview Press, 2007. v. 1.

QUEIROZ, H. et al. Thermofield dynamics and casimir effect for fermions. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 317, n. 1, p. 220, 2005.

REECE, M. Photon masses in the landscape and the swampland. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2019, n. 7, p. 1, 2019.

REINHARDT, G. *Field Quantization*. [S.l.]: Springer, 1996. v. 1.

RINDLER, W. *Relativity Special, General, and Cosmological*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. v. 2.

ROSENFELD, L. J. H. C. *Sur le tenseur d'impulsion-énergie*. [S.l.]: Palais des académies, 1940.

ROSSO, A. D. *Higgs: the beginning of the exploration*. [S.l.], 2012.

ROUVER, A.; ORLANDO, M. Cálculo da força de casimir. *Blucher Physics Proceedings*, v. 2, n. 1, p. 11, 2015.

RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996.

SAKHAROV, A. D. Violation of cp-invariance, c-asymmetry, and baryon asymmetry of the universe. In: *In The Intermissions... Collected Works on Research into the Essentials of Theoretical Physics in Russian Federal Nuclear Center, Arzamas-16*. [S.l.]: World Scientific, 1998. p. 84.

SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.

SALAM, A.; WARD, J. C. Weak and electromagnetic interactions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 11, p. 568, 1959.

SANTANA, A. E. et al. Thermal field theory: Algebraic aspects and applications to confined systems. In: SPRINGER. *Non-Linear Dynamics and Fundamental Interactions: Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Non-Linear Dynamics and Fundamental Interactions Tashkent, Uzbekistan October 10–16, 2004*. [S.l.], 2006. p. 187.

SCHWINGER, J. Brownian motion of a quantum oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 2, n. 3, p. 407, 1961.

SEMENOFF, G. W.; UMEZAWA, H. Functional methods in thermofield dynamics: A real-time perturbation theory for quantum statistical mechanics. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 220, n. 2, p. 196, 1983.

SIQUEIRA, C.; SANTANA, A. Pos (ic2006) 044 thermofield dynamics and path-integral formalism. *Centro*, 2006.

SMITH, E. The hierarchy problem. *The University of Chicago QFT III Final Paper*, 2019.

SPARNAAY, M. Attractive forces between flat plates. *Nature*, Springer, v. 180, p. 334, 1957.

SPARNAAY, M. J. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, Elsevier, v. 24, n. 6-10, p. 751, 1958.

SPERGEL, D. N. The dark side of cosmology: Dark matter and dark energy. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 347, n. 6226, p. 1100, 2015.

SUGIYAMA, S.; TAKADA, M.; KUSENKO, A. Possible evidence of axion stars in hsc and ogle microlensing events. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 840, p. 137891, 2023.

SWART, J. D.; BERTONE, G.; DONGEN, J. van. How dark matter came to matter. *Nature Astronomy*, Nature Publishing Group UK London, v. 1, n. 3, p. 0059, 2017.

TAKAHASHI, Y.; UMEZAWA, H. Higher order calculation in thermo field theory. *Collective phenomena*, v. 2, p. 55, 1975.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. [S.l.]: Cengage Learning, 2021.

UMEZAWA, H.; MATSUMOTO, H.; TACHIKI, M. Thermo field dynamics and condensed states. 1982.

UMEZAWA, H.; UMEZAWA, H. *Advanced field theory: Micro, macro, and thermal physics*. [S.l.]: Springer, 1993. v. 17.

VALATIN, J. Comments on the theory of superconductivity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 7, p. 843, 1958.

WIGHTMAN, A. S.; SCHWEBER, S. S. Configuration space methods in relativistic quantum field theory. i. *Physical Review*, APS, v. 98, n. 3, p. 812, 1955.

Apêndices

APÊNDICE A – Relatividade especial

Dentro da nossa teoria, temos a presença de um objeto de extrema importância que é utilizado no desenvolvido, o espaço de Minkowski.

Para explicarmos o espaço de Minkowski, precisamos entender um pouco de relatividade especial. Portanto começaremos com seus postulados,

Postulado 1 - As leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais;

Postulado 2 - A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c para todos os sistemas de referências inerciais.

Como consequência do segundo postulado, temos um fator que relaciona espaço e tempo, eles vão se relacionar pela velocidade limite da luz c. O espaço e tempo agora, formam uma estrutura unificada dita espaço-tempo (ct, x, y, z). Neste contexto, aparece um objeto chamado *intervalo* (objeto que nos informa a diferença entre dois pontos diferentes no espaço). Vamos imaginar um flash de luz emitida em um ponto qualquer no instante t=0, imaginemos uma frente de onda esférica da luz, podemos escrever,

$$\begin{aligned} c^2t^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= 0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

De forma que em outro referencial,

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0, \tag{A.2}$$

assim podemos relacionar as duas quantidades, ou seja,

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{A.3}$$

No espaço Eucliano, ou seja, para (x, y, z), temos a distância diferencial associada da origem até algum ponto por,

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{A.4}$$

De forma análoga, definimos,

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{A.5}$$

Essa quantidade ds^2 permanece invariante mesmo em referênciais distintos, ou seja, ds^2 é o mesmo, isto é,

$$ds^2 = ds'^2. \tag{A.6}$$

A partir desses resultados, podemos introduzir um objeto associado a forma do espaço-tempo que estamos trabalhando, chamada métrica. A métrica contém toda informação do espaço-tempo. No nosso caso, está relacionado ao espaço-tempo plano [Rindler 2006]. A métrica de Minkowski é definida como,

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{A.7}$$

e possui uma inversa da forma,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{A.8}$$

Na relatividade, é conveniente rotular as coordenadas $ct = x^0$ e $(x, y, z) \mapsto (x^1, x^2, x^3)$. Aqui definimos um vetor covariante [McMahon 2006] com,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{A.9}$$

Usaremos a notação de Einstein, para expressar a soma como:

$$s_\alpha s^\alpha \equiv \sum_{\alpha=0}^{3} s_\alpha s^\alpha = s_0 s^0 + s_1 s^1 + s_2 s^2 + s_3 s^3. \tag{A.10}$$

Ou ainda reescrever o intervalo ds^2 em termos da métrica,

$$ds^2 = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \tag{A.11}$$

Assim podemos escrever a equação (2.27) em termos da soma de Einstein, tal como

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_t \varphi]} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_x \varphi]} - \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_y \varphi]} - \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_z \varphi]}. \tag{A.12}$$