

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Jonhy Syllas dos Santos Ferreira

Emaranhamento e Discórdia em sistemas puros multipartidos

**Cuiabá
2015**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Jonhy Syllas dos Santos Ferreira

Emaranhamento e Discórdia em sistemas puros multipartidos

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Mato Grosso, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Fernando Cornelio

**Cuiabá
2015**

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S237e Santos Ferreira, Jonhy Syllas dos.
Emaranhamento e Discórdia em sistemas puros multipartidos / Jonhy Syllas dos Santos Ferreira. -- 2015
92 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Fernando Cornelio.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Informação Quântica, Emaranhamento Quântico, Discórdia Quântica. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Avenida Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - Cep: 78060900 - CUIABÁ/MT
Tel : (65) 3615-8937 - Email : pgfisica@fisica.ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "Emaranhamento e discórdia em sistemas puros multi-partidos"

AUTOR : Mestrando Johny Syllas dos Santos Ferreira

Dissertação defendida e aprovada em 08/05/2015.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca / Orientador Doutor Marcio Fernando Cornelio
Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinador Interno Doutor Thiago Werlang de Oliveria
Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinador Externo Doutor Felipe Fernandes Fanchini
Instituição : UNESP - Bauru

CUIABÁ, 08/05/2015.

Não há derrota senão a que vem
de nós mesmos. Não há barreira
intransponível senão a nossa
própria fraqueza de propósito.

Ralph Waldo Emerson

Agradecimentos

- Primeiramente agradeço a Deus pela vida, por sua bondade e misericórdia comigo, sem a qual nunca conseguiria concluir este trabalho.
- À minha amada esposa Fernanda, agradeço pela compreensão, paciência pelos meus momentos ausentes, por todo amor e carinho que tem me dedicado nesse tempo em que estamos juntos.
- À meus pais e minha irmã, que sempre me apoiaram e me incentivaram nesta árdua caminhada.
- Ao Prof. Dr. Marcio Fernando Cornelio, pela dedicação e paciência na orientação, tirando as dúvidas sempre que surgiam.
- Aos meus sogros e cunhados, que acompanharam essa fase da minha vida, e sempre me apoiaram.
- Aos companheiros de sala Máquina de Carnot, Celso, Cristiano, Gilmarco, João Roberto, José, Marcondes, Willian, que se tornaram grandes amigos com o passar do tempo.
- Aos professores da Pós-Graduação em Física da UFMT.
- À UFMT e ao Instituto de Física pela oportunidade de fazer o curso e por oferecer salas com mobiliário e conforto para nossos estudos.
- À Prefeitura Municipal de Barra do Bugres, na pessoa do prefeito Júlio Florindo e da Secretária Municipal Bernadete Fernandes Gregolin Oliveira que me concedeu afastamento de minhas atividades junto a Secretaria Municipal de Educação para que o sonho de ter um mestrado fosse possível.
- À CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Em sistemas bipartidos, é conhecido que o emaranhamento de formação e a discórdia quântica são diferentes para estados mistos. Não existe nenhuma relação clara entre eles aparentemente. No entanto, quando consideramos sistemas puros de três partes, temos a lei de conservação que distribui emaranhamento de formação e discórdia quântica no sistema onde a soma de todos os emaranhamentos bi-partidos compartilhados com um sistema particular, dado pelo emaranhamento de formação, não pode ser aumentado sem que aumente, também na mesma quantidade, a soma das discórdias quânticas compartilhadas com este mesmo sistema. Neste trabalho, derivamos relações entre emaranhamento e discórdia para os sistemas de 4, 5 e 6 partes a partir das relações conhecidas para sistemas de três partes. Notavelmente, a relação entre a discórdia e emaranhamento para sistemas com número par e ímpar de partes são diferentes. Para os sistemas com quantidade par de partes, as relações são de desigualdades, enquanto, que para sistemas com quantidade ímpar de partes, temos relações de igualdades, para as quais demonstramos a sua generalização. Utilizamos ainda a relação entre discórdia e diferença de trabalho termodinâmico para obter relações entre somas de emaranhamento de formação e essa diferença para sistemas de 3, 4, 5 e 6 partes.

Palavras-chave: Informação Quântica, Emaranhamento Quântico, Discórdia Quântica.

Abstract

In bipartite systems, it is known that entanglement formation and quantum discord are different for mixed states. There is no clear relations between them apparently. However, when considering pure three-partite systems, we have the conservation law which establishes a distribution of entanglement and discord through the subsystems. The sum of entanglements of a particular subsystem with the other ones is equal to the sum of discords between the same subsystems. Therefore, the bipartite entanglements can not be increased without increasing by the same amount the sum of discords. In this work, we derive relations between entanglement and discord for systems of 4, 5 and 6 parts. Notably, the relation between the entanglement and discord for even and odd number of systems are different. For even number of parts, relationships are inequalities, while for the odd number of parts, they are equalities, for which demonstrate its generalization. We also use the relation between thermodynamic work and discord to relate the sum of entanglements of formation with the difference in the performance of between quantum and classical Maxwell's Demon.

Keywords: Quantum Information, Entanglement, Quantum Discord.

Lista de Figuras

1.1	No conjunto de informação mútua entre o sistema A e B , temos as informações que podem ser acessadas por medidas (roxa) ditas clássicas e a IIL (amarela).	2
2.1	Esquema de um sistema de comunicação segundo Shannon. A primeira caixa, fonte de informação, é onde a mensagem é criada, em seguida é feita a codificação e enviado pelo canal que é o meio pelo qual a mensagem é transmitida. Do canal, a mensagem passa por um processo de decodificação para que o receptor da mensagem possa entender o conteúdo da mensagem. No canal a mensagem está sujeita a sofrer interações com o meio externo (ruído), podendo assim ser corrompida.	6
2.2	Canal binário simétrico. Observe que o número binário 0, tem probabilidade $1 - p$ de passar pelo canal e continuar sendo 0, e probabilidade p de sofrer ruído e tornar-se 1. O número binário 1 tem as mesmas probabilidades de ser mudado.	8
2.3	Variação do Conteúdo Informativo de x em função de $p(x)$.	10
2.4	Diagrama	15
2.5	Comparações entre as entropias quântica e clássica	29
2.6	Diagrama de Veen das correlações do sistema quântico abc . Entre as linhas pontilhadas temos $J_{a c}^{\leftarrow}$.	40
2.7	Discórdia de ρ_{sa}^P .	42
2.8	Discórdia de ρ_{sa}^W .	43
2.9	Demônio de Maxwell.	44
3.1	Representação de sentido horário (setas vermelhas) e anti-horário (setas azuis) do ciclo de IIL. A soma das duas possibilidades de direções do ciclo IIL resultam na soma dos possíveis EF entre os pares do sistema puro tripartido abc .	49

Lista de Tabelas

2.1	Distribuição de probabilidade de letras de um texto em língua inglesa escolhido aleatoriamente. Retirada da Ref. [33]	8
-----	--	---

Sumário

1	Introdução	1
2	Fundamentação Teórica	5
2.1	Teoria da Informação Clássica	5
2.1.1	Conteúdo Informativo	7
2.1.2	Entropia Clássica de informação	10
2.1.2.1	Entropia Conjunta	11
2.1.2.2	Entropia Condicionada e Entropia Condicional	12
2.1.2.3	Informação Mútua	14
2.1.2.4	Entropia Relativa	14
2.1.3	Subaditividade Forte	17
2.2	Teoria da Informação Quântica	19
2.2.1	Operador Densidade	19
2.2.2	Medidas Quânticas	21
2.2.3	Operador Densidade Reduzido	23
2.2.4	Decomposição de Schmidt	24
2.2.5	Entropia de von Neumann	26
2.2.6	Entropia Relativa Quântica	30
2.2.7	Relações análogas à teoria da informação clássica	31
2.2.8	O Cálculo da entropia condicional baseada em medidas.	33
2.3	Teoria do Emaranhamento	35
2.3.1	Caracterização de Emaranhamento e Critério de Separabilidade	36
2.3.2	Medidas de Emaranhamento	37
2.3.3	Monogamia de Emaranhamento	39
2.4	Discórdia Quântica	40
2.5	O Demônio de Maxwell	44
2.5.1	O “Demônio” causa Discórdia	45
3	Relações de distribuição de emaranhamento e discórdia	47
3.1	Emaranhamento e Discórdia para sistema tri-partidos	47

3.1.1	Informação Inacessível Localmente para tri-partido	48
3.1.2	Derivação Alternativa para as relações cíclicas de EF e DQ para sistemas tri-partidos	50
3.2	EF e DQ para sistemas quânticos de 4 partes	52
3.2.1	Prova alternativa para subaditividade da entropia condicional	54
3.2.2	Relações cíclicas para 4 partes	55
3.3	Relações para sistemas puros de 5 partes	58
3.3.1	Relações cíclicas para 5 partes	59
3.4	Sistemas puros de 6 partes	61
3.4.1	Relações cíclicas para 6 partes	63
3.5	Generalização de Relações de EF e DQ	66
3.5.1	EF e DQ para sistemas com número ímpar de partes	67
3.6	Emaranhamento e Trabalho	68
4	Considerações Finais	73
	Referências Bibliográficas	75

Capítulo 1

Introdução

Recentemente, muitos estudos tem sido feitos na área de Teoria de Informação Quântica. O interesse por essa área de estudo é justificada pela Mecânica Quântica (MQ) ter o recurso das correlações quânticas que aparentemente apresentam vantagens computacionais frente aos recursos oferecidos pela física clássica para os computadores atuais. Com as correlações quânticas podemos fazer a Codificação Super Densa, Criptografia Quântica, Teletransporte Quântico e a Computação Quântica Determinística com um qbit puro [26, 5, 18, 48, 14, 30].

Em 1965, foi apresentada a Lei de Moore, que diz que o poder computacional dobra a cada dois anos aproximadamente a um custo constante. Porém, esse sonho aparentemente terminará após as duas primeiras décadas do século XXI [36]. A capacidade computacional que temos atualmente é conseguida fazendo os componentes eletrônicos dos computadores cada vez menores de maneira que os efeitos quânticos começarão a interferir no funcionamento desses dispositivos.

Um dos principais conceitos de Mecânica Quântica é o emaranhamento. Ele é considerado como o recurso natural da MQ, sendo um dos conceitos que a difere das demais teorias. Esse conceito levantou vários questionamentos sobre a MQ ser uma teoria completa. Entre eles, destacamos o trabalho de Eintein, Podolsky e Rosen [17] e o trabalho de Schrödinger [42]. O primeiro questiona o realismo da MQ, como pode uma informação ser transmitida instantaneamente de um local distante a outro. Já o segundo notou que existem estados quânticos para os quais a incerteza do sistema todo é menor que a incerteza de suas partes.

Muita pesquisa tem sido realizada para quantificar sistemas emaranhados de duas partes, ou seja, medir a correlação quântica entre esses dois sistemas. Neste trabalho discutiremos duas dessas medidas, sendo elas a entropia de emaranhamento e o emaranhamento de formação (EF) [3]. Atualmente, as pesquisas tem se voltado para medidas de emaranhamento de sistemas multi-partidos [21, 9, 32], pois se considerarmos um sistema de n qbits, com base computacional dada por $|x_1x_2\dots x_n\rangle$, teremos assim um estado quântico que é especificado por 2^n amplitudes complexas [36]. Em outras pala-

bras, se $n = 500$, teremos 2^{500} amplitudes, ao qual, para um computador clássico seria inconcebível armazenar todos esses números.

Outro conceito que mede correlação quântica é a discórdia quântica (DQ). Introduzida em 2001 pela Ref. [50], ficou um certo tempo esquecida, porém, com a publicação de trabalhos que mostram que é possível fazer computação quântica usando apenas um qbit [14, 30], muitos trabalhos tem sido publicados sobre esse conceito desde então. A discórdia é entendida como a quantidade de Informação Inacessível Localmente (IIL) por medida, sendo a diferença entre a informação mútua total e a informação mútua acessível por medida entre dois sistemas quânticos, conforme podemos ver no diagrama de Venn na Fig. 1.1.

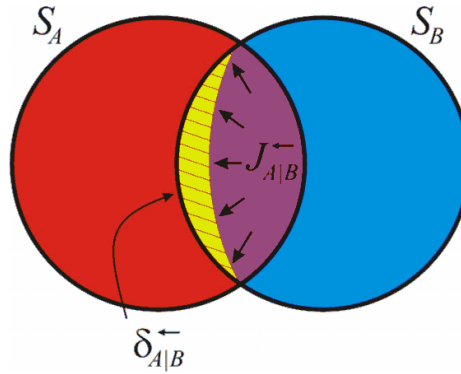


Figura 1.1: No conjunto de informação mútua entre o sistema A e B , temos as informações que podem ser acessadas por medidas (roxa) ditas clássicas e a IIL (amarela).

Fonte: Ref. [19].

Em 2011, utilizando o princípio de monogamia, foi descoberto uma relação entre EF e DQ para sistemas tri-partido [20]. Era conhecido que para sistemas puros bipartidos

$$E_{a,b} = \delta_{a|b}^{\leftarrow},$$

porém, ainda encontra-se em aberto como essas quantidades se relacionam para estados quânticos mistos. Neste trabalho, temos como objetivo encontrar relações para sistemas quânticos puros de mais de 3 partes e entender o padrão dessas relações para uma possível generalização para sistema n -partidos. Inicialmente no Capítulo 2, apresentaremos os principais conceitos da Teoria de Informação Clássica, sendo o principal a entropia de Shannon. Em seguida, veremos conceitos da Teoria de Informação Quântica, que em sua maioria, são análogos da teoria clássica, porém, com suas particularidades. Apresentaremos os principais conceitos da Teoria de Emaranhamento e o conceito de Discórdia Quântica. No Capítulo 3, mostraremos os resultados obtidos nesse estudo, começando com uma revisão dos resultados apresentados pelas Refs. [20, 19] para sistemas tri-partidos e então apresentamos os resultados para sistema de 4, 5 e 6 partes.

Apresentamos também a demonstração do caso geral para sistemas com número par de partes. Utilizando os resultados da Ref. [50] encontramos uma relação entre EF e uma diferença de trabalho termodinâmico. Por fim, apresentamos nossas considerações finais.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Teoria da Informação Clássica

Em pleno século XXI, as tecnologias de informação atingiram um patamar de elevada consideração na sociedade, sendo destaque a telefonia, o rádio, a televisão e os computadores com a internet. Esses avanços tecnológicos permitiram a sociedade moderna uma revolução na troca de informação, sendo de suma importância realizar estudos sobre as teorias científicas que tornaram essas realizações possíveis.

A comunicação é essencial para a sociedade. É o processo pelo qual repassamos informação, levantamos dúvidas e expressamos nossos pensamentos. A evolução da ciência depende das trocas de informação entre os cientistas, sendo essa troca feita por meio de livros, artigos e seminários acadêmicos.

Com a invenção da escrita o conhecimento deixou de ser transmitido somente verbalmente ou por assimilação. A escrita é uma das primeiras tecnologias de comunicação da humanidade, sendo imprescindível para a transcendência do conhecimento através do tempo.

Com a invenção do telefone em 1860, a história das comunicações ganham um novo capítulo. Com o telefone inicia-se a comunicação instantânea à distância, marcando assim, o início da tecnologia de transmissão de informação à distância. Essa nova tecnologia tornou-se essencial para a humanidade, principalmente após o surgimento dos aparelhos celulares.

O telefone é um dispositivo que utiliza conceitos do eletromagnetismo em seu funcionamento, pois é fruto da transformação de ondas sonoras em sinais elétricos. Dessa forma, os problemas ligados a esse tipo de comunicação tornaram-se objeto de estudo de pesquisadores da área da física, e posteriormente, da engenharia elétrica.

Em processos de comunicação semelhantes ao do telefone era observado problemas no envio da mensagem, onde, muitas vezes, devido a processos ruidosos, o sinal enviado sofria danos, comprometendo assim o entendimento por parte do receptor da mensa-

gem. Para evitar os problemas acima, era necessário saber a *capacidade do canal de comunicação*, que é a quantidade de informação que pode ser transmitida sem perdas. Se a quantidade de informação superar a capacidade do canal a informação original não poderá mais ser recuperada.

Surge então a necessidade de estudar esse fenômeno no sentido de resolver definitivamente o problema da telecomunicação. Claude Shannon, um matemático e engenheiro elétrico, foi o primeiro a considerar o problema da telecomunicação como um problema matemático, e utilizou conceitos da estatística e da teoria das probabilidades para resolver definitivamente esse problema. Shannon foi simplesmente genial, ao perceber que seria possível fazer um “tratamento digital” da informação. Shannon percebeu que os sinais elétricos poderiam ser associados a números binários, sendo por exemplo, o número 1 para passagem de corrente elétrica e 0 para sem corrente, e assim associar o surgimento desses símbolos a probabilidades. Nasce então a teoria da informação com a publicação do artigo “A Mathematical Theory of Communication” e do livro “The Mathematical Theory of Communication”, sendo o primeiro publicado em 1948 por Claude Shannon e o livro com co-autoria do matemático Warren Weaver no ano seguinte.

Para abordar matematicamente o problema, precisou criar conceitos matemáticos que correspondessem ao processo no qual estava estudando. Ele considerava que o problema da comunicação era o de reproduzir exatamente ou aproximadamente uma mensagem enviada de um local a outro [43]. Esquematizadamente, os processos de comunicação são compostos como na Figura 2.1 das seguintes cinco partes:

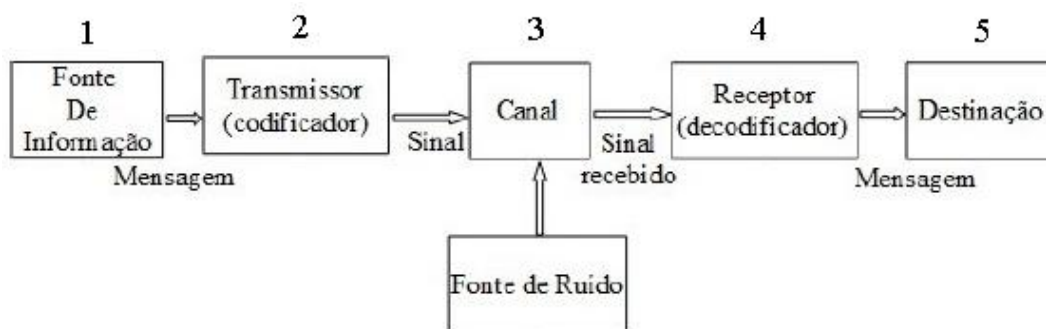


Figura 2.1: Esquema de um sistema de comunicação segundo Shannon. A primeira caixa, fonte de informação, é onde a mensagem é criada, em seguida é feita a codificação e enviado pelo canal que é o meio pelo qual a mensagem é transmitida. Do canal, a mensagem passa por um processo de decodificação para que o receptor da mensagem possa entender o conteúdo da mensagem. No canal a mensagem está sujeita a sofrer interações com o meio externo (ruído), podendo assim ser corrompida.

1. Uma **fonte de informação** que cria uma mensagem ou sequência de mensagens a serem enviadas para o transmissor. Sendo que essa mensagem pode ser qualquer, não importa o conteúdo, se é um texto ou imagem.

2. Um **transmissor** que codifica a mensagem em um sinal adequado para a transmissão através do canal.
3. O **canal** é o meio utilizado para transmitir o sinal a partir do transmissor para o receptor.
4. O **receptor** faz a operação inversa que foi feito pelo transmissor, reconstruindo a mensagem a partir do sinal recebido do canal.
5. E por último a **destinação** que é a pessoa ou aparelho para os quais a mensagem se destinava.

O ponto forte da teoria de Shannon está no fato de ter percebido que a mensagem da fonte de informação poderia ser modelada por símbolos digitais, isto é, podemos atribuir a cada mensagem da fonte uma combinação de símbolos digitais que indicam uma característica do sinal físico utilizado para a transmissão ou armazenamento da mensagem. No caso, da codificação binária, a fonte é codificada usando sinal binário (0 ou 1), onde fisicamente significa passagem ou não da corrente elétrica. Enquanto que sinais analógicos, implicava por exemplo, no caso do telefone, de replicar a onda sonora em uma onda eletromagnética.

O principal problema no processo de comunicação de informação está nas interferências que surgem no canal ou ruído [36], conforme pode ser observado na Figura 2.1. Shannon queria resolver duas questões-chave relacionadas à comunicação da informação através de um canal. 1) Que recursos são necessários para se mandar informação através de um canal de comunicação? 2) Seria possível enviar a informação de modo que ela estivesse protegida contra os efeitos de ruídos no canal de comunicação?

Como resposta, Shannon enunciou dois teoremas fundamentais da teoria de informação, o *teorema da codificação em canais sem ruído* e o *teorema da codificação em canais ruidosos*, onde o primeiro quantifica os recursos físicos necessários para armazenar ou transmitir a informação fornecida por uma fonte e o segundo quantifica a informação que pode ser transmitida com segurança através de um canal ruidoso.

Um exemplo do que um ruído pode causar a uma mensagem com codificação binária, isto é, codificada em 0 e 1, é que os sinais binários podem mudar com uma certa probabilidade conforme Figura 2.2, gerando assim uma incerteza em relação a mensagem recebida. Para isso Shannon mostrou que códigos de proteção contra erros poderiam ser usados para proteger o conteúdo da mensagem.

2.1.1 Conteúdo Informativo

O passo decisivo da Teoria da Informação é a matematização dos conceitos ligados a informação [36]. A ideia central foi a percepção de que uma fonte de informação se

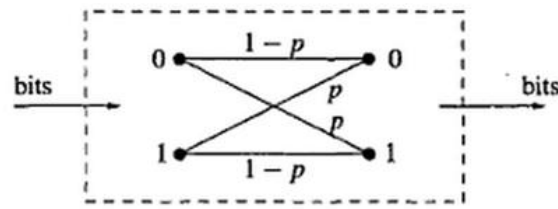


Figura 2.2: Canal binário simétrico. Observe que o número binário 0, tem probabilidade $1-p$ de passar pelo canal e continuar sendo 0, e probabilidade p de sofrer ruído e tornar-se 1. O número binário 1 tem as mesmas probabilidades de ser mudado.

comporta tal qual uma variável aleatória. Shannon notou que o surgimento dos símbolos de uma fonte de informação seguem uma perspectiva probabilística, logo poderia se tentar matematizar o processo e assim estudar o problema com enfoque quantitativo.

Matematicamente, uma variável aleatória X é uma tripla ordenada (x, A_X, P_X) , onde x indexa os valores que X assume no alfabeto $A_X = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_I\}$ que são os símbolos no qual a mensagem é codificada, e $P_X = \{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_N\}$ são as probabilidades dos respectivos símbolos.

Denotaremos $p(x = a_i) = p_i$, para fins de economia de notação. Como é usado elementos da estatística e probabilidade, temos que $p_i \geq 0$ e $\sum_{x \in A_X} p(x = a_i) = 1$.

Um exemplo de fonte de informação é apresentado na Tabela 2.1, onde é considerado aleatoriamente a escolha de um texto escrito em língua inglesa obtendo assim a distribuição de probabilidade das letras usadas no texto.

Tabela 2.1: Distribuição de probabilidade de letras de um texto em língua inglesa escolhido aleatoriamente. Retirada da Ref. [33]

a_i	p_i
a	0.0575
b	0.0128
c	0.0263
d	0.0285
...	...
x	0.0073
y	0.0164
z	0.0007

De posse do conceito de fonte de informação, o segundo passo da teoria da informação clássica é quantificar a informação. Uma boa medida de informação deve obedecer algumas propriedades. Shannon adotou as seguintes propriedades para definir o *conteúdo informativo de uma mensagem* ($I(m_i)$):

1. Se $p_k \rightarrow 1$ então $I(m_k) \rightarrow 0$;

Um evento com probabilidade 1 não pode ser informativo, pois a sua mensagem já é conhecida. Em outras palavras não transmitimos informação nova a um interlocutor que já sabe o que vamos falar. Quanto mais alta a probabilidade de uma mensagem ocorrer, menor será a informação que ela contém.

2. Se $p_k < p_j$ então $I(m_k) > I(m_j)$;

Fazendo uma simples comparação, em uma roda de conversa entre amigos, não se percebe muita surpresa dos ouvintes quando alguém comenta sobre um assunto que a maioria já espera (futebol, notícias dos jornais, entre outras), por outro lado, quando alguém traz um assunto não esperado e de certa forma interessante, tem-se surpresa por parte dos ouvintes.

Logo por meio desta analogia, percebemos que uma propriedade que I deve ter é a de depender da probabilidade de ocorrer, ou seja, uma mensagem traz mais informação que a outra quando o surgimento de uma é menos provável que a outra.

3. $I(m_k) \geq 0$ pois $0 \leq p_k \leq 1$;

A informação é sempre positiva, ou seja, podemos não aprender nada a partir de uma mensagem recebida, mas não podemos perder informação por isso.

4. $I(m_k \cdot m_j) = I(m_k) + I(m_j)$.

Se tivermos duas mensagens subsequentes e **independentes** (m_k e m_j), a quantidade de informação deve ser a soma do conteúdo informativo de cada mensagem, e esta característica exige que I seja aditivo.

Uma função matemática que tem essas propriedades é a função logaritmo. Dessa forma podemos definir $I(x)$ (conteúdo informativo da mensagem ou símbolo x) como sendo

$$I(x = a_i) = \log \frac{1}{p_i} = -\log p_i. \quad (2.1)$$

A unidade de medida de conteúdo informativo depende da base do logaritmo que se usa. Neste trabalho será utilizado base 2, logo a unidade de medida de conteúdo informativo será bit/símbolo.

Na Figura 2.3 ilustra-se o gráfico de (2.1). Nota-se que quando $p_i \rightarrow 0$ tem-se $I(x) \rightarrow +\infty$. E como se esperava, $I(x) \rightarrow 0$ quando $p(x) \rightarrow 1$, verificando assim as 3 primeiras propriedades. Observe que a verificação da ultima propriedade é imediata, considerando a propriedade aditiva da função logarítmica.

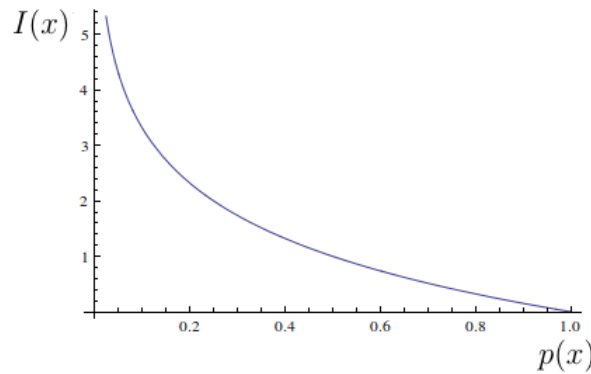


Figura 2.3: Variação do Conteúdo Informativo de x em função de $p(x)$.

2.1.2 Entropia Clássica de informação

O conteúdo informativo médio transmitido por símbolo da fonte associada a uma variável aleatória X é denominada entropia. É definida por

$$H(X) \equiv - \sum_x p(x) \log p(x). \quad (2.2)$$

Convenciona-se que

$$0 \log 0 \equiv 0, \quad (2.3)$$

pois $\lim_{p(x) \rightarrow 0^+} -p(x) \log p(x) = 0$. Como já foi dito, a entropia de Shannon X calcula a quantidade de informação que obtivemos, em média, quando aprendemos o valor de X . Uma visão alternativa é que a entropia de X seja também uma medida de incerteza sobre X antes de aprendermos o seu valor. Sendo essas duas visões complementares. Antes de aprendermos o valor da variável aleatória X , temos a entropia como medida de incerteza, após obtermos os valores de X , a entropia é a quantidade de informação que adquirimos sobre X [36].

Shannon mostrou que a entropia deve possuir as seguintes propriedades [43]:

1. $H(X)$ é contínua para todo p_i .

Imediatamente da própria definição tem-se que (2.2) é contínua para todo p_i , visto que $\log(x)$ só possui descontinuidade em $x = 0$ para o domínio de probabilidades, mas essa descontinuidade é removida fazendo a consideração acima (2.3).

2. Para uma fonte X que gera símbolos equiprováveis, isto é, $p_1 = p_2 = \dots = p_i = \dots = p_N = \frac{1}{N}$, a incerteza $H(X) = H\left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$ é uma função monotonicamente crescente de N , onde N é a quantidade de símbolos do alfabeto A_X .

A verificação dessa propriedade é imediata utilizando (2.2)

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log \frac{1}{N} = \log N, \quad (2.4)$$

é possível observar que, para símbolos equiprováveis, $H(X) = \log N$ é uma função monotonicamente crescente de N . Em outras palavras a entropia aumenta com a quantidade de símbolos da fonte.

3. A entropia é positiva, isto é,

$$H(X) = H(p_1, \dots, p_N) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \geq 0. \quad (2.5)$$

A verificação é imediata visto que, $0 \leq p_i \leq 1$ e $\log p_i \leq 0$. A igualdade ocorre quando $p_j = 1$ e $p_{i \neq j} = 0$. Assim como o conteúdo informativo deve ser positivo, a sua média também deve ser, caso contrário as duas medidas estariam em contradição.

2.1.2.1 Entropia Conjunta

O conceito de entropia pode ser estendido para mais de uma variável aleatória. Dado um conjunto de variáveis aleatórias X e Y , tomando valores nos alfabetos A_X e A_Y . Este conjunto de variáveis aleatórias é caracterizado pelas probabilidades conjuntas $\{p(x,y), x \in A_X, y \in A_Y\}$, observando que $0 \leq p(x,y) \leq 1$ para qualquer dupla ordenada $(x,y) \in A_X \times A_Y$, bem como a propriedade de completeza

$$\sum_{x,y} p(x,y) = 1. \quad (2.6)$$

A entropia conjunta é expressa por

$$H(X,Y) = - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y), \quad (2.7)$$

onde uma de suas propriedades é a da simetria, isto é, $H(X,Y) = H(Y,X)$ [45]. Para mais de duas variáveis aleatórias a entropia conjunta é

$$H(X_1, \dots, X_L) = - \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_L} p(x_1, \dots, x_L) \log p(x_1, \dots, x_L). \quad (2.8)$$

Usando o exemplo da fonte de informação da Tabela 2.1, podemos interpretar como distribuição conjunta de probabilidade, a possibilidade de surgir pares de resultados, como por exemplo, “aa”, “ab”, “ac”, assim por diante.

Se tivéssemos uma distribuição de probabilidade dessa natureza para a língua portuguesa, poderíamos pensar na probabilidade de surgir conjuntamente em uma palavra as letras “w” e “ã”, que sabemos ser de baixa probabilidade. O surgimento dessas duas letras subsequentemente terá o conteúdo informativo alto, e isso pode indicar erro de

digitação ou até mesmo uma nova palavra em português que tem grandes chances de ser nome próprio.

Para variáveis aleatórias X e Y independentes, ou seja, os símbolos tem probabilidades conjuntas independentes, isto é, $p(x,y) = p(x).p(y)$, temos que

$$\begin{aligned}
 H(X,Y) &= - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y) \\
 &= - \sum_{x,y} p(x)p(y) \log[p(x)p(y)] \\
 &= - \sum_{x,y} p(x)p(y) [\log p(x) + \log p(y)] \\
 &= - \sum_{x,y} p(x)p(y) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x)p(y) \log p(y) \\
 &= - \sum_x p(x) \log p(x) - \sum_y p(y) \log p(y) \\
 &= H(X) + H(Y),
 \end{aligned}$$

que mostra que a entropia é aditiva para variáveis aleatórias independentes.

2.1.2.2 Entropia Condicionada e Entropia Condicional

Outra quantidade importante da Teoria de Informação Clássica é a Entropia Condicional. Inicialmente, definiremos a entropia condicionada da variável X a um determinado valor da variável Y , medindo assim a incerteza de X quando Y é conhecida.

A expressão matemática para a entropia condicionada é determinada fazendo o cálculo da entropia de X dependendo de um valor específico $Y = y$. Como as probabilidades condicionadas $\{p(x|y), x \in A_X\}$ verificam a propriedade básica de probabilidade, isto é, $0 \leq p(x|y) \leq 1$ e $\sum_x p(x|y) = 1$, para qualquer $y \in A_Y$ [33]. Podemos então utilizá-las na definição de entropia de Shannon, obtendo assim a entropia condicionada de X a $Y = y$,

$$H(X|Y = y) = - \sum_x p(x|y) \log p(x|y). \quad (2.9)$$

Novamente, utilizando a língua portuguesa, e considerando o exemplo acima. Se $Y = \zeta$, a variável X fica condicionada ao surgimento das vogais “a”, “o” e “u”. Caso apareça outra letra a não ser essas, será um evento de alto conteúdo informativo, sendo assim interessante, pois pode ter acontecido erro de digitação da palavra ou problemas de ruídos como já foi dito anteriormente.

Se calcularmos a média da entropia condicionada sobre os valores y iremos determinar uma quantidade que é denominada entropia condicional $H(X|Y)$. Do Teorema de

Bayes temos que $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$, então podemos escrever $H(X|Y)$ como sendo

$$H(X|Y) = \sum_y p(y)H(X|Y = y) = - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y) \quad (2.10)$$

Da Eq. (2.10), obtemos

$$H(X|Y) = - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y) = - \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(y)} \quad (2.11)$$

$$= - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y) + \sum_{x,y} p(x,y) \log p(y) \quad (2.12)$$

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y). \quad (2.13)$$

Apesar de a forma mais comum de definir entropia condicional seja a Eq. (2.13), a definição que tem interpretação é a da Eq. (2.10). A Eq. (2.13) tem um significado importante para este trabalho, pois a expressão da entropia condicional quântica não pode ser obtida diretamente dessa expressão por analogia, como veremos na seção 2.2.8.

Uma das propriedades da entropia condicional $H(X|Y)$ é a positividade, isto é,

$$H(X|Y) \geq 0, \quad (2.14)$$

ou seja, o fato de condicionarmos a entropia de X aos valores de Y não pode perder o sentido de ganho de informação, em outras palavras, o conhecimento sobre a variável X só pode aumentar com as informações da variável Y . A verificação matemática dessa propriedade é obtida analisando a equação (2.10), pois $\log p(x|y) \leq 0$, pois $0 \leq p(x|y) \leq 1$. Ocorrendo igualdade quando $p(y|x) = 1$ ou $p(y|x) = 0$, sendo probabilidade máxima e probabilidade mínima respectivamente.

Destacamos aqui que $H(X|Y) \neq H(Y|X)$, dado que a entropia condicional de X a Y depende das probabilidades $p(y)$ e para o segundo caso das probabilidades $p(x)$. Sendo que essas são arbitrárias entre si.

Podemos também relacionar entropia conjunta com entropia condicional fazendo

$$H(X,Y) = H(X|Y) + H(Y) = H(Y|X) + H(X). \quad (2.15)$$

Observe que a entropia de um par de variáveis aleatórias é a entropia de uma das variáveis mais a entropia condicional da outra. Esta conexão é chamada de regra da cadeia e é mostrada no seguinte corolário.

Corolário 1 *Regra da Cadeia para entropia:*

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (2.16)$$

Prova: Da regra da cadeia para probabilidades temos que $p(x,y) = p(x)p(y|x)$, logo:

$$H(X,Y) = - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y) \quad (2.17)$$

$$= - \sum_{x,y} p(x)p(y|x) \log[p(x)p(y|x)] \quad (2.18)$$

$$= - \sum_{x,y} p(x)p(y|x) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x)p(y|x) \log p(y|x) \quad (2.19)$$

$$= - \sum_x p(x) \log p(x) - \sum_{x,y} p(y|x) \log p(y|x) \quad (2.20)$$

$$= H(X) + H(Y|X). \quad (2.21)$$

■

Essa regra pode ser usada para determinar a entropia conjunta, quando se conhece a distribuição da probabilidade condicional e a distribuição da probabilidade do símbolo que está condicionando o resultado da fonte. Por exemplo, se uma fonte estiver gerando palavras em português, e gerar a letra z , sabemos que após ela só pode ser gerada vogais, logo a probabilidade de gerar qualquer outra consoante é zero, então a distribuição de probabilidade condicional é $p(y|x = z)$. Conhecendo $p(x = z)$ determinamos $H(x,y)$.

2.1.2.3 Informação Mútua

Fazendo uma permutação na Eq. (2.15) obtemos uma outra quantidade da Teoria de Informação, a Informação Mútua. A informação mútua do par X e Y é dada por

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (2.22)$$

A Eq. (2.22) mede a quantidade de informação em comum entre as duas variáveis aleatórias X e Y . Essa expressão é obtida somando as entropias de X e Y , porém como a informação comum será contada duas vezes nesta soma, é necessário subtrairmos a entropia conjunta entre as duas variáveis.

Essa correlação pode ser interpretada como a redução de incerteza de X devido o conhecimento de Y [13]. Expressamos as relações entre entropia e informação mútua por meio do diagrama da Figura 2.4. Observe que a informação mútua é a interseção da entropia de X e de Y .

2.1.2.4 Entropia Relativa

Para medirmos a proximidade entre duas funções de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória utilizamos a entropia relativa. Esse conceito nos conduz a importantes resultados da teoria da informação, tais como, desigualdades importantes da teoria de informação, positividade da informação mútua, entre outros.

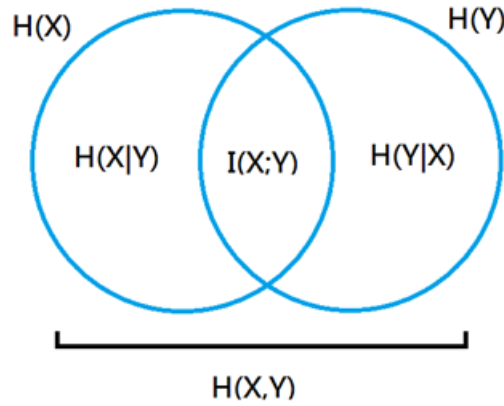


Figura 2.4: Diagrama das relações entre entropia e informação mútua

A entropia relativa é uma medida de divergência de duas funções de distribuição de probabilidade, $p(x)$ e $q(x)$, em relação ao mesmo conjunto de índices x . A entropia relativa é dada por

$$H(p(x)||q(x)) \equiv \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} = -H(X) - \sum_x p(x) \log q(x), \quad (2.23)$$

onde, por definição, se $q(x) \rightarrow 0$, $-p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \rightarrow +\infty$, se tivermos $p(x) > 0$, ou seja, o evento com probabilidade $p(x)$ acontece e o evento com probabilidade $q(x)$ não ocorre.

Da entropia relativa surge um importante teorema, denominado “desigualdade de informação” que é utilizado para provar vários resultados da teoria da informação.

Teorema 1 [*Desigualdade de Informação*] A entropia relativa é não negativa, isto é,

$$H(p(x)||q(x)) \geq 0, \quad (2.24)$$

com igualdade se e somente se $p(x) = q(x)$ para todo x .

Prova: Da desigualdade $\log x = \frac{\ln x}{\ln 2} \leq x - 1$, fazendo $x = \frac{1}{t}$, temos

$$\frac{1}{\ln 2} (\ln 1 - \ln t) \leq \frac{1}{t} - 1 \Rightarrow \frac{\ln t}{\ln 2} \geq 1 - \frac{1}{t}. \quad (2.25)$$

Usando (2.25), concluímos que

$$H(p(x)||q(x)) = \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \quad (2.26)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_x p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (2.27)$$

usando a desigualdade (2.25), temos

$$\geq \sum_x p(x) \left(1 - \frac{q(x)}{p(x)}\right) \quad (2.28)$$

$$= \sum_x (p(x) - q(x)) = 1 - 1 = 0. \quad (2.29)$$

A igualdade na Eq. (2.27) ocorre se e somente se $q(x) = p(x)$ para todo x . ■

A desigualdade de informação também é conhecida como distância de Kullback-Leibler (DKL)¹, porém essa medida não apresenta a propriedade de distância no sentido euclidiano, pois não é simétrica ($H(X||Y) \neq H(Y||X)$), desta forma opta-se por chamá-la de desigualdade de informação.

Podemos escrever a informação mútua, dada pela Eq. (2.22) como uma DKL. Da Eq. (2.22), podemos escrever usando as funções de distribuição de probabilidade das fontes conjuntas de informação X e Y a informação mútua ($I(X : Y)$) como sendo

$$I(X : Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}, \quad (2.30)$$

dessa forma mostramos que a informação mútua pode ser escrita como uma entropia relativa,

$$I(X : Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} = H(p(x,y)||p(x)p(y)), \quad (2.31)$$

onde a variável aleatória X tem distribuição de probabilidade conjunta $p(x,y)$ e Y tem $p(x)p(y)$. Concluimos assim, que a informação mútua é positiva,

$$I(X : Y) \geq 0. \quad (2.32)$$

A Eq. (2.32) também é conhecida como *subaditividade da entropia* quando é escrita da forma

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y), \quad (2.33)$$

e evidencia que a entropia conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é menor que soma da entropia de cada uma dessas variáveis. A igualdade ocorre com X e Y independentes entre si.

Outro resultado que é obtido a partir de DKL é que a entropia de uma variável X possui um máximo, e esse máximo depende da quantidade de símbolos que a fonte possui.

¹Ver [33]

Corolário 2 *Se X é uma variável aleatória com N símbolos, então*

$$H(X) \leq \log N, \quad (2.34)$$

com igualdade se e somente se $p(x) = \frac{1}{N}$.

Prova: A igualdade ocorre quando temos uma distribuição de probabilidade equiprovável como ocorre em (2.4). Da Eq. (2.23), fazendo $q(x) = \frac{1}{N}$, e considerando a não negatividade de (2.23) obtemos

$$H(p(x)||q(x)) = -H(X) - \sum_{x \in A_X} p(x) \log \frac{1}{N} \quad (2.35)$$

$$= -H(X) + \sum_{x \in A_X} p(x) \log N \geq 0, \quad (2.36)$$

Portanto

$$H(X) \leq \log N. \quad (2.37)$$

■

Da Eq. (2.32) obtemos o seguinte corolário

Corolário 3 *A entropia condicional $H(X|Y)$ é sempre menor que a entropia de X , isto é,*

$$H(X|Y) \leq H(X) \quad (2.38)$$

Com igualdade se e somente se X e Y forem independentes.

Prova: Da Eq. (2.22) e da não negatividade da informação mútua temos que

$$0 \leq I(X : Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (2.39)$$

A igualdade só é obtida para uma distribuição de probabilidade conjunta das variáveis X e Y independentes, isto é, $p(x,y) = p(x)p(y)$. ■

2.1.3 Subaditividade Forte

Essa seção é dedicada a mostrar a prova para uma das mais importantes desigualdades da Teoria da Informação Clássica, que é a *subaditividade forte*. Sua importância para este trabalho está ligada a sua generalização para o caso quântico, pois é decisiva para alguns resultados apresentados nesse trabalho.

Antes de apresentar a subaditividade precisamos falar sobre um conceito de teoria das probabilidades que será usado na demonstração do Teorema 2 a seguir. O conceito é o de cadeias de Markov. Uma cadeia de Markov é um caso particular de processos

estocásticos (eventos aleatórios sequenciais) com a propriedade de que o estado futuro depende somente do estado atual, ou seja, os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes [6].

Teorema 2 *Dados as variáveis aleatórias X, Y e Z temos*

$$H(X,Y,Z) + H(Y) \leq H(X,Y) + H(Y,Z). \quad (2.40)$$

Com igualdade se e somente se $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ formar uma cadeia de Markov.

Prova:

$$H(X,Y,Z) + H(Y) - H(X,Y) - H(Y,Z) = - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x,y,z) + \quad (2.41)$$

$$- \sum_y p(y) \log p(y) + \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y) + \sum_{y,z} p(y,z) \log p(y,z) \quad (2.42)$$

$$= \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y)p(y,z)}{p(x,y,z)p(y)} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \ln \frac{p(x,y)p(y,z)}{p(x,y,z)p(y)}, \quad (2.43)$$

usando a desigualdade $\log x = \frac{\ln x}{\ln 2} \leq x - 1$, temos

$$\leq \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \left(\frac{p(x,y)p(y,z)}{p(x,y,z)p(y)} - 1 \right) = \sum_{x,y,z} \left(\frac{p(x,y)p(y,z)}{p(y)} - 1 \right) \quad (2.44)$$

$$= \left(\sum_y p(y) - 1 \right) = 0. \quad (2.45)$$

Podemos reescrever a *subaditividade forte* como sendo

$$H(X|Y,Z) \leq H(X|Y), \quad (2.46)$$

e mostrar que a igualdade ocorre quando reescrevemos a expressão do lado esquerdo como sendo,

$$H(X|Y,Z) = - \sum_{x,y,z} p(x|yz) \log p(x|yz), \quad (2.47)$$

se $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ formar uma cadeia de Markov, a variável Z é irrelevante para a variável X . Dessa forma, temos a igualdade

$$H(X|Y) = H(X|Y), \quad (2.48)$$

para a Subaditividade Forte. ■

A Eq. (2.46) mostra que o condicionamento reduz a incerteza sobre uma variável [36]. De fato, pois se estamos considerando o sistema XYZ , ao medir somente Y , a

entropia de X intuitivamente deve ser maior que quando medimos Y e Z . Pois Y e Z pode fornecer mais informação sobre a variável X do que apenas a variável Y .

2.2 Teoria da Informação Quântica

Até agora dissertamos sobre os principais conceitos da Teoria da Informação Clássica que são o norteador no sentido de fazer-se uma discussão da recente e incompleta Teoria da Informação Quântica. Esses conceitos apresentados até o momento possuem análogos quânticos que serão o formalismo necessário para o desenvolvimento dos resultados apresentados neste trabalho.

2.2.1 Operador Densidade

Além da notação de vetor de estado da mecânica quântica, temos a formulação matemática de operador densidade ou também conhecida como matriz densidade. Esse formalismo é mais conveniente para descrever um sistema quântico cujo estado não é completamente conhecido [36]. Se tivermos um conjunto de estados puros $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, onde p_i é a probabilidade i de ocorrer o estado $|\psi_i\rangle$. A descrição do sistema é dada pelo operador densidade que é definido como sendo

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.49)$$

Se temos um estado quântico onde seu estado $|\psi\rangle$ é totalmente conhecido, dizemos que este estado é puro, e seu operador densidade será somente $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, em todo caso, consideramos ρ como sendo uma mistura de diferentes estados puros. Também é possível que um sistema seja preparado no estado ρ_i com probabilidade p_i , sendo neste caso ρ uma mistura de estados dado por

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i. \quad (2.50)$$

Os operadores densidade devem obedecer também a condição de traço um, isto é, $\text{tr}(\rho) = 1$ para que ρ represente um sistema físico e deve ser um operador positivo, ou seja, todos os seus autovalores são reais e positivos [36]. Esta condição de traço 1 e de positividade, permite com que ρ tenha uma decomposição espectral dada por

$$\rho \equiv \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.51)$$

onde os vetores $|i\rangle$ são ortogonais, e λ_i são os autovalores não negativos de ρ . Da Eq. (2.51), e da condição do traço ser 1, é possível ver que o sistema está no estado $|i\rangle$ com

probabilidade λ_i .

Também da condição de traço 1 obtemos um critério para decidir se o estado é misto ou puro, conforme trataremos no corolário 4 a seguir.

Corolário 4 *Seja ρ um operador densidade, então $\text{tr}(\rho^2) \leq 1$, com igualdade se e somente se ρ é puro.*

Prova: Seja $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, onde $|\psi_i\rangle$ são os auto-kets de ρ , temos que

$$\rho^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle \langle \psi_i| |\psi_j\rangle \langle \psi_j| = \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle \delta_{i,j} \langle \psi_j| = \sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Tomando o traço em ρ^2 , concluimos que

$$\text{tr}(\rho^2) = \sum_i p_i^2 \leq 1,$$

e isso indica que o estado é puro se tivermos $p_j = 1$ e $p_{i \neq j} = 0$. Caso contrário teremos uma mistura (2.50). ■

Um importante fato que é discutido na Ref. [36], é o de achar que os autovalores e autovetores da matriz densidade tem algum significado especial em relação ao conjunto de estados quânticos que ela representa. Para explicar a ideia, vamos supor que um sistema quântico é representado pelo operador densidade

$$\rho_1 = \frac{2}{3} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{3} |1\rangle \langle 1|, \quad (2.52)$$

observe que é tentador dizer que o sistema quântico está no estado $|0\rangle$ com probabilidade $\frac{2}{3}$ e no estado $|1\rangle$ com probabilidade $\frac{1}{3}$. Porém, se definirmos os seguintes estados

$$|a\rangle \equiv \sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}} |1\rangle \quad (2.53)$$

$$|b\rangle \equiv \sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}} |1\rangle, \quad (2.54)$$

e prepararmos o sistema quântico no estado $|a\rangle$ com probabilidade $\frac{1}{2}$ e também com probabilidade $\frac{1}{2}$ no estado $|b\rangle$, teremos então que o operador densidade correspondente a esse sistema será

$$\rho_2 = \frac{1}{2} |a\rangle \langle a| + \frac{1}{2} |b\rangle \langle b| = \frac{2}{3} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{3} |1\rangle \langle 1| = \rho_1, \quad (2.55)$$

e poderíamos também erroneamente achar olhando para ρ_2 , que o sistema estava no estado $|a\rangle$ ou $|b\rangle$ com as probabilidades citadas acima, porém não se pode concluir nada a respeito do sistema a partir dos autovalores e autovetores de uma matriz densidade, pois

ela representa uma entre muitos ensembles que pode dar origem a específico operador densidade.

Por fim, enfatizamos que todos os postulados da mecânica quântica na formulação de vetor de estado tem análogo na notação de operador densidade, inclusive o postulado das medidas quânticas, que veremos na Sec. 2.2.2.

O espaço vetorial associado aos operadores densidade é um espaço de Hilbert, e a evolução de um operador densidade isolado é descrita pelo operador unitário U atuando no ket e no bra de (2.49), sendo essa operação descrita por

$$\rho' = U\rho U^\dagger = \sum_i p_i U |\psi_i\rangle \langle\psi_i| U^\dagger. \quad (2.56)$$

2.2.2 Medidas Quânticas

Na mecânica quântica, as medidas quânticas são descritas por operadores de medida M_m . Estes operadores operam no espaço de estado do sistema a ser medido. Como o processo é probabilístico, o índice m indica qual o resultado da medida no sistema.

A probabilidade do resultado da medida m ocorrer no estado $|\psi\rangle$ é dado por

$$p(m) = \langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle, \quad (2.57)$$

e o estado do sistema após a medida será

$$|\psi\rangle' = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle}}. \quad (2.58)$$

Os operadores de medidas devem satisfazer a relação de completeza,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I, \quad (2.59)$$

isto é, a soma das probabilidades $p(m)$ deve ser um,

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle. \quad (2.60)$$

As regras apresentadas acima são conhecidas como o Postulado das Medidas Quânticas. Elas fornecem a estatística das medidas e dizem qual será o estado do sistema após a medida. Em algumas aplicações o estado do sistema após a medida é de pouco interesse, sendo importante somente a probabilidade dos diferentes resultados da medida. Sendo esse o caso onde a medida é realizada somente uma vez e o experimento é concluído. O formalismo matemático que descreve essas medidas é denominado *POVM*²

²POVM - é a sigla para Positive Operator-Valued Measure

[36].

Para uma medida descrita por operadores M_m em um sistema quântica descrito no estado $|\psi\rangle$. A probabilidade do resultado da medida ser m é dada por $p(m) = \langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle$. Podemos construir um operador $E_m = M_m^\dagger M_m$, tal que,

- $E_m \geq 0$, ou seja, é um operador positivo;
- $\sum_m E_m = 1$, satisfaz a relação de completeza.

E isso faz com que os operadores E_m sejam suficientes para determinar as probabilidades dos diferentes resultados das medidas. Conhecemos operadores E_m por elementos POVM associados a medida. O conjunto completo $\{E_m\}$ é conhecido como um POVM.

Outro caso de operadores de medidas são as conhecidas como *medidas projetivas*. Uma medida projetiva é uma descrição matemática de um observável, M , ou seja, um operador Hermitiano no espaço de estado de um sistema a ser medido.

Uma medida projetiva tem a decomposição espectral,

$$M = \sum_m \lambda_m P_m, \quad (2.61)$$

onde P_m é um projetor nos autoestados de M com autovalor λ_m .

O estado $|\psi\rangle$ após ser observado por M será dado por

$$|\psi'_m\rangle = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}, \quad (2.62)$$

onde $p(m) = \langle\psi| P_m |\psi\rangle$.

Para as medidas projetivas, a relação de completeza é satisfeita considerando que P_m são projetores em estados ortonormais, isto é, $P_m P_{m'} = \delta_{m,m'} P_m$.

Se realizarmos uma medida projetiva no estado $|\mu\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ usando o conjunto de medidas projetivas dado por $\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|$ e $\Pi_1 = |1\rangle\langle 1|$ obtemos os estados

$$\Pi_0 |\mu\rangle = |0\rangle$$

e

$$\Pi_1 |\mu\rangle = -|1\rangle.$$

Observemos que a probabilidade de obter ambos os resultados são iguais na primeira medida, sendo $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$, e a característica principal desse tipo de medida é a reprodutividade, onde se repetirmos a mesma medida no estado pós-medida, o resultado será o já obtido com probabilidade 1.

Essa característica das medidas projetivas é bastante discutido no experimento de Stern-Gerlack que é um dos conteúdos introdutórios de cursos de Mecânica Quântica, que pode ser visto na Ref. [41].

O formalismo matemático para medidas em operadores densidades é análogo aos aqui apresentados. Podemos descrever medidas no formalismo matemático de operador densidade. Se tivermos operadores de medidas M_m e realizar uma medida no estado $|\psi_i\rangle$, a probabilidade de se realizar a medida m é dada por

$$p(m|i) = \langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle = \langle \psi_i | M_m^\dagger M_m \sum_i |i\rangle \langle i| | \psi_i \rangle = \quad (2.63)$$

$$\sum_i \langle i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle \langle \psi_i | i \rangle = \text{tr}(M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle \langle \psi_i |),$$

que de acordo com a lei da probabilidade total³ a probabilidade de obter a medida M_m é dada pela média de (2.63)

$$p(m) = \sum_i p_i p(m|i) = \sum_i p_i \text{tr}(M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle \langle \psi_i |) = \quad (2.64)$$

$$\text{tr}(M_m^\dagger M_m \sum_i p_i | \psi_i \rangle \langle \psi_i |) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho).$$

Após a medida o estado do sistema será

$$|\psi_i^m\rangle = \frac{M_m | \psi_i \rangle}{\sqrt{\langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle}}, \quad (2.65)$$

e conseqüentemente o operador densidade desse ensemble de estados $|\psi_i^m\rangle$ é dado por

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.66)$$

2.2.3 Operador Densidade Reduzido

O operador densidade pode ser usado para descrever um subsistema de um sistema quântico composto. A descrição é feita por uma operação de redução no operador densidade [36].

O operador densidade ρ_{ab} descreve o sistema composto de dois sistemas quânticos a e b . Determinamos o operador densidade reduzido para o sistema a fazendo o traço parcial sobre o sistema b que é dado por

$$\rho_a \equiv \text{tr}_b(\rho_{ab}). \quad (2.67)$$

Para um dos pares de Bell, $|\psi_+\rangle = \frac{(|01\rangle + |10\rangle)}{\sqrt{2}}$ o operador densidade dado por $\rho_{ab} = |\psi_+\rangle \langle \psi_+|$ nos fornece uma descrição completa do sistema composto de a e b e por outro

³ $p(y) = \sum_x p(y|x)p(x)$ - Expressa a probabilidade total de um resultado que pode ser realizado através de vários eventos distintos.

lado se calcularmos o operador densidade ρ_a obteremos

$$\rho_a = \text{tr}_b \left(\frac{|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|}{2} \right) = \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2},$$

e observamos que esse estado não é puro, pois pelo corolário 4, um estado onde $\text{tr}((I/2)^2) = 1/2 < 1$ é dito misto e de fato não poderia ser puro, pois tiramos a parte b do sistema.

O fato de operador densidade reduzido ρ_a ser proporcional à identidade, estatisticamente faz com que o estado tenha entropia quântica máxima como veremos na seção 2.2.5. Esse resultado representa uma grande quebra do pensamento clássico, pois embora tenhamos todo o conhecimento do sistema composto segundo a mecânica quântica, representado pelo estado puro $|\psi_+\rangle$, não somos capazes de descrever completamente o estado do operador reduzido [10], como já foi mencionado na seção 2.2.1.

2.2.4 Decomposição de Schmidt

Outro resultado extremamente útil da teoria da informação quântica que utiliza dos conceitos de operador densidade reduzido é a decomposição de Schmidt, que é extremamente útil para identificar as correlações entre dois sistemas quânticos, sendo essencial para determinar se estados puros bipartidos estão emaranhados ou não.

Teorema 3 (*Decomposição de Schmidt*) *Seja $|\psi_{ab}\rangle$ um estado puro de um sistema composto ab . Então existem estados ortonormais $|i_a\rangle$ para o sistema a e $|i_b\rangle$ para o sistema b tais que*

$$|\psi_{ab}\rangle = \sum_i^n \sqrt{\lambda_i} |i_a\rangle |i_b\rangle,$$

onde $n = \min\{\dim a, \dim b\}$ e $\sqrt{\lambda_i}$ são números reais não-negativos, conhecidos como coeficientes de Schmidt e $\sum_i \lambda_i = 1$.

Prova: Considerando $\dim a \leq \dim b$. Temos que $\{|i_a\rangle\}$ é uma base ortonormal de a e podemos definir $\{|j_b\rangle\}$ como sendo uma base ortonormal de b , então $|\psi_{ab}\rangle$ pode ser escrito como sendo

$$|\psi_{ab}\rangle = \sum_i^{\dim a} \sum_j^{\dim b} c_{ij} |i_a\rangle |j_b\rangle = \sum_i^n |i_a\rangle |\tilde{i}_b\rangle,$$

onde $|\tilde{i}_b\rangle = \sum_j^{\dim b} c_{ij} |j_b\rangle$. Enfatizamos que não podemos dizer que $\{|\tilde{i}_b\rangle\}$ são ortonormais.

Por outro lado, podemos escolher $\{|i_a\rangle\}$ de tal forma que $\rho_a = \text{tr}_b(\rho)$ seja diagonal nesta base. Sendo aqui $\rho_{ab} = |\psi\rangle\langle\psi|$, ou seja, queremos

$$\rho_a = \sum_i^n \lambda_i |i_a\rangle\langle i_a|, \quad (2.68)$$

onde λ_i é não negativo e $\sum_i \lambda_i = 1$.

Então escrevendo ρ , temos

$$\rho_{ab} = |\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}| = \left(\sum_i^n |i_a\rangle\langle i_b| \right) \left(\sum_k^n \langle k_a| \langle \tilde{k}_b| \right) = \sum_{i,k} |i_a\rangle\langle k_a| \otimes |i_b\rangle\langle \tilde{k}_b|.$$

Tomando o traço parcial em ρ sobre o sistema b obtemos

$$\begin{aligned} \rho_a = \text{tr}_b \left(\sum_{i,k} |i_a\rangle\langle k_a| \otimes |i_b\rangle\langle \tilde{k}_b| \right) &= \sum_b \langle b| \left(\sum_{i,k} |i_a\rangle\langle k_a| \otimes |i_b\rangle\langle \tilde{k}_b| \right) |b\rangle = \\ &= \sum_{i,k} |i_a\rangle\langle k_a| \left(\sum_b \langle b| i_b\rangle\langle \tilde{k}_b| b\rangle \right) = \sum_{i,k} |i_a\rangle\langle k_a| \left(\sum_b \langle \tilde{k}_b| b\rangle\langle b| i_b\rangle \right) = \\ &= \sum_{i,k} |i_a\rangle\langle k_a| \langle \tilde{k}_b| i_b\rangle. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Comparando as Eqs. (2.68) e (2.69), vemos que, para ρ_a ser diagonal, precisamos que

$$\langle \tilde{k}_b| i_b\rangle = \lambda_i \delta_{k,i}$$

e dessa forma mostramos que $\{|i_b\rangle\}$ forma um conjunto de estados ortogonais e para termos estados ortonormais e demonstrarmos a decomposição de Schmidt definimos $|\tilde{i}_b\rangle$ como sendo

$$|\tilde{i}_b\rangle = \sqrt{\lambda_i} |i_b\rangle.$$

Portanto temos a decomposição de Schmidt

$$|\psi_{ab}\rangle = \sum_i^n \sqrt{\lambda_i} |i_a\rangle |i_b\rangle.$$

■

Chamamos as bases $|i_a\rangle$ e $|i_b\rangle$ de bases de Schmidt para a e b , respectivamente, e os valores $\sqrt{\lambda_i}$ são os coeficientes de Schmidt para o estado $|\psi_{ab}\rangle$. Os coeficientes de Schmidt são uma importante propriedade de um sistema quântico composto, o qual, determina e quantifica o emaranhamento entre os sistemas a e b [36], como veremos na seção de emaranhamento 2.3.1.

Além disso os coeficientes de Schmidt são preservados por uma transformação unitária local no sistema a ou b . Como exemplo, se temos um estado $|\psi_{ab}\rangle$ de um sistema bipartido, pelo teorema da decomposição de Schmidt $|\psi\rangle$ pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_1} |1_a\rangle |1_b\rangle + \sqrt{\lambda_2} |2_a\rangle |2_b\rangle. \quad (2.70)$$

Aplicando uma transformação unitária local $U = U_a \otimes U_b$ em (2.70), sendo que

$$\begin{aligned} U_a &= |1\rangle \langle 1_a| + |0\rangle \langle 2_a| \\ U_b &= |0\rangle \langle 1_b| + |1\rangle \langle 2_b|, \end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = U |\psi\rangle &= (|1\rangle \langle i_a| + |0\rangle \langle i_a|) \otimes (|0\rangle \langle i_a| + |1\rangle \langle i_a|) (\sqrt{\lambda_1} |1_a\rangle |1_b\rangle + \sqrt{\lambda_2} |2_a\rangle |2_b\rangle) = \\ &= (|1\rangle \langle i_a| + |0\rangle \langle i_a|) \otimes (\sqrt{\lambda_1} |1_a\rangle |0\rangle + \sqrt{\lambda_2} |2_a\rangle |1\rangle) = \sqrt{\lambda_1} |10\rangle + \sqrt{\lambda_2} |01\rangle, \end{aligned}$$

e isso mostra que estados de sistemas bipartidos podem ser escrito, via transformações unitárias locais, como o estado $|\Psi\rangle$. Como vimos, as transformações unitárias locais preservam os coeficientes de Schmidt que, como veremos na Sec. 2.3.1, é um conceito que se torna um critério de separabilidade de estados puros bipartidos [40].

Como é mostrado em [16], não são todos sistemas quânticos de três partes (abc) que podem ser escritos utilizando uma decomposição de Schmidt. Como exemplo, o artigo cita os estados da classe GHZ [23, 7] e estado da classe W, onde o primeiro já está escrito em uma decomposição de Schimidt sendo o estado padrão

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle),$$

já o segundo que é uma superposição de três estados produtos,

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle),$$

não possui nenhuma decomposição em apenas dois estados produtos como é mostrado em [16, 10].

2.2.5 Entropia de von Neumann

O análogo quântico da entropia de Shannon é a entropia de von Neumann. Não se sabe de influência mútua, já que Shannon estava interessado na teoria da comunicação, enquanto que von Neumann em entropia termodinâmica e formalismo da mecânica quântica [38]. Em uma entrevista sobre Energia e Informação, Shannon diz que foi von

Neumann que sugeriu usar a palavra entropia para a equação que tinha encontrado [47].

A fórmula da entropia de von Neumann surgiu em 1927 como uma extensão da entropia clássica de Boltzmann e Gibbs para a mecânica quântica. A entropia de von Neumann para um operador densidade do sistema (ρ), tal qual foi definido na Sec. 2.2.1, é dada por

$$S(\rho) = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho), \quad (2.71)$$

onde k_B a constante de Boltzmann, a qual von Neumann considerou como sendo 1 para tornar a entropia uma quantidade adimensional. Dessa forma, a entropia de von Neumann fica sendo dado pela fórmula [36]

$$S(\rho) \equiv -\text{tr}(\rho \log \rho). \quad (2.72)$$

A entropia de von Neumann tem um forma mais simples dada em função dos autovalores de ρ . Considerando a decomposição espectral de ρ dada na Eq. (2.51) e calculando o traço da Eq. (2.72) obtemos

$$S(\rho) = -\text{tr} \left[\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \right) \log \left(\sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j| \right) \right] \quad (2.73)$$

$$= -\sum_k \langle k| \left[\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \right] \log \left(\sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j| \right) |k\rangle \quad (2.74)$$

$$= -\sum_k \langle k| \left[\sum_{i,j} \lambda_i |i\rangle \langle i| |j\rangle \log \lambda_j \langle j| \right] |k\rangle \quad (2.75)$$

$$= -\sum_k \langle k| \left[\sum_{i,j} \lambda_i \log \lambda_j |i\rangle \langle i| |j\rangle \langle j| \right] |k\rangle \quad (2.76)$$

$$= -\sum_k \langle k| \left[\sum_{i,j} \lambda_i \log \lambda_j |i\rangle \delta_{i,j} \langle j| \right] |k\rangle \quad (2.77)$$

$$= -\sum_k \langle k| \left[\sum_i \lambda_i \log \lambda_i |i\rangle \langle i| \right] |k\rangle \quad (2.78)$$

$$= -\sum_{i,k} \lambda_i \log \lambda_i \delta_{k,i} \delta_{i,k} \quad (2.79)$$

$$= -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i. \quad (2.80)$$

Em geral, utilizamos a Eq. (2.80)⁴ para calcular a entropia quântica.

Quadro 1 — Expansão em série de Taylor de um operador A

Se A tem decomposição espectral $A = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|$, podemos obter $f(A)$ por meio da expansão

$$f(A) = 1^* + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (2.81)$$

$$= 1^* + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|)^2}{2!} + \frac{(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|)^3}{3!} + \dots \quad (2.82)$$

$$= 1^* + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \delta_{i,j} |i\rangle \langle j|}{2!} + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j^2 \delta_{i,j} |i\rangle \langle j|}{3!} + \dots \quad (2.83)$$

$$= 1^* + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_i \lambda_i^2 |i\rangle \langle i|}{2!} + \frac{\sum_i \lambda_i^3 |i\rangle \langle i|}{3!} + \dots \quad (2.84)$$

$$= \sum_i |i\rangle \langle i| + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_i \lambda_i^2 |i\rangle \langle i|}{2!} + \frac{\sum_i \lambda_i^3 |i\rangle \langle i|}{3!} + \dots \quad (2.85)$$

$$= \left(1 + \lambda_i + \frac{\lambda_i^2}{2!} + \frac{\lambda_i^3}{3!} + \dots\right) \sum_i |i\rangle \langle i| = \sum_i f(\lambda_i) |i\rangle \langle i|. \quad (2.86)$$

Assim como na entropia de Shannon, é convencionalizado $0 \log 0 \equiv 0$. Em geral, utilizamos a base 2 para o logaritmo.

Propomos abaixo alguns exemplos que ilustram o cálculo da entropia de alguns estados quânticos:

Exemplo 1 O estado $\rho_1 = |0\rangle \langle 0|$ tem autovalores 1 e 0 e a entropia de von Neumann é $S(\rho_1) = -1 \log 1 - 0 \log 0 = 0$;

Exemplo 2 Para o estado $\rho_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ que é uma matriz diagonal a entropia é $S(\rho_2) = -\frac{2}{3} \log \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \log \frac{1}{3} \approx 0,64$;

Exemplo 3 Já o estado $\rho_3 = \frac{2}{3} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{3} |0\rangle \langle 1| + \frac{1}{3} |1\rangle \langle 0| + \frac{1}{3} |1\rangle \langle 1|$ tem autovalores $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}$ e $\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{3}$ com isso sua entropia será $S(\rho_3) \approx 0,55$.

O resultado da entropia do Ex. 1 pode ser comparado ao caso clássico de entropia de Shannon nula, ou seja, para fontes de informação onde um dos símbolos tem probabilidade 1 e os demais 0, pois este operador indica que o sistema está no estado $|0\rangle$ com probabilidade 1.

Observe que no Ex. 2 o operador densidade é o mesmo dado pela Eq. (2.52), sendo somente escrito na notação de matriz. Esse operador densidade tem bastante

⁴Os passos matemáticos da Eq. (2.74) para a Eq. (2.75) pode ser visto em no quadro 1

semelhança com ρ_3 do Ex. 3, pois podemos interpretar o operador densidade ρ_2 como sendo um resultado de uma medida projetiva (Sec. 2.2.2) sobre ρ_3 . Ao realizar essa medida, o estado ρ_2 perde as informações referente a diagonal secundária, e isso explica o fato de sua entropia ser maior que a do ρ_3 , pois temos menos informação sobre o sistema em ρ_2 do que em ρ_3 .

Exemplo 4 Vamos agora comparar a entropia clássica de uma fonte binária dada por

$$H(p, 1-p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p),$$

e a entropia de von Neumann do operador $\rho_4 = p |0\rangle \langle 0| + (1-p) \frac{(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|)}{2}$.

Calculando os autovalores de ρ_4 obtemos $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2p^2 - 2p + 1})$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2p^2 - 2p + 1})$, logo

$$S(\rho_4) = -\lambda_1 \log \lambda_1 - \lambda_2 \log \lambda_2,$$

e traçando o gráfico 2.5 observamos que ambas as entropias tem máximo em $p = \frac{1}{2}$, porém a entropia binária tem máximo maior que a entropia desse estado quântico. É

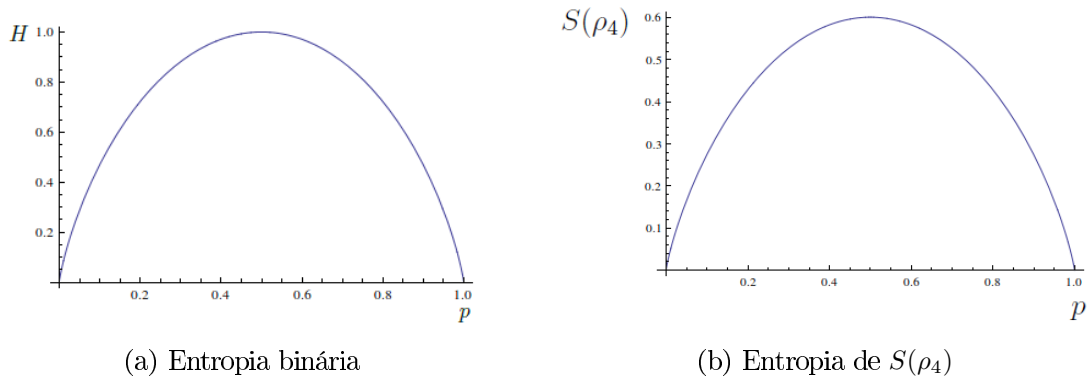


Figura 2.5: Comparações entre as entropias quântica e clássica

importante notar que p para a entropia binária, se refere a probabilidade de obter um dos símbolos da fonte, e p para ρ_4 muda a estrutura do estado, como veremos abaixo:

- Se $p = 0$, temos o estado puro $\rho = |+\rangle \langle +|$, onde $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$, logo a entropia é zero como já tínhamos falado anteriormente;
- Se $p = 1$ o estado é igual a ρ_1 ;
- Se $p = \frac{1}{2}$, temos o estado de maior entropia para ρ_4 que é dado por $\rho' = \frac{|0\rangle \langle 0| + |+\rangle \langle +|}{2}$.

Para sistemas bipartidos, a entropia conjunta de um estado ρ_{ab} é expressada por,

$$S_{a,b} = -tr(\rho_{ab} \log(\rho_{ab})), \tag{2.87}$$

a qual é a expressão análoga à entropia conjunta clássica de Shannon.

Como foi estudado na Sec. 2.2.4, podemos usar decomposição de Schimidt para escrever um estado de um sistema bipartite como sendo $|\psi_{ab}\rangle = \sum_i^n \sqrt{\lambda_i} |i_a\rangle |i_b\rangle$ e podemos expressá-lo na notação de operador como sendo

$$\rho_{ab} = \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |i_a\rangle |i_b\rangle \langle j_a| \langle j_b|, \quad (2.88)$$

e dessa forma, utilizando os conceitos de operador densidade reduzido tratados na Sec. 2.2.3 percebemos que os autovalores da matriz densidade do sistema a são os mesmos da matriz densidade do sistema b e assim concluimos que

$$S_a = S_b. \quad (2.89)$$

2.2.6 Entropia Relativa Quântica

Para a entropia quântica também podemos definir uma entropia relativa. É notadamente importante a definição desse conceito para a entropia de Shannon, pois é utilizada para verificar diversos resultados. Esse conceito na entropia quântica também tem essa utilização. Considerando dois operadores densidades ρ e σ , a entropia relativa de ρ para σ é definida por

$$S(\rho||\sigma) \equiv tr(\rho \log \rho) - tr(\rho \log \sigma). \quad (2.90)$$

Assim como na entropia relativa clássica, a entropia relativa quântica pode, algumas vezes, se tornar infinita. Isto ocorre quando o núcleo de σ tem um intersecção não-trivial com o suporte de ρ , em outras palavras, temos estados com probabilidade nula de acontecer para σ e estados com probabilidades diferente de zero para ρ .

A principal implicação da entropia relativa é que ela é não-negativa. Esse resultado é conhecido como Desigualdade de Klein e é expressada pela equação

$$S(\rho||\sigma) \geq 0, \quad (2.91)$$

com igualdade se $\rho = \sigma$, ou seja, decorrente da própria definição da pela Eq. (2.90) [36]. A Desigualdade de Klein é uma ferramenta para mostrar muitas propriedades da entropia de von Neumann, entre elas, o teorema 4

Teorema 4 *Para espaços de Hilbert D -dimensional, a entropia do sistema será no máximo igual a $\log D$.*

Prova: A prova desse teorema será obtida calculando a desigualdade de Klein para um sistema ρ qualquer e um estado maximamente misturado I/D , onde I é o operador identidade.

Seja $\rho = p_i \sum_i |i\rangle \langle i|$ e $I = \sum_j |j\rangle \langle j|$, logo,

$$0 \leq S(\rho||I/D) = \text{tr}(\rho \log \rho) - \text{tr}(\rho \log(I/D)) \quad (2.92)$$

$$= -S(\rho) - \text{tr} \left[\sum_i p_i |i\rangle \langle i| \log \left(\frac{1}{D} \sum_j |j\rangle \langle j| \right) \right] \quad (2.93)$$

$$= -S(\rho) - \text{tr} \left[\sum_i p_i |i\rangle \langle i| \left(\log \left(\frac{1}{D} \right) + \sum_j |j\rangle \langle j| \log(1) \right) \right] \quad (2.94)$$

$$= -S(\rho) + \sum_i p_i \log(D) \langle k|i\rangle \langle i|k\rangle \quad (2.95)$$

$$= -S(\rho) + \sum_i p_i P_{ik} \log D \quad (2.96)$$

$$= -S(\rho) + \log D. \quad (2.97)$$

Onde, P_{ik} é uma matriz duplamente estocástica, ou seja, satisfaz a seguinte propriedade

$$\sum_i P_{ik} = \sum_k P_{ik} = 1,$$

e isso é provado fazendo as seguintes manipulações

$$P_{ik} = \sum_i \langle k|i\rangle \langle i|k\rangle = \langle k|k\rangle = 1. \quad (2.98)$$

Além disso, P_{ik} é não negativa, ou seja, $P_{ik} \geq 0$, pois $\langle k|i\rangle$ é conjugado complexo de $\langle i|k\rangle$. Portanto,

$$S(\rho) \leq \log D. \quad (2.99)$$

■

2.2.7 Relações análogas à teoria da informação clássica

Por analogia a entropia de Shannon podemos definir a entropia condicional e a informação mútua quântica para sistemas quânticos compostos. Dada a particularidade da mecânica quântica no que se refere a medidas, teremos dois tipos de entropia condicional e conseqüentemente dois tipos de informação mútua.

Para um estado quântico de um sistema quântico composto dos sistemas a e b , que denotamos por ρ_{ab} , a entropia condicional é dada por

$$S_{a|b} \equiv S_{a,b} - S_b, \quad (2.100)$$

onde a expressão $S_{a|b}$ é equivalente a $S(\rho_{a|b})$, assim como a entropia mútua, $S_{a,b}$ é

equivalente a $S(\rho_{a,b})$. A informação mútua é definida por

$$I_{a:b} \equiv S_a + S_b - S_{a,b} \quad (2.101)$$

$$= S_a - S_{a|b} = S_b - S_{b|a}. \quad (2.102)$$

Apesar de terem expressões parecidas, algumas propriedades da entropia de Shannon não são obedecidas pela entropia de von Neumann. O fato de não serem satisfeitas é diretamente relacionada a natureza quântica do sistema. Por exemplo, para duas variáveis aleatórias X e Y , a desigualdade $H(X) \leq H(X,Y)$ é intuitivamente verificada, já que não se pode ter mais incerteza sobre a variável aleatória X do que sobre os símbolos conjunto da fonte X e Y . Já para o caso quântico a intuição falha, quando consideramos estados emaranhados.

Para o estado $|\Phi_{a,b}^+\rangle = \frac{(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}}$, que é conhecido como um dos estados de Bell e calcularmos a entropia condicionada do sistema a ao sistema b usando a Eq. (2.100), vemos que o resultado viola a intuição. Pois, podemos obter resultados bizarros de entropia negativa. Escrevendo os respectivos operadores densidades necessários para utilizar a Eq. (2.100),

$$\rho_{a,b} = |\Phi_{+a,b}\rangle \langle \Phi_{+a,b}| \Rightarrow S_{a,b} = 0 \quad (2.103)$$

$$\rho_b = Tr_a \rho_{a,b} = \frac{I}{2} \Rightarrow S_b = 1, \quad (2.104)$$

e assim temos que

$$S_{a|b} = S_{a,b} - S_b = -1. \quad (2.105)$$

Esse resultado não pode ser interpretado como perda de informação sobre o sistema a condicionado ao sistema b , mas ele tem uma interpretação particular, onde resultados dessa natureza só ocorre na Mecânica Quântica. Resultados que violam a propriedade da entropia ser positiva mostra que o estado bipartido tem característica diferenciadas, isto é, este resultado pode ser interpretado como assinatura de emaranhamento.

A subaditividade forte da entropia de Shannon, tratado na Sec. 2.1.3 também tem seu conceito análogo na teoria de informação quântica. A subaditividade forte da entropia de von Neumann é um dos resultados mais úteis e importantes dessa teoria [36] e neste trabalho é o conceito chave para a obtenção dos resultados que serão apresentados no Cap. 3.

A subaditividade forte da entropia quântica estabelece que para três sistemas quânticos a , b e c vale a desigualdade

$$S_{abc} + S_b \leq S_{ab} + S_{bc}^5. \quad (2.106)$$

⁵Demonstração pode ser vista em [36]

Ainda podemos escrever a Eq. (2.106) como sendo

$$S_{a|bc} \leq S_{a|b}, \quad (2.107)$$

onde podemos interpretar o conceito da subaditividade forte com os conceitos de entropia condicional, e perceber que o condicionamento reduz a entropia. O motivo da redução da entropia é o mesmo da subaditividade forte clássica. Mostra que a incerteza do sistema a quando se conhece bc é menor que quando conhecemos somente b .

Temos também uma expressão de subaditividade para a entropia condicional [36], que é dada por

$$S_{a|bc} \leq S_{a|b} + S_{a|c}. \quad (2.108)$$

2.2.8 O Cálculo da entropia condicional baseada em medidas.

Agora que já introduzimos o conceito de medida em sistemas quânticos, e os seus respectivos formalismos, podemos voltar a discutir o resultado expressado na Eq. (2.105). A idéia de sistemas quânticos condicionais nos remete a idéia de aferir uma medida.

Inicialmente no contexto das medidas projetivas, podemos considerar os projetores de medida atuando no sistema b dados por $\Pi_0^b = |0\rangle\langle 0|$ e $\Pi_1^b = |1\rangle\langle 1|$ atuando em $\rho_{a,b} = |\Phi_{a,b}^+\rangle\langle \Phi_{a,b}^+|$, onde $|\Phi_{a,b}^+\rangle = \frac{(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}}$, nos levando a

$$\rho_{a|\Pi_i^b} = \frac{\Pi_i^b \rho_{a,b} \Pi_i^b}{Tr_{a,b}(\Pi_i^b \rho_{a,b})}, \quad (2.109)$$

onde $i = 0, 1$.

Para $i = 0$ temos

$$\rho_{a|\Pi_0^b} = |00\rangle\langle 00| \quad (2.110)$$

e para $i = 1$ temos

$$\rho_{a|\Pi_1^b} = |11\rangle\langle 11|. \quad (2.111)$$

Agora podemos calcular a entropia condicionada para esse sistema quântico, observe que para cada medida temos um resultado para $\rho_{a|\Pi_i^b}$. Escolhendo o caso $i = 0$, o cálculo da entropia de a condicionada a medida Π_0^b será

$$S_{a|\Pi_0^b} = 0,$$

e não negativa, onde de acordo com os projetores que usarmos o resultado dessa entropia poderá ser maior ou igual a zero.

Utilizando os três elementos POVM proposto por [36], sendo eles

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} |1\rangle \langle 1|, \\ E_2 &= \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2}, \\ E_3 &= I - E_1 - E_2. \end{aligned}$$

Podemos obter outros resultados para a entropia condicionada a qualquer uma dessas medidas relacionadas acima. Para elementos POVM a evolução do operador ρ_{ab} quando for medido por E_i é dado por

$$\rho_{a|E_i^b} = \frac{E_i^b \rho_{a,b} E_i^{b\dagger}}{\text{Tr}_{a,b}(E_i^{b\dagger} E_i^b \rho_{a,b})},$$

logo, se condicionarmos o sistema a a medida E_1 , o operador densidade será

$$\rho_{a|E_1^b} = |11\rangle \langle 11|,$$

e conseqüentemente a entropia condicional por medida desse sistema será

$$S_{a|E_1} = 0,$$

que mostra que temos certeza sobre qual medida ocorreu, o mesmo pode ser feito para os demais E_i . Esse cálculo que a entropia condicional quântica depende das medidas sempre será positivo. Já a fórmula para a entropia condicional quântica obtida diretamente por analogia ao caso clássico (entropia de Shannon), $S_{a|b} = S_{ab} - S_b$, apresenta resultados negativos para alguns estados quânticos emaranhados.

Da entropia condicional quântica por medida podemos definir outro tipo de informação mútua, pois da Eq. (2.101), temos que

$$I_{a:b} = S_a + S_b - S_{a,b} = S_a - S_{a|b} = S_b - S_{b|a},$$

sendo que as duas últimas igualdades tem entropias condicionais, que como visto anteriormente, podem ser calculadas por meio de medidas. E assim, teremos a informação mútua por medida que foi definido pela Ref. [25] como sendo

$$J_{a|b}^{\leftarrow} = \max_{\{M_x^b\}} [S_a - \sum_x p_x S_{a|M_x^b}], \quad (2.112)$$

que é o conjunto de correlações clássicas entre o sistema a e b . Tomamos o conjunto de medidas $\{M_x^b\}$ que maximiza a informação sobre o sistema a .

2.3 Teoria do Emaranhamento

No ano de 1935, surge a primeira discussão sobre o conceito de emaranhamento. Em um artigo publicado por Einstein-Poldolsky-Rosen (EPR) [17], onde EPR questionam o princípio da superposição aplicado em sistemas compostos. EPR utilizam a idéia de superposição de sistemas compostos e uma definição de realidade física e da incapacidade de serem transmitidas a velocidades superiores a velocidade da luz para demonstrar que a Mecânica quântica é uma teoria incompleta.

Também em 1935, Schrödinger apresenta o paradoxo conhecido como *gato de Schrödinger*, no qual o artigo [42] apresenta uma experiência imaginária, onde coloca-se um gato dentro de uma caixa completamente isolada. Dentro da caixa, coloca-se um mecanismo contendo um átomo instável no qual pode se tornar estável liberando energia que é usada para acionar um dispositivo que libera um gás mortal que mata o gato. Sabemos que com Mecânica Quântica só podemos determinar a probabilidade do átomo decair, e não temos como determinar quando isso irá ocorrer [40].

Podemos escrever o estado desse sistema imaginário, onde podemos considerar o átomo instável como sendo $|A_1\rangle$ e $|A_0\rangle$ após a estabilização, e descrever a condição do gato como sendo vivo e morto pelo estados $|Vivo\rangle$ e $|Morto\rangle$ respectivamente. Então o estado global do sistema é

$$|\psi\rangle = \alpha |A_1, Vivo\rangle + \beta |A_0, Morto\rangle, \quad (2.113)$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, ou seja, $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ são as probabilidades do átomo decair ou não respectivamente. Essa ligação entre os dois subsistemas (gato e átomo) foi nomeado por Schrödinger como sendo *Verschränkung* que foi traduzido para o inglês como sendo *entanglement* e para o português como *emaranhamento* [40].

Tanto EPR como *gato de Schrödinger* questionavam aspectos de localidade e realidade da Mecânica Quântica que são questões importantes para a completude da teoria. Iniciou-se então uma nova área de investigação sobre a possibilidade de se completar a Mecânica Quântica com variáveis ocultas, e é com esta que o emaranhamento se desenvolve [15].

John Bell em 1964, estabeleceu uma distinção absoluta entre a mecânica quântica e a mecânica clássica no artigo [1], onde considerou uma teoria local e com variáveis ocultas, que determinam o valor de medidas, e deriva limites superiores sobre as correlações de observáveis de tal teoria [15]. Ele nota que alguns tipos especiais de estados emaranhados violam suas desigualdades, que ficou conhecida como *desigualdades de Bell*. Bell dessa forma deixou claro a necessidade de na Mecânica Quântica ser feito uma escolha de qual propriedade da teoria deve ser descartada, o realismo ou a localidade. Se escolhermos pelo realismo, admitimos a existência de variáveis ocultas que não conhecemos, mas que faz com que os resultados sejam os apresentados. Para a não-localidade aceitamos que

acontecem interações a distância.

Estamos longe de uma teoria geral de emaranhamento, porém muitos estudos tem sido feitos na intenção de entender esse conceito. O emaranhamento é encarado como um recurso disponível na Natureza para a computação quântica [36].

Atualmente, existem muitas teorias feitas para sistemas emaranhados bipartidos e pouco se fez para sistemas multi-partidos. Nesta dissertação estudamos relações que envolvem sistemas puros multi-partidos.

2.3.1 Caracterização de Emaranhamento e Critério de Separabilidade

Inicialmente, vamos caracterizar o espaço de estados onde estão os estados emaranhados, que como já adiantamos na Sec. 2.3 é o espaço de estados de um sistema físico composto. A Mecânica Quântica nos diz que se tiver sistemas quânticos numerados de 1 a n , e cada sistema for preparado no estado $|\psi_i\rangle$, decorre que o estado do sistema composto será $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ [36].

Se temos dois sistemas quânticos denominados a e b , dizemos que temos um sistema bipartido. Suponhamos que $|a\rangle = \lambda_0 |0_a\rangle + \lambda_1 |1_a\rangle$ seja um estado do sistema a e $|b\rangle = \gamma_0 |0_b\rangle + \gamma_1 |1_b\rangle$ seja um estado do sistema b , onde $|\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 = 1$ e $|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 = 1$. O produto tensorial entre $|a\rangle$ e $|b\rangle$ será um estado do sistema composto ab .

A representação desse estado do sistema composto de a e b será dado por

$$\begin{aligned} |\psi_{ab}\rangle &= |a\rangle \otimes |b\rangle = (\lambda_0 |0_a\rangle + \lambda_1 |1_a\rangle) \otimes (\gamma_0 |0_b\rangle + \gamma_1 |1_b\rangle) \\ &= \lambda_0 \gamma_0 |0_a\rangle \otimes |0_b\rangle + \lambda_0 \gamma_1 |0_a\rangle \otimes |1_b\rangle + \lambda_1 \gamma_0 |1_a\rangle \otimes |0_b\rangle + \lambda_1 \gamma_1 |1_a\rangle \otimes |1_b\rangle \\ &= \lambda_0 \gamma_0 |0_a\rangle |0_b\rangle + \lambda_0 \gamma_1 |0_a\rangle |1_b\rangle + \lambda_1 \gamma_0 |1_a\rangle |0_b\rangle + \lambda_1 \gamma_1 |1_a\rangle |1_b\rangle \\ &= \lambda_0 \gamma_0 |0_a 0_b\rangle + \lambda_0 \gamma_1 |0_a 1_b\rangle + \lambda_1 \gamma_0 |1_a 0_b\rangle + \lambda_1 \gamma_1 |1_a 1_b\rangle. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Podemos ainda omitir os índices que indicam a qual o sistema pertence o qbit e a Eq. (2.114) fica

$$|\psi_{ab}\rangle = \lambda_0 \gamma_0 |00\rangle + \lambda_0 \gamma_1 |01\rangle + \lambda_1 \gamma_0 |10\rangle + \lambda_1 \gamma_1 |11\rangle. \quad (2.115)$$

Dizemos que um estado de um sistema quântico composto é emaranhado se não podemos escrevê-lo como produtos de estados individuais de cada subsistema [36].

Exemplo 5 O estado $|\varphi_{ab}\rangle = \frac{1}{2}(|11\rangle - |10\rangle + |01\rangle - |00\rangle)$ não é emaranhado, pois pode ser separado como o produto de dois estados individuais

$$|\varphi_{ab}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle) = |\varphi_a\rangle |\varphi_b\rangle = |\varphi_a\rangle \otimes |\varphi_b\rangle. \quad (2.116)$$

Exemplo 6 O estado $|\Phi_{ab}^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$ não é separável, pois não podemos escrever como

produto de dois estados de um único qbit. De fato, podemos nos convencer mostrando que $|\Phi_{ab}^+\rangle$ não é um estado da forma de (2.115). Pois para $|\Phi_{ab}^+\rangle = |\psi_{ab}\rangle$ seria necessário termos

$$\begin{aligned}\lambda_0\gamma_1 &= 0, \\ \lambda_1\gamma_0 &= 0, \\ \lambda_0\gamma_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \lambda_1\gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

que nos leva a absurdos matemáticos, e portanto $|\Phi_{ab}^+\rangle \neq |a\rangle|b\rangle$.

Nem sempre é simples verificar se o estado composto é separável ou não, então para isso é utilizado alguns critérios para tomar essa decisão. Neste trabalho estamos interessados em estudar sistemas puros bipartidos, e podemos detectar se são emaranhados ou não utilizando Decomposição de Schmidt que foi explanado na Sec. 2.2.4.

Vimos que um estado puro de um sistema composto ab pode ser escrito na forma

$$|\psi_{ab}\rangle = \sum_i^n \sqrt{\lambda_i} |i_a\rangle |i_b\rangle, \quad (2.117)$$

onde $\sqrt{\lambda_i}$ são os coeficientes de Schmidt do estado $|\psi_{ab}\rangle$. A quantidade de coeficientes de Schmidt não nulos da soma é chamado de número de Schmidt (NS). Se $NS = 1$ o estado é separável, para $NS \geq 2$ o estado é emaranhado.

O número de Schmidt é um bom detector de emaranhamento pois é preservado por transformação unitária local [36]. Dessa forma, podemos utilizar a entropia de von Neumann para quantificar o emaranhamento de estados puros [3], ou seja, se $\rho_{ab} = |\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|$ é o operador densidade que descreve um estado puro do sistema ab , então a quantidade de emaranhamento de ρ_{ab} é

$$E(\psi_{ab}) = -tr(\rho_a \log \rho_a) = -tr(\rho_b \log \rho_b), \quad (2.118)$$

onde $\rho_a = tr_b(\rho_{ab})$ e $\rho_b = tr_a(\rho_{ab})$. Sendo $|\psi_{ab}\rangle$ dado pela Eq. (2.117), podemos reescrever $E(\psi_{ab})$ como sendo

$$E(\psi_{ab}) = -\sum_i^n \lambda_i \log \lambda_i. \quad (2.119)$$

2.3.2 Medidas de Emaranhamento

Nesta seção mostraremos os requisitos de um bom quantificador de emaranhamento em termos de uma função matemática. Entretanto, para estados mistos não existe

somente uma maneira de quantificar o emaranhamento, mas é consenso que toda medida de emaranhamento E deve satisfazer aos seguintes itens [8]:

- Se ρ for separável, então $E(\rho) = 0$;
- O grau de emaranhamento de ρ não pode aumentar por Operações Locais e Comunicações Clássicas (OLCC)⁶, isto é:

$$E(\Lambda_{OLCC}(\rho)) \leq E(\rho);$$

- *Continuidade*: No limite em que a distância entre dois estados tende a zero, a diferença entre seus emaranhamentos deve tender a zero, ou seja,

$$E(\rho) - E(\sigma) \longrightarrow 0$$

para $\|\rho - \sigma\|_2 \longrightarrow 0$, onde $\|A\|_2 = \sqrt{A^\dagger A}$;

- *Subaditividade*: O emaranhamento do produto tensorial de dois estados não deve ser maior que a soma do emaranhamento de cada estado, isto é:

$$E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma).$$

- *Convergência*: O emaranhamento deve ser uma função convexa, isto é:

$$E(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho) + (1 - \lambda)E(\sigma),$$

onde $0 < \lambda < 1$.

Medidas gerais de emaranhamento ainda são uma questão em aberto. A medida de emaranhamento mais popular para estados mistos é o Emaranhamento de Formação (EF), proposto pela Ref. [3] e é dado por

$$E_f(\rho_{ab}) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i S(\rho_{\psi_i}), \quad (2.120)$$

onde o mínimo é tomado sobre todas as possíveis misturas de estados puros $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ que geram o estado ρ . Pois, como mostrado na Sec. 2.2.1, um matriz densidade pode ter muitas decomposições diferentes, entre elas, temos o menor emaranhamento médio.

Para estados puros, como já mencionamos na Sec. 2.3.1, a entropia de von Neumann é um bom quantificador. Pelo Teorema 4, temos que a quantidade de emaranhamento para estados puros varia de 0 a $\log_2 D$.

⁶É o ato de Alice e Bob poder realizar operações arbitrárias em seus sistemas locais, incluindo medidas, porém, só se comunicam usando um canal clássico, inclusive para informar qual a operação realizou em seus sistemas [36].

2.3.3 Monogamia de Emaranhamento

O emaranhamento tem ainda outra característica importante, chamada de monogamia de emaranhamento. Se temos dois subsistemas a e b puros, tanto a como b não podem ter emaranhamento com um terceiro subsistema c [4, 46, 27, 11].

Para um sistema puro tripartido abc temos uma relação monogâmica que mostra que a soma das correlações quânticas entre o sistema a e b (emaranhamento) e as correlações clássicas entre o sistema a e c (informação mútua por medida) são iguais a entropia do sistema a [28], conhecida como relação de Koashi-Winter, tem sido muito utilizado em estudos de interação entre sistemas bipartidos e o meio ambiente como pode ser visto nas Refs. [39, 24]. Apresentaremos sua prova no teorema 5 a seguir.

Teorema 5 Quando ρ_{ac} é o complemento b para o estado ρ_{ab} , temos que

$$E_{a,b} + J_{a|c}^{\leftarrow} = S_a,$$

onde o complemento b é a parte que purifica o sistema puro tripartido abc , tal que, $tr_b[\rho_{abc}] = \rho_{ac}$ e $tr_c[\rho_{abc}] = \rho_{ab}$. A expressão $S_a = S(\rho_a)$ é a entropia de von Neumann do operador densidade $\rho_a \equiv tr_b(\rho_{ab}) = tr_c(\rho_{ac})$, $E_{a,b} = E(\rho_{ab})$ é o emaranhamento de formação e $J_{a|c}^{\leftarrow} = J^{\leftarrow}(\rho_{a|c})$ é a Informação Mútua por medida.

Prova: Da definição de emaranhamento de formação temos que

$$E_f(\rho_{ab}) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i S(tr_b[|\psi_i\rangle \langle\psi_i|]), \quad (2.121)$$

onde $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ é o ensemble de estados puros que minimiza a formação de emaranhamento entre ab , satisfazendo $\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| = \rho_{ab}$.

Da expressão de Informação Mútua por medida é possível obter a seguinte desigualdade

$$J_{a|c}^{\leftarrow} \geq S_a - \sum_i p_i S(tr_b[|\psi_i\rangle \langle\psi_i|]), \quad (2.122)$$

conforme podemos perceber pelo diagrama na Fig. 2.6.

A informação mútua entre a e c é obtida escolhendo um conjunto de medidas M_k^c que maximiza a correlação clássica entre os sistemas a e c , dada pela expressão

$$J_{a|c}^{\leftarrow} = \max_{\{M_k^c\}} [S_a - \sum_k p_k S(\rho_{a|k})], \quad (2.123)$$

onde $\rho_{a|k} = tr_c[(I_a \otimes M_k^c)\rho_{ac}]/p_k$ é o estado da parte a após o conjunto de medidas M_k^c ter atuado na parte c com probabilidade $p_k = tr_c[(I_a \otimes M_k^c)\rho_{ac}]$.

Observe que podemos escolher o conjunto de medidas M_k^c que nos permite escrever

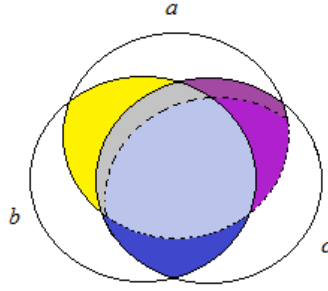


Figura 2.6: Diagrama de Veen das correlações do sistema quântico abc . Entre as linhas pontilhadas temos $J_{a|c}^{\leftarrow}$.

a Eq. (2.122) como sendo

$$J_{a|c}^{\leftarrow} = S_a - E_f(\rho_{ab}). \quad (2.124)$$

Podemos também, obter essa relação partindo do pressuposto que o rank do operador M_k^c é em geral maior que um. Podendo assim tomar uma decomposição $M_k^c = \sum_j M_{kj}^c$, onde M_{kj}^c são operadores de rank-1. Dessa forma, partindo da expressão

$$E_f(\rho_{ab}) \geq \sum_{kj} p_{kj} S(\text{tr}_b[|\phi_{kj}\rangle\langle\phi_{kj}|]), \quad (2.125)$$

onde o ensemble $\{p_{kj}, |\phi_{kj}\rangle\}$ satisfaz a equação $\sum_{kj} p_{kj} |\phi_{kj}\rangle\langle\phi_{kj}| = \rho_{ab}$. Escolhendo M_{kj}^c que maximiza a informação mútua sobre o sistema ac , obtemos um ensemble que minimiza $\{p_{kj}, |\phi_{kj}\rangle\}$ o custo de $E_f(\rho_{ab})$, logo podemos concluir que

$$E_f(\rho_{ab}) = \sum_{kj} p_{kj} S(\rho_{kj}) = S_a - J_{a|c}^{\leftarrow}. \quad (2.126)$$

Portanto,

$$E_{a,b} + J_{a|c}^{\leftarrow} = S_a. \quad \blacksquare$$

A prova completa da relação de Koashi-Winter pode ser vista na Ref. [28].

2.4 Discórdia Quântica

Já apresentamos nas Sec. 2.2.7 e 2.2.8 as expressões para a informação mútua que no primeiro caso é uma expressão obtida por analogia ao caso clássico tratado na Sec. 2.1.2.3 e no segundo caso tem dependência da medida quântica.

Para sistemas clássicos, não temos essas duas variações da informação mútua dadas pelas Eqs. (2.101) e (2.112). Porém, para o caso quântico, temos um certo tipo de estado quântico, ditos clássicos, que faz com que a diferença entre esses dois tipos de

informação mútua seja também nulo.

Considerando um sistema quântico composto por um aparato de medida a e um sistema quântico s qualquer. Suponhamos que após uma interação entre esses sistemas, antes de ocorrer a medida, o par as esteja correlacionado [37]. Podemos então escrever a informação mútua do par as como sendo

$$I_{s:a} = S_s + S_a - S_{s,a}, \quad (2.127)$$

mas sabemos que também podemos escrever a informação mútua em função da medida, ou seja,

$$J_{s|a}^{\leftarrow} = \max_{\{M_x^a\}} [S_s - \sum_x p_x S_{s|M_x^a}] \quad (2.128)$$

Chamamos de discórdia a diferença entre as Eqs. (2.127) e (2.128) que é dada por [37]

$$\begin{aligned} \delta_{s|a}^{\leftarrow} &= I_{s:a} - J_{s|a}^{\leftarrow} \\ &= S_s + S_a - S_{s,a} - \max_{\{M_x^a\}} [S_a - \sum_x p_x S_{a|M_x^a}] \\ &= S_a - S_{s,a} + \max_{\{M_x^a\}} [S_{s|\{M_x^a\}}] \\ &= S_a - S_{s,a} + \max_{\{M_x^a\}} [\sum_x p_x S_{s|\{M_x^a\}}], \end{aligned} \quad (2.129)$$

onde $p_x = \text{tr}_{s,a}(M_x^a \rho_{s,a})$.

A discórdia quântica da forma como expressada acima não é simétrica, pois é dependente da medida M_x^a sobre o sistema a para o observador ter informação sobre o sistema s . Existe um tipo especial de discórdia que não será tratada nesta dissertação, porém é simétrica, valendo inclusive para sistema multipartidos. Um estudo sobre esse tipo de discórdia pode ser encontrado na Ref. [35].

A motivação para o estudo da discórdia quântica foi os efeitos das medidas quânticas em sistemas quânticos. A Ref. [49] mostra como correlações de um sistema com outros sistemas pode fazer com que um de seus observáveis se comporte de forma clássica.

Esses estados aparecem quando acontece a medida dos estados do sistema s pelo aparato a . Como já tínhamos mencionado acima, antes de ocorrer a medida o estado conjunto sa (sistema-aparato) é emaranhado e podemos exemplificar a ambiguidade de bases no qual o sistema sa pode ser representado pelos seguintes estados

$$|\psi_{sa}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

ou

$$|\psi_{sa}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle).$$

A Ref. [49] sugere que o aparato de medida escolhido faça interação somente com os sistemas físicos do meio e . Sendo assim, o aparato só registra um observável particular (diagonal na base $|0\rangle$ e $|1\rangle$), impedindo assim que apareçam superposição desses estados. A interação entre o aparato a e o meio e é dada por um Hamiltoniano de interação (H_{int}) no qual, a evolução unitária dependente do tempo é representada por

$$U(t) = |0\rangle\langle 0| \otimes U_0(t) + |1\rangle\langle 1| \otimes U_1(t),$$

onde $U(t)|\psi_{sa}\rangle$ nos leva ao estado tripartido dado por

$$|\psi_{ase_t}\rangle^P = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\xi_0\rangle + |11\xi_1\rangle),$$

onde o índice P indica que o estado conjunto sa já interagiu com o meio e .

Após a evolução, o estado conjunto sa é dado pelo operador densidade

$$\rho_{sa}^P = \text{tr}_{e_t}(\rho_{sae_t}) = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{1}{2}\langle \xi_0|\xi_1\rangle(|00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|), \quad (2.130)$$

onde $\langle \xi_0|\xi_1\rangle = z(t)$ é a amplitude de correlação da diagonal secundária [49] que depende das condições iniciais de interação do aparato com o meio. Para $t \rightarrow \infty$ teremos $z(t) \rightarrow 0$, indicando assim o fim do emaranhamento entre o sistema sa . Esse processo é conhecido como decoerência quântica [37].

Reescrevendo ρ_{sa}^P em função da amplitude de correlação $z(t)$ podemos calcular a discórdia do sistema s em função da medida realizada pelo aparato a , dada por

$$\delta_{s|a}^{\leftarrow} = 1 + \frac{1 - z(t)}{2}[\log(1 - z(t)) - 1] + \frac{1 + z(t)}{2}[\log(1 + z(t)) - 1],$$

onde $0 \leq z(t) \leq 1$ e o gráfico na Fig. 2.7 mostra como interação do meio e com o aparato a destrói as correlações entre o sistema quântico s e o aparato de medida a e mostra como operações local perturba o sistema conjuntos sa .

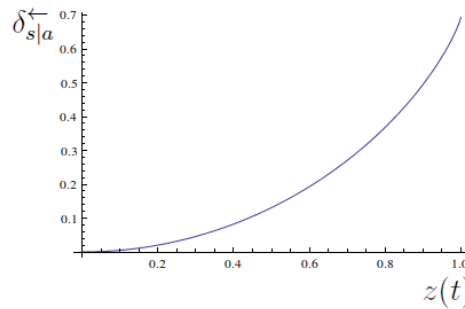


Figura 2.7: Discórdia de ρ_{sa}^P .

A decoerência em sistemas quânticos é um processo fundamental no processo de

investigação do processo de medição. Alguns resultados neste sentido foram obtidos experimentalmente usando fótons emaranhados, esses resultados podem ser vistos na Ref. [12].

Observe que antes da medida existia uma ambiguidade na representação do estado do sistema sa , porém essa ambiguidade desaparece pela seleção feita pelo aparato, de forma que ao escrever ρ_{sa}^P na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ não conseguimos mais ver as correlações que tínhamos antes da medida,

$$\rho_{sa}^P = \frac{1}{4}(|++\rangle\langle ++| + |++\rangle\langle --| + |+-\rangle\langle +-| + |+-\rangle\langle -+| + | -+\rangle\langle +-| + | -+\rangle\langle -+| + | -+\rangle\langle --| + | -+\rangle\langle ++| + | -+\rangle\langle --|).$$

A Ref. [37] mostra que a principal diferença entre o emaranhamento e a discórdia quântica como medida de correlação quântica, é que pode continuar tendo discórdia mesmo quando não há emaranhamento nenhum. Isso é ilustrado no gráfico na Fig. 2.8 que mostra a discórdia para o estado de Werner

$$\rho_{sa}^W = \frac{1-z}{4}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{z}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|),$$

só desaparece para $z = 0$ [22]. Sendo que o emaranhamento desaparece para $z < \frac{1}{3}$.

A discórdia quântica pode ser entendida também como medida de capacidade de distinção de estados quânticos. Por exemplo, o estado $\rho_{ab} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ tem discórdia nula. Nesse estado, Bob consegue distinguir entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, ou seja, como dito anteriormente, esse estado está classicamente correlacionado. Já o estado $\rho'_{ab} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |1+\rangle\langle 1+|)$ que tem discórdia não nula, qualquer medida que Bob fazer no seu sistema irá perturbar o estado ρ'_{ab} . Sendo assim, impossível de Bob determinar o estado de Alice.

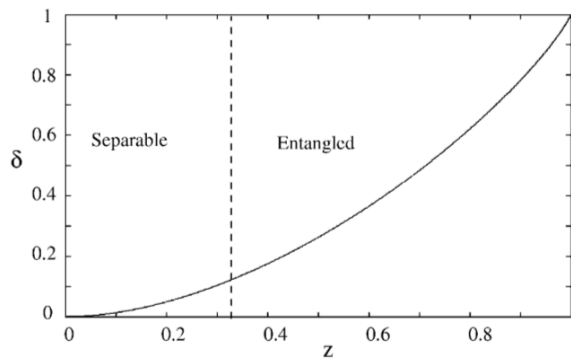


Figura 2.8: Discórdia de ρ_{sa}^W .
Fonte: Figura da Ref. [37]

2.5 O Demônio de Maxwell

O demônio de Maxwell foi introduzido por J.C. Maxwell em 1871, no qual ele discutia o caráter estatístico da segunda lei da termodinâmica [34]. Entretanto, o demônio de Maxwell foi tratado como um paradoxo por muito tempo, por fim, foi “exorcizado” por Landauer e Bennett [31].

Mas o que é o demônio de Maxwell? Vamos considerar um sistema completamente isolado do meio, dividido em dois compartimentos A e B , interligados por um pequeno orifício com uma porta deslizante controlada por um ser inteligente. Considerando que dentro do reservatório tem um gás distribuído entre os dois compartimentos A e B , sendo que o gás no compartimento A encontra-se mais frio que o gás do compartimento B , conforme ilustrado na Fig. 2.9.

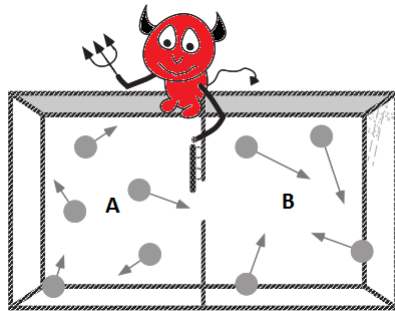


Figura 2.9: Demônio de Maxwell.

O trabalho do demônio é observar as moléculas nos compartimentos e verificar as suas respectivas velocidades. Se o demônio detecta uma molécula em A vindo em direção ao orifício cujo quadrado da velocidade é maior que a velocidade quadrática média das moléculas de B , ele abre a porta e deixa ela passar para B . Em seguida, procura em B uma molécula cuja velocidade quadrática é menor velocidade quadrática média das moléculas de A , novamente abre a porta deixando-a passar para A . Ele impede que as outras moléculas passem de um lado para o outro, mantendo assim o número de moléculas de A e B inalterado. Considerando que a porta tem atrito desprezível, percebemos que o demônio de Maxwell consegue esfriar o compartimento A e esquentar ainda mais o compartimento B sem realizar nenhum trabalho. Dessa forma, aparentemente, esse processo violaria a segunda lei da termodinâmica [31].

O demônio de Maxwell foi exorcizado por Charles Bennett usando o princípio de Landauer. O princípio de Landauer afirma que o apagamento de 1 bit de informação aumenta a entropia do meio em $K_b \ln 2$ [29]. Em outras palavras, para apagar 1 bit de informação, gastamos $K_b T \ln 2$ de energia [31]. O Princípio de Landauer foi verificado experimentalmente pela Ref. [44].

Charles Bennet mostrou que o demônio não viola a segunda lei, pois para determinar

a velocidade das moléculas, o mesmo deve realizar medidas e armazenar na memória os resultados dessas medidas. Porém, como toda memória é finita, o demônio deve apagar informações em sua memória, para assim conseguir ter espaço para armazenar o resultado de novas medições. O ato de apagar as informações aumenta a entropia total do sistema demônio-reservatório-ambientes [2].

2.5.1 O “Demônio” causa Discórdia

Nesta seção iremos reproduzir os resultados apresentados na Ref. [50], onde é mostrado que a discórdia quântica (Sec. 2.4) determina a diferença entre a eficiência de um demônio de Maxwell quântico e clássico.

Considerando um conjunto composto por um sistema quântico s , um aparato de medida quântica a e um demônio de Maxwell que usa as informações sobre o sistema s dadas pela medida do aparato a para extrair trabalho deixando o sistema s expandir em toda a dimensão do sistema conjunto sa (d_{sa}) que está em contato com o reservatório térmico à uma temperatura constante T . Sendo dessa forma, o demônio consegue, em princípio extrair um trabalho

$$W_C^+/k_{B_2}T = \log d_{sa} - \max_{M_x^a}[S_{s|\{M_x^a\}}], \quad (2.131)$$

a um custo de apagamento de memória de

$$W_C^-/k_{B_2}T = S_a, \quad (2.132)$$

onde k_{B_2} é a constante de Boltzmann adaptada para lidar com entropia expressada em bits e o índice C na expressão do trabalho é a indicação que neste caso temos um demônio clássico atuando no sistema. O demônio clássico atua no sistema quântico sa de forma local, atuando somente em um dos sistemas. Dessa forma, o trabalho líquido que o demônio clássico consegue ganhar é dado pela diferença entre as Eqs. (2.131) e (2.132), sendo portanto

$$W_C/k_{B_2}T = \log d_{sa} - S_a - \max_{M_x^a}[S_{s|a}]. \quad (2.133)$$

Observe que o processo de decoerência⁷ no sistema emaranhado sa pode aumentar o custo de apagamento de memória. Isso se deve ao fato que sistemas decoerentes tem um aumento de entropia, devido as perdas de informação referente as medidas auto-seletivas da interação do aparato com o meio.

Por outro lado, um demônio quântico, teria a capacidade de realizar medidas globais no sistema sa , logo o custo de apagamento de informação pode ser menor. Dessa

⁷Tratado na Sec. 2.4

forma, podemos dizer que o demônio quântico pode extrair mais trabalho de um sistema quântico sa . O trabalho líquido que um demônio quântico pode tirar do sistema é

$$W_Q/k_{B_2}T = \log d_{sa} - S_{s,a}. \quad (2.134)$$

Calculamos a diferença de eficiência de extração de trabalho pelos demônios quântico e clássico fazendo a Eq. (2.134) menos a Eq. (2.133),

$$\Delta W/k_{B_2}T = \log d_{sa} - S_{s,a} - \{\log d_{sa} - S_a - \max_{M_x^a}[S_{s|a}]\} = S_a + \max_{M_x^a}[S_{s|a}] - S_{s,a}, \quad (2.135)$$

e notamos que na última igualdade, temos uma expressão que é igual a Eq. (2.129), que é a discórdia quântica. Podemos então reescrever a Eq. (2.135) como sendo

$$\Delta W = k_{B_2}T\delta_{s|a}^{\leftarrow}. \quad (2.136)$$

Capítulo 3

Relações de distribuição de emaranhamento e discórdia

3.1 Emaranhamento e Discórdia para sistema tri-partidos

Primeiramente, gostaríamos de revisar os resultados apresentados nas Refs. [20, 19]. Emaranhamento de formação e discórdia quântica são medidas de correlações quânticas. Sabemos que, para sistemas puros de duas partes os resultados de discórdia quântica (DQ) e emaranhamento de formação (EF) resultam iguais. Está em aberto a relação entre esses dois conceitos para um estado geral misto. Aparentemente não existe uma relação para estados mistos entre EF e DQ, mas foi mostrado que para estados puros tripartido o EF e a DQ obedecem uma relação fundamental entre emaranhamento e discórdia [20], a qual, vamos derivar nesta seção.

Como visto na Sec. 2.3.1, um sistema puro abc satisfaz a seguinte relação monogâmica

$$E_{a,b} + J_{a|c}^{\leftarrow} = S_a. \quad (3.1)$$

Da definição de DQ dada por

$$\delta_{a|c}^{\leftarrow} = I_{a:c} - J_{a|c}^{\leftarrow}, \quad (3.2)$$

substituindo a Eq. (3.1) na Eq. (3.2), obtemos a equação

$$\delta_{a|c}^{\leftarrow} = I_{a:c} - S_a + E_{a,c}. \quad (3.3)$$

Da Eq. (2.101), sabemos que $I_{a:c} = S_a - S_{a|c}$ e substituindo na Eq. (3.3), temos

$$E_{a,b} = \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c}, \quad (3.4)$$

que denominamos *relação fundamental entre EF e DQ* para sistema puros tri-

partidos [20].

Trocando b e c obtemos

$$E_{a,c} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|b}, \quad (3.5)$$

e percebemos que ao somar a Eq. (3.4) com a Eq. (3.5), obtemos

$$E_{a,b} + E_{a,c} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c} + S_{a|b} \quad (3.6)$$

$$E_{a,b} + E_{a,c} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a,c} - S_c + S_{a,b} - S_b. \quad (3.7)$$

Para sistemas puros, da decomposição de Schimdt (Sec. 2.2.4) sabemos que os operadores densidades tem os mesmos autovalores e com isso suas entropias ficam sendo

$$S_{a,c} = S_b \quad (3.8)$$

$$S_c = S_{a,b}. \quad (3.9)$$

Substituindo as Eqs. (3.8) e (3.9) na Eq. (3.7) obtemos a lei de conservação para sistemas de 3 partes

$$E_{a,b} + E_{a,c} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}. \quad (3.10)$$

Se considerarmos a parte c do sistema como sendo o meio no qual o sistema ab está inserido, conforme interpretação da Ref. [20], entendemos porque a Eq. (3.10) é chamada lei de conservação pelos autores, pois para um sistema puro tripartido, a soma de todos os possíveis emaranhamentos bipartido compartilhados com um subsistema particular (a), determinado pelo EF, não pode aumentar sem que aumente a soma das DQ compartilhadas com esse mesmo subsistema.

3.1.1 Informação Inacessível Localmente para tri-partido

Da relação de conservação (3.10) podemos escrever as seguintes permutações da Eq. (3.10),

$$E_{b,a} + E_{b,c} = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{b|c}^{\leftarrow} \quad (3.11)$$

$$E_{c,a} + E_{c,b} = \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow}. \quad (3.12)$$

Essas relações considerando um ciclo de emaranhamento e discórdia nos permitem entender como que cada sistema se relaciona com os demais por meio desta ótica da relação fundamental entre EF e DQ. Dessa forma, podemos ampliar nossas percepções das possibilidades de fazer teorias considerando sistemas puros multi-partidos.

Assim sendo, no contexto da Informação Inacessível Localmente (IIL) para sistemas quânticos, foram mostradas relações cíclicas e não cíclicas para o emaranhamento e discórdia [19]. Para um sistema quântico puro abc , medido por medidas sequenciais

fechadas na forma $(c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c)$ nos pares bc , ab e ca , a sequência de IIL no estado puro é calculado pela soma das DQs,

$$\mathcal{L}_\odot \equiv \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow}. \quad (3.13)$$

Essa expressão representa o ciclo de IIL quando o estado puro abc é medido por um conjunto de medidas (projetivas ou POVM) sobre c , b e a , representando o ciclo no sentido horário (Fig. 3.1). Da mesma forma que se considerarmos as medidas $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ obtemos o fluxo no sentido anti-horário (Fig. 3.1)

$$\mathcal{L}_\ominus \equiv \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}. \quad (3.14)$$

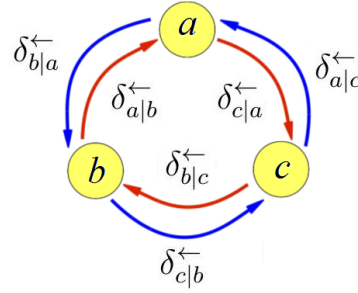


Figura 3.1: Representação de sentido horário (setas vermelhas) e anti-horário (setas azuis) do ciclo de IIL. A soma das duas possibilidades de direções do ciclo IIL resultam na soma dos possíveis EF entre os pares do sistema puro tripartido abc .

Observe que somando as Eqs. (3.10), (3.11) e (3.12) obtemos uma média de IIL no sentido horário e anti-horário

$$2E_{a,b} + 2E_{b,c} + 2E_{a,c} = \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} \quad (3.15)$$

$$2E_{a,b} + 2E_{b,c} + 2E_{a,c} = \mathcal{L}_\odot + \mathcal{L}_\ominus \quad (3.16)$$

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{a,c} = \frac{\mathcal{L}_\odot + \mathcal{L}_\ominus}{2}. \quad (3.17)$$

Por outro lado, calculando a diferença entre as Eqs. (3.13) e (3.14) e substituindo as Eqs. (3.10), (3.11) e (3.12), obtemos a relação

$$\frac{\mathcal{L}_\odot - \mathcal{L}_\ominus}{2} = (E_{a,b} - \delta_{a|c}^{\leftarrow}) + (E_{c,a} - \delta_{c|b}^{\leftarrow}) + (E_{b,c} - \delta_{b|a}^{\leftarrow}), \quad (3.18)$$

que, como podemos ver, o lado direito da Eq. (3.18) pode ser visto como a soma $S_{a|c} + S_{c|b} + S_{b|a}$ que desaparece pois estamos tratando de um estado puro abc , ou seja, temos que

$$S_{b|a} + S_{c|b} + S_{a|c} = S_{ba} - S_a + S_{cb} - S_b + S_{ac} - S_c = S_c - S_a + S_a - S_b + S_b - S_c = 0. \quad (3.19)$$

Temos como consequência $\mathcal{L}_\circ = \mathcal{L}_\circ$, resultando em

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{a,c} = \mathcal{L}_\circ = \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow}. \quad (3.20)$$

Por outro lado se fizermos a diferença entre as Eqs. (3.14) e (3.13) e fazendo a substituição das Eqs. (3.10), (3.11) e (3.12), obtemos a relação inversa à Eq. (3.18) porém com o ciclo oposto,

$$\frac{\mathcal{L}_\circ - \mathcal{L}_\circ}{2} = (\delta_{b|a}^{\leftarrow} - E_{b,c}) + (\delta_{c|b}^{\leftarrow} - E_{c,a}) + (\delta_{a|c}^{\leftarrow} - E_{a,b}), \quad (3.21)$$

onde podemos escrever o lado direito da Eq. (3.21) como sendo a soma das entropias condicionais $S_{b|a} + S_{c|b} + S_{a|c}$. Observamos que essa soma resulta em zero, como pode ser visto na Eq. (3.19). Novamente, concluímos que $\mathcal{L}_\circ = \mathcal{L}_\circ$. Chegamos a uma equação análoga a Eq. (3.20), porém seguindo o fluxo no sentido anti-horário,

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{a,c} = \mathcal{L}_\circ = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}. \quad (3.22)$$

As Eqs. (3.20) e (3.22), juntamente com a lei de conservação (3.10) são classificadas pelas Refs. [20, 19] como sendo uma alternativa de interpretação do EF. A soma de EFs pode ser interpretado como a aquisição de informação inacessível localmente por meio de medidas quânticas em um sistema quântico puro tripartido.

3.1.2 Derivação Alternativa para as relações cíclicas de EF e DQ para sistemas tri-partidos

Até agora temos apresentado os resultados publicados na Refs. [20, 19]. Vamos propor agora uma forma alternativa e mais simples de obter as Eqs. (3.20) e (3.22) que envolvem medidas em ciclo.

Para um sistema quântico puro tri-partido abc podemos escrever as seguintes relações fundamentais entre EF e DQ

$$E_{b,a} = \delta_{b|c}^{\leftarrow} + S_{b|c} \quad (3.23)$$

$$E_{a,c} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|b} \quad (3.24)$$

$$E_{c,b} = \delta_{c|a}^{\leftarrow} + S_{c|a}, \quad (3.25)$$

que quando somadas obtemos,

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{c,a} = \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} + S_{b|c} + S_{a|b} + S_{c|a}. \quad (3.26)$$

Analisando separadamente as somas das entropias condicionais, percebemos que elas se

anulam,

$$S_{b|c} + S_{a|b} + S_{c|a} = S_{b,c} - S_c + S_{a,b} - S_b + S_{c,a} - S_a = S_a - S_c + S_c - S_b + S_b - S_a = 0,$$

pois podemos reescrever as entropias condicionais usando decomposição de Schimidt. Portanto a Eq. (3.26) fica

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{c,a} = \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow}, \quad (3.27)$$

que é a relação de conservação entre EF e DQ da pela Eq. (3.20), porém obtida de uma forma simplificada.

Também podemos chegar à Eq. (3.22) escrevendo as seguintes relações fundamentais entre EF e DQ

$$E_{b,c} = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + S_{b|a} \quad (3.28)$$

$$E_{c,a} = \delta_{c|b}^{\leftarrow} + S_{c|b} \quad (3.29)$$

$$E_{a,b} = \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c}, \quad (3.30)$$

somando-as, obtemos

$$E_{b,c} + E_{c,a} + E_{a,b} = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{b|a} + S_{c|b} + S_{a|c}, \quad (3.31)$$

sendo que a soma das entropias condicionais da Eq. (3.31) resultam em

$$S_{b|a} + S_{c|b} + S_{a|c} = S_{b,a} - S_a + S_{c,b} - S_b + S_{a,c} - S_c = S_c - S_a + S_a - S_b + S_b - S_c = 0,$$

e nos leva a

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{a,c} = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}. \quad (3.32)$$

As Eqs. (3.27) e (3.32) mostram como se comporta um ciclo fechado de medidas quânticas (POVM) sobre um sistema quântico puro de três partes abc .

A Eq. (3.27) mostra que ao escolhermos os pares de informação mútua ao qual quer se medir, neste caso bc , cb e ba , seguindo um ordem decrescente, ou seja, medimos a e comunicamos c , em seguida medimos c e informamos b e logo medimos b que comunica a obtendo assim um ciclo fechado de informação acessível por medida. Isso resulta nas relações cíclicas entre EF e DQ. Para Eq. (3.32) também temos um ciclo fechado porém seguindo uma ordem crescente, isto é, $(a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a)$. Observamos que a soma dos emaranhamentos não altera conforme mudamos o sentido do fluxo fechado de medidas.

3.2 EF e DQ para sistemas quânticos de 4 partes

Nesta seção, construiremos relações que envolvem EF e DQ para sistemas quânticos puros que envolvem 4 partes. Esperamos que as relações para 4 partes apareçam seguindo a mesma ideia das relações para 3 partes, já que a ideia de estudar sistemas de mais de duas partes é generalizar as teorias para emaranhamento. Dessa forma, é necessário começar pelos casos mais simples para entendermos a complexidade do problema e suas particularidades.

Vamos estender a Eq. (3.10) para sistemas de 4 partes. Considerando um sistema quântico puro de 4 partes $abcd$ e a Eq. (3.4), podemos escrever o emaranhamento entre o sistema a e o sistema bc como sendo

$$E_{a,bc} = \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|d}. \quad (3.33)$$

Trocando bc por cd temos,

$$E_{a,cd} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|b}. \quad (3.34)$$

Seguindo o modelo de obtenção de relações de conservação, somando as equações (3.33) e (3.34) chegamos a equação

$$E_{a,bc} + E_{a,cd} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} - \delta_{a|b}^{\leftarrow} = S_{a|d} + S_{a|b}. \quad (3.35)$$

Porém quando reescrevemos a Eq. (3.35) as entropias não se anulam, aparecendo na verdade, uma subaditividade forte da entropia de von Neumann,

$$E_{a,bc} + E_{a,cd} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} - \delta_{a|b}^{\leftarrow} = S_{ab} - S_b + S_{ad} - S_d \quad (3.36)$$

$$= S_{ab} - S_b + S_{bc} - S_{abc} \geq 0 \quad (3.37)$$

Assim notamos que, para sistemas de 4 partes, onde consideramos o emaranhamento de um sistema com outro sistema de duas partes, a soma dos emaranhamentos é maior que a soma das discórdia. Em outras palavras, a soma dos emaranhamentos é limitado inferiormente pela soma da aquisição de informação por medidas locais, portanto

$$E_{a,bc} + E_{a,cd} \geq \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} \quad (3.38)$$

Além disso, também podemos considerar outras possibilidades de EF. Considerando o EF de um sistema com outro sistema individual, e pela Eq. (3.4), obtemos as seguintes equações

$$E_{a,b} = \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|cd} \quad (3.39)$$

$$E_{a,c} = \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + S_{a|bd}. \quad (3.40)$$

Somando as Eqs. (3.39) e (3.40), temos

$$E_{a,b} + E_{a,c} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow} - \delta_{a|bd}^{\leftarrow} = S_{a|cd} + S_{a|bd}. \quad (3.41)$$

Novamente podemos analisar separadamente a soma das entropias e verificamos que

$$S_{a|cd} + S_{a|bd} = S_{acd} - S_{cd} + S_{abd} - S_{bd} = S_{acd} - S_{cd} + S_c - S_{ac} \leq 0, \quad (3.42)$$

pois é uma subaditividade forte com sinal invertido. Com isso temos

$$E_{a,b} + E_{a,c} \leq \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{a|bd}^{\leftarrow}, \quad (3.43)$$

mostrando que dependendo da configuração das partes do sistema a soma de emaranhamento é menor que a soma das discórdia.

Como observamos, as Eqs. (3.38) e (3.43) mostram somas de emaranhamento da parte a do sistema com outras partições do sistema, onde no primeiro caso temos a parte a emaranhada com duas partições do sistema, sendo elas bc e cd , no segundo caso, temos a parte a emaranhada com as partes b e c .

Vamos agora obter uma relação que envolva todas as demais partições do sistema. Para isso temos para completar as relações do primeiro caso. Fazendo a partição a com bd , que resulta na equação

$$E_{a,bd} = \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c}. \quad (3.44)$$

Para as partições do segundo caso, resta escrever a relação de emaranhamento entre a e a parte d do sistema $abcd$, dada por

$$E_{a,d} = \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + S_{a|bc}. \quad (3.45)$$

Observe que se somarmos as Eqs. (3.33), (3.34) e (3.44), obtemos

$$E_{a,bc} + E_{a,cd} + E_{a,db} - \delta_{a|b}^{\leftarrow} - \delta_{a|c}^{\leftarrow} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} = S_{a|b} + S_{a|c} + S_{a|d}. \quad (3.46)$$

Se reescrevermos a soma das entropias condicionais da equação (3.46) e fizermos as mudanças adequadas podemos reescrevê-la como sendo,

$$S_{a|b} + S_{a|c} + S_{a|d} = S_{a|b} + S_{a|c} + S_{ad} - S_d = S_{a|b} + S_{a|c} - S_{a|bc} \geq 0, \quad (3.47)$$

que é uma das formas da subaditividade da entropia condicional [36]. Dessa forma obtemos a equação

$$E_{a,bc} + E_{a,cd} + E_{a,db} \geq \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|d}^{\leftarrow} \quad (3.48)$$

Similarmente, somando as Eqs. (3.39), (3.40) e (3.45), obtemos a equação

$$E_{a,b} + E_{a,c} + E_{a,d} \leq \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{a|bd}^{\leftarrow}. \quad (3.49)$$

Inicialmente, como mencionado, o resultado esperado era de relações que envolvessem igualdades entre somas de emaranhamentos e somas de discórdias, já que tínhamos a esperança de as equações para sistemas com mais de três partes fossem parecidas com as concebidas em [20] que relaciona EF e DQ para sistema puros de 3 partes. Essas particularidades de sistemas de 4 partes torna a generalização dessas relações entre EF e DQ mais complicadas, pois temos agora desigualdades e diferenças entre as diferentes partições do sistema.

Por outro lado, se escrevermos a equação

$$E_{a,b} + E_{a,c} + E_{a,d} - \delta_{a|bc}^{\leftarrow} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow} - \delta_{a|bd}^{\leftarrow} = S_{a|bc} + S_{a|cd} + S_{a|bd}, \quad (3.50)$$

que é o resultado da soma das Eqs. (3.39), (3.40) e (3.45). Somando as Eqs. (3.46) e (3.50), obtemos uma relação de igualdade para sistemas com 4 partes, dada por

$$E_{a,bc} + E_{a,cd} + E_{a,db} + E_{a,b} + E_{a,c} + E_{a,d} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{a|bd}^{\leftarrow}, \quad (3.51)$$

pois a soma das entropias se anulam, como podemos ver abaixo

$$\begin{aligned} S_{a|b} + S_{a|c} + S_{a|d} + S_{a|bc} + S_{a|cd} + S_{a|bd} = \\ S_{ab} - S_b + S_{ac} - S_c + S_{ad} - S_d + S_{abc} - S_{bc} + S_{acd} - S_{cd} + S_{abd} - S_{bd} = \\ S_{ab} - S_b + S_{ac} - S_c + S_{ad} - S_d + S_d - S_{ad} + S_b - S_{ab} + S_c - S_{ac} = 0. \end{aligned}$$

A Eq. (3.51) mostra que a conservação entre EF e DQ é obtida para sistemas de 4 partes considerando a soma de todas as combinações de EF e DQ de diferentes formas de particionar o sistema $abcd$.

3.2.1 Prova alternativa para subaditividade da entropia condicional

Na obtenção da Eq. (3.49) utilizamos um resultado provado na Ref. [36]. Vamos agora utilizar os recursos desenvolvidos nessa dissertação para fornecer uma prova alternativa para essa relação de subaditividade da entropia condicional.

Corolário 5 *Para um sistema tri-partido abc temos que a entropia condicional é subaditiva, isto é,*

$$S_{a|bc} \leq S_{a|b} + S_{a|c} \quad (3.52)$$

Prova: Dado um sistema de 4 partes $abcd$, podemos obter as seguintes subaditividade forte da entropia de von Neumann

$$S_{a|d} + S_{a|b} = S_{ad} - S_d + S_{ab} - S_b = S_{bc} - S_{abc} + S_{ab} - S_b \geq 0 \quad (3.53)$$

$$S_{a|d} + S_{a|c} = S_{ad} - S_d + S_{ac} - S_c = S_{cb} - S_{acb} + S_{ac} - S_c \geq 0 \quad (3.54)$$

$$S_{a|c} + S_{a|b} = S_{ac} - S_c + S_{ab} - S_b = S_{bd} - S_{abd} + S_{ab} - S_b \geq 0. \quad (3.55)$$

Observe que somando as Eqs. (3.53), (3.54) e (3.55) obtemos

$$S_{a|b} + S_{a|c} + S_{a|d} \geq 0, \quad (3.56)$$

que pode ser reescrita como sendo

$$S_{a|b} + S_{a|c} + S_{a|d} = S_{a|b} + S_{a|c} + S_{ad} - S_d = S_{a|b} + S_{a|c} - S_{a|bc} \geq 0. \quad (3.57)$$

■

3.2.2 Relações cíclicas para 4 partes

Considerando um ciclo de IIL por medidas no sentido horário ($\dots d \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a \dots$) e os EFs ($a \rightarrow bc, b \rightarrow cd, c \rightarrow da, d \rightarrow ab$), podemos escrever da relação fundamental entre EF e DQ as seguintes equações

$$E_{a,bc} = \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|d} \quad (3.58)$$

$$E_{b,cd} = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + S_{b|a} \quad (3.59)$$

$$E_{c,da} = \delta_{c|b}^{\leftarrow} + S_{c|b} \quad (3.60)$$

$$E_{d,ab} = \delta_{d|c}^{\leftarrow} + S_{d|c}. \quad (3.61)$$

Somando as Eqs. (3.58) até (3.61), nós obtemos,

$$E_{a,bc} + E_{b,cd} + E_{c,da} + E_{d,ab} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} - \delta_{d|c}^{\leftarrow} - \delta_{c|b}^{\leftarrow} - \delta_{b|a}^{\leftarrow} = S_{a|d} + S_{b|a} + S_{c|b} + S_{d|c} \quad (3.62)$$

Podemos reescrever a soma das entropias da Eq. (3.62) como sendo positiva, pois por meio da decomposição de Schimdt (Sec. 2.2.4) percebemos que elas podem ser expressadas como duas subaditividades forte da entropia de von Neumann. Observe

que

$$\begin{aligned}
S_{a|d} + S_{b|a} + S_{c|b} + S_{d|c} & \\
&= S_{ad} - S_d + S_{ba} - S_a + S_{cb} - S_b + S_{dc} - S_c \\
&= (S_{ba} + S_{cb} - S_b - S_d) + (S_{ad} + S_{dc} - S_a - S_c) \\
&= (S_{ab} + S_{bc} - S_b - S_{abc}) + (S_{bc} + S_{cd} - S_c - S_{bcd}) \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto para ciclos fechados de discórdias para sistemas de 4 partes, temos também a desigualdade

$$E_{a,bc} + E_{b,cd} + E_{c,da} + E_{d,ab} \geq \delta_{d|a}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow}. \quad (3.63)$$

Como as desigualdades ocorreu para o caso cíclico de 4 partes, mostra-se ser uma particularidade de sistemas de número par de partes.

Vamos agora obter uma equação análoga a Eq. (3.63) com medidas no sentido anti-horário para o ciclo de IIL (... $d \leftarrow a \leftarrow b \leftarrow c \leftarrow d \leftarrow a \dots$) e os EF ($d \rightarrow bc, a \rightarrow cd, b \rightarrow da, c \rightarrow ab$), podemos escrever as seguintes equações fundamentais entre EF e DQ

$$E_{d,bc} = \delta_{d|a}^{\leftarrow} + S_{d|a} \quad (3.64)$$

$$E_{a,cd} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|b} \quad (3.65)$$

$$E_{b,da} = \delta_{b|c}^{\leftarrow} + S_{b|c} \quad (3.66)$$

$$E_{c,ab} = \delta_{c|d}^{\leftarrow} + S_{c|d}. \quad (3.67)$$

Somando as Eqs. de (3.64) até (3.67), nós obtemos

$$E_{d,bc} + E_{a,cd} + E_{b,da} + E_{c,ab} - \delta_{d|a}^{\leftarrow} - \delta_{c|d}^{\leftarrow} - \delta_{b|c}^{\leftarrow} - \delta_{a|b}^{\leftarrow} = S_{d|a} + S_{a|b} + S_{b|c} + S_{c|d}. \quad (3.68)$$

Reescrevendo a soma das entropias da Eq. (3.68) e usando a decomposição de Schimdt (Sec. 2.2.4) percebemos que elas também podem ser expressadas como duas subaditividades forte da entropia de von Neumann,

$$\begin{aligned}
S_{d|a} + S_{a|b} + S_{b|c} + S_{c|d} & \\
&= S_{da} - S_a + S_{ab} - S_b + S_{bc} - S_c + S_{cd} - S_d \\
&= (S_{ab} + S_{cb} - S_b - S_d) + (S_{da} + S_{cd} - S_a - S_c) \\
&= (S_{ab} + S_{bc} - S_b - S_{abc}) + (S_{bc} + S_{cd} - S_c - S_{bcd}) \geq 0.
\end{aligned}$$

Isso nos leva a

$$E_{d,bc} + E_{a,cd} + E_{b,da} + E_{c,ab} \geq \delta_{d|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow}. \quad (3.69)$$

Vamos considerar agora um ciclo no sentido horário com medidas em sistemas duplos afim de determinar a IIL para o sistema seguinte. Dado o ciclo, $(\dots(ab) \rightarrow c, (bc) \rightarrow d, (cd) \rightarrow a, (da) \rightarrow b, (ab) \rightarrow c\dots)$. Temos então que fazer outras partições do sistema para o EF. Considerando os EF da forma $(a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow a)$, teremos

$$E_{a,b} = \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|cd} \quad (3.70)$$

$$E_{b,c} = \delta_{b|da}^{\leftarrow} + S_{b|da} \quad (3.71)$$

$$E_{c,d} = \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + S_{c|ab} \quad (3.72)$$

$$E_{d,a} = \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + S_{d|bc}. \quad (3.73)$$

De forma que, se somarmos as Eqs. de (3.70) até (3.73), obtemos,

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{c,d} + E_{d,a} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow} - \delta_{d|bc}^{\leftarrow} - \delta_{c|ab}^{\leftarrow} - \delta_{b|da}^{\leftarrow} = S_{a|cd} + S_{b|da} + S_{c|ab} + S_{d|bc}. \quad (3.74)$$

Novamente, analisando a soma das entropias condicionais separadamente, percebemos que

$$\begin{aligned} S_{a|cd} + S_{b|da} + S_{c|ab} + S_{d|bc} &= S_{acd} - S_{cd} + S_{bda} - S_{da} + S_{cab} - S_{ab} + S_{dbc} - S_{cb} \\ &= (S_{acd} - S_{cd} - S_{da} + S_{cab}) + (S_{bda} - S_{ab} - S_{cb} + S_{dbc}) \\ &= (S_{adc} - S_{dc} - S_{ad} + S_d) + (S_{bad} - S_{ba} - S_{ad} + S_a) \leq 0. \end{aligned}$$

que correspondem a duas subaditividades fortes com sinais invertidos. Logo, a relação cíclica para essa configuração de partições é

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{c,d} + E_{d,a} \leq \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{b|da}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow}. \quad (3.75)$$

Conforme esperado, é análoga a relação de desigualdade da Eq. (3.49). Observamos que essa relação cíclica também tem medidas no sentido horário.

Já para o ciclo $(\dots a \leftarrow (bc), b \leftarrow (cd), c \leftarrow (da), d \leftarrow (ab), a \leftarrow (bc)\dots)$, onde realizamos medidas em sistemas duplos no sentido anti-horário devemos escrever as seguintes relações

$$E_{b,a} = \delta_{b|dc}^{\leftarrow} + S_{b|dc} \quad (3.76)$$

$$E_{c,b} = \delta_{c|ad}^{\leftarrow} + S_{c|ad} \quad (3.77)$$

$$E_{d,c} = \delta_{d|ba}^{\leftarrow} + S_{d|ba} \quad (3.78)$$

$$E_{a,d} = \delta_{a|cb}^{\leftarrow} + S_{a|cb}. \quad (3.79)$$

Somando de (3.76) até (3.79), obtemos,

$$E_{b,a} + E_{c,b} + E_{d,c} + E_{a,d} - \delta_{b|dc}^{\leftarrow} - \delta_{c|ad}^{\leftarrow} - \delta_{d|ba}^{\leftarrow} - \delta_{a|cb}^{\leftarrow} = S_{b|dc} + S_{c|ad} + S_{d|ba} + S_{a|cb}. \quad (3.80)$$

A soma das entropias condicionais na Eq. (3.80) é negativa, conforme podemos ver

$$\begin{aligned} S_{b|dc} + S_{c|ad} + S_{d|ba} + S_{a|cb} &= \\ S_{bdc} - S_{dc} + S_{cad} - S_{ad} + S_{dba} - S_{ba} + S_{acb} - S_{cb} &= \\ (S_{cad} - S_{cb} - S_{ba} + S_{acb}) + (S_{bcd} - S_{ad} - S_{bc} + S_{dab}) &= \\ (S_{abc} - S_{bc} - S_{ab} + S_b) + (S_{bcd} - S_{bc} - S_{cd} + S_c) &\leq 0. \end{aligned}$$

que correspondem a duas subaditividades forte negativas. Assim, teremos a relação cíclica no sentido anti-horário, que é dada por

$$E_{b,a} + E_{c,b} + E_{d,c} + E_{a,d} \leq \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{b|cd}^{\leftarrow} + \delta_{c|da}^{\leftarrow} + \delta_{d|ab}^{\leftarrow}. \quad (3.81)$$

Sabemos que o emaranhamento é simétrico, isto é, $E_{b,a} = E_{a,b}$. Sendo assim, os esses dois ciclos (horário e anti-horário) são limitados inferiormente pela mesma quantidade.

Por analogia a Eq. (3.51) podemos obter uma equação de conservação para EF e DQ para sistemas cíclicos. Para o sentido horário, somando as Eq. (3.62) e (3.74), obtemos

$$\begin{aligned} E_{a,bc} + E_{b,cd} + E_{c,da} + E_{d,ab} + E_{a,b} + E_{b,c} + E_{c,d} + E_{d,a} &= \\ \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{b|da}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow} & \end{aligned}$$

e para o sentido anti-horário, somamos as Eq. (3.68) e (3.80) temos

$$\begin{aligned} E_{d,bc} + E_{a,cd} + E_{b,da} + E_{c,ab} + E_{b,a} + E_{c,b} + E_{d,c} + E_{a,d} &= \\ \delta_{d|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{b|cd}^{\leftarrow} + \delta_{c|da}^{\leftarrow} + \delta_{d|ab}^{\leftarrow} & \end{aligned}$$

3.3 Relações para sistemas puros de 5 partes

Para estudar as relações entre EF e DQ de sistemas de 5 partes, vamos considerar um sistema puro $abcde$. Vamos considerar também as partições do sistema de uma parte

com outro sistema contendo duas partes, assim escrevermos as seguintes equações

$$E_{a,bc} = \delta_{a|de}^{\leftarrow} + S_{a|de} \quad (3.82)$$

$$E_{a,de} = \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + S_{a|bc} \quad (3.83)$$

$$E_{a,bd} = \delta_{a|ce}^{\leftarrow} + S_{a|ce} \quad (3.84)$$

$$E_{a,ce} = \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + S_{a|bd} \quad (3.85)$$

$$E_{a,be} = \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|cd} \quad (3.86)$$

$$E_{a,cd} = \delta_{a|be}^{\leftarrow} + S_{a|be}. \quad (3.87)$$

Somando as Eqs. de (3.82) até (3.87) teremos

$$\begin{aligned} E_{a,bc} + E_{a,de} + E_{a,bd} + E_{a,ce} + E_{a,be} + E_{a,cd} \\ = \delta_{a|de}^{\leftarrow} + \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|ce}^{\leftarrow} + \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{a|be}^{\leftarrow} + \\ S_{a|de} + S_{a|bc} + S_{a|ce} + S_{a|bd} + S_{a|cd} + S_{a|be}. \end{aligned}$$

Reescrevendo a soma das entropias condicionais percebemos que elas se anulam,

$$\begin{aligned} (S_{a|de} + S_{a|bc}) + (S_{a|ce} + S_{a|bd}) + (S_{a|cd} + S_{a|be}) \\ = (S_{ade} - S_{de} + S_{abc} - S_{bc}) + (S_{ace} - S_{ce} + S_{abd} - S_{bd}) + (S_{acd} - S_{cd} + S_{abe} - S_{be}) \\ = (S_{bc} - S_{de} + S_{de} - S_{bc}) + (S_{bd} - S_{ce} + S_{ce} - S_{bd}) + (S_{be} - S_{cd} + S_{cd} - S_{be}) = 0. \end{aligned}$$

Logo, para um sistema puro $abcde$ a relação entre EF e DQ é

$$E_{a,bc} + E_{a,de} + E_{a,bd} + E_{a,ce} + E_{a,be} + E_{a,cd} \quad (3.88)$$

$$= \delta_{a|de}^{\leftarrow} + \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|ce}^{\leftarrow} + \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{a|be}^{\leftarrow}. \quad (3.89)$$

3.3.1 Relações cíclicas para 5 partes

Assim como para os outros casos de 3 e 4 partes, onde construímos relações que envolvem ciclos fechados de discórdias, vamos considerar a sequência cíclica de discórdia para o sistema quântico puro $abcde$. Para isso vamos escrever as seguintes relações entre EF e DQ

$$E_{a,bc} = \delta_{a|de}^{\leftarrow} + S_{a|de} \quad (3.90)$$

$$E_{b,cd} = \delta_{b|ea}^{\leftarrow} + S_{b|ea} \quad (3.91)$$

$$E_{c,de} = \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + S_{c|ab} \quad (3.92)$$

$$E_{d,ea} = \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + S_{d|bc} \quad (3.93)$$

$$E_{e,ab} = \delta_{e|cd}^{\leftarrow} + S_{e|cd}. \quad (3.94)$$

Somando as Eqs. de (3.90) à (3.94) temos

$$\begin{aligned} E_{a,bc} + E_{b,cd} + E_{c,de} + E_{d,ea} + E_{e,ab} \\ = \delta_{a|de}^{\leftarrow} + \delta_{b|ea}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + \delta_{e|cd}^{\leftarrow} \\ + S_{a|de} + S_{b|de} + S_{c|ab} + S_{d|bc} + S_{e|cd}, \end{aligned}$$

Novamente, resolvendo a soma de entropias condicionadas separadamente teremos

$$\begin{aligned} S_{a|de} + S_{b|ea} + S_{c|ab} + S_{d|bc} + S_{e|cd} \\ = S_{ade} - S_{de} + S_{bea} - S_{ea} + S_{cab} - S_{ab} + S_{dbc} - S_{bc} + S_{ecd} - S_{cd} \\ + S_{bc} - S_{de} + S_{cd} - S_{ea} + S_{de} - S_{ab} + S_{ea} - S_{bc} + S_{ab} - S_{cd} = 0. \end{aligned}$$

Logo, para o caso cíclico de 5 partes temos

$$E_{a,bc} + E_{b,cd} + E_{c,de} + E_{d,ea} + E_{e,ab} = \delta_{a|de}^{\leftarrow} + \delta_{b|ea}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + \delta_{e|cd}^{\leftarrow}, \quad (3.95)$$

que é uma relação com medidas cíclicas no sentido horário.

Similarmente, podemos construir uma relação para o ciclo no sentido anti-horário. Partindo das seguintes equações

$$E_{a,de} = \delta_{a|cb}^{\leftarrow} + S_{a|cb} \quad (3.96)$$

$$E_{b,ea} = \delta_{b|dc}^{\leftarrow} + S_{b|dc} \quad (3.97)$$

$$E_{c,ab} = \delta_{c|ed}^{\leftarrow} + S_{c|ed} \quad (3.98)$$

$$E_{d,bc} = \delta_{d|ae}^{\leftarrow} + S_{d|ae} \quad (3.99)$$

$$E_{e,cd} = \delta_{e|ba}^{\leftarrow} + S_{e|ba}. \quad (3.100)$$

temos que a soma das Eqs. de (3.96) à (3.100) resulta

$$\begin{aligned} E_{a,de} + E_{b,ea} + E_{c,ab} + E_{d,bc} + E_{e,cd} \\ = \delta_{a|cb}^{\leftarrow} + \delta_{b|dc}^{\leftarrow} + \delta_{c|ed}^{\leftarrow} + \delta_{d|ae}^{\leftarrow} + \delta_{e|ba}^{\leftarrow} \\ + S_{a|cb} + S_{b|dc} + S_{c|ed} + S_{d|ae} + S_{e|ba}, \end{aligned}$$

Novamente, notamos que a soma das entropias condicionais desaparece,

$$\begin{aligned} S_{a|cb} + S_{b|dc} + S_{c|ed} + S_{d|ae} + S_{e|ba} \\ = S_{acb} - S_{cb} + S_{bdc} - S_{dc} + S_{ced} - S_{ed} + S_{dae} - S_{ae} + S_{eba} - S_{ba} \\ + S_{de} - S_{cb} + S_{ae} - S_{dc} + S_{ab} - S_{ed} + S_{bc} - S_{ae} + S_{cd} - S_{ba} = 0, \end{aligned}$$

logo,

$$E_{a,de} + E_{b,ea} + E_{c,ab} + E_{d,bc} + E_{e,cd} = \delta_{a|cb}^{\leftarrow} + \delta_{b|dc}^{\leftarrow} + \delta_{c|ed}^{\leftarrow} + \delta_{d|ae}^{\leftarrow} + \delta_{e|ba}^{\leftarrow}.$$

3.4 Sistemas puros de 6 partes

Afim de entender o padrão das relações entre sistemas quânticos multi-partidos, analisamos sistemas de 4 e 5 partes. Notamos que sistemas de 4 partes apresenta particularidade em relação a sistemas de 3 e 5 partes. Os sistemas de 3 e 5 partes apresentaram relações de igualdade entre EF e DQ, já o sistema de 4 partes apresentou desigualdades, sendo que, dependendo de como particionamos o sistema, teremos que a soma dos EFs será maior que as DQs ou que a soma das DQs será maior que a soma dos EFs. Sendo assim, aguçou nossa curiosidade em estudar como essas relações se comportam para um sistema puro de 6 partes.

Dado um sistema de 6 partes, representado pelos números 123456. Escrevendo as combinações simples de EF do tipo $E_{1|ijk}$, onde $i \neq j \neq k \neq 1$ e são as demais partes do sistema. De forma que, da relação fundamental entre EF e DQ, teremos as seguintes equações

$$E_{1,234} = \delta_{1|56}^{\leftarrow} + S_{1|56} \quad (3.101)$$

$$E_{1,456} = \delta_{1|23}^{\leftarrow} + S_{1|23} \quad (3.102)$$

$$E_{1,345} = \delta_{1|26}^{\leftarrow} + S_{1|26} \quad (3.103)$$

$$E_{1,562} = \delta_{1|34}^{\leftarrow} + S_{1|34} \quad (3.104)$$

$$E_{1,236} = \delta_{1|45}^{\leftarrow} + S_{1|45} \quad (3.105)$$

$$E_{1,245} = \delta_{1|36}^{\leftarrow} + S_{1|36} \quad (3.106)$$

$$E_{1,346} = \delta_{1|25}^{\leftarrow} + S_{1|25} \quad (3.107)$$

$$E_{1,235} = \delta_{1|46}^{\leftarrow} + S_{1|46} \quad (3.108)$$

$$E_{1,246} = \delta_{1|35}^{\leftarrow} + S_{1|35} \quad (3.109)$$

$$E_{1,356} = \delta_{1|24}^{\leftarrow} + S_{1|24}. \quad (3.110)$$

Analisando somente a soma das entropias condicionais de (3.101) até (3.110) percebemos

que

$$\begin{aligned}
& (S_{1|56} + S_{1|23}) + (S_{1|26} + S_{1|34}) + (S_{1|45} + S_{1|36}) + (S_{1|25} + S_{1|46}) + (S_{1|35} + S_{1|24}) = \\
& (S_{156} - S_{56} + S_{123} - S_{23}) + (S_{126} - S_{26} + S_{134} - S_{34}) + (S_{145} - S_{45} + S_{136} - S_{36}) \\
& \quad + (S_{125} - S_{25} + S_{146} - S_{46}) + (S_{135} - S_{35} + S_{124} - S_{24}) = \\
& (S_{234} - S_{1234} + S_{123} - S_{23}) + (S_{345} - S_{1345} + S_{134} - S_{34}) + (S_{362} - S_{1362} + S_{136} - S_{36}) \\
& \quad + (S_{463} - S_{1463} + S_{146} - S_{46}) + (S_{246} - S_{1246} + S_{124} - S_{24}) \geq 0,
\end{aligned}$$

ou seja, temos 5 subaditividades forte da entropia de von Neumann. Isso implica que se somarmos as Eqs. de (3.101) à (3.110) obtemos uma equação em que a soma dos EFs é maior ou igual que a soma DQs,

$$\begin{aligned}
& E_{1,234} + E_{1,456} + E_{1,345} + E_{1,562} + E_{1,236} + E_{1,245} + E_{1,345} + E_{1,235} + E_{1,246} + E_{1,356} \\
& \geq \delta_{1|56}^{\leftarrow} + \delta_{1|23}^{\leftarrow} + \delta_{1|26}^{\leftarrow} + \delta_{1|34}^{\leftarrow} + \delta_{1|45}^{\leftarrow} + \delta_{1|36}^{\leftarrow} + \delta_{1|25}^{\leftarrow} + \delta_{1|46}^{\leftarrow} + \delta_{1|35}^{\leftarrow} + \delta_{1|24}^{\leftarrow}. \tag{3.111}
\end{aligned}$$

Observe que podemos utilizar outro artifício para obter essas EQs. Podemos obter a relação

$$E_{1,234} + E_{1,456} \geq \delta_{1|56}^{\leftarrow} + \delta_{1|23}^{\leftarrow},$$

da equação de 4 partes

$$E_{a,bc} + E_{a,cd} \geq \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow},$$

fazendo a como o sistema 1 e particionar o sistema 123456 em três partes, de forma que podemos associar o sistema bc ao sistema 234 e analogamente o sistema cd à 456. Já para as discórdias, a letra d assume o papel do sistema 56 e b de 23, já que a parte que se repete para o EF é o sistema c .

Outra partição do sistema nos conduz a resultados em que a soma das DQs é maior que a soma dos EF. Considere o sistema 1 emaranhado com um sistema duplo, da

relação fundamental entre EF e DQ temos

$$E_{1,23} = \delta_{1|456}^{\leftarrow} + S_{1|456} \quad (3.112)$$

$$E_{1,56} = \delta_{1|234}^{\leftarrow} + S_{1|234} \quad (3.113)$$

$$E_{1,26} = \delta_{1|345}^{\leftarrow} + S_{1|345} \quad (3.114)$$

$$E_{1,34} = \delta_{1|256}^{\leftarrow} + S_{1|256} \quad (3.115)$$

$$E_{1,45} = \delta_{1|236}^{\leftarrow} + S_{1|236} \quad (3.116)$$

$$E_{1,36} = \delta_{1|245}^{\leftarrow} + S_{1|245} \quad (3.117)$$

$$E_{1,25} = \delta_{1|346}^{\leftarrow} + S_{1|346} \quad (3.118)$$

$$E_{1,46} = \delta_{1|235}^{\leftarrow} + S_{1|235} \quad (3.119)$$

$$E_{1,35} = \delta_{1|246}^{\leftarrow} + S_{1|246} \quad (3.120)$$

$$E_{1,24} = \delta_{1|356}^{\leftarrow} + S_{1|356}. \quad (3.121)$$

Somando as entropias condicionais da Eq. (3.112) até (3.121), temos que

$$\begin{aligned} & (S_{1|456} + S_{1|234}) + (S_{1|345} + S_{1|256}) + (S_{1|236} + S_{1|245}) + (S_{1|346} + S_{1|235}) + (S_{1|246} + S_{1|356}) = \\ & (S_{1456} - S_{456} + S_{1234} - S_{234}) + (S_{1345} - S_{345} + S_{1256} - S_{256}) + (S_{1236} - S_{236} + S_{1245} - S_{245}) \\ & \quad + (S_{1346} - S_{346} + S_{1235} - S_{235}) + (S_{1246} - S_{246} + S_{1356} - S_{356}) = \\ & (S_{1564} - S_{456} + S_{56} - S_{561}) + (S_{1345} - S_{345} + S_{34} - S_{134}) + (S_{1362} - S_{236} + S_{36} - S_{361}) \\ & \quad + (S_{1463} - S_{346} + S_{46} - S_{461}) + (S_{1246} - S_{246} + S_{24} - S_{124}) \leq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, se somarmos as Eqs. de (3.112) à (3.121) temos

$$\begin{aligned} & E_{1,23} + E_{1,56} + E_{1,26} + E_{1,34} + E_{1,45} + E_{1,36} + E_{1,25} + E_{1,46} + E_{1,35} + E_{1,24} \leq \\ & \delta_{1|456}^{\leftarrow} + \delta_{1|234}^{\leftarrow} + \delta_{1|345}^{\leftarrow} + \delta_{1|256}^{\leftarrow} + \delta_{1|236}^{\leftarrow} + \delta_{1|245}^{\leftarrow} + \delta_{1|346}^{\leftarrow} + \delta_{1|235}^{\leftarrow} + \delta_{1|246}^{\leftarrow} + \delta_{1|356}^{\leftarrow}. \quad (3.122) \end{aligned}$$

3.4.1 Relações cíclicas para 6 partes

Vamos construir também relações que envolvem ciclos fechados de DQs para sistemas de 6 partes e verificar se os resultados são análogos aos de 4 partes, assim como as relações já mostradas na seção 3.4.

Considerando o ciclo (... \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow ...), podemos realizar medidas duplas em sistemas subsequentes no sentido horário do ciclo de forma a determinar a quantidade de IIL do sistema seguinte. Essas medidas são equacionadas

pela relação fundamental entre EF e DQ

$$E_{1,234} = \delta_{1|56}^{\leftarrow} + S_{1|56} \quad (3.123)$$

$$E_{2,345} = \delta_{2|61}^{\leftarrow} + S_{2|61} \quad (3.124)$$

$$E_{3,456} = \delta_{3|12}^{\leftarrow} + S_{3|12} \quad (3.125)$$

$$E_{4,561} = \delta_{4|23}^{\leftarrow} + S_{4|23} \quad (3.126)$$

$$E_{5,612} = \delta_{5|34}^{\leftarrow} + S_{5|34} \quad (3.127)$$

$$E_{6,123} = \delta_{6|45}^{\leftarrow} + S_{6|45}. \quad (3.128)$$

Fazendo a soma das Eqs. (3.123) à (3.128), percebemos que a soma das entropias resultam em

$$\begin{aligned} & S_{1|56} + S_{2|61} + S_{3|12} + S_{4|23} + S_{5|34} + S_{6|45} = \\ & S_{156} - S_{56} + S_{261} - S_{61} + S_{312} - S_{12} + S_{423} - S_{23} + S_{534} - S_{34} + S_{645} - S_{45} = \\ & (S_{156} - S_{61} + S_{261} - S_{34}) + (S_{312} - S_{12} + S_{534} - S_{45}) + (S_{423} - S_{23} + S_{645} - S_{56}) = \\ & (S_{615} - S_{61} + S_{261} - S_{2615}) + (S_{123} - S_{12} + S_{612} - S_{3126}) + (S_{234} - S_{23} + S_{123} - S_{1234}) \geq 0. \end{aligned}$$

Logo podemos concluir que

$$\begin{aligned} E_{1,234} + E_{2,345} + E_{3,456} + E_{4,561} + E_{5,612} + E_{6,123} \geq \\ \delta_{1|56}^{\leftarrow} + \delta_{2|61}^{\leftarrow} + \delta_{3|12}^{\leftarrow} + \delta_{4|23}^{\leftarrow} + \delta_{5|34}^{\leftarrow} + \delta_{6|45}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Considerando agora o ciclo (... \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow ...), podemos também fazer medidas duplas em sistemas subsequentes, só que agora seguindo o sentido anti-horário do ciclo. Temos que as respectivas relações fundamentais entre EF e DQ para esse são

$$E_{4,123} = \delta_{4|65}^{\leftarrow} + S_{4|65} \quad (3.130)$$

$$E_{5,234} = \delta_{5|16}^{\leftarrow} + S_{5|16} \quad (3.131)$$

$$E_{6,345} = \delta_{6|21}^{\leftarrow} + S_{6|21} \quad (3.132)$$

$$E_{1,456} = \delta_{1|32}^{\leftarrow} + S_{1|32} \quad (3.133)$$

$$E_{2,561} = \delta_{2|43}^{\leftarrow} + S_{2|43} \quad (3.134)$$

$$E_{3,612} = \delta_{3|54}^{\leftarrow} + S_{3|54}. \quad (3.135)$$

Analogamente, a soma das entropias pode ser agrupadas em 3 subaditividades forte da

entropia de von Neumann, resultando

$$\begin{aligned}
 & S_{4|65} + S_{5|16} + S_{6|21} + S_{1|32} + S_{2|43} + S_{3|54} = \\
 & S_{465} - S_{65} + S_{516} - S_{16} + S_{621} - S_{21} + S_{132} - S_{32} + S_{243} - S_{43} + S_{354} - S_{54} = \\
 & (S_{465} - S_{65} + S_{243} - S_{32}) + (S_{354} - S_{21} + S_{132} - S_{54}) + (S_{516} - S_{16} + S_{621} - S_{43}) = \\
 & (S_{465} - S_{65} + S_{651} - S_{4651}) + (S_{621} - S_{21} + S_{213} - S_{6213}) + (S_{516} - S_{16} + S_{162} - S_{5162}) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 E_{1,456} + E_{2,561} + E_{3,612} + E_{4,123} + E_{5,234} + E_{6,345} \geq \\
 \delta_{1|32}^{\leftarrow} + \delta_{2|43}^{\leftarrow} + \delta_{3|54}^{\leftarrow} + \delta_{4|65}^{\leftarrow} + \delta_{5|16}^{\leftarrow} + \delta_{6|21}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

Para os ciclos apresentados acima, podemos também obter a IIL de um sistema realizando medidas triplas com sistemas subsequentes. Onde para o primeira caso, no sentido horário temos as seguintes relações fundamentais EF e DQ

$$E_{1,23} = \delta_{1|456}^{\leftarrow} + S_{1|456} \tag{3.137}$$

$$E_{2,34} = \delta_{2|561}^{\leftarrow} + S_{2|561} \tag{3.138}$$

$$E_{3,45} = \delta_{3|612}^{\leftarrow} + S_{3|612} \tag{3.139}$$

$$E_{4,56} = \delta_{4|123}^{\leftarrow} + S_{4|123} \tag{3.140}$$

$$E_{5,61} = \delta_{5|234}^{\leftarrow} + S_{5|234} \tag{3.141}$$

$$E_{6,12} = \delta_{6|345}^{\leftarrow} + S_{6|345}. \tag{3.142}$$

Somando as Eqs. (3.137) até (3.142), e analisando a soma das entropias separadamente observamos que

$$\begin{aligned}
 & S_{1|456} + S_{2|561} + S_{3|612} + S_{4|123} + S_{5|234} + S_{6|345} = \\
 & S_{1456} - S_{456} + S_{2561} - S_{561} + S_{3612} - S_{612} + S_{4123} - S_{123} + S_{5234} - S_{234} + S_{6345} - S_{345} = \\
 & (S_{2561} - S_{561} + S_{5234} - S_{612}) + (S_{3612} - S_{123} + S_{6345} - S_{345}) + (S_{1456} - S_{456} + S_{4123} - S_{234}) = \\
 & (S_{2165} - S_{216} + S_{16} - S_{165}) + (S_{3126} - S_{312} + S_{12} - S_{126}) + (S_{1234} - S_{123} + S_{23} - S_{234}) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Assim concluímos que também há uma relação cíclica para essa configuração de discórdia que é dada por

$$\begin{aligned}
 E_{1,23} + E_{2,34} + E_{3,45} + E_{4,56} + E_{5,61} + E_{6,12} \leq \\
 \delta_{1|456}^{\leftarrow} + \delta_{2|561}^{\leftarrow} + \delta_{3|612}^{\leftarrow} + \delta_{4|123}^{\leftarrow} + \delta_{5|234}^{\leftarrow} + \delta_{6|345}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{3.143}$$

Dessa forma obtemos a relação cíclica no sentido horário para esse tipo de partição no

sistema.

De forma análoga, podemos também obter também a relação cíclica no sentido anti-horário escrevendo e somando as seguintes equações

$$E_{3,12} = \delta_{3|654}^{\leftarrow} + S_{3|654} \quad (3.144)$$

$$E_{4,23} = \delta_{4|165}^{\leftarrow} + S_{4|165} \quad (3.145)$$

$$E_{5,34} = \delta_{5|216}^{\leftarrow} + S_{5|216} \quad (3.146)$$

$$E_{6,45} = \delta_{6|321}^{\leftarrow} + S_{6|321} \quad (3.147)$$

$$E_{1,56} = \delta_{1|432}^{\leftarrow} + S_{1|432} \quad (3.148)$$

$$E_{2,61} = \delta_{2|543}^{\leftarrow} + S_{2|543}. \quad (3.149)$$

Analisando as entropias condicionais da soma das Eqs. (3.144) até (3.149), percebemos que

$$\begin{aligned} & S_{1|432} + S_{2|543} + S_{3|654} + S_{4|165} + S_{5|216} + S_{6|321} = \\ & S_{1432} - S_{432} + S_{2543} - S_{543} + S_{3654} - S_{654} + S_{4165} - S_{165} + S_{5216} - S_{216} + S_{6321} - S_{321} = \\ & (S_{2543} - S_{165} + S_{5216} - S_{216}) + (S_{3654} - S_{123} + S_{6321} - S_{345}) + (S_{4561} - S_{456} + S_{1234} - S_{234}) = \\ & (S_{2165} - S_{216} + S_{16} - S_{165})(S_{3126} - S_{312} + S_{12} - S_{126}) + (S_{1234} - S_{123} + S_{23} - S_{234}) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & E_{1,56} + E_{2,61} + E_{3,12} + E_{4,23} + E_{5,34} + E_{6,45} \leq \\ & \delta_{1|432}^{\leftarrow} + \delta_{2|543}^{\leftarrow} + \delta_{3|654}^{\leftarrow} + \delta_{4|165}^{\leftarrow} + \delta_{5|216}^{\leftarrow} + \delta_{6|321}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Os resultados para sistemas puros de 6 partes e de 4 partes são análogos, já que podemos obter um resultado a partir do outro. Temos mostrado que essas relações entre EF e DQ para sistemas com número par de partes tem características diferenciadas dos sistemas puros com número ímpar de partes, ou seja, só conseguimos relações de conservação quando somamos todas as combinações de EF e DQ conforme mostramos na Eq. (3.51). Percebemos que é possível fazer uma generalização para relações entre EF e DQ para sistemas de n partes, porém, quando n é ímpar, essa generalização é simples e mostraremos na Sec. 3.5. Para sistemas onde n é par, a generalização é complicada, mesmo conhecendo o padrão de obtenção dessas relações.

3.5 Generalização de Relações de EF e DQ

Ao estudarmos relações matemáticas para sistemas físicos que dependem da quantidade de sistemas envolvidos, se já não existe a relação geral, temos curiosidade e

necessidade de obter essa generalização, facilitando assim a aplicação desses conceitos em novas teorias. Quando se trata de emaranhamento multi-partido, a necessidade é ainda maior, por esse conceito ser o meio físico para a Computação Quântica. Analisando os resultados de distribuição de emaranhamento e discórdia para sistemas de 3, 4, 5 e 6 partes percebemos padrões que mostraram que essas relações poderiam ser generalizadas. Até o momento temos generalizado as relações que envolvem EF e DQ para um sistema central e as combinações simples dos demais subsistemas.

3.5.1 EF e DQ para sistemas com número ímpar de partes

Considerando um sistema de N partes, representado por números de 1 até N , onde N é ímpar. Vamos particionar esse sistema em 3 partes, sendo a primeira parte, o subsistema 1 como central, de forma que temos agora para as demais partições um número par de subsistemas. Repartindo então em partes iguais, olhando o ordenamento dos sistemas, temos que M e M' representam os sistemas do meio nessa ordem, e são dados por

$$M = \frac{N + 1}{2}$$

e

$$M' = M + 1.$$

Podemos agora escrever as relações fundamentais entre EF e DQ para esse sistema, fazendo as combinações simples possíveis.

$$\begin{aligned} E_{1,2\dots M} &= \delta_{1|M'\dots N}^{\leftarrow} + S_{1|M'\dots N} \\ E_{1,M'\dots N} &= \delta_{1|2\dots M}^{\leftarrow} + S_{1|2\dots M} \\ E_{1,2\dots M'} &= \delta_{1|M\dots N}^{\leftarrow} + S_{1|M\dots N} \\ E_{1,M\dots N} &= \delta_{1|2\dots M'}^{\leftarrow} + S_{1|2\dots M'} \\ &\cdot = \cdot \\ &\cdot = \cdot \\ &\cdot = \cdot \\ E_{1,2\dots N} &= \delta_{1|3\dots MM'}^{\leftarrow} + S_{1|3\dots MM'} \\ E_{1,3\dots MM'} &= \delta_{1|2\dots N}^{\leftarrow} + S_{1|2\dots N}. \end{aligned}$$

Estamos combinando $N - 1$ subsistemas em dois grupos de $\frac{N-1}{2}$ subsistemas cada. Observe que, somando todas as entropias condicionais dessas equações usando decom-

posição de Schimdt, obtemos

$$\begin{aligned}
& S_{1|M'...N} + S_{1|2...M} + S_{1|M...N} + S_{1|2...M'} + \dots + S_{1|3...MM'} + S_{1|2...N} \\
&= S_{1M'...N} - S_{M'...N} + S_{12...M} - S_{2...M} + S_{1M...N} - S_{M...N} + S_{12...M'} - S_{2...M'} \\
&\quad + \dots + S_{13...MM'} - S_{3...MM'} + S_{12...N} - S_{2...N} \\
&= S_{2...M} - S_{M'...N} + S_{M'...N} - S_{2...M} + S_{2...M'} - S_{M...N} + S_{M...N} - S_{2...M'} \\
&\quad + \dots + S_{2...N} - S_{3...MM'} + S_{3...MM'} - S_{2...N} = 0. \quad (3.151)
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que para sistemas com quantidade ímpar de subsistemas, com um sistema central o EF e a DQ se distribui na forma da equação

$$\sum_i^L E_{1,\Lambda_i} = \sum_i^L \delta_{1|\Omega_i}^{\leftarrow}, \quad (3.152)$$

onde Λ_i e Ω_i são todas as combinações simples possíveis do sistema de N partes. A variável L é a quantidade de combinações possíveis, sendo dada por

$$L = \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)! \left(\frac{N-1}{2}\right)!}, \quad (3.153)$$

para $N \geq 7$, pois os casos de 3 e 5 partes são demonstrados na Ref. [20] e nesta dissertação respectivamente.

3.6 Emaranhamento e Trabalho

Na Sec. 2.5.1, discutimos o principal resultado da Ref. [50], sendo a Eq. (2.136), que é dada por

$$\Delta W = k_{B_2} T \delta_{s|a}^{\leftarrow}, \quad (3.154)$$

onde s representa um sistema quântico e a um aparato de medida. Essa equação relaciona o trabalho extra com a discórdia quântica, onde entende-se por trabalho extra a diferença entre o trabalho que um demônio de Maxwell quântico pode extrair, em princípio, do sistema por operações globais (W^Q) e o trabalho que pode ser extraído pelo demônio de Maxwell clássico realizando medidas locais (W^C), que é dado por

$$\Delta W = W^Q - W^C. \quad (3.155)$$

Essa equação mostra que o demônio quântico consegue extrair mais trabalho que o demônio clássico, mostrando que a diferença entre a eficiência dos dois é a discórdia quântica, que é a medida de correlações que estamos estudando nesta dissertação. Além disso, fornece uma interpretação alternativa para discórdia quântica. A discórdia é in-

terpretada como a quantidade de informação inacessível localmente, porém, passa assim a representar uma diferença de trabalho, tendo então conexão com a termodinâmica.

Assim como fizemos a conexão de emaranhamento com discórdia, podemos construir uma relação entre emaranhamento e essa diferença de trabalho. Escrevendo a discórdia na forma

$$\delta_{s|a} = \beta_2 \Delta W_{s|a}, \quad (3.156)$$

onde $\beta_2 = \frac{1}{k_{B2}}$ sendo que o índice 2 é uma adaptação para lidar com o fato de a entropia ser expressada em bits.

Para sistemas puros, das equações (3.10), (3.27), (3.84), (3.49), (3.63), (3.75), (3.89), (3.95), (3.111), (3.122), (3.129), (3.143), temos que para sistemas puros de 3 partes temos

$$E_{a,b} + E_{a,c} = \beta_2 (\Delta W_{a|b} + \Delta W_{a|c}). \quad (3.157)$$

Para o caso cíclico no sentido horário de 3 partes temos

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{c,a} = \beta_2 (\Delta W_{c|a} + \Delta W_{b|c} + \Delta W_{a|b}), \quad (3.158)$$

e no sentido anti-horário

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{c,a} = \beta_2 (\Delta W_{b|a} + \Delta W_{c|b} + \Delta W_{a|c}). \quad (3.159)$$

Para os sistemas de 4 partes não temos relações com igualdades, e com as diferenças associadas a cada tipo de emaranhamento, para o primeiro caso temos

$$E_{a,bc} + E_{a,cd} + E_{a,db} \geq \beta_2 (\Delta W_{a|b} + \Delta W_{a|c} + \Delta W_{a|d}), \quad (3.160)$$

já para o segundo caso a equação é análoga, com a particularidade de a soma das diferenças dos trabalhos serem maior que a soma dos emaranhamentos, conforme podemos ver nesta equação dada por

$$E_{a,b} + E_{a,c} + E_{a,d} \leq \beta_2 (\Delta W_{a|bc} + \Delta W_{a|cd} + \Delta W_{a|bd}). \quad (3.161)$$

Para sistemas de 4 partes, e para seus respectivos casos cíclicos no sentido horário temos

$$E_{a,bc} + E_{b,cd} + E_{c,da} + E_{d,ab} \geq \beta_2 (\Delta W_{a|d} + \Delta W_{b|a} + \Delta W_{c|b} + \Delta W_{d|c}) \quad (3.162)$$

e

$$E_{a,b} + E_{b,c} + E_{c,d} + E_{d,a} \leq \beta_2 (\Delta W_{a|cd} + \Delta W_{b|da} + \Delta W_{c|ab} + \Delta W_{d|bc}). \quad (3.163)$$

Para o sentido anti-horário temos

$$E_{d,bc} + E_{a,cd} + E_{b,da} + E_{c,ab} \geq \beta_2(\Delta W_{d|a} + \Delta W_{c|d} + \Delta W_{b|c} + \Delta W_{a|b}) \quad (3.164)$$

e

$$E_{b,a} + E_{c,b} + E_{d,c} + E_{a,d} \leq \beta_2(\Delta W_{d|ba} + \Delta W_{c|ad} + \Delta W_{b|dc} + \Delta W_{a|cb}). \quad (3.165)$$

O caso de 5 partes é análogo ao de três, a conexão de emaranhamento com a termodinâmica para sistemas quânticos puros de 5 partes é dado pelas duas equações abaixo

$$\begin{aligned} E_{a,bc} + E_{a,de} + E_{a,bd} + E_{a,ce} + E_{a,be} + E_{a,cd} \\ = \beta_2(\Delta W_{a|de} + \Delta W_{a|bc} + \Delta W_{a|ce} + \Delta W_{a|bd} + \Delta W_{a|cd} + \Delta W_{a|be}). \end{aligned}$$

Onde o caso cíclico no sentido horário é

$$\begin{aligned} E_{a,bc} + E_{b,cd} + E_{c,de} + E_{d,ea} + E_{e,ab} \\ = \beta_2(\Delta W_{a|de} + \Delta W_{b|ea} + \Delta W_{c|ab} + \Delta W_{d|bc} + \Delta W_{e|cd}) \end{aligned}$$

e no sentido anti-horário

$$\begin{aligned} E_{a,de} + E_{b,ea} + E_{c,ab} + E_{d,bc} + E_{e,cd} \\ = \beta_2(\Delta W_{e|ba} + \Delta W_{d|ae} + \Delta W_{c|ed} + \Delta W_{b|dc} + \Delta W_{a|cb}). \end{aligned}$$

Por fim, temos as relações que envolvem sistemas puros de 6 partes, onde sua relação com a termodinâmica é dada por

$$\begin{aligned} E_{1,234} + E_{1,456} + E_{1,345} + E_{1,562} + E_{1,236} + E_{1,245} + E_{1,345} + E_{1,235} + E_{1,246} + E_{1,356} \\ \geq \beta_2(\Delta W_{1|56} + \Delta W_{1|23} + \Delta W_{1|26} + \Delta W_{1|34} + \Delta W_{1|45} \\ + \Delta W_{1|36} + \Delta W_{1|25} + \Delta W_{1|46} + \Delta W_{1|35} + \Delta W_{1|24}), \end{aligned}$$

para a outra forma de emaranhamento nos temos

$$\begin{aligned} E_{1,23} + E_{1,56} + E_{1,26} + E_{1,34} + E_{1,45} + E_{1,36} + E_{1,25} + E_{1,46} + E_{1,35} + E_{1,24} \\ \leq \beta_2(\Delta W_{1|456} + \Delta W_{1|234} + \Delta W_{1|345} + \Delta W_{1|256} + \Delta W_{1|136} + \\ \Delta W_{1|245} + \Delta W_{1|346} + \Delta W_{1|235} + \Delta W_{1|246} + \Delta W_{1|356}). \end{aligned}$$

Para as relações cíclicas de 6 partes temos quatro casos. Para o sentido horário temos

$$\begin{aligned} E_{1,234} + E_{2,345} + E_{3,456} + E_{4,561} + E_{5,612} + E_{6,123} \\ \geq \beta_2(\Delta W_{1|56} + \Delta W_{2|16} + \Delta W_{3|12} + \Delta W_{4|23} + \Delta W_{5|34} + \Delta W_{6|45}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E_{1,23} + E_{2,34} + E_{3,45} + E_{4,56} + E_{5,61} + E_{6,12} \\ \leq \beta_2(\Delta W_{1|456} + \Delta W_{2|561} + \Delta W_{3|612} + \Delta W_{4|123} + \Delta W_{5|234} + \Delta W_{6|345}). \end{aligned}$$

Para o sentido anti-horário temos

$$\begin{aligned} E_{1,456} + E_{2,561} + E_{3,612} + E_{4,123} + E_{5,234} + E_{6,345} \\ \geq \beta_2(\Delta W_{6|21} + \Delta W_{5|61} + \Delta W_{4|65} + \Delta W_{3|54} + \Delta W_{2|43} + \Delta W_{1|32}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E_{1,56} + E_{2,61} + E_{3,12} + E_{4,23} + E_{5,34} + E_{6,45} \\ \leq \beta_2(\Delta W_{6|321} + \Delta W_{5|216} + \Delta W_{4|165} + \Delta W_{3|654} + \Delta W_{2|543} + \Delta W_{1|432}). \end{aligned}$$

Com essas equações, fornecemos também uma interpretação operacional para o emaranhamento de formação, ou seja, somas de emaranhamentos estão ligados a somas de diferenças de trabalho termodinâmico.

Capítulo 4

Considerações Finais

Nós obtemos relações que envolvem somas de emaranhamento de formação e discórdia quântica para sistemas de 4, 5 e 6 partes. Mostramos como essas quantidades são distribuídas nesses sistemas. Evidenciamos as particularidades que sistemas quânticos de 3 e 5 partes possuem em relação aos sistemas de 4 e 6 partes. No primeiro caso, mostramos que as relações apresentam igualdades, já no segundo caso temos desigualdades.

Mostramos também, que, para esses sistemas, quando escolhemos uma partícula central. O caso de 5 partes, mostra ser um caso particular do de 3 partes, pois particionamos o sistema em três partes, de forma que a primeira parte é a central, e os 4 sistemas restantes dividimos em partes iguais, dessa forma, utilizando a relação fundamental entre EF e DQ, fazemos todas as combinações simples possíveis o que resultou em uma relação onde a soma dos emaranhamentos bipartidos do sistema se conserva na mesma proporção da soma das discórdias calculadas da parte central escolhida. Isso mostra uma profunda ligação entre essas duas medidas de correlações quânticas (EF e DQ). Quando estudamos os sistemas de 4 e 6 partes, que são pares, essa conservação não é verificada quando consideramos somente um tipo de partição do sistema. Observamos que dependendo de como particionamos o sistema, aparecem relações em que a soma dos emaranhamentos é limitada inferiormente pela soma das discórdias ou a soma dos emaranhamentos são limites inferior para a soma das discórdias. No entanto, quando somamos as relações obtidas pelos dois tipos de partição, obtemos a pretendida lei de conservação entre EF e DQ.

Apresentamos relações que envolvem medidas em um ciclo de informação inacessível localmente para sistemas de 4, 5 e 6 partes. Onde, o sistema de 5 partes, apresenta relações análogas ao de 3 partes. Para sistemas de 4 e 6 partes, novamente temos relações de desigualdades. As relações obtidas para esses sistemas com número par de partes mostraram a mesma característica de depender de como realizamos a medida para aferir a discórdia, podendo obter relações onde a soma de IIL seja maior que a soma dos emaranhamentos, ou menor. O conceito de fluxo de IIL tem importante interpretação em como ocorre a distribuição das correlações quando medidas quânticas são realizadas.

Mostrando que é possível quantificar o quanto o sistema quântico é afetado por medidas locais.

Utilizando o conceito de que demônios de Maxwell quântico e clássico podem extrair trabalho de um sistema, sendo a diferença entre a eficiência de um e do outro dado pela discórdia quântica, aproveitamos para conectar essa diferença de trabalho com o emaranhamento de formação. Mostrando assim, que essas mesmas quantidades podem ser expressadas como soma de diferenças de trabalho termodinâmico.

Por fim, começamos esse trabalho acreditando que seria fácil fazer a generalização dessas relações para multi-partido. As particularidades dos sistemas com quantidade par e ímpar de subsistemas estudados, tornou essa generalização um pouco mais complexa que esperávamos. Contribuímos significativamente para a compreensão de como ocorre a distribuição de emaranhamento e de discórdia quântica em sistemas puros multi-partidos e mostramos um caminho para a generalização dessas relações.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Bell. On the Einstein-Poldolsky-Rosen paradox. *Physics (College. Park. Md)*., 1964.
- [2] C. Bennett. The thermodynamics of computation—a review. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(12):905–940, 1982.
- [3] C. Bennett, D. DiVincenzo, J. Smolin, and W. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54(5):3824–3851, Nov. 1996.
- [4] C. H. Bennett, S. Popescu, and B. Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53(4):2046–2052, Apr. 1996.
- [5] C. H. Bennett and S. J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2881–2884, Nov 1992.
- [6] J. L. Boldrini. *Álgebra Linear*. São Paulo, 3.ed. edition, 1980.
- [7] D. Bouwmeester, J.-w. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 82(7):1345–1349, Feb. 1999.
- [8] D. Bruss. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 43(9):4237–4251, 2002.
- [9] Z.-H. Chen, Z.-H. Ma, J.-L. Chen, and S. Severini. Improved lower bounds on genuine-multipartite-entanglement concurrence. *Phys. Rev. A*, 85:062320, Jun 2012.
- [10] M. F. Cornelio. *Estados emaranhados quânticos tri-partidos com um qubit*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 208.
- [11] M. F. Cornelio and M. C. de Oliveira. Strong superadditivity and monogamy of the Rényi measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 81(3):032332, Mar. 2010.
- [12] M. F. Cornelio, O. J. Fariás, F. F. Fanchini, I. Frerot, G. H. Aguilar, M. O. Hor-Meyll, M. C. de Oliveira, S. P. Walborn, a. O. Caldeira, and P. H. S. Ribeiro.

- Emergence of the Pointer Basis through the Dynamics of Correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 109(19):190402, Nov. 2012.
- [13] J. Cover, T. and Thomas. *Elements of Information Theory*. New Jersey, 2nd ed. edition, 2006.
- [14] A. Datta, A. Shaji, and C. M. Caves. Quantum Discord and the Power of One Qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 100(5):050502, Feb. 2008.
- [15] T. R. de Oliveira. *Emaranhamento e Estados de Produto de Matrizes em Transições de Fase Quânticas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2007.
- [16] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Phys. Rev. A*, 62(6):062314, Nov. 2000.
- [17] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.*, 47(10):777–780, May 1935.
- [18] A. K. Ekert. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, Aug 1991.
- [19] F. F. Fanchini, L. K. Castelano, M. F. Cornelio, and M. C. de Oliveira. Locally inaccessible information as a fundamental ingredient to quantum information. *New J. Phys.*, 14(1):013027, Jan. 2012.
- [20] F. F. Fanchini, M. F. Cornelio, M. C. de Oliveira, and A. O. Caldeira. Conservation law for distributed entanglement of formation and quantum discord. *Phys. Rev. A*, 84(1):012313, July 2011.
- [21] T. Gao and Y. Hong. Detection of genuinely entangled and nonseparable n -partite quantum states. *Phys. Rev. A*, 82:062113, Dec 2010.
- [22] D. Greenberger, K. Hentschel, and F. Weinert, editors. *Compendium of Quantum Physics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [23] D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger. Going Beyond Bell’s Theorem. (3):69–72, Dec. 2007.
- [24] S. Haseli, G. Karpat, S. Salimi, A. S. Khorashad, F. F. Fanchini, B. Çakmak, G. H. Aguilar, S. P. Walborn, and P. H. S. Ribeiro. Non-markovianity through flow of information between a system and an environment. *Phys. Rev. A*, 90:052118, Nov 2014.
- [25] L. Henderson and V. Vedral. Classical , quantum and total correlations. 34:6899–6905, 2001.

- [26] R. Jozsa and N. Linden. On the role of entanglement in quantum-computational speed-up. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2036):2011–2032, 2003.
- [27] J. S. Kim, G. Gour, and B. C. Sanders. Limitations to sharing entanglement. *Contemp. Phys.*, 53(5):417–432, Sept. 2012.
- [28] M. Koashi and A. Winter. Monogamy of quantum entanglement and other correlations. *Phys. Rev. A*, 69(2):022309, Feb. 2004.
- [29] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, 5(3):183–191, July 1961.
- [30] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, and A. G. White. Experimental quantum computing without entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 101:200501, Nov 2008.
- [31] H. Leff and A. Rex. *Maxwell’s Demon 2 Entropy, Classical and Quantum Information, Computing*. CRC Press, 2002.
- [32] Z.-H. Ma, Z.-H. Chen, J.-L. Chen, C. Spengler, A. Gabriel, and M. Huber. Measure of genuine multipartite entanglement with computable lower bounds. *Phys. Rev. A*, 83:062325, Jun 2011.
- [33] D. J. MacKay. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. New York, NY, USA, 7^a edition, 2003.
- [34] J. C. Maxwell. *Theory of heat*. Courier Corporation, 2012.
- [35] J. Maziero, L. C. Celeri, and R. M. Serra. Symmetry aspects of quantum discord. *Arxiv*, 2010.
- [36] I. Nielsen, M. and Chuang. *Computação Quântica e Informação Quântica*. New York, 2010.
- [37] H. Ollivier and W. H. Zurek. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 88(1):017901, Dec. 2001.
- [38] D. Petz. Entropy, von Neumann and the von Neumann entropy. *Arxiv*, pages 1–10, Feb. 2001.
- [39] J. H. Reina, C. E. Susa, and F. F. Fanchini. Extracting Information from Qubit-Environment Correlations. *Scientific Reports*, 4:7443, 2014.
- [40] G. G. Rigolin. *Estados Quânticos Emaranhados*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2005.

- [41] J. Sakurai, J.J. and Napolitano. *Mecânica Quântica Moderna*. Porto Alegre, 2. ed. edition, 2013.
- [42] E. Schrödinger. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(48):807–812, Nov. 1935.
- [43] C. E. Shannon. A Mathematical Theory of Communication. *Bell Syst. Tech. J.*, 27(3):379–423, July 1948.
- [44] K. Shizume. Heat generation required by information erasure. *Phys. Rev. E*, 52:3495–3499, Oct 1995.
- [45] I. Taneja. *Generalized Information Measures and Their Applications*. 2001.
- [46] B. M. Terhal. Is entanglement monogamous? *IBM J. Res. Dev.*, 48(1):71–78, Jan. 2004.
- [47] M. Tribus and E. C. McIrvine. Energy and Information. *Sci. Am.*, 225(3):179–188, Sept. 1971.
- [48] L. Vaidman. Teleportation of quantum states. *Phys. Rev. A*, 49:1473–1476, Feb 1994.
- [49] W. Zurek. Environment-induced superselection rules. *Phys. Rev. D*, 26(8):1862–1880, Oct. 1982.
- [50] W. H. Zurek. Quantum discord and Maxwell’s demons. *Phys. Rev. A*, 67(1):012320, Jan. 2003.